

Chapitre 7. Théorie des ensembles - Corrigé

Exercice 1

1. Diagramme d'Euler-Venn:

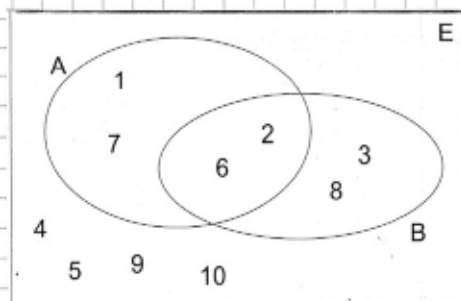
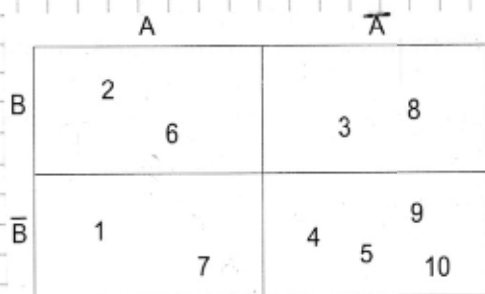


Diagramme de Carroll:



2. $A \cap B =$ ce qui est commun à A et B = $\{2; 6\}$,
 $\bar{A} =$ ce qui n'est pas dans A = $\{3; 4; 5; 8; 9; 10\}$,
 $A \cup B =$ dans A ou dans B ou dans les 2 = $\{1; 2; 3; 6; 7; 8\}$,
 $A \Delta B =$ dans A ou dans B mais pas dans les 2 simultanément = $\{1; 3; 7; 8\}$.
3. $\{1; 7\} =$ dans A, mais pas dans B = dans A et dans $\bar{B} = A \cap \bar{B}$.

Exercice 2

1. Diagramme d'Euler-Venn:

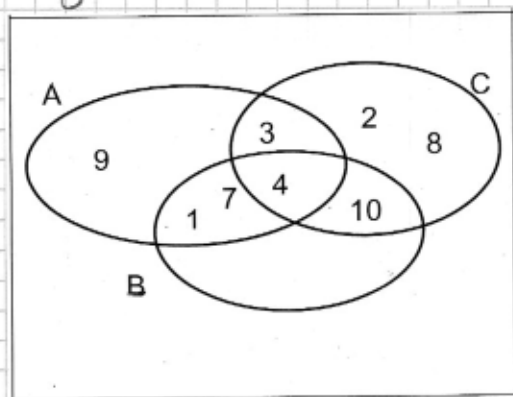
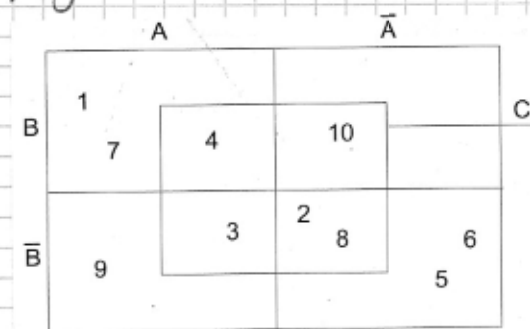
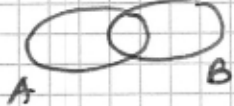


Diagramme de Carroll:

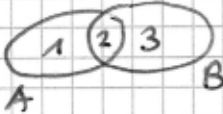


2. $\{1; 7\} =$ dans A, dans B, mais pas dans C = dans A et B et $\bar{C} = A \cap B \cap \bar{C}$,
 $\{2; 8; 10\} =$ dans C, mais pas dans A = dans C et $\bar{A} = \bar{A} \cap C$,
 $\{2; 3; 8; 9\} =$ dans A ou dans C ou les 2, mais pas dans B =
 $=$ (dans A ou dans C ou les 2) et dans $\bar{B} = (A \cup C) \cap \bar{B}$.

Exercice 3

1. L'ensemble de départ : $A \cup \phi = A$.
2. L'ensemble vide : $A \cap \phi = \phi$.
3. L'ensemble vide : complémentaire de A dans A = ce qui n'est pas dans A, mais dans A = ϕ .
4. Non :  $\overline{A} \text{ dans } A \cup B \neq \overline{B}$.

Exercice 4.

De manière générale non :  : nb d'éléments de A = 2
 nb d'éléments de B = 2
 nb d'éléments de $A \cup B = 3 \neq 2+2$.

Pour que cela marche, il faut qu'il n'y ait rien de commun entre A et B, autrement dit que $A \cap B = \phi$.

Exercice 5

L'ensemble produit $A \times B$ est formé des couples $(x; y)$ avec x dans A et y dans B.
 On a donc $A \times B = \{ (a; 1); (a; 2); (a; 3); (a; 4); (b; 1); (b; 2); (b; 3); (b; 4); (c; 1); (c; 2); (c; 3); (c; 4) \}$.

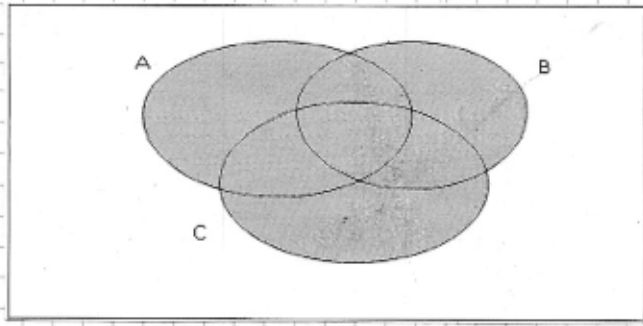
Exercice 6

Un couple est d'une dame et d'un homme. Dans un couple, on a 4 possibilités pour la dame et 5 pour l'homme. Il y a donc $4 \cdot 5 = 20$ couples possibles.

Exercice 7

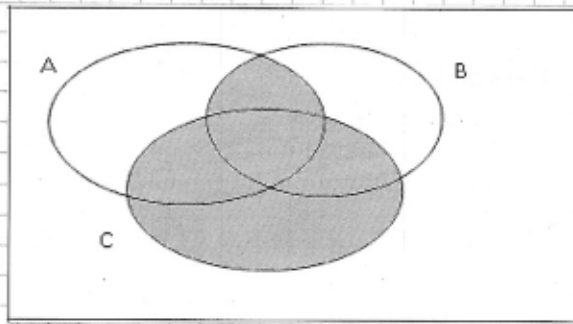
(3)

1.



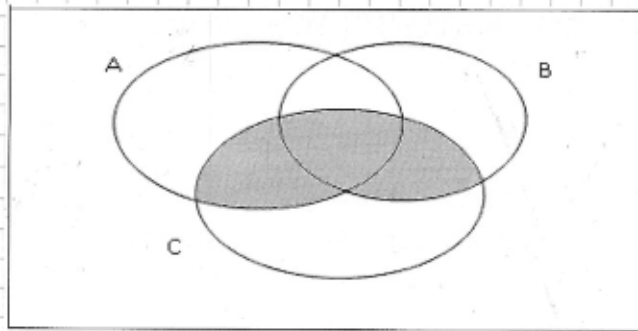
$$(A \cup B) \cup C = (\text{dans } A \text{ ou dans } B) \text{ ou dans } C \Rightarrow \text{dans } A \text{ ou } B \text{ ou } C.$$

2.



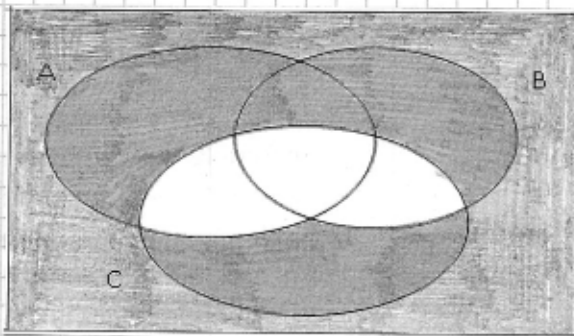
$$(A \cap B) \cup C = (\text{dans } A \text{ et } B) \text{ ou dans } C.$$

3.



$$(A \cup B) \cap C = (\text{dans } A \text{ ou dans } B) \text{ et dans } C.$$

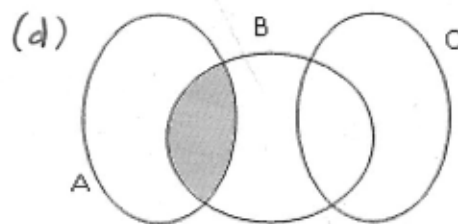
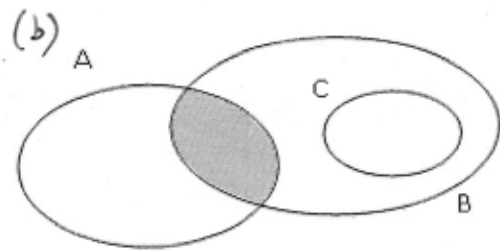
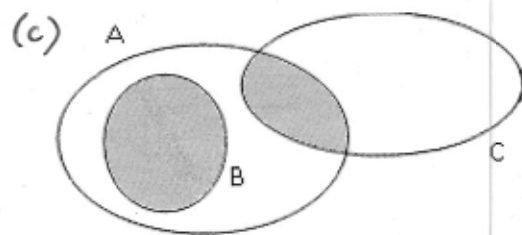
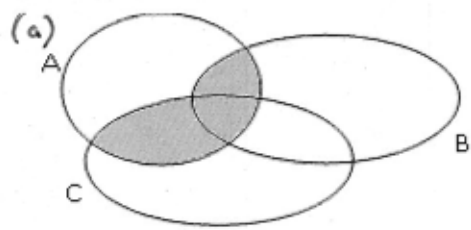
4.



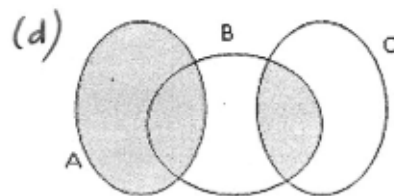
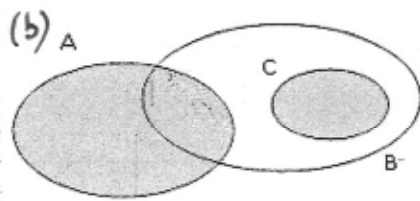
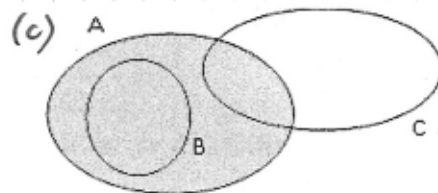
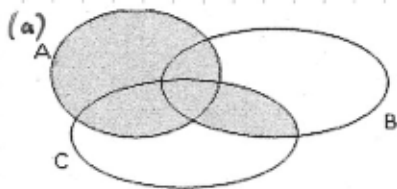
$$(\overline{A \cap B}) \cup \overline{C} = (\text{à l'extérieur de } A \text{ et à l'extérieur de } B) \text{ ou à l'extérieur de } C.$$

Exercice 8

$A \cap (B \cup C)$:

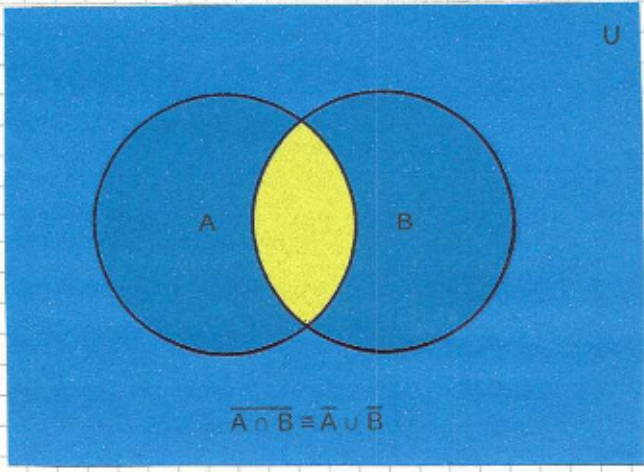


$A \cup (B \cap C)$:



Exercice 9

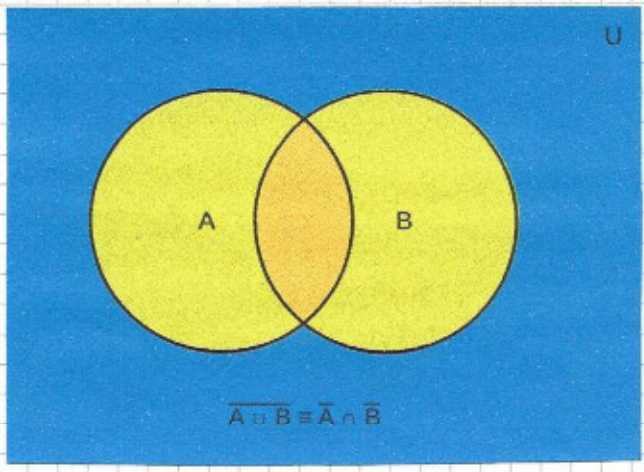
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$:



$A \cap B$ = en jaune
 $\overline{A \cap B}$ = en bleu

\overline{A} = extérieur à A
 \overline{B} = extérieur à B
 $\overline{A} \cup \overline{B}$ = en bleu

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$:



$A \cup B$ = en jaune
 $\overline{A \cup B}$ = en bleu

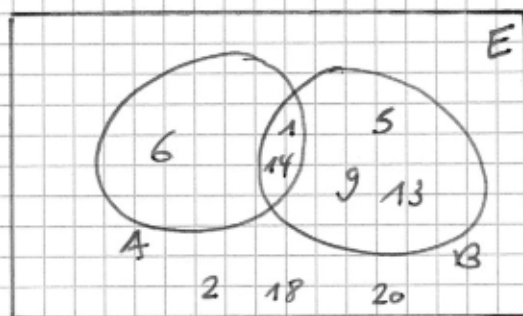
\overline{A} = extérieur à A
 \overline{B} = extérieur à B
 $\overline{A} \cap \overline{B}$ = en bleu

Exercice 10

On commence par regarder ce qui est dans \bar{A} , dans \bar{B} , mais pas dans $A \cup B$: 2; 18; 20.
Cela nous donne l'extérieur de $A \cup B$.

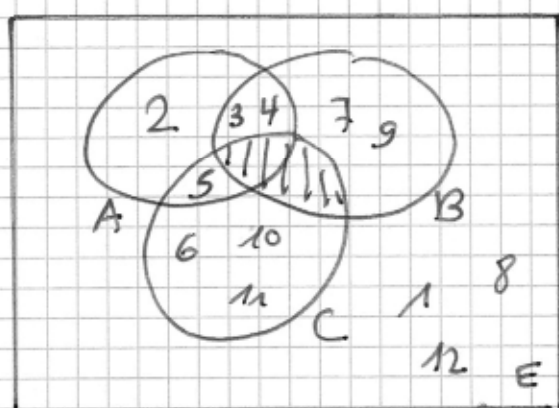
On regarde ensuite ce qui est dans $A \cup B$, mais pas dans \bar{A} , ni dans \bar{B} : 1; 14.
Cela nous donne l'intérieur de $A \cap B$.

On peut alors compléter facilement le diagramme de Venn-Euler de la partition:



Ainsi: $E = \{1; 2; 5; 6; 13; 14; 18; 20\}$, $A = \{1; 6; 14\}$ et $B = \{1; 5; 9; 13; 14\}$.

Exercice 11



On commence par $\overline{A \cup B \cup C} = \{1; 8; 12\}$.

Puis $B \cap C = \emptyset$ (hachuré).

Puis $A \cap C = \{5\}$.

Puis $(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap \bar{B} = \{2\}$.

Puis $(A \cup B) \cap \overline{(A \cup C)} = \{2; 3; 4; 5\}$.

Puis $A \cup C = \{2; 3; 4; 5; 6; 10; 11\}$.

Puis $A \cup B = \{2; 3; 4; 5; 7; 9\}$.

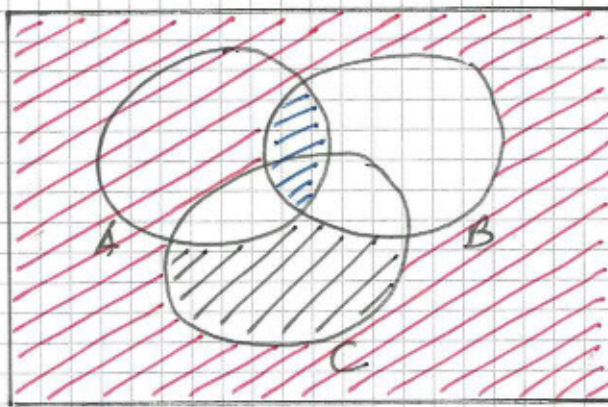
Ainsi $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$, $A = \{2; 3; 4; 5\}$, $B = \{3; 4; 7; 9\}$
et $C = \{5; 6; 10; 11\}$.

Exercice 12

On a: A = ensemble des hommes,
 B = ensemble des personnes mariées,
 C = ensemble des personnes qui jouent d'un instrument à cordes.

Ainsi \bar{A} = ensemble des femmes,
 \bar{B} = ensemble des personnes non mariées,
 \bar{C} = ensemble des personnes ne jouant pas d'un instrument à cordes,
 $A \cap B$ = ensemble des hommes mariés,
 $A \cap \bar{C}$ = ensemble des hommes ne jouant pas d'un instrument à cordes,
 $A \cap \bar{B} \cap C$ = ensemble des hommes non mariés jouant d'un instrument à cordes.

On a:

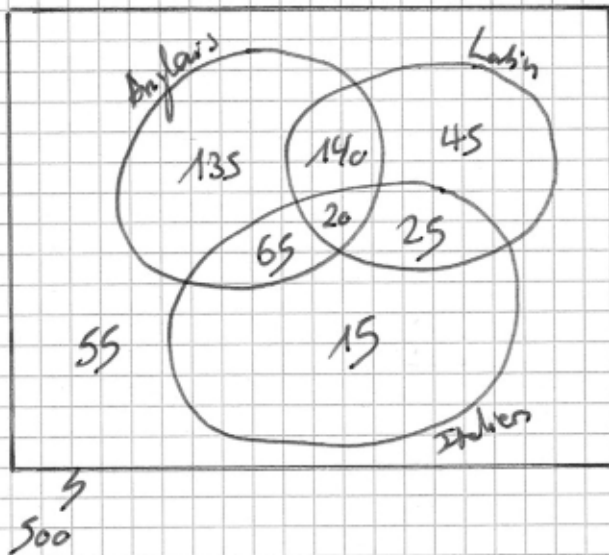


1. $\bar{A} \cap \bar{B} \cap C$ (en noir)
2. $A \cap B$ (en bleu)
3. $\bar{B} \cap \bar{C}$ (en rouge)

4. Daniel Dupont (A), 15 ans et demi (\bar{B}), jouant du violoncelle (C): $A \cap \bar{B} \cap C$.
5. Emile Dyer (\bar{A}), flûtiste (\bar{C}), femme du chef d'orchestre (B): $\bar{A} \cap B \cap \bar{C}$.
6. Fabien Fures (A), trompettiste (\bar{C}) et mari de la pianiste (B): $A \cap B \cap \bar{C}$.
7. Le chef d'orchestre: homme (A); 50 ans, marié (B); chef d'orchestre (\bar{C}):
 $A \cap B \cap \bar{C}$.
8. La pianiste: femme (\bar{A}); 60 ans, marié (B); pianiste (C): $\bar{A} \cap B \cap C$.

Exercice 13

1.



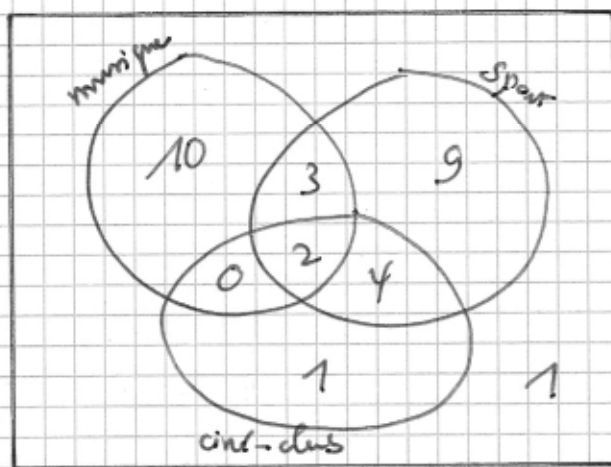
On remplit le diagramme dans cet ordre :

- 3 langues : 20,
- au moins anglais et latin : $160 = 140 + 20$,
- au moins anglais + italien : $85 = 65 + 20$,
- au moins latin + italien : $45 = 25 + 20$,
- au moins anglais : $360 = 140 + 20 + 65 + 135$,
- au moins latin : $230 = 140 + 20 + 25 + 45$,
- au moins italien : $125 = 65 + 20 + 25 + 15$.
- aucune langue : $500 - (135 + 140 + 45 + 65 + 20 + 25 + 15) = 55$

- 2. anglais seul = 135, latin seul = 45, italien seul = 15
 \Rightarrow au total = 195.
- 3. 55.

Exercice 14

On a :



On remplit le diagramme dans cet ordre :

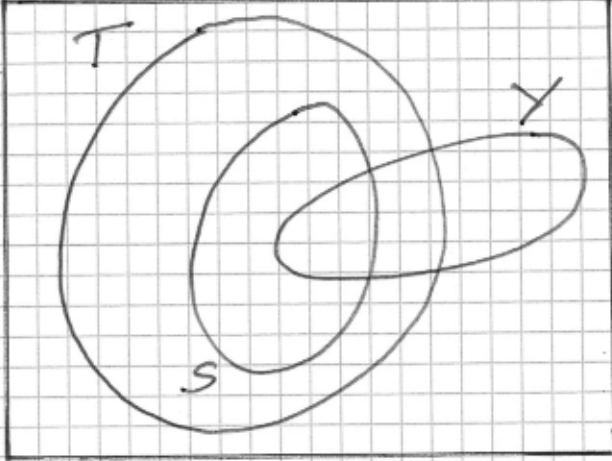
- (1); (5); (3) : $6 = 2 + 4$;
- (4) : $18 = 9 + 2 + 4$; (6) : $7 = 3 + 4 + 0$;
- (8) : $19 = 9 + 10$; (2) : $20 = 10 + 3 + 2 + 4 + 1$;
- (7) : $12 = 10 + 1 + 1$.

- Ainsi :
- 1. Nb d'êtres = $10 + 2 + 9 + 2 + 4 + 1 + 1 = 30$.
 - 2. Nb de musiciens = $10 + 3 + 2 = 15$.
 - 3. Nb de sportifs = $9 + 3 + 2 + 4 = 18$ (OK avec (4)).
 - 4. Nb de cinéphiles = $2 + 4 + 1 = 7$.

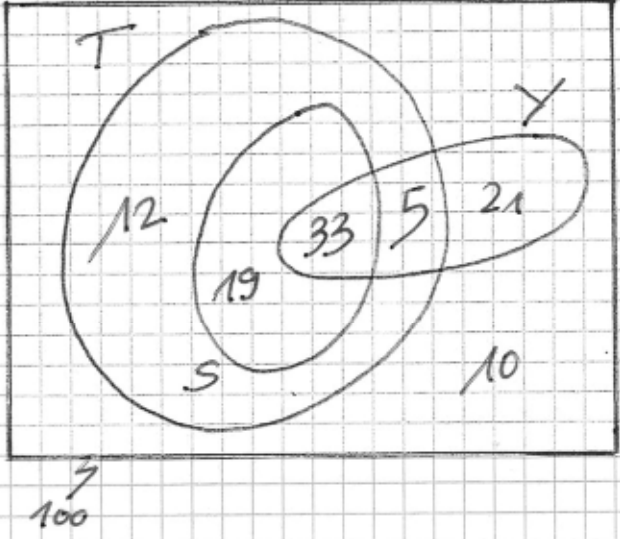
Exercice 15

- 1. Observation (1) : l'ensemble S est inclus dans T
- (2) : l'ensemble Y doit avoir une intersection avec S et une avec T.

On obtient le diagramme suivant :



2.



On complète le diagramme dans l'exemple suivant :

- 1. $T \cap Y \cap S = 33$
- 2. $Y \cap T = 38 = 33 + 5$
- 3. $S \cap \bar{Y} = 19$
- 4. $\bar{S} \cap T = 17 = 5 + 12$
- 5. $\bar{S} \cap Y = 26 = 5 + 21$
- $\overline{T \cup Y \cup S} = 100 - (12 + 19 + 33 + 5 + 21) = 10$