Chapitre 4. Optimalisation - Corrigé

Exercice 1

Notons x et z les 2 nombres. On cherche la valeur maximale de $x \cdot z$. On sait que $x+z=24$ $\Rightarrow z = 24-x$. Ainsi, on cherche le maximum de $x(24-x) = 24x - x^2 = -x^2 + 24x$. C'est une parabole avec $a=-1$, $b=24$ et $c=0$. On a $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{24}{2\cdot(-1)} = 12$ et $y_S = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4\cdot(-1)\cdot 0 - 24^2}{4\cdot(-1)} = \frac{-576}{-4} = 144$.

La valeur maximale est donc $\underline{144}$.

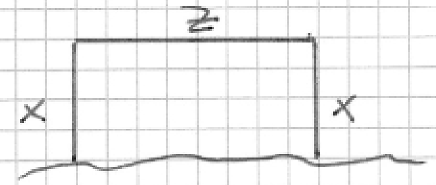
Exercice 2

Notons x et z les 2 nombres. On cherche la valeur minimale de $x \cdot z$. On sait que $z - x = 12$ $\Rightarrow z = x+12$. Ainsi, on cherche le minimum de $x(x+12) = x^2 + 12x$. C'est une parabole avec $a=1$, $b=12$ et $c=0$. On a $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2\cdot 1} = -6$ et $y_S = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4\cdot 1\cdot 0 - 12^2}{4\cdot 1} = -\frac{144}{4}$ $= -36$.

La valeur minimale est donc $\underline{-36}$.

Exercice 3

Comme il n'y a pas de clôture au bord de la rivière, on a :



On cherche la valeur maximale de la surface $= x \cdot z$.

On sait que $2x + z = 100 \Rightarrow z = 100 - 2x$.

Ainsi, on cherche le maximum de $x(100-2x) = 100x - 2x^2 = -2x^2 + 100x$.

C'est une parabole avec $a=-2$, $b=100$ et $c=0$. On a $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{100}{2\cdot(-2)} = 25$ et $y_S = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4\cdot(-2)\cdot 0 - 100^2}{4\cdot(-2)} = \frac{-10000}{-8} = 1250$.

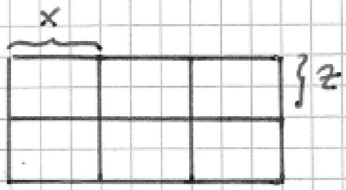
Avec $x_S = 25$, on a $z_S = 100 - 2x_S = 100 - 2\cdot 25 = 50$.

Les dimensions du rectangle sont donc $\underline{25\,m \text{ sur } 50\,m}$.

La surface maximale est de $1250\,m^2$.

Exercice 4

On a la situation suivante :



On cherche la valeur maximale de l'aire $= 3x \cdot 2z = 6xz$.

On sait que $9x + 8z = 120 \implies 8z = 120 - 9x \implies z = 15 - 1{,}125x$.

Ainsi, on cherche le maximum de $6x(15 - 1{,}125x) = 90x - 6{,}75x^2 = -6{,}75x^2 + 90x$.

C'est une parabole avec $a = -6{,}75$, $b = 90$ et $c = 0$.

On a $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{90}{2\cdot(-6{,}75)} = \frac{90}{13{,}5} = 6{,}\overline{6}\,m$, d'où $3x_S = 20$.

Avec $x_S = 6{,}\overline{6}$, on a $z_S = 15 - 1{,}125 \cdot 6{,}\overline{6} = 7{,}5$, d'où $2z_S = 15$.

Les dimensions doivent donc être <u>15m sur 20m.</u>

Exercice 5

Notons x le nombre de semaine. On peut faire le tableau suivant :

nb de hl	prix d'un hl	revenu
120	25	$120 \cdot 25$
$120 + 20$	$25 - 2{,}5$	$(120+20)\cdot(25-2{,}5)$
$120 + 20 \cdot x$	$25 - 2{,}5 \cdot x$	$(120+20x)(25-2{,}5x)$ $\rightarrow$ trouver le maximum

On a $(120 + 20x)(25 - 2{,}5x) = 3000 - 300x + 500x - 50x^2 = -50x^2 + 200x + 3000$.

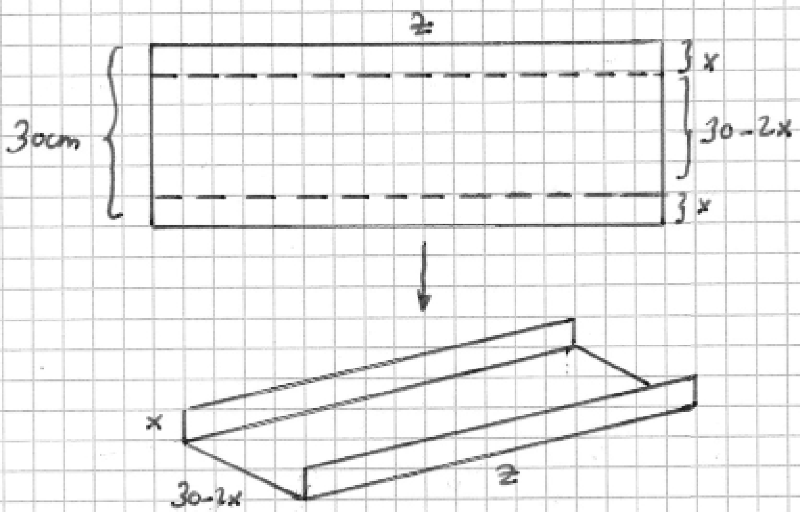
C'est une parabole avec $a = -50$, $b = 200$ et $c = 3000$.

On a $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{200}{2\cdot(-50)} = 2$.

Le revenu sera donc maximum après <u>2 semaines d'attente.</u>

Exercice 6

On a la situation suivante:



La capacité (= le volume) de la gouttière vaut $x(30-2x)\cdot z$.
Comme z, la longueur de la gouttière, est fixée $x(30-2x)\cdot z$ sera maximal si $x(30-2x)$ est maximal.

On a $x(30-2x) = 30x - 2x^2 = -2x^2 + 30x$.

C'est une parabole avec $a=-2$, $b=30$ et $c=0$.

On a $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{30}{2\cdot(-2)} = 7{,}5$. On a alors $30-2x_S = 30-2\cdot 7{,}5 = 15$.

On devra donc avoir $\underline{x = 7{,}5 \text{ et } 30-2x = 15}$ pour avoir une capacité maximale.

Exercice 7

1. Le seuil de rentabilité correspond à $R = C \Rightarrow 50x = -0{,}04x^2 + 80x + 10'000$
$\Rightarrow 0{,}04x^2 - 30x - 10'000 = 0$; c'est une équation du 2e degré avec $a = 0{,}04$, $b=-30$ et $c = -10'000$. On a $b^2-4ac = (-30)^2 - 4\cdot 0{,}04\cdot(-10'000) = 900 + 1600 = 2500 > 0$
$\Rightarrow x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{30+\sqrt{2500}}{2\cdot 0{,}04} = \frac{30+50}{0{,}08} = 1000$ et
$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{30-\sqrt{2500}}{2\cdot 0{,}04} = \frac{30-50}{0{,}08} = -250 < 0 \rightarrow$ exclu.
Le seuil de rentabilité est donc $\underline{x = 1000}$.

2. Le bénéfice est $R - C = 50x - (-0{,}04x^2 + 80x + 10'000) = 50x + 0{,}04x^2 - 80x - 10'000$
$= 0{,}04x^2 - 30x - 10'000$. C'est une parabole avec $a = 0{,}04$, $b=-30$, $c=-10'000$.
Le minimum sera en $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-30}{2\cdot 0{,}04} = 375$ et on a $y_S = \frac{4ac-b^2}{4a} =$
$= \frac{4\cdot 0{,}04\cdot(-10'000) - (-30)^2}{4\cdot 0{,}04} = -15'625$.

La plus grande perte sera de $\underline{15'625.- \text{ pour } 375 \text{ visiteurs}}$.

3. Si $x = 500$, on a $R - C = 0{,}04x^2 - 30x - 10'000 = 0{,}04\cdot 500^2 - 30\cdot 500 - 10'000 = -15'000$.
La perte sera de $\underline{15'000.-}$

Exercice 8

On a : prix d'un grille-pain $= p$;

nombre de grille-pain $= x = 10'200 - 300p$;

revenu $= x \cdot p = (10'200 - 300p)p = 10'200p - 300p^2 = -300p^2 + 10'200p$;

coûts $=$ coûts variables $+$ coûts fixes $= 8x + 14'400 = 8(10'200 - 300p) + 14'400$

$= 81'600 - 2400p + 14'400 = -2400p + 96'000$;

profit $=$ revenu $-$ coûts $= -300p^2 + 10'200p - (-2400p + 96'000) =$

$= -300p^2 + 10'200p + 2400p - 96'000 = -300p^2 + 12'600p - 96'000$.

On cherche le maximum de cette parabole. On a $a = -300$, $b = 12'600$ et $c = -96'000$.

On a $p_S = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{12'600}{2 \cdot (-300)} = \dfrac{12'600}{600} = 21$.

La compagnie doit donc fixer un prix de $\underline{21\ \$}$ pour ses grille-pain.

Exercice 9

On a : prix d'un fauteuil $= p$;

nombre de fauteuils $= x = 9000 - 20p$;

revenu $= x \cdot p = (9000 - 20p)p = 9000p - 20p^2 = -20p^2 + 9000p$;

coûts $=$ coûts variables $+$ coûts fixes $= 20x + 4000 = 20(9000 - 20p) + 4000 =$

$= 180'000 - 400p + 4000 = -400p + 184'000$;

profit $=$ revenu $-$ coûts $= -20p^2 + 9000p - (-400p + 184'000) =$

$= -20p^2 + 9000p + 400p - 184'000 = -20p^2 + 9400p - 184'000$.

1. profit $= -20p^2 + 9400p - 184'000$: $a = -20$, $b = 9400 - 184'000$

$\Rightarrow p_S = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{9400}{2 \cdot (-20)} = \underline{235\ \$}$.

5. $\Rightarrow y_S = \dfrac{4ac - b^2}{4a} = \dfrac{4 \cdot (-20) \cdot (-184'000) - 9400^2}{4 \cdot (-20)} = \underline{920'500\ \$}$.

2. revenu $= -20p^2 + 9000p$: $a = -20$, $b = 9000$, $c = 0$

$\Rightarrow p_S = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{9000}{2 \cdot (-20)} = \underline{225\ \$}$.

6. $\Rightarrow y_S = \dfrac{4ac - b^2}{4a} = \dfrac{4 \cdot (-20) \cdot 0 - 9000^2}{4 \cdot (-20)} = \underline{1'012'500\ \$}$.

3. profit $= 0 \Rightarrow -20p^2 + 9400p - 184'000 = 0 \overset{:(-20)}{\Longrightarrow} p^2 - 470p + 9200 = 0$;

$a = 1$, $b = -470$, $c = 9200$, $b^2 - 4ac = (-470)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9200 = 184'100 > 0$

$\Rightarrow p_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{470 - \sqrt{184'100}}{2} \cong \underline{20,47\ \$}$.

4. et $p_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{470 + \sqrt{184'100}}{2} \cong \underline{449,53\ \$}$.

Exercice 10

On a: prix d'un appareil $= p$;

nombre d'appareils $= x = 1200 - 8p$;

revenu $= x \cdot p = (1200-8p)p = 1200p - 8p^2 = -8p^2 + 1200p$;

coûts = coûts variables + coûts fixes $= 4x + 2400 = 4(1200-8p) + 2400 =$

$= 4800 - 32p + 2400 = -32p + 7200$;

profit = revenu − coûts $= -8p^2 + 1200p - (-32p + 7200) = -8p^2 + 1200p + 32p - 7200 =$

$= -8p^2 + 1232p - 7200.$

1. profit $= -8p^2 + 1232p - 7200$: $a = -8$, $b = 1232$, $c = -7200$

$\Rightarrow p_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{1232}{2\cdot(-8)} = \underline{77 \ \$}.$

5. $\Rightarrow y_S = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4\cdot(-8)\cdot(-7200) - 1232^2}{4\cdot(-8)} = \underline{40'232 \ \$}.$

2. revenu $= -8p^2 + 1200p$: $a = -8$, $b = 1200$, $c = 0$

$\Rightarrow p_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{1200}{2\cdot(-8)} = \underline{75 \ \$}.$

6. $\Rightarrow y_S = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4\cdot(-8)\cdot 0 - 1200^2}{4\cdot(-8)} = \underline{45'000 \ \$}.$

3. profit $= 0 \Rightarrow -8p^2 + 1232p - 7200 = 0 \overset{:(-8)}{\Longrightarrow} p^2 - 154p + 900 = 0$;

$a = 1$, $b = -154$, $c = 900$, $b^2 - 4ac = (-154)^2 - 4\cdot 1\cdot 900 = 20'116 > 0$

$\Rightarrow p_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{154 - \sqrt{20'116}}{2} \cong \underline{6{,}08 \ \$}.$

4 $\Rightarrow p_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{154 + \sqrt{20'116}}{2} \cong \underline{147{,}92 \ \$}.$

Exercice 11.

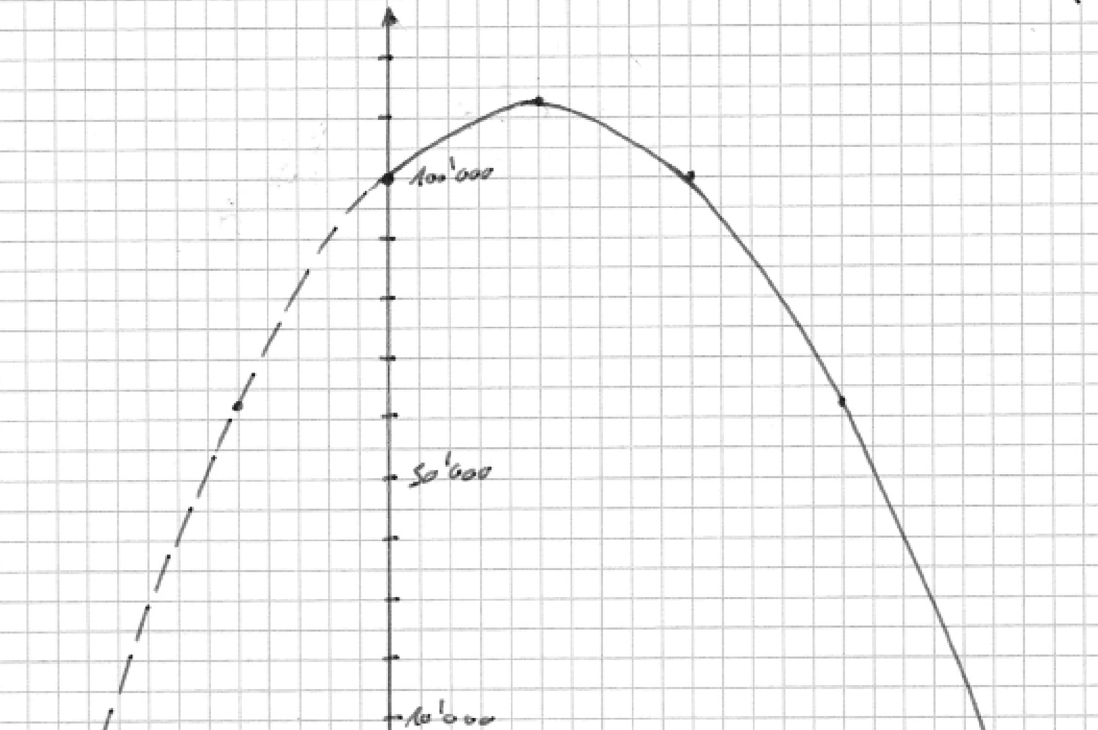
On peut faire le tableau suivant:

nb de ménages	prix par ménage	revenu mensuel
5000	20	$5000 \cdot 20$
5000 + 500	20 − 1	$(5000+500)(20-1)$
5000 + 500 x	20 − x	$(5000+500x)(20-x)$

1. On a ainsi $R(x) = (5000+500x)(20-x) = 100'000 - 5000x + 10'000x - 500x^2 =$
$= \underline{-500x^2 + 5000x + 100'000}$.

2. On a $a = -500$, $b = 5000$ et $c = 100'000$
$\Rightarrow x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{5000}{2\cdot(-500)} = 5$ et $y_S = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4\cdot(-500)\cdot 100'000 - 5000^2}{4\cdot(-500)} = 112'500$.

Les solutions de $R(x)=0$ sont $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} =$
$= \frac{-5000 \pm \sqrt{5000^2 - 4\cdot(-500)\cdot 100'000}}{2\cdot(-500)} = \frac{-5000 \pm 15000}{-1000} = \begin{cases} 20 \\ -10 < 0 \text{ exclu.} \end{cases}$



Le prix mensuel qui donne le revenu mensuel maximal est $20 - x_S = 20 - 5 = \underline{15.-}$.

Exercice 12

Notons x le nombre de passagers supplémentaire.

On peut faire le tableau suivant :

nb de passager	prix d'un billet	revenu	coûts
100	12	$100\cdot 12$	200
$100+x$	$12-0{,}05x$	$(100+x)(12-0{,}05x)$	$200+3x$

On a : profit = revenu − coûts = $(100+x)(12-0{,}05x)-(200+3x)=$

$$= 1200-5x+12x-0{,}05x^2-200-3x=$$

$$= -0{,}05x^2+4x+1000.$$

On a $a=-0{,}05$, $b=4$ et $c=1000$. Ainsi $x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2\cdot(-0{,}05)}=40.$

Le nombre de passagers au total doit donc être $100+x_S=100+40=\underline{140}.$

Exercice 13

Notons x le nombre de diminution de $5ct = 0{,}05$ frs.

On peut faire le tableau suivant :

prix d'une partie	nb de parties	revenu
2	3000	$2\cdot 3000$
$2-0{,}05x$	$3000+100x$	$(2-0{,}05x)(3000+100x)$

On a $(2-0{,}05x)(3000+100x)=6000+200x-150x-5x^2=-5x^2+50x+6000.$

On a $a=-5$, $b=50$, $c=6000$.

Ainsi $x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{50}{2\cdot(-5)}=5$ et $y_S=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\cdot(-5)\cdot 6000-50^2}{4\cdot(-5)}=6125.$

1. Le prix à fixer sera de $2-0{,}05x_S=2-0{,}05\cdot 5=2-0{,}25=\underline{1{,}75 \text{ frs}}.$
2. Le revenu maximal sera $y_S=\underline{6125.-}$

Exercice 14

D'après l'exercice 13, le revenu est $-5x^2+50x+6000$, où x est le nombre de diminution de 5 ct $= 0{,}05$ frs, ce qui correspond au nombre de fois 100 paires en plus.
Les coûts sont alors $2000+20x$.
Le profit est : revenu − coûts $= -5x^2+50x+6000-(2000+20x) =$
$$= -5x^2+50x+6000-2000-20x = -5x^2+30x+4000.$$
On a $a=-5$, $b=30$ et $c=4000$.
Ainsi $x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{30}{2\cdot(-5)} = 3$ et $y_s = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4\cdot(-5)\cdot 4000-30^2}{4\cdot(-5)} = 4045.$

1. Le prix à fixer sera de $2-0{,}05\,x_s = 2-0{,}05\cdot 3 = 2-0{,}15 = \underline{1{,}85 \text{ frs}}$.

2. Le profit maximal sera $y_s = \underline{4045.-}$