

# **Cours de physique générale**

Gianni Di Domenico

19 décembre 2011



## Table des matières

<b>1. Introduction</b>	<b>9</b>
1.1. La méthode scientifique . . . . .	9
1.2. Validité d'une théorie . . . . .	9
1.3. Etendue des connaissances . . . . .	9
1.4. Grandeurs physiques et unités . . . . .	9
1.5. Conversion d'unités . . . . .	9
1.6. Incertitudes . . . . .	10
1.7. Analyse dimensionnelle . . . . .	10
<b>2. Cinématique</b>	<b>11</b>
2.1. Description de l'espace et du temps . . . . .	11
2.2. Rappel de géométrie vectorielle . . . . .	11
2.3. Horaire . . . . .	12
2.4. Rappel de calcul différentiel . . . . .	12
2.5. Vitesse . . . . .	12
2.6. Accélération . . . . .	12
<b>3. Mouvements particuliers et chute libre</b>	<b>15</b>
3.1. Mouvement rectiligne . . . . .	15
3.2. Mouvement uniformément accéléré . . . . .	15
3.3. Chute libre . . . . .	15
3.4. Mouvement circulaire uniforme . . . . .	16
<b>4. Les lois de Newton</b>	<b>17</b>
4.1. Inertie . . . . .	17
4.2. Référentiels galiléens . . . . .	17
4.3. Action et réaction . . . . .	18
4.4. Loi fondamentale de la dynamique . . . . .	18
4.5. Méthodologie . . . . .	19
4.6. Applications et compléments . . . . .	19
4.6.1. Poids et chute libre . . . . .	19
4.6.2. Masse inerte et masse pesante . . . . .	19
4.6.3. Cordes et poulies . . . . .	19
4.6.4. Force et accélération centripète . . . . .	20
4.6.5. Ressort et dynamomètre . . . . .	20
<b>5. Contact et frottement</b>	<b>21</b>
5.1. Contact sans frottement . . . . .	21
5.2. Contact avec frottement . . . . .	21
5.3. Frottement statique . . . . .	21
5.4. Frottement cinétique . . . . .	21
5.5. Coefficient de frottement . . . . .	21
5.6. Roulement . . . . .	22
5.7. Exemples . . . . .	22
<b>6. Force de gravitation</b>	<b>23</b>
6.1. Loi de gravitation universelle . . . . .	23
6.2. Gravité terrestre . . . . .	23
6.3. Poids effectif . . . . .	24
6.4. Mouvement des planètes . . . . .	24
6.5. Satellite en orbite circulaire . . . . .	25
<b>7. Statique du solide</b>	<b>27</b>
7.1. Introduction . . . . .	27
7.2. Moment d'une force . . . . .	27

7.3. Conditions d'équilibre . . . . .	28
7.4. Applications . . . . .	28
7.5. Centre de gravité . . . . .	29
7.6. Stabilité de l'équilibre . . . . .	30
7.7. Quelques exemples . . . . .	30
<b>8. Travail, puissance et énergie</b>	<b>31</b>
8.1. Travail d'une force . . . . .	31
8.2. Puissance . . . . .	31
8.3. Energie cinétique . . . . .	31
8.4. Energie potentielle . . . . .	32
8.5. Conservation de l'énergie . . . . .	32
8.6. Forces conservatives . . . . .	33
8.7. Forces non conservatives . . . . .	34
8.8. Exemples et démonstrations . . . . .	34
<b>9. Quantité de mouvement et collisions</b>	<b>35</b>
9.1. Quantité de mouvement . . . . .	35
9.2. Théorème du centre de masse . . . . .	35
9.3. Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	35
9.4. Collisions . . . . .	36
9.4.1. Collisions inélastiques . . . . .	36
9.4.2. Collisions élastiques . . . . .	36
<b>10. Mouvement de rotation</b>	<b>39</b>
10.1. Mouvement circulaire général d'un point matériel . . . . .	39
10.2. Théorème du moment cinétique . . . . .	40
10.3. Conservation du moment cinétique . . . . .	40
10.4. Moment d'inertie et moment cinétique . . . . .	41
10.4.1. Cas général . . . . .	41
10.4.2. Solide rigide en rotation autour d'un axe fixe . . . . .	41
10.4.3. Solide rigide en rotation autour d'un axe de symétrie . . . . .	41
10.4.4. Calcul du moment d'inertie . . . . .	42
10.5. Energie cinétique de rotation . . . . .	42
10.6. Correspondance entre les mouvements de translation et de rotation . . . . .	43
<b>11. Mouvement harmonique et résonance</b>	<b>45</b>
11.1. Oscillateur harmonique simple . . . . .	45
11.2. Oscillateur harmonique amorti . . . . .	45
11.2.1. Amortissement sous-critique . . . . .	45
11.2.2. Amortissement critique . . . . .	46
11.2.3. Amortissement sur-critique . . . . .	46
11.3. Oscillateur harmonique forcé . . . . .	46
11.4. Résonance . . . . .	47
11.5. Autres systèmes oscillants . . . . .	47
<b>12. Propriétés élastiques des matériaux</b>	<b>49</b>
12.1. Contrainte . . . . .	49
12.2. Déformation . . . . .	49
12.3. Loi de Hooke . . . . .	49
12.4. Déformation inélastique . . . . .	49
12.5. Mesure du module d'Young . . . . .	50
<b>13. Statique des fluides</b>	<b>51</b>
13.1. Pression et principe de Pascal . . . . .	51
13.2. Influence de la pesanteur . . . . .	51
13.3. Pression atmosphérique . . . . .	52
13.4. Poussée d'Archimède . . . . .	53
<b>14. Dynamique des fluides parfaits</b>	<b>55</b>
14.1. Régimes d'écoulement . . . . .	55
14.2. Equation de continuité . . . . .	55

---

14.3. Equation de Bernoulli . . . . .	55
14.4. Théorème de Torricelli . . . . .	56
14.5. Effet Venturi . . . . .	56
14.6. Portance . . . . .	57
14.7. Sonde de Pitot . . . . .	58
<b>15. Mécanique des fluides visqueux</b>	<b>59</b>
15.1. Viscosité . . . . .	59
15.2. Loi de Poiseuille . . . . .	59
15.3. Nombre de Reynolds . . . . .	60
15.4. Frottements dans un fluide . . . . .	60
<b>A. Définition des unités de base du Système international d'unités (SI)</b>	<b>63</b>
<b>B. Références</b>	<b>65</b>



## Préface

Ce document réunit mes notes personnelles, qui accompagnent le cours de physique générale, et qui ont été rédigées durant le semestre d'automne 2011-2012. Leur objectif n'est pas de remplacer un livre mais plutôt de résumer de façon succincte l'ensemble des connaissances vues au cours. Elles ne contiennent pas les explications des lois qui sont données en classe, ni les exemples d'application des lois à des situations concrètes. L'idée est uniquement de définir le territoire, mais pas de remplacer le voyage que chaque étudiant devra effectuer en participant au cours ainsi qu'aux exercices de physique générale.



## 1. Introduction

### 1.1. La méthode scientifique

C'est en partant d'un ensemble d'observations expérimentales que les physiciens développent des théories plus générales (induction). Ils utilisent le langage des mathématiques pour décrire l'évolution de systèmes réels à l'aide de lois physiques (théories). Ces lois leur permettent de faire des prédictions quantitatives quand à l'évolution du système (déductions). La confrontation de ces prédictions avec l'expérience permet de vérifier la validité de la théorie.

### 1.2. Validité d'une théorie

En physique, seules les théories que l'on peut confronter à l'expérience sont admises, elles doivent permettre de faire des prédictions qui sont mesurables et reproductibles par l'expérience. Cette démarche permet de confirmer ou d'infirmer les hypothèses d'une théorie donnée. Autrement dit, c'est l'observation et l'expérimentation qui sont les seules juges de la validité d'une théorie physique. Notons toutefois que la réalité est souvent trop complexe pour permettre une application directe des lois physiques. Dans ce cas, il est nécessaire d'idéaliser la situation expérimentale avant de pouvoir appliquer les lois physiques. De plus, l'histoire montre que chaque théorie, qui fut acceptée à une époque, finit par révéler ses limites. Elle est alors remplacée par une théorie plus générale qui la contient comme cas particulier. Par exemple, la mécanique classique doit être remplacée par la mécanique relativiste lorsque les vitesses mises en jeu s'approchent de la vitesse de la lumière. De même, elle doit être remplacée par la mécanique quantique dans le monde microscopique.

### 1.3. Etendue des connaissances

Il est important de souligner qu'aujourd'hui, on ne connaît pas encore toutes les lois de la Nature. On ne sait même pas s'il existe un ensemble fini de lois qui permettent de décrire l'ensemble des phénomènes naturels.

### 1.4. Grandeurs physiques et unités

Toute grandeur physique s'exprime comme un nombre fois une certaine unité physique :

$$\text{grandeur physique} = \text{nombre} \times \text{unité}$$

Aujourd'hui, on utilise le Système international d'unités (SI) défini par le Bureau international des

Grandeur de base	Symbole	Unité de base	Symbole
longueur	$l, h, r, x$	mètre	m
masse	$m$	kilogramme	kg
temps, durée	$t$	seconde	s
courant électrique	$I, i$	ampère	A
température thermodynamique	$T$	kelvin	K
quantité de matière	$n$	mole	mol
intensité lumineuse	$I_v$	candela	cd

Figure 1.1.: Grandeurs et unités de base du SI. Source : <http://www.bipm.org/fr/si/si-brochure>.

Facteur	Nom	Symbole	Facteur	Nom	Symbole
$10^1$	déca	da	$10^{-1}$	déci	d
$10^2$	hecto	h	$10^{-2}$	centi	c
$10^3$	kilo	k	$10^{-3}$	milli	m
$10^6$	méga	M	$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^9$	giga	G	$10^{-9}$	nano	n
$10^{12}$	téra	T	$10^{-12}$	pico	p
$10^{15}$	péta	P	$10^{-15}$	femto	f
$10^{18}$	exa	E	$10^{-18}$	atto	a
$10^{21}$	zetta	Z	$10^{-21}$	zepto	z
$10^{24}$	yotta	Y	$10^{-24}$	yocto	y

Figure 1.2.: Préfixes SI (puissances de dix). Source : <http://www.bipm.org/fr/si/si-brochure>.

poids et mesures<sup>1</sup> (BIPM). Les sept grandeurs physiques et unités de base du SI sont résumées dans le tableau de la Fig. 1.1 et leurs définitions sont données dans l'annexe A. Toutes les autres grandeurs sont des grandeurs dérivées et sont exprimées au moyen des unités de base. Des exemples de grandeurs et d'unités dérivées sont présentées dans les tableaux des figures 1.4 et 1.5. Des préfixes sont utilisés avec les unités SI pour exprimer les valeurs beaucoup plus grandes ou beaucoup plus petites que l'unité. Ces préfixes sont résumés dans le tableau de la figure 1.2.

### 1.5. Conversion d'unités

Pour changer d'unité, il faut multiplier la grandeur physique considérée par un rapport des deux unités qui vaut 1. Par exemple, pour convertir une distance de mètres en kilomètres, on sait que  $1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$  donc on multiplie par  $\frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}}$  :

$$d = 250 \text{ m} = 250 \text{ m} \times \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} = 0.25 \text{ km}$$

1. <http://www.bipm.org>



**Figure 1.3.:** André-Marie Ampère (1775 - 1836) était un physicien et mathématicien français né à Lyon. Son père décida de l'instruire de sorte qu'il n'alla jamais à l'école. Il fit de nombreuses contributions à l'électromagnétisme. En particulier, il étudia le lien entre les courants électriques et le magnétisme. L'histoire a retenu son nom pour l'unité de courant électrique.

## 1.6. Incertitudes

Toute mesure est entachée d'erreur, donc la donnée d'une valeur expérimentale doit toujours être accompagnée de son incertitude :

grandeur mesurée = (valeur  $\pm$  incertitude)  $\times$  unité

L'incertitude peut être d'origine statistique ou systématique.

### Exemple : mesure de la période d'un pendule

Les prédictions théoriques sont aussi entachées d'erreur. Tout d'abord parce qu'elles font intervenir des constantes mesurées, mais aussi parce qu'elles décrivent souvent une situation idéalisée (absence de frottement, etc). On ne retiendra donc, à la fin d'un calcul, que les chiffres significatifs.

## 1.7. Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle repose sur le fait qu'on ne peut évaluer et comparer que des grandeurs physiques ayant la même unité. Par exemple, on peut exprimer la période d'un pendule en fonction de sa longueur  $L$ , de sa masse  $M$  et de l'accélération de la pesanteur  $g$  :

$$T = \text{const} \times L^a M^b g^c$$

puis, en imposant que les deux membres aient la même unité, on obtient :

$$T = \text{const} \times \sqrt{L/g}$$

### Démonstration de cours

Mesure des périodes de deux pendules de longueurs différentes. Comparaison avec la loi déduite de l'analyse dimensionnelle.

Grandeur dérivée	Symbole	Unité dérivée	Symbole
superficie	$A$	mètre carré	$\text{m}^2$
volume	$V$	mètre cube	$\text{m}^3$
vitesse	$v$	mètre par seconde	$\text{m/s}$
accélération	$a$	mètre par seconde carrée	$\text{m/s}^2$
nombre d'ondes	$\sigma, \bar{\nu}$	mètre à la puissance moins un	$\text{m}^{-1}$
masse volumique	$\rho$	kilogramme par mètre cube	$\text{kg/m}^3$
masse surfacique	$\rho_A$	kilogramme par mètre carré	$\text{kg/m}^2$
volume massique	$v$	mètre cube par kilogramme	$\text{m}^3/\text{kg}$
densité de courant	$j$	ampère par mètre carré	$\text{A/m}^2$
champ magnétique	$H$	ampère par mètre	$\text{A/m}$
concentration	$c$	mole par mètre cube	$\text{mol/m}^3$
concentration massique	$\rho, \gamma$	kilogramme par mètre cube	$\text{kg/m}^3$
luminance lumineuse	$L_v$	candela par mètre carré	$\text{cd/m}^2$

**Figure 1.4.:** Grandeurs et unités dérivées. Source : [http://www.bipm.org/fr/si/si\\_brochure](http://www.bipm.org/fr/si/si_brochure).

Grandeur dérivée	Nom de l'unité dérivée	Symbole de l'unité	Expression utilisant d'autres unités
angle plan	radian	rad	$\text{m/m} = 1$
angle solide	stéradian	sr	$\text{m}^2/\text{m}^2 = 1$
fréquence	hertz	Hz	$\text{s}^{-1}$
force	newton	N	$\text{m kg s}^{-2}$
pression, contrainte	pascal	Pa	$\text{N/m}^2 = \text{m}^{-1} \text{kg s}^{-2}$
énergie, travail, quantité de chaleur	joule	J	$\text{N m} = \text{m}^2 \text{kg s}^{-2}$
puissance, flux énergétique	watt	W	$\text{J/s} = \text{m}^2 \text{kg s}^{-3}$
charge électrique, quantité d'électricité	coulomb	C	$\text{s A}$
différence de potentiel électrique	volt	V	$\text{W/A} = \text{m}^2 \text{kg s}^{-3} \text{A}^{-1}$
capacité électrique	farad	F	$\text{C/V} = \text{m}^{-2} \text{kg}^{-1} \text{s}^4 \text{A}^2$
résistance électrique	ohm	$\Omega$	$\text{V/A} = \text{m}^2 \text{kg s}^{-3} \text{A}^{-2}$
conductance électrique	siemens	S	$\text{A/V} = \text{m}^{-2} \text{kg}^{-1} \text{s}^3 \text{A}^2$
flux d'induction magnétique	weber	Wb	$\text{V s} = \text{m}^2 \text{kg s}^{-2} \text{A}^{-1}$
induction magnétique	tesla	T	$\text{Wb/m}^2 = \text{kg s}^{-2} \text{A}^{-1}$
inductance	henry	H	$\text{Wb/A} = \text{m}^2 \text{kg s}^{-2} \text{A}^{-2}$
température Celsius	degré Celsius	$^\circ\text{C}$	K

**Figure 1.5.:** Grandeurs et unités dérivées ayant des noms spéciaux. Source : [http://www.bipm.org/fr/si/si\\_brochure](http://www.bipm.org/fr/si/si_brochure).

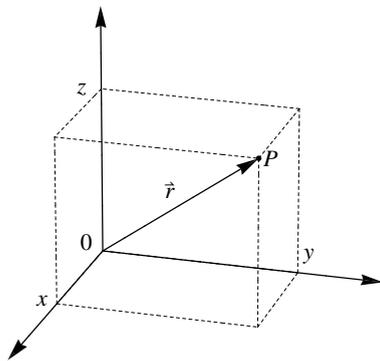
## 2. Cinématique

L'objet de la cinématique est l'étude du mouvement des corps, sans se préoccuper des causes du mouvement.

### 2.1. Description de l'espace et du temps

En physique classique, on repère la position d'un point  $P$  dans l'espace par rapport à une origine fixe  $O$  à l'aide d'un **vecteur position**  $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$  ayant trois composantes :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$



L'unité des coordonnées  $x, y, z$  est le **mètre** (m).  
L'instant auquel un évènement s'est produit dans le temps est repéré par un nombre qu'on appelle la **date**, l'**époque**, ou le **temps** :

$$t \in \mathbb{R}$$

L'unité du temps est la **seconde** (s).

### 2.2. Rappel de géométrie vectorielle

Soient deux vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

alors on définit les opérations suivantes :

#### Somme de deux vecteurs

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$



**Figure 2.1.:** René Descartes (1596 - 1650) était un philosophe et mathématicien français. En 1637, il publia le "Discours de la méthode pour conduire correctement la Raison et chercher la vérité dans les Sciences" suivi de trois essais : "La Dioptrique", "La Géométrie" et "Les Météores". Dans son essai "La Géométrie", il explique comment relier la géométrie et l'algèbre, et crée ainsi la géométrie analytique cartésienne.

#### Différence de deux vecteurs

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix}$$

#### Multiplication par un scalaire $\lambda$

$$\lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \\ \lambda a_z \end{pmatrix}$$

#### Norme ou module

$$\|\vec{a}\| \equiv a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

#### Produit scalaire

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Le produit scalaire satisfait

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \phi$$

où  $\phi$  est l'angle entre  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ .

#### Produit vectoriel

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - b_y a_z \\ a_z b_x - b_z a_x \\ a_x b_y - b_x a_y \end{pmatrix}$$

Le produit vectoriel satisfait

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \sin \phi$$

où  $\phi$  est l'angle entre  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ .

### 2.3. Horaire

Considérons un point matériel en mouvement. La **trajectoire** est l'ensemble des points par lesquels il passe. L'**horaire** est la fonction qui à tout temps  $t$  fait correspondre le vecteur position  $\vec{r}(t)$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 2.4. Rappel de calcul différentiel

La dérivée est utilisée en cinématique pour calculer la vitesse à partir de l'horaire, et l'accélération à partir de la vitesse.

#### Définition de la dérivée

$$\frac{d}{dt} f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

#### Notation

$$\frac{d}{dt} f(t) \equiv f'(t) \equiv \dot{f}(t)$$

#### Règles de dérivation

Fonction $f(t)$	Dérivée $f'(t)$
const	0
$t$	1
$t^n$	$n t^{n-1}$
$e^{at}$	$a e^{at}$
$\sin(\omega t)$	$\omega \cos(\omega t)$
$\cos(\omega t)$	$-\omega \sin(\omega t)$
$a g(t) + b h(t)$	$a g'(t) + b h'(t)$
$g(h(t))$	$g'(h(t)) h'(t)$

Les grandeurs  $n, a, b$  et  $\omega$  sont des constantes.

### 2.5. Vitesse

La **vitesse** est un vecteur qui représente la variation de position par unité de temps. L'unité de la vitesse est le mètre par seconde (m/s).

#### Vitesse moyenne entre $t_1$ et $t_2$

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$



**Figure 2.2.:** Gottfried Leibniz (1646 - 1716) était un scientifique, philosophe, juriste, et diplomate allemand. C'est en 1672 à Paris qu'il met au point sa découverte mathématique la plus importante : l'invention du calcul différentiel et intégral. Leibniz montre que l'intégration et la dérivation sont des opérations inverses, et il invente la notation de l'intégrale  $\int f(x) dx$ .

#### Vitesse instantanée

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \vec{r}(t)$$

#### Notation

$$\vec{v}(t) \equiv \dot{\vec{r}}(t) \equiv \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

#### Position en fonction de la vitesse

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{v}(t') dt'$$

### 2.6. Accélération

L'**accélération** est un vecteur qui représente la variation de vitesse par unité de temps. L'unité de l'accélération est le mètre par seconde au carré (m/s<sup>2</sup>).

#### Accélération moyenne

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

#### Accélération instantanée

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \vec{v}(t)$$

#### Notation

$$\vec{a}(t) \equiv \dot{\vec{v}}(t) \equiv \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}$$

**Vitesse en fonction de l'accélération**

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(t') dt'$$



### 3. Mouvements particuliers et chute libre

#### 3.1. Mouvement rectiligne

On appelle *mouvement rectiligne* un mouvement dont la trajectoire est une ligne droite. On peut choisir de superposer l'axe  $Ox$  sur la trajectoire, de sorte qu'il suffit d'une seule composante pour décrire la position  $x(t)$ . La vitesse et l'accélération sont alors données par :

$$v(t) = \dot{x}(t)$$

$$a(t) = \dot{v}(t)$$

##### Mouvement rectiligne uniforme

La trajectoire est une ligne droite sur laquelle le mobile se déplace à vitesse constante :

$$x(t) = x_0 + v_0 t$$

$$v(t) = v_0$$

$$a(t) = 0$$

On peut illustrer le mouvement de la façon suivante :



Les points représentent la position du mobile à intervalles réguliers et la vitesse est en noir.

##### Mouvement rectiligne uniformément accéléré

La trajectoire est une ligne droite sur laquelle le mobile se déplace avec une accélération constante :

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

$$v(t) = v_0 + a_0 t$$

$$a(t) = a_0$$

On peut illustrer le mouvement de la façon suivante :



Les points représentent la position du mobile à intervalles réguliers, la vitesse est en noir, et l'accélération en rouge.

#### 3.2. Mouvement uniformément accéléré

Il s'agit d'un mouvement dont l'accélération est un vecteur constant  $\vec{a}_0$  mais dont la trajectoire n'est pas une ligne droite :

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a}_0 t^2$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 t$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_0$$

On peut aussi écrire ces équations en composantes :

$$x(t) = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_{0x} t^2$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_{0y} t^2$$

$$z(t) = z_0 + v_{0z} t + \frac{1}{2} a_{0z} t^2$$

$$v_x(t) = v_{0x} + a_{0x} t$$

$$v_y(t) = v_{0y} + a_{0y} t$$

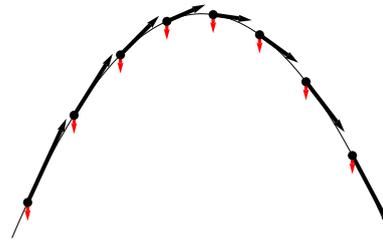
$$v_z(t) = v_{0z} + a_{0z} t$$

$$a_x(t) = a_{0x}$$

$$a_y(t) = a_{0y}$$

$$a_z(t) = a_{0z}$$

La trajectoire est une parabole, dans un plan passant par  $\vec{r}_0$  et parallèle à  $\vec{v}_0$  et  $\vec{a}_0$ . On peut illustrer le mouvement de la façon suivante :



Les points représentent la position du mobile à intervalles réguliers, la vitesse est en noir, et l'accélération en rouge.

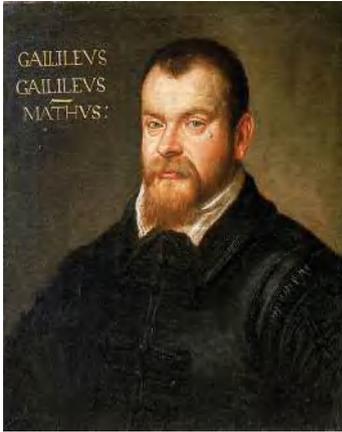
#### 3.3. Chute libre

Lorsqu'un corps tombe à la surface de la Terre, son mouvement est influencé par le frottement de l'air qui le ralentit. On peut se débarrasser de cette influence en observant le mouvement de corps tombant dans une chambre à vide. De tels corps sont dits en *chute libre*.

##### Loi de la chute des corps

Tout corps en chute libre à la surface de la Terre a une accélération constante  $\vec{g}$ . Cette accélération est la même pour tous les corps indépendamment de leur masse, de leur forme et de leur vitesse. Elle est dirigée vers le centre de la Terre et vaut approximativement :

$$\|\vec{g}\| = 9.81 \text{ m/s}^2$$



**Figure 3.1.:** Galileo Galilei (1564 - 1642) était un physicien et astronome italien. Il formula la loi des corps en chute libre qu'il a vérifiée expérimentalement. Il perfectionna la lunette astronomique qui lui permit d'étudier les cratères lunaires et de découvrir quatre satellites de Jupiter. Partisan de l'héliocentrisme, il fut condamné à la prison à vie pour suspicion d'hérésie puis assigné à résidence dans sa villa d'Arcetri près de Florence. Le jugement de l'Inquisition ne fut annulé qu'en 1992.

### Démonstration de cours

Observation de la chute des corps (une plume et un morceau de cuivre) dans un tube en verre dont l'air a été évacué (tube de Newton). Comparaison avec la chute des mêmes corps dans l'atmosphère terrestre.

### Mouvement balistique

On choisit un système de coordonnées où  $Oz$  est vertical dirigé vers le haut. Les équations de la section 3.2 s'appliquent avec l'accélération donnée par :

$$\vec{a}_0 = \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.81 \end{pmatrix} \text{ m/s}^2$$

donc le mouvement est uniforme selon  $Ox$  et  $Oy$ , et uniformément accéléré selon  $Oz$ .

### Exemple d'application

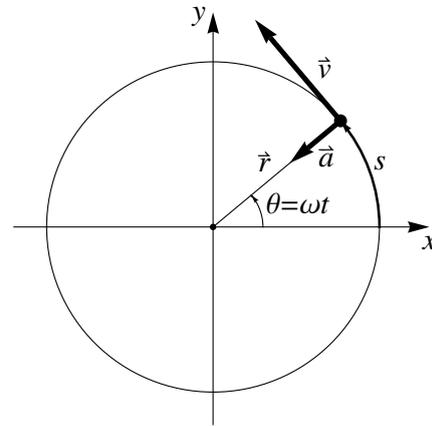
Calcul de la trajectoire d'un projectile dans le champ de la pesanteur. Expression de la portée en fonction de l'angle de lancement.

### Démonstration de cours

Un projectile est tiré dans la direction d'une cible qui se laisse tomber en chute libre. Question : le projectile va-t-il atteindre la cible ? Réponse : écrire les équations du mouvement pour le projectile ainsi que pour la cible, puis égaliser leurs positions.

## 3.4. Mouvement circulaire uniforme

Le mouvement est dit *circulaire uniforme* si la trajectoire est un cercle et la norme de la vitesse est



**Figure 3.2.:** Mouvement circulaire uniforme.

constante (voir la figure 3.2). L'horaire peut s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} x(t) &= R \cos(\omega t) \\ y(t) &= R \sin(\omega t) \\ z(t) &= 0 \end{aligned}$$

où  $\omega = 2\pi/T$  est la fréquence angulaire (en rad/s) et  $T$  est la période du mouvement (en s). La vitesse et l'accélération s'obtiennent par dérivation :

$$\begin{aligned} v_x(t) &= -\omega R \sin(\omega t) \\ v_y(t) &= \omega R \cos(\omega t) \\ v_z(t) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_x(t) &= -\omega^2 R \cos(\omega t) \\ a_y(t) &= -\omega^2 R \sin(\omega t) \\ a_z(t) &= 0 \end{aligned}$$

La vitesse est perpendiculaire au rayon  $\vec{r}$  et sa norme est constante :

$$\|\vec{v}\| = \omega R$$

L'accélération est dirigée vers le centre du cercle :

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t)$$

On l'appelle *accélération centripète* et sa norme vaut :

$$\|\vec{a}\| = \omega^2 R = \|\vec{v}\|^2 / R$$

### Relations entre translation et rotation

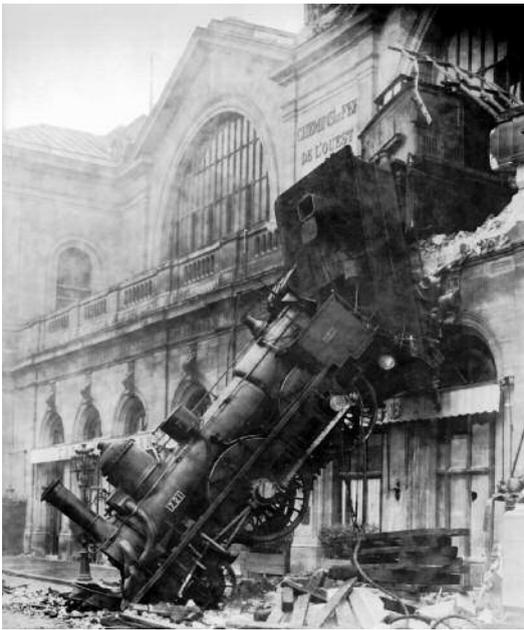
Translation	Rotation	Relation
position $\vec{r}, s$	angle $\theta$	$s = R\theta$
vitesse $\vec{v}$	vitesse angulaire $\omega$	$v = R\omega$

## 4. Les lois de Newton

### 4.1. Inertie

#### 1<sup>ère</sup> loi de Newton : loi d'inertie

Un point matériel qui n'est soumis à aucune force extérieure persévère dans l'état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme, autrement dit, sa vitesse reste constante en grandeur et en direction.



**Figure 4.1.:** Illustration de la loi d'inertie. Le 22 octobre 1895, à la gare de Paris-Montparnasse, le cheminot n'a pas ralenti assez tôt, et le chef de train a essayé d'actionner le frein d'urgence mais celui-ci n'a pas fonctionné. Le convoi a fracassé les heurtoirs, traversé la gare, défoncé le mur de façade puis est tombé sur la station de tramways située 10 m en contrebas.

#### Démonstration de cours

- Observation du mouvement d'un chariot qui glisse sur un rail à coussin d'air.
- Film d'un bateau qui arrive trop vite au port et percute le ponton d'amarrage.

### 4.2. Référentiels galiléens

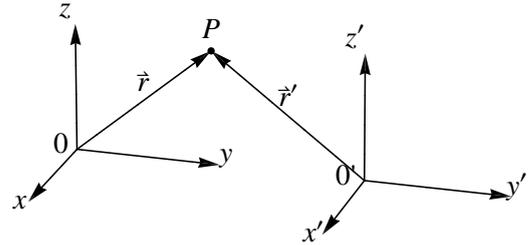
#### Définition

On appelle *référentiel galiléen* ou *d'inertie* tout référentiel dans lequel la loi d'inertie est valable.

#### Changement de référentiel

Considérons deux référentiels différents  $Oxyz$  et  $O'x'y'z'$  dans lesquels on décrit le mouvement d'un

même point matériel  $P$  :



Les vecteurs position  $\vec{r}$  et  $\vec{r}'$  sont reliés par :

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$

où  $\vec{R} = \vec{OO'}$  est le vecteur qui repère l'origine du second référentiel par rapport au premier.

#### Composition des vitesses

La vitesse du point  $P$  dans le référentiel  $Oxyz$  est donnée par :

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'$$

où  $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$  et  $\vec{v}'$  est la vitesse du point  $P$  dans le référentiel  $O'x'y'z'$ .

#### Référentiels en translation rectiligne uniforme

Si les deux référentiels sont en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre, autrement dit si la vitesse  $\vec{V}$  est constante, alors les accélérations sont les mêmes dans les deux référentiels :

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

#### Résultat

Tous les référentiels qui sont en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen sont aussi des référentiels galiléens.

#### Remarque

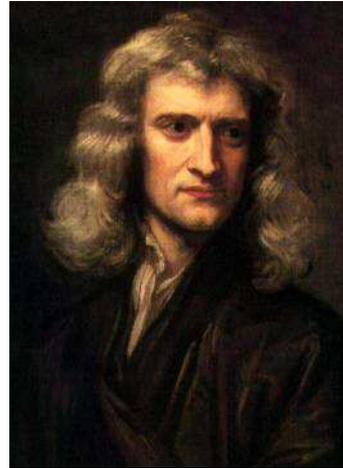
Dans un référentiel non galiléen, par exemple un référentiel tournant, la loi d'inertie n'est plus valable. D'où l'invention de forces fictives, comme la force de Coriolis et la force centrifuge, pour se réconcilier avec les lois de Newton.

#### Démonstration de cours

Un référentiel immobile à la surface de la Terre n'est pas tout à fait galiléen à cause de la rotation de la Terre. On peut le mettre en évidence à l'aide du pendule de Foucault.



**Figure 4.2.:** Jean Bernard Léon Foucault (1819 - 1868) était un physicien français. Il est connu pour avoir démontré que la Terre tourne sur elle-même en observant le mouvement d'un pendule, ainsi que pour la découverte des courants de Foucault. Le pendule que Foucault a installé au Panthéon de Paris mesurait 67 mètres de long et portait une masse de 28 kg.



**Figure 4.3.:** Isaac Newton (1642 - 1727) était un philosophe, mathématicien, physicien, astronome et théologien anglais. Il est connu pour avoir fondé la mécanique classique, pour sa théorie de la gravitation universelle, ainsi que pour la création, en concurrence avec Leibniz, du calcul infinitésimal.

### 4.3. Action et réaction

#### 3<sup>ème</sup> loi de Newton

Si un point matériel A exerce une force  $\vec{F}_{A/B}$  sur un point matériel B, alors B exerce une force directement opposée  $\vec{F}_{B/A} = -\vec{F}_{A/B}$  sur A.



Notons que les forces  $\vec{F}_{A/B}$  et  $\vec{F}_{B/A}$  ont le même support. La force  $\vec{F}_{A/B}$  est appelée *action* et la force  $\vec{F}_{B/A}$  *réaction*.

#### Démonstration de cours

Etant assis sur une chaise à roulettes, lorsque je tire sur une corde, elle me tire avec une force opposée.

### 4.4. Loi fondamentale de la dynamique

#### Définition de la quantité de mouvement

La quantité de mouvement d'un point matériel est le produit de sa masse par sa vitesse :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

L'unité de la quantité de mouvement est le kg m/s.

#### 2<sup>ème</sup> loi de Newton

La force nécessaire pour produire une variation de vitesse d'un point matériel est égale à :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$$

où la deuxième égalité n'est valable que si la masse est constante. Notons que la force est un vecteur qui a donc un module et une direction. L'unité de la force est le Newton ( $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m/s}^2$ ).

#### Interprétation

La force nécessaire pour accélérer un point matériel est d'autant plus grande que sa masse est grande et que l'accélération que l'on veut produire est grande.

#### Démonstration de cours

Observation du mouvement de chariots glissant sur un rail à coussin d'air. Deux chariots qui se repoussent avec des forces opposées (action et réaction) acquièrent la même quantité de mouvement. Ainsi, la vitesse de chaque chariot est inversement proportionnelle à sa masse.

#### Définition de la force résultante

Lorsque plusieurs forces  $\vec{F}_i$  s'exercent sur un point matériel, leur effet est identique à celui d'une seule force résultante :

$$\vec{F}_{\text{res}} = \sum_i \vec{F}_i$$

#### Forme pratique de la 2<sup>ème</sup> loi de Newton

Lorsque plusieurs forces  $\vec{F}_i$  s'exercent sur un point matériel dont la masse est constante :

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

#### Remarque

Selon la théorie de la relativité, la masse d'un corps augmente lorsque sa vitesse s'approche de la vitesse de la lumière. Dans ce cas, la masse ne peut pas être considérée comme constante, et il faut utiliser  $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ . Par contre, pour tous les cas où les vitesses considérées sont beaucoup plus faibles que la vitesse de la lumière, on peut utiliser  $\vec{F} = m\vec{a}$ .

### Condition d'équilibre d'un point matériel

Nous dirons qu'un corps est en équilibre s'il existe un référentiel galiléen dans lequel il se trouve au repos.

Pour qu'un point matériel soit à l'équilibre ( $\vec{a} = 0$ ) il faut et il suffit que la résultante des forces qui agissent sur lui soit nulle :

$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

## 4.5. Méthodologie

Pour appliquer la seconde loi de Newton, il faut utiliser la méthode du corps isolé. La procédure à suivre est la suivante :

1. Dessiner le corps isolé avec toutes les forces qui agissent sur lui.
2. Choisir un système d'axes de référence  $Oxyz$  et le dessiner à côté du corps isolé.
3. Ecrire les trois équations de Newton selon les directions  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  :

$$\sum_i F_{ix} = m a_x$$

$$\sum_i F_{iy} = m a_y$$

$$\sum_i F_{iz} = m a_z$$

4. Résoudre le système d'équations de façon algébrique.
5. Vérifier les unités du résultat.
6. Vérifier que le résultat donne bien ce qu'on attend dans des cas particuliers dont on peut anticiper la solution.
7. Terminer par l'application numérique.

## 4.6. Applications et compléments

### 4.6.1. Poids et chute libre

Par définition, le *poids* d'un corps est la force de gravitation qui l'attire vers le centre de la Terre et que l'on note  $\vec{F}_P$ . A la surface de la Terre, le poids d'un corps de masse  $m$  vaut :

$$\vec{F}_P = m \vec{g}$$

où  $\vec{g}$  est l'accélération de la pesanteur introduite à la section 3.3.

#### Exemple 1 : corps en chute libre

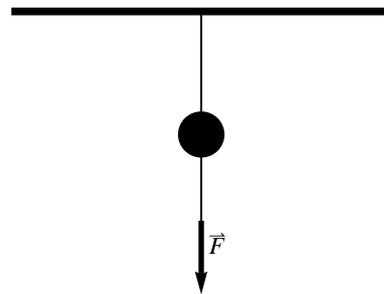
Application de la méthode du corps isolé à un objet en chute libre. Le poids de l'objet, lorsqu'il est introduit dans la seconde loi de Newton, produit l'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$ .

### 4.6.2. Masse inerte et masse pesante

L'inertie et le poids sont deux manifestations différentes de la masse. Le fait que la masse inerte soit rigoureusement égale à la masse pesante a pour conséquence que l'accélération de la pesanteur est identique pour tous les corps indépendamment de leur composition, de leur forme et de leur état de mouvement. Cette égalité n'est pas accidentelle, c'est elle qui a conduit Einstein à formuler le principe de relativité générale.

#### Démonstration de cours

Masse inerte et masse pesante se manifestent à tour de rôle dans l'expérience suivante. Une boule massive est suspendue à une première corde, puis elle est tirée vers le bas par une seconde corde identique à la première. Lorsqu'on tire lentement, c'est la première corde qui casse (manifestation du poids de la boule) et lorsqu'on tire vite, c'est la seconde corde qui casse (manifestation de l'inertie de la boule).



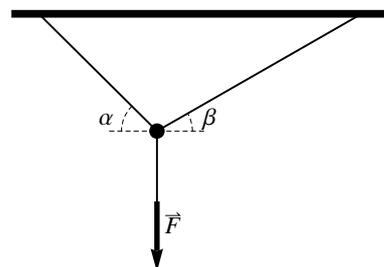
### 4.6.3. Cordes et poulies

#### Tension d'une corde

La force transmise par une corde est toujours une force de tension, que l'on note  $\vec{F}_T$ , dont la direction est la même que celle de la corde.

#### Exemple 2 : noeud suspendu

Application de la seconde loi de Newton au calcul des forces de tension dans les trois cordes pour que le système soit à l'équilibre.



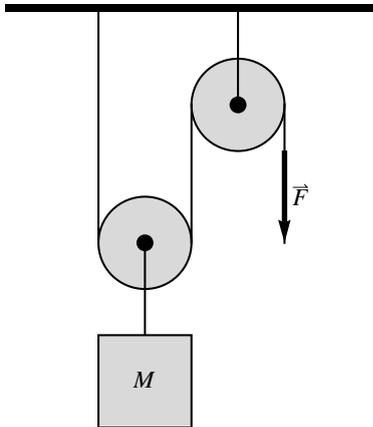
#### Système de cordes et poulies

Dans un système de cordes et poulies idéales, on néglige la masse des cordes et des poulies, ainsi que

le frottement. Alors, l'intensité de la force de tension est la même tout au long de la corde. Plus précisément, le module de la force de tension est conservé bien que sa direction change.

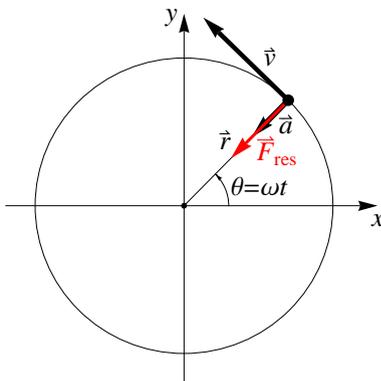
### Exemple 3 : le palan

Application de la seconde loi de Newton au calcul de la force  $\vec{F}$  nécessaire pour que le système suivant soit à l'équilibre.



### 4.6.4. Force et accélération centripète

Considérons un point matériel qui effectue un mouvement circulaire uniforme de fréquence angulaire  $\omega$  dans un référentiel galiléen (voir la section 3.4).



L'accélération du corps est dirigée vers le centre du cercle, on dit qu'elle est centripète, elle vaut :

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t)$$

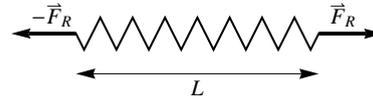
Selon la seconde loi de Newton, la force résultante qui agit sur le corps est aussi centripète, elle est donnée par :

$$\vec{F}_{\text{res}} = m \vec{a} = -m \omega^2 \vec{r}(t)$$

où  $m$  est la masse du point matériel. Ce résultat est valable pour tout mouvement circulaire uniforme, indépendamment de l'origine de la force résultante. Par exemple, la force de gravitation pour un satellite, une corde tendue au bout de laquelle on fait tourner un objet, le frottement des pneus sur le sol qui fait tourner un véhicule, etc.

### 4.6.5. Ressort et dynamomètre

Pour tendre un ressort, il faut exercer une force à chacune de ses extrémités :



Le module de la force exercée par le ressort  $\vec{F}_R$  est proportionnel à sa déformation :

$$F_R = k d = k (L - L_0)$$

où  $d = L - L_0$  est la déformation,  $L$  est la longueur du ressort sous tension,  $L_0$  est la longueur du ressort au repos, et  $k$  est la constante du ressort. L'unité de  $k$  est le Newton par mètre (N/m).

### Démonstration de cours

Cette relation linéaire entre force et allongement permet de réaliser un instrument simple pour mesurer les forces : le dynamomètre.

## 5. Contact et frottement

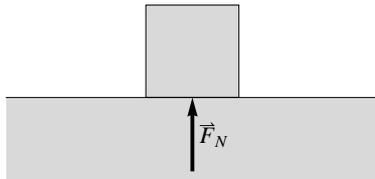
Les forces de contact entre deux matériaux sont de nature électromagnétique. Leur action, qui est à courte portée, nécessite un contact rapproché entre les atomes et/ou molécules des deux corps. Ces interactions sont trop complexes pour être analysées de façon détaillée. On effectue alors une étude phénoménologique des effets globaux.

### 5.1. Contact sans frottement

Dans le cas où il n'y a pas de frottement, la force de contact entre un corps et une surface est toujours normale à la surface. On utilise la notation  $\vec{F}_N$  pour cette force normale.

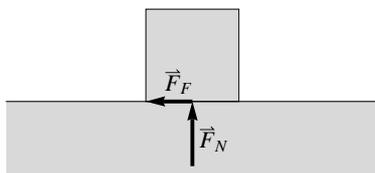
#### Exemple : bloc sur le sol

Application de la seconde loi de Newton au calcul de la force normale pour un bloc posé sur le sol.



### 5.2. Contact avec frottement

La force de contact entre deux surfaces peut toujours se décomposer en une force normale à la surface  $\vec{F}_N$  et une force tangente à la surface  $\vec{F}_F$ .



On appelle force de frottement la partie tangente à la surface, que l'on note  $\vec{F}_F$ .

### 5.3. Frottement statique

Lorsqu'il n'y a pas de glissement, la force de frottement s'oppose aux autres forces qui tendent à produire un glissement. Elle peut prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et  $F_F^{\max}$  de sorte que la force résultante soit nulle. La valeur maximale de la force de frottement statique est donnée par :

$$F_F^{\max} = \mu_s F_N$$

où  $\mu_s$  est le coefficient de frottement statique. Notons que cette valeur maximale de la force de frottement est indépendante de la surface de contact.

### Démonstration de cours

Un bloc est posé sur le sol. On le tire à l'aide d'un dynamomètre. On montre ainsi que la force nécessaire pour provoquer le glissement  $F_F^{\max}$  dépend du poids du bloc, mais pas de la surface de contact. On estime la valeur du coefficient de frottement.

### 5.4. Frottement cinétique

Lorsqu'il y a glissement entre les deux surfaces en contact, la force de frottement s'oppose au mouvement. Elle est proportionnelle à la force normale :

$$F_F = \mu_c F_N$$

où  $\mu_c$  est le coefficient de frottement cinétique.

### Démonstration de cours

Un bloc est posé sur le sol. On le tire à l'aide d'un dynamomètre. On montre ainsi que la force nécessaire pour maintenir une vitesse constante est inférieure à la force nécessaire pour démarrer le glissement.

### 5.5. Coefficient de frottement

#### Observations expérimentales

1. Les coefficients de frottement dépendent des matériaux en contact, de leur état de surface, de leur propreté, de l'humidité, de la présence de lubrifiant. Des valeurs indicatives des coefficients de frottement sont données dans la table 5.1 pour quelques matériaux différents.
2. En général les coefficients de frottement sont compris entre 0 et 1.
3. En général on a  $\mu_c < \mu_s$ .
4.  $\mu_c$  est peu dépendant de la vitesse de glissement. Toutefois, on observe que  $\mu_c$  diminue un peu lorsque la vitesse de glissement augmente.

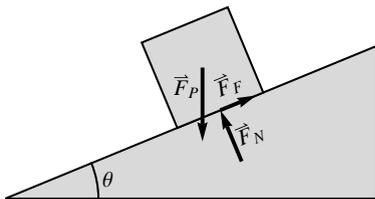
#### Mesure du coefficient de frottement

Application de la seconde loi de Newton à un bloc au repos sur un plan incliné avec frottement. Calcul de l'angle maximum  $\theta_{\max}$  avant que le bloc ne se mette à glisser. On montre que :

$$\mu_s = \tan \theta_{\max}$$

**Table 5.1.:** Coefficients de frottement statique et cinétique pour quelques matériaux. Ces valeurs sont approximatives, elles dépendent sensiblement de l'état des surfaces en contact (usinage, propreté, etc).

Matériaux	$\mu_s$	$\mu_c$
Pneu sur route sèche	1.0	0.6 - 0.8
Pneu sur route mouillée	0.7	0.5
Bois sur bois	0.5	0.4
Acier sur acier	0.6	0.4
Acier sur acier graissé	0.1	0.05
Téflon sur téflon	0.04	0.04
Téflon sur acier	0.04	0.04
Métal sur glace	0.1	0.05

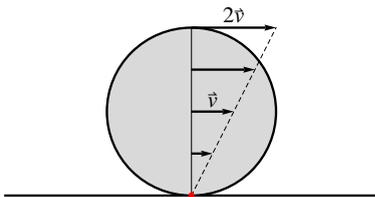


### Démonstration de cours

Mesure du coefficient de frottement pour des chaussures sur un plan incliné en béton. Comparaison de sandales ( $\theta_{\max} = 39$  deg,  $\mu_s \approx 0.8$ ) avec des chaussures de montagnes ( $\theta_{\max} = 47$  deg,  $\mu_s \approx 1.1$ ).

### 5.6. Roulement

Dans le cas du roulement, il n'y a en principe pas de glissement entre les deux surfaces en contact.



C'est donc le frottement statique qui agit au point de contact et qui fournit la force nécessaire pour accélérer la roue selon la seconde loi de Newton (ici l'accélération peut signifier aussi bien l'accélération ou le freinage d'un véhicule que l'accélération centripète nécessaire pour un virage). Notons que cette force serait nulle dans le cas d'une roue parfaite en mouvement uniforme sur un sol lisse. Toutefois, les imperfections de la roue et du sol, ainsi que les déformations qui se produisent au point de contact, produisent une force de frottement résultante qui s'oppose au mouvement. Cette force, qu'on appelle frottement de roulement, est proportionnelle à la force normale :

$$F_F = \mu_r F_N$$

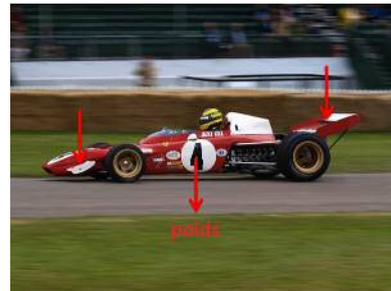
où  $\mu_r$  est le coefficient de frottement de roulement. En général  $\mu_r \ll \mu_c$  et le roulement est utilisé

pour diminuer le frottement autant que possible. Par exemple, pour des billes d'acier sur des rails d'acier  $\mu_r < 0.001$ .

### 5.7. Exemples

#### Augmentation d'adhérence en formule 1

En formule 1, on utilise des ailerons pour produire une force dirigée vers le bas qui s'ajoute au poids du véhicule. L'objectif est d'augmenter la force de frottement maximale, donc l'adhérence du véhicule, sans pour autant augmenter sa masse et donc son inertie.



#### Freinage d'urgence

Lors d'un freinage d'urgence, on alterne de courts instants de freinage avec et sans glissement. L'objectif est d'augmenter le coefficient de frottement moyen qui sera compris entre  $\mu_s$  et  $\mu_c$ .



#### Mouvement via le frottement statique

C'est le frottement statique qui nous permet de marcher sans glisser. Nous poussons nos pieds vers l'arrière et le sol réagit en nous poussant vers l'avant avec la force de frottement. Il est beaucoup plus difficile de marcher sur la glace !

## 6. Force de gravitation

La gravitation est l'une des quatre interactions fondamentales de la nature. La loi de la gravitation universelle, formulée par Newton en 1687, permet d'expliquer le mouvement des planètes, des satellites, les marées, ainsi que la pesanteur terrestre.

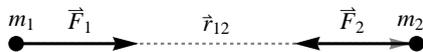
### 6.1. Loi de gravitation universelle

Tous les corps s'attirent avec une force proportionnelle au produit de leurs masses et inversement proportionnelle au carré de leur distance. Pour deux points matériels de masses  $m_1$  et  $m_2$  on a :

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

où  $\vec{r}_{12} = \vec{OP}_2 - \vec{OP}_1$  est le vecteur lieu qui repère  $m_2$  par rapport à  $m_1$  et  $G$  est la constante de gravitation universelle :

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

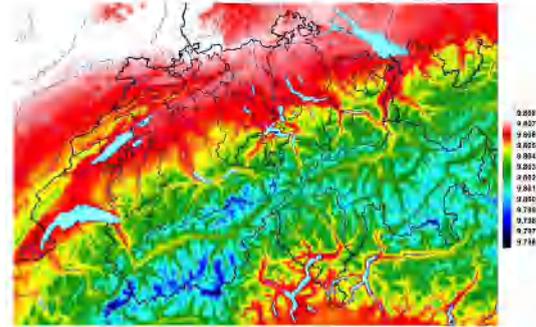
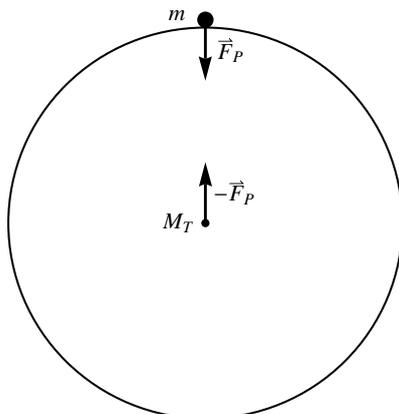


### 6.2. Gravité terrestre

Le poids d'un corps  $F_P$  est la force de gravitation qui l'attire vers le centre de la Terre. Selon la loi de gravitation universelle, le poids d'un corps de masse  $m$  vaut :

$$F_P = G \frac{M_T m}{R_T^2}$$

où  $M_T = 5.974 \times 10^{24}$  kg est la masse de la Terre et  $R_T = 6370$  km est son rayon moyen.



**Figure 6.1.:** Carte de la valeur de l'accélération de la pesanteur  $g$  en Suisse ( $\text{m/s}^2$ ). Source : Swisstopo et Office fédéral de métrologie.

Selon la deuxième loi de Newton, un corps en chute libre sera donc soumis à une accélération  $\vec{g}$  dirigée vers le centre de la Terre et dont le module vaut :

$$g = \frac{F_P}{m} = G \frac{M_T}{R_T^2} = 9.81 \text{ m/s}^2$$

indépendamment de sa masse, de sa forme et de sa vitesse. Le poids s'écrit alors de façon simplifiée en fonction de l'accélération de la pesanteur :

$$F_P = m g$$

et on retrouve la formulation de la section 4.6.1.

#### Irrégularités de $g$

La Terre n'est pas une sphère parfaite, elle est aplatie aux pôles et plus large à l'équateur. Cette variation du rayon terrestre  $R_T$  en fonction de la latitude provoque une variation de  $g$  de l'ordre de quelques  $10^{-3}$  en valeur relative. De plus, les variations locales de la densité du sol provoquent des irrégularités locales de  $g$  de l'ordre de  $10^{-3}$  en valeur relative. Voir la figure 6.1 pour la carte de  $g$  en Suisse.

#### Effet de l'accélération centripète

Les objets posés sur la Terre sont entraînés par la rotation terrestre. Ils subissent une accélération centripète  $\vec{a}_c$  qui modifie leur poids effectif (voir la section 6.3). Cette accélération dépend de la latitude  $\theta$  selon :

$$a_c = (2\pi/T)^2 R_T \cos \theta$$

où  $T = 86164$  s est la période de rotation de la Terre sur elle-même. Donc  $a_c$  vaut  $0.034 \text{ m/s}^2$  à l'équateur et 0 aux pôles, ce qui modifie la valeur de  $g$  de  $3.5 \times 10^{-3}$  en valeur relative.

### 6.3. Poids effectif

Considérons un objet de masse  $m$  posé sur le sol dans un ascenseur. La force de contact normale  $\vec{F}_N$  exercée par le sol sur cet objet est appelée le *poids effectif*. Il s'agit de la valeur qu'indiquerait une balance placée sous l'objet. Dans le cas où l'ascenseur n'est pas accéléré,  $a = 0$ , le poids effectif est égal au poids :

$$F_N = mg$$

Par contre, si l'ascenseur subit une accélération dirigée vers le haut,  $a > 0$ , alors selon la seconde loi de Newton on a :

$$F_N = m(g + a)$$

ce qui signifie que le poids effectif est plus grand que le poids de l'objet. A l'inverse, si l'ascenseur est accéléré vers le bas, le poids effectif est plus petit que le poids de l'objet. A l'extrême, si on coupe le câble de l'ascenseur de sorte que  $a = -g$ , alors

$$F_N = 0$$

ce qui signifie que l'objet flotte au-dessus du sol, sans force de soutien, ce qu'on appelle *état d'apesanteur*.

#### Démonstration de cours

Observation de la chute libre d'une masse suspendu à une balance. Durant la chute, la balance indique zéro car le poids effectif est nul. On dit que la masse est en état d'apesanteur.

#### Exemple : vol parabolique

On peut simuler l'état d'apesanteur durant une vingtaine de secondes en effectuant un vol parabolique en avion. Discussion des différentes phases d'un tel vol parabolique. Calcul des paramètres de la trajectoire. L'agence spatiale européenne (ESA) organise des campagnes de vols paraboliques avec un Airbus A300 pour des expériences scientifiques.

### 6.4. Mouvement des planètes

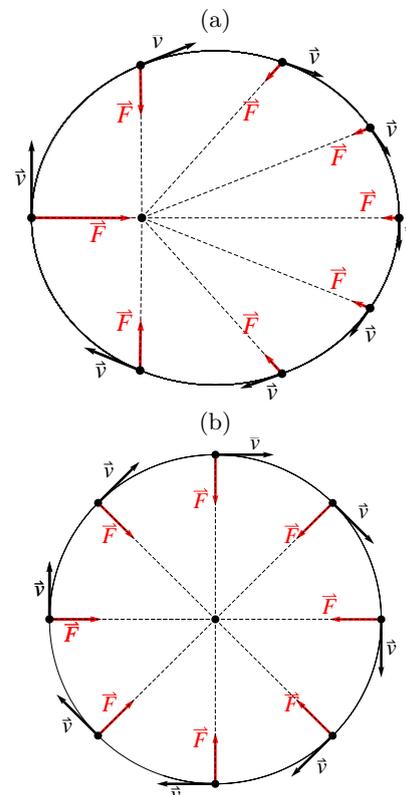
En appliquant la seconde loi de Newton à deux objets massifs sous l'effet de la force de gravitation, on peut montrer que la trajectoire qui en résulte est une conique (ellipse, hyperbole, ou parabole). C'est Johannes Kepler qui a le premier énoncé les lois qui régissent le mouvement des planètes dans le système solaire :

1. Les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le soleil occupe un des foyers.
2. Le segment de droite qui relie la planète au soleil balaie des aires égales en des intervalles de temps égaux.
3. Le rapport du carré de la période de révolution au cube du demi-grand axe de l'ellipse est le même pour toutes les planètes autour du soleil.



**Figure 6.2.:** Johannes Kepler (1571 - 1630) était un astronome et mathématicien allemand. Il est connu pour avoir découvert que les orbites des planètes autour du soleil sont des ellipses. De plus, il énonça trois lois fondamentales du mouvement planétaire qui portent son nom.

Les deux premières lois sont illustrées dans le schéma de la figure 6.3(a). Pour comparaison, la figure 6.3(b) montre le cas d'une orbite circulaire. Notons que ces lois, qui découlent de la gravitation universelle, sont valables pour tout ensemble de satellites orbitant autour d'un corps central.



**Figure 6.3.:** (a) Orbite elliptique. (b) Orbite circulaire. La force est dirigée vers l'astre massif qui se trouve à l'un des foyers.

**Table 6.1.:** Tableau des planètes du système solaire. La première colonne donne la période de l'orbite  $T$  en années, la seconde colonne donne le demi-grand axe  $a$  en unité astronomique (1 UA = 149597870691 m). Le rapport  $T^2/a^3$ , donné dans la dernière colonne, est quasiment constant selon la troisième loi de Kepler.

	$T$ (années)	$a$ (UA)	$T^2/a^3$ (années <sup>2</sup> /UA <sup>3</sup> )
Mercure	0.241	0.387	1.00
Vénus	0.615	0.723	1.00
Terre	1.00	1.00	1.00
Mars	1.88	1.52	1.00
Jupiter	11.9	5.20	0.999
Saturne	29.4	9.54	1.00
Uranus	84.0	19.2	0.999
Neptune	165.	30.1	0.999

La troisième loi de Kepler se vérifie facilement en utilisant les données astronomiques des planètes du système solaire. Les résultats sont résumés dans le tableau 6.1. Finalement, remarquons encore que les orbites des planètes du système solaire sont des ellipses de faible excentricité comme on peut s'en rendre compte sur la figure 6.4.

### 6.5. Satellite en orbite circulaire

Considérons un satellite de masse  $m$  en orbite circulaire autour de la Terre. Il est retenu sur sa trajectoire circulaire par l'attraction gravitationnelle de la Terre. Par conséquent, la seconde loi de Newton s'écrit :

$$G \frac{M_T m}{R^2} = m a_c$$

où  $R$  est le rayon de l'orbite,  $a_c = v^2/R$  est l'accélération centripète et  $v$  est la vitesse du satellite. En simplifiant cette équation on obtient la vitesse du satellite :

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{R}}$$

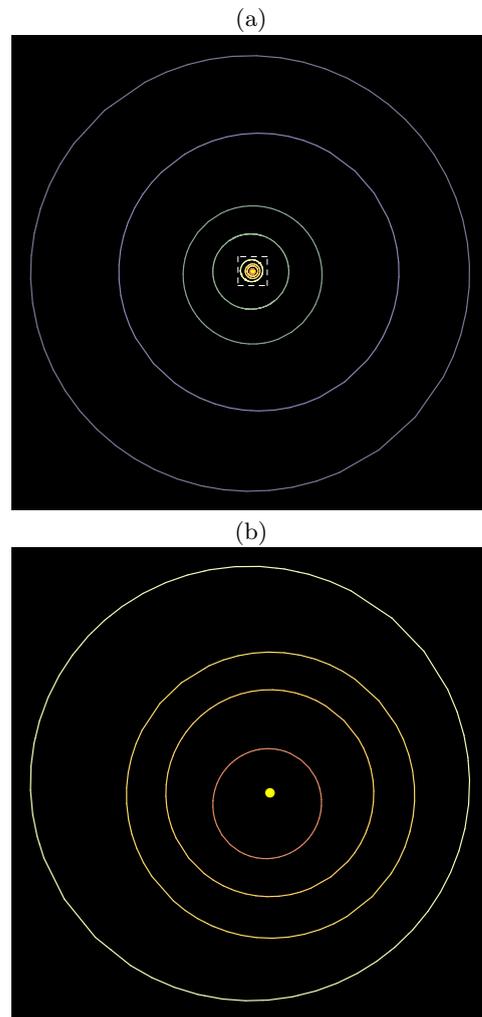
On peut aussi substituer  $v = 2\pi R/T$  pour obtenir la relation suivante entre le rayon  $R$  et la période de révolution  $T$  :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

qui n'est autre que la troisième loi de Kepler, déduite à partir de la loi de gravitation universelle.

#### Exemple : orbite de la lune

La Lune est un satellite naturel de la Terre. Elle est retenue sur son orbite approximativement circulaire par l'attraction gravitationnelle de la Terre. Il est instructif de calculer son accélération centripète. Connaissant sa période  $T = 27.32$  jours ainsi que le rayon de son orbite  $R = 385000$  km on peut calculer sa vitesse  $v = 2\pi R/T = 1025$  m/s. Son accélération



**Figure 6.4.:** (a) Orbites des planètes du système solaire. Le Soleil est au centre en jaune, ensuite viennent Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune. (b) Agrandissement de la zone centrale de (a) où l'on voit les orbites des quatre planètes les plus proches du Soleil : Mercure, Vénus, la Terre, Mars.

centripète vaut donc  $a_c = v^2/R = 0.0027$  m/s<sup>2</sup>. Cette valeur correspond bien à l'accélération de la pesanteur produite par la Terre à cette distance  $gR_T^2/R^2 = 0.0027$  m/s<sup>2</sup>. On peut donc conclure qu'il s'agit bien de la même force qui retient la Lune que celle qui fait tomber les objets sur Terre.



## 7. Statique du solide

### 7.1. Introduction

La condition d'équilibre d'un point matériel

$$\sum_i \vec{F} = 0$$

n'est pas suffisante pour un solide rigide. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer le corps représenté à la figure 7.3 qui est soumis à deux forces  $\vec{F}$  et  $-\vec{F}$ . Bien que la somme des forces externes est égale à zéro, ce corps n'est pas à l'équilibre puisqu'il va se mettre à tourner. Une seconde condition est donc nécessaire pour assurer l'équilibre en rotation d'un solide rigide. Pour la formuler, nous introduirons la notion de moment qui caractérise la capacité d'une force de produire un mouvement de rotation.

### 7.2. Moment d'une force

#### Point d'application d'une force

Pour un solide, il est important de spécifier pour chaque force  $\vec{F}$  quel est son *point d'application*  $P$ . Par convention, sur le diagramme du corps isolé on dessinera chaque vecteur force  $\vec{F}$  partant de son point d'application, selon la figure 7.1.

#### Ligne d'action d'une force

La droite passant par  $P$  et de même direction que  $\vec{F}$  s'appelle *le support*, ou *la ligne d'action*, de la force  $\vec{F}$ . Voir le schéma de la figure 7.1.

#### Définition du moment d'une force

Le moment de la force  $\vec{F}$  par rapport au point de référence  $O$  est défini par :

$$\vec{\tau}_o = \vec{r} \times \vec{F}$$

où  $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$  est le vecteur qui repère le point d'application  $P$  par rapport au point  $O$ . Le moment  $\vec{\tau}_o$  ainsi défini est un vecteur perpendiculaire au plan engendré par  $\vec{r}$  et  $\vec{F}$ . Son unité est le Newton-mètre (Nm).

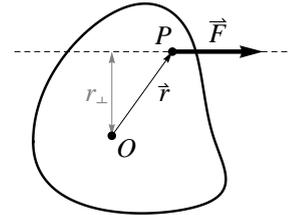
#### Bras de levier

En utilisant les propriétés du produit vectoriel, on obtient :

$$\begin{aligned} \|\vec{\tau}_o\| &= \|\vec{r}\| \|\vec{F}\| \sin \theta \\ &= r_{\perp} \|\vec{F}\| \end{aligned}$$

où  $\theta$  est l'angle entre  $\vec{r}$  et  $\vec{F}$ , et :

$$r_{\perp} = \|\vec{r}\| \sin \theta$$



**Figure 7.1.:** Solide rigide soumis à une force  $\vec{F}$ . Le point d'application de la force est  $P$ . La ligne discontinue est appelée le support, ou la ligne d'action, de la force. La distance  $r_{\perp}$  entre la ligne d'action et le point de référence  $O$  est le bras de levier de la force par rapport à  $O$ .

est la distance entre la ligne d'action et le point de référence  $O$ , qu'on appelle *le bras de levier* de la force par rapport au point  $O$ . Toutes ces grandeurs sont représentées sur le schéma de la figure 7.1.

#### Moment résultant

En général, il y a plusieurs forces  $\vec{F}_i$  qui agissent sur un solide. Par définition, *le moment résultant* des forces  $\vec{F}_i$  par rapport au point  $O$  est la somme des moments individuels :

$$\vec{\tau}_o = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$\vec{r}_i = \overrightarrow{OP}_i$  est le vecteur qui repère le point d'application  $P_i$  par rapport au point  $O$ .

#### Relation de Varignon

Attention : les moments de forces dépendent du point de référence  $O$  qui est utilisé pour le calcul ! En effet, calculons le moment résultant par rapport à un second point de référence  $O'$  :

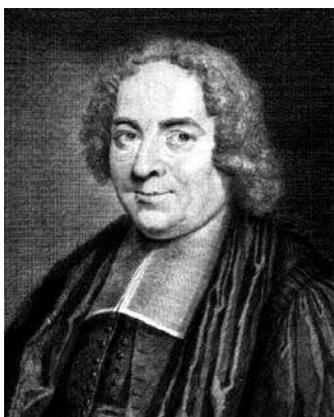
$$\begin{aligned} \vec{\tau}_{o'} &= \sum_i \overrightarrow{O'P}_i \times \vec{F}_i \\ &= \sum_i (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}_i) \times \vec{F}_i \\ &= \overrightarrow{O'O} \times \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \overrightarrow{OP}_i \times \vec{F}_i \end{aligned}$$

On obtient ainsi la relation de Varignon (fig. 7.2) :

$$\vec{\tau}_{o'} = \vec{\tau}_o + \overrightarrow{O'O} \times \vec{F}_{\text{res}}$$

où  $\vec{F}_{\text{res}}$  est la force résultante.

*Nous arrivons donc à la conclusion importante qu'il faut toujours spécifier le point de référence que l'on utilise pour calculer les moments de forces.*



**Figure 7.2.:** Pierre Varignon (1654 - 1722) était un mathématicien et physicien français. Il correspondait avec les frères Bernoulli, Leibniz et Newton. Il contribua de façon significative à l'introduction du calcul différentiel en France. De plus, il apporta de nombreuses contributions à la mécanique du solide, voir par exemple son ouvrage intitulé "Projet d'une nouvelle mécanique" que l'on trouve aujourd'hui sur Google books.

Pour terminer, remarquons que le moment résultant est indépendant du point de référence si et seulement si la force résultante est nulle.

### Couple

Deux forces de même grandeur mais de directions opposées constituent *un couple* (voir la figure 7.3). Les couples n'exercent pas de force résultante sur un solide :

$$\vec{F}_{\text{res}} = \vec{F} + (-\vec{F}) = 0$$

Par conséquent leur moment résultant est indépendant du point de référence  $O$  choisi pour le calcul. Ce moment résultant vaut :

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_o &= \overrightarrow{OP_1} \times \vec{F} + \overrightarrow{OP_2} \times (-\vec{F}) \\ &= (\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_2}) \times \vec{F} \\ &= \overrightarrow{P_2P_1} \times \vec{F} \end{aligned}$$

donc sa norme est donnée par :

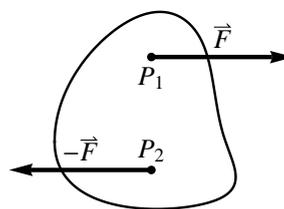
$$\|\vec{\tau}_o\| = d \|\vec{F}\|$$

où  $d$  est la distance entre les lignes d'action des deux forces.

## 7.3. Conditions d'équilibre

### Définition de l'équilibre

On dira qu'un solide rigide est en équilibre s'il existe un référentiel galiléen dans lequel ce solide est au repos.



**Figure 7.3.:** Solide rigide soumis à deux forces opposées  $\vec{F}$  et  $-\vec{F}$ . Cet objet satisfait la première condition d'équilibre  $\sum_i \vec{F}_i = 0$ , toutefois il va se mettre à tourner.

### Conditions d'équilibre

Un solide rigide qui est en équilibre satisfait les deux conditions suivantes :

1. La résultante des forces externes appliquées au solide doit être nulle :

$$\vec{F}_{\text{res}} = \sum_i \vec{F}_i = 0$$

2. Le moment résultant des forces appliquées au solide par rapport à un point  $O$  quelconque doit être nul :

$$\vec{\tau}_o = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$$

Ces deux équations vectorielles représentent un total de six conditions lorsqu'on les écrit en composantes.

### Remarque

En appliquant la seconde loi de Newton à tous les points matériels qui constituent le solide rigide, on peut démontrer que ces conditions sont nécessaires à l'équilibre, mais elles ne sont pas suffisantes. Par exemple, un corps en rotation uniforme satisfait ces deux conditions mais il n'est pas en équilibre selon la définition que nous avons donné ci-dessus. Nous démontrerons des théorèmes plus généraux, le théorème du centre de masse ainsi que le théorème du moment cinétique, dans un chapitre ultérieur qui concerne la dynamique du solide rigide.

## 7.4. Applications

### Démonstration de cours

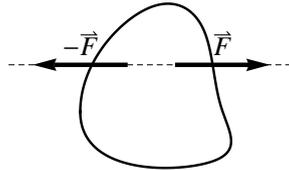
Une échelle est appuyée contre un mur.

1. On applique les conditions d'équilibre pour calculer l'angle critique  $\theta_c$ , par rapport à l'horizontale, au-delà duquel l'échelle glisse et tombe par terre. On montre que  $\tan \theta_c = 1/(2\mu_s)$  où  $\mu_s$  est le coefficient de frottement statique.
2. On positionne l'échelle à l'angle critique. Peut-on monter sur l'échelle ? Si oui, jusqu'où ?

Notons qu'un choix judicieux du point par rapport auquel on calcule les moments de forces simplifie la résolution du problème.

**Solide à l'équilibre sous l'effet de deux forces**

Considérons un solide rigide qui est à l'équilibre sous l'effet de deux forces. Ces forces doivent être opposées pour satisfaire la première condition d'équilibre, et elles doivent avoir le même support pour satisfaire la seconde condition d'équilibre.



**Forces coplanaires**

Il arrive souvent que toutes les forces soient dans un même plan, on dit qu'elles sont *coplanaires*. Dans cette situation, on peut simplifier le problème en choisissant un référentiel *Oxyz* dont l'axe *Oz* est perpendiculaire au plan. La première condition d'équilibre conduit à deux équations :

$$\sum_i F_{ix} = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0$$

et la seconde condition d'équilibre se résume à une seule équation :

$$\tau_{oz} = \sum_i \pm r_{i\perp} \|F_i\| = 0$$

où il faut compter négativement les moments qui produisent une rotation dans le sens horaire et positivement les moments qui produisent une rotation dans le sens anti-horaire.

**7.5. Centre de gravité**

Considérons un solide rigide sous l'effet de la pesanteur. Chaque point matériel  $m_i$  constituant le solide est soumis à une force de poids  $F_i = m_i g$ .

**Résultante des forces de poids**

La force résultante vaut :

$$\vec{F} = \sum_i m_i \vec{g} = M \vec{g}$$

où  $M = \sum_i m_i$  est la masse totale du solide.

**Moment résultant des forces de poids**

Le moment résultant par rapport à un point *O* quelconque vaut :

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_o &= \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{g} \\ &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{g} \\ &= \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} \times M \vec{g} \\ &= \vec{R}_{CG} \times M \vec{g} \end{aligned}$$

**Centre de gravité**

Dans la dernière équation, on a défini le *centre de gravité* (CG) du solide de la façon suivante :

$$\vec{R}_{CG} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

On voit donc que le moment résultant produit par le poids d'un solide rigide est égal à celui d'un objet de même poids mais qui serait concentré en son centre de gravité.

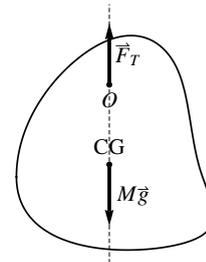
**Indépendance du point de référence**

Notons que cette définition du centre de gravité est indépendante du choix du point de référence. En effet, pour un point *O'* différent on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{R}'_{CG} &= \frac{\sum_i m_i \vec{r}'_i}{\sum_i m_i} \\ &= \frac{\sum_i m_i (\vec{O}'\vec{O} + \vec{r}_i)}{\sum_i m_i} \\ &= \vec{O}'\vec{O} + \vec{R}_{CG} \end{aligned}$$

**Propriétés du centre de gravité**

1. Pour qu'un objet suspendu soit en équilibre, il faut que son centre de gravité soit à la verticale du point de suspension. En effet, le moment résultant par rapport au point de suspension *O* vaut  $\vec{\tau}_o = \vec{R}_{CG} \times M \vec{g}$ . A l'équilibre  $\vec{\tau}_o = 0$  donc il faut que  $\vec{R}_{CG}$  soit parallèle à  $\vec{g}$ .



2. La propriété précédente fournit une méthode expérimentale pour déterminer le centre de gravité. Il suffit de suspendre l'objet par deux points différents *O* et *O'* et de repérer les droites verticales passant par ces points. Le centre de gravité se trouve à leur intersection.
3. Le centre de gravité se trouve toujours sur les plans ou droites de symétrie d'un solide. S'il y en a plusieurs (3 plans, 2 droites) alors le CG est à leur intersection.
4. Pour un solide complexe ( $M, \vec{R}_{CG}$ ) qui peut être fractionné en plusieurs corps simples ( $M_i, \vec{R}_{CGi}$ ), on peut calculer son centre de gravité de la manière suivante :

$$\vec{R}_{CG} = \frac{\sum_i M_i \vec{R}_{CGi}}{\sum_i M_i}$$

5. Pour un solide homogène c'est-à-dire de densité  $\rho$  indépendante de la position, il faut remplacer les sommes par des intégrales :

$$\vec{R}_{CG} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \rightarrow \vec{R}_{CG} = \frac{\int_V \vec{r} \rho dV}{\int_V \rho dV}$$

6. Le moment résultant des forces de pesanteur par rapport au centre de gravité est nul.

### Démonstration de cours

On détermine expérimentalement le centre de gravité d'un objet en utilisant la méthode décrite ci-dessus au point 2.

## 7.6. Stabilité de l'équilibre

### Polygone de sustentation

Considérons une chaise posée sur un plan incliné. Pour qu'elle soit en équilibre, il faut que son centre de gravité soit au-dessus de la surface polygonale délimitée par les points de contact des quatre pieds avec le sol. Pour un objet plus général, on appelle *polygone de sustentation* la surface délimitée par les points de contact de l'objet avec le sol. Dès que la verticale passant par le centre de gravité de l'objet sort du polygone de sustentation, le moment résultant est non nul donc l'équilibre est rompu.

### Stabilité de l'équilibre

Considérons un solide rigide soumis à deux forces : son poids  $M\vec{g}$  et une force de soutien  $\vec{F}_N$ . Une condition nécessaire pour qu'il soit en équilibre est que les lignes d'action des deux forces coïncident. Lorsqu'on écarte légèrement le solide de sa position d'équilibre, le moment résultant n'est plus forcément nul, et on distingue les trois cas suivants :

1. l'équilibre est stable si le moment résultant ramène le solide vers sa position d'équilibre.
2. l'équilibre est instable si le moment résultant éloigne le solide de sa position d'équilibre.
3. l'équilibre est indifférent si le moment résultant est nul.

Ces trois cas sont illustrés dans la figure 7.4.

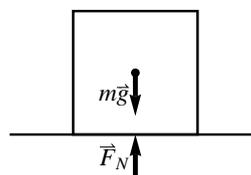
## 7.7. Quelques exemples

### Exemple 1 : Equilibriste

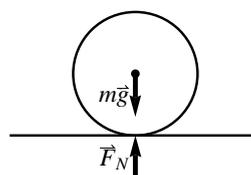
Un équilibriste doit toujours garder son centre de gravité à la verticale du point d'appui. Notons que l'équilibre est instable.



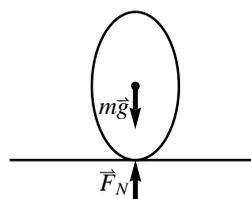
(a) Equilibre stable



(b) Equilibre indifférent



(c) Equilibre instable



**Figure 7.4.:** Comparaison des trois types d'équilibre : (a) stable (b) indifférent (c) instable.

### Exemple 2 : Saut en hauteur

Lors d'un saut en hauteur, l'athlète adopte une position qui lui permet de passer au-dessus de la barre alors que son centre de gravité passe au-dessous. Ceci lui permet, pour une énergie mécanique donnée, de gagner quelques centimètres.



### Démonstration de cours

On peut abaisser le centre de gravité d'un funambule avec une tige en forme d'arc qui soutient deux contre-poids. Lorsque le centre de gravité est situé au-dessous du point d'appui, l'équilibre est stable.

## 8. Travail, puissance et énergie

L'énergie est un concept important qui intervient dans tous les domaines scientifiques. Sa conservation est une loi fondamentale, qui découle de l'invariance des lois physiques dans le temps, avec des conséquences pratiques omniprésentes dans notre société. Une formulation précise et quantitative des concepts de travail et d'énergie est nécessaire pour appliquer la loi de conservation à des situations pratiques, ainsi que pour comprendre ses conséquences.

### 8.1. Travail d'une force

Considérons un point matériel en mouvement sous l'influence d'une force  $\vec{F}$ . On définit le *travail de la force  $\vec{F}$*  durant un court instant  $\Delta t$  par le produit scalaire :

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{l}$$

où  $\Delta \vec{l}$  est le déplacement du point matériel durant l'instant  $\Delta t$ . Selon les propriétés du produit scalaire, ce travail dépend de l'angle  $\theta$  entre la force et le déplacement :

$$\Delta W = \|\vec{F}\| \|\Delta \vec{l}\| \cos \theta$$

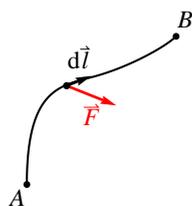
On peut aussi écrire :

$$\Delta W = F_{//} \|\Delta \vec{l}\|$$

où  $F_{//} = \|\vec{F}\| \cos \theta$  est la composante de la force  $\vec{F}$  qui est parallèle au déplacement. Le travail fourni par la force au point matériel est positif lorsque la force va dans la même direction que le déplacement ( $\theta < 90^\circ$ ), nul lorsque la force est orthogonale au déplacement ( $\theta = 90^\circ$ ), et négatif lorsque la force va dans la direction opposée au déplacement ( $\theta > 90^\circ$ ). Ceci est illustré dans la figure 8.1.

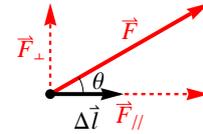
Pour obtenir le travail total sur un chemin quelconque qui part de  $A$  et arrive en  $B$ , on peut découper la trajectoire du point matériel en petits déplacements  $\Delta \vec{l}_i$  et sommer les travaux élémentaires, ce qui donne :

$$W = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{l}_i = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

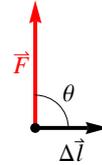


L'unité du travail est le joule ( $1\text{J} = 1\text{Nm}$ ).

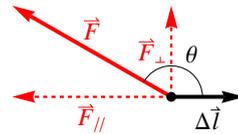
(a)  $\Delta W > 0$



(b)  $\Delta W = 0$



(c)  $\Delta W < 0$



**Figure 8.1.:** Comparaison de trois situations où le travail de la force  $\vec{F}$  est (a) positif (b) nul (c) négatif. C'est la composante parallèle au déplacement  $\vec{F}_{//}$  qui fournit tout le travail. Par contre, la composante perpendiculaire  $\vec{F}_\perp$  ne travaille pas.

### 8.2. Puissance

La quantité de travail fourni au point matériel par unité de temps est appelée la *puissance*. La puissance moyenne durant un instant  $\Delta t$  vaut :

$$P_m = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\vec{F} \cdot \Delta \vec{l}}{\Delta t}$$

et la puissance instantanée s'obtient en passant à la limite d'un instant infiniment court :

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Selon les propriétés du produit scalaire, la puissance dépend de l'angle  $\theta$  entre la force et le vecteur vitesse :

$$P = \|\vec{F}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$$

Tout comme le travail, elle peut être positive, nulle, ou négative selon que l'angle  $\theta$  est inférieur à  $90^\circ$ , égal à  $90^\circ$ , ou supérieur à  $90^\circ$  (voir la figure 8.1). L'unité de la puissance est le watt ( $1\text{W} = 1\text{J/s}$ ).

### 8.3. Energie cinétique

Considérons un point matériel en mouvement sous l'influence d'une force résultante  $\vec{F}$  et calculons le



**Figure 8.2.:** James Prescott Joule (1818 - 1889) était un brasseur et physicien anglais. Fils d'un brasseur prospère, Joule n'occupa pas de chaire universitaire, ni aucune position scientifique rémunérée. Il travailla dans la brasserie familiale jusqu'en 1854 avant de se consacrer entièrement à la recherche. Il est connu pour avoir déterminé l'équivalent mécanique de la chaleur ainsi que pour sa découverte de l'effet Joule par lequel un courant électrique produit de la chaleur lorsqu'il traverse une résistance. L'histoire a retenu son nom pour l'unité de l'énergie.

travail effectué par cette force durant un court instant  $\Delta t$ . En utilisant la seconde loi de Newton ainsi que la définition de l'accélération, on obtient successivement :

$$\begin{aligned}\Delta W &= \vec{F} \cdot \Delta \vec{l} \\ &= m\vec{a} \cdot \Delta \vec{l} \\ &= m \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} \cdot \Delta \vec{l} \\ &= m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \frac{1}{2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \\ &= \frac{1}{2}m(\vec{v}_2^2 - \vec{v}_1^2)\end{aligned}$$

Cette dernière expression nous conduit à définir l'énergie cinétique du point matériel par :

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$$

De cette façon, on peut écrire  $\Delta W$  sous la forme suivante :

$$\Delta W = E_{\text{cin}2} - E_{\text{cin}1}$$

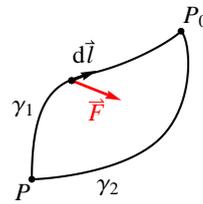
Il s'agit d'un principe fondamental, qui peut aussi s'énoncer ainsi :

*L'énergie cinétique finale d'un point matériel est égale à son énergie cinétique initiale augmentée du travail effectué par la force résultante.*

En divisant l'équation précédente par l'intervalle de temps  $\Delta t$  et en passant à la limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , on obtient :

$$P = \frac{dE_{\text{cin}}}{dt}$$

On peut donc conclure que la puissance fournie par la force  $\vec{F}$  provoque une variation de l'énergie cinétique du point matériel par unité de temps.



**Figure 8.3.:** Illustration de la définition de l'énergie potentielle. Lorsque le travail de la force  $\vec{F}$  est indépendant du chemin parcouru,  $\gamma_1$  ou  $\gamma_2$ , on peut définir l'énergie potentielle en  $P$  comme le travail que fournirait la force  $\vec{F}$  au point matériel s'il se déplaçait de  $P$  à  $P_0$ .

## 8.4. Energie potentielle

Considérons un point matériel en mouvement sous l'influence d'une force  $\vec{F}$ . On dit que *la force est conservative* si le travail qu'elle effectue est indépendant du chemin parcouru :

$$W = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

où  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont deux chemins différents de  $P$  vers  $Q$ , comme illustré sur la figure 8.3. Notons que cette condition est équivalente à demander que le travail effectué sur un chemin fermé quelconque soit nul :

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

Si cette condition est satisfaite, alors il est utile de définir l'énergie potentielle au point  $P$  de la façon suivante :

$$E_{\text{pot}}(P) = \int_P^{P_0} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

où  $P_0$  est un point de référence choisi de façon arbitraire pour lequel  $E_{\text{pot}}(P_0) = 0$ . Selon cette définition, l'énergie potentielle est le travail que la force  $\vec{F}$  fournirait au point matériel s'il se déplaçait de  $P$  à  $P_0$ . En général, on s'intéresse plutôt à la différence d'énergie potentielle entre deux points  $P$  et  $Q$  :

$$E_{\text{pot}}(Q) - E_{\text{pot}}(P) = \int_Q^P \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

## 8.5. Conservation de l'énergie

Considérons un point matériel en mouvement sous l'influence de plusieurs forces. Notons  $\vec{F}_c$  la résultante des forces conservatives et  $\vec{F}_{\text{nc}}$  la résultante des forces non conservatives. La force résultante peut donc s'écrire :

$$\vec{F}_{\text{res}} = \vec{F}_c + \vec{F}_{\text{nc}}$$

Calculons les travaux effectués par ces forces :

$$\int_P^Q \vec{F}_{\text{res}} \cdot d\vec{l} = \int_P^Q \vec{F}_c \cdot d\vec{l} + \int_P^Q \vec{F}_{\text{nc}} \cdot d\vec{l}$$

Nous avons vu que le travail de la force résultante produit une variation d'énergie cinétique, et que le travail des forces conservatives peut s'exprimer comme une différence d'énergie potentielle :

$$E_{\text{cin}}^Q - E_{\text{cin}}^P = E_{\text{pot}}^P - E_{\text{pot}}^Q + \int_P^Q \vec{F}_{\text{nc}} \cdot d\vec{l}$$

En regroupant les termes, nous obtenons l'équation suivante qui exprime la conservation de l'énergie :

$$E_{\text{cin}}^Q + E_{\text{pot}}^Q = E_{\text{cin}}^P + E_{\text{pot}}^P + W_{\text{nc}}$$

où  $W_{\text{nc}}$  est le travail des forces non conservatives :

$$W_{\text{nc}} = \int_P^Q \vec{F}_{\text{nc}} \cdot d\vec{l}$$

Dans le cas particulier où le travail des forces non conservatives est nul, la somme des énergies cinétique et potentielle, qu'on appelle aussi *l'énergie mécanique*, est conservée :

$$W_{\text{nc}} = 0 \Rightarrow E_{\text{cin}}^Q + E_{\text{pot}}^Q = E_{\text{cin}}^P + E_{\text{pot}}^P$$

## 8.6. Forces conservatives

### Force de pesanteur

Le poids est une force conservative :

$$\vec{F}_P = m\vec{g}$$

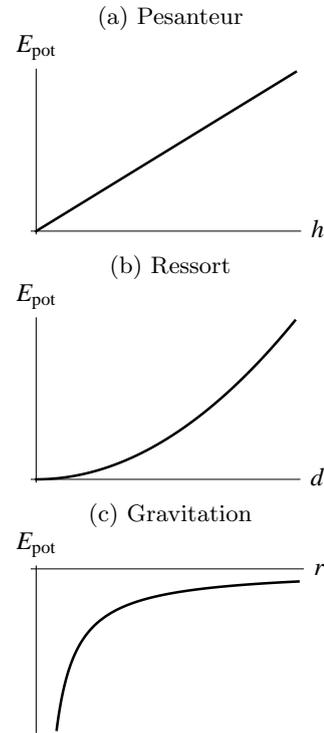
Choisissons un système de coordonnées  $Oxyz$  tel que l'axe  $Oz$  est vertical dirigé vers le haut, et dont l'origine  $O$  est le point de référence où l'énergie potentielle s'annule. Dans ce système de coordonnées :

$$m\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

où  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  est l'accélération de la pesanteur. L'énergie potentielle se calcule ainsi :

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}}(P) &= \int_P^O m\vec{g} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_P^O -mg dz \\ &= mgh \end{aligned}$$

où  $h$  est la hauteur du point  $P$ . On constate ainsi que l'énergie potentielle de la pesanteur augmente linéairement avec la hauteur (voir la figure 10.1). Attention, ceci n'est valable que dans une région limitée du champ de gravitation terrestre où le poids peut être considéré comme constant.



**Figure 8.4.:** Energie potentielle (a) de la force de pesanteur (b) de la force d'un ressort (c) de la force de gravitation.

### Force d'un ressort

La force élastique d'un ressort est conservative :

$$F_R = kd$$

où  $d = L - L_0$  est la déformation du ressort. Choisissons un système de coordonnées  $Oxyz$  tel que l'axe  $Ox$  soit dans la direction du ressort et donc l'origine correspond à la position du ressort au repos. Dans ce système de coordonnées :

$$\vec{F}_R = \begin{pmatrix} -kx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'énergie potentielle se calcule ainsi :

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}}(P) &= \int_P^O \vec{F}_R \cdot d\vec{l} \\ &= \int_P^O -kx dx \\ &= \frac{1}{2}k d^2 \end{aligned}$$

où  $d$  est déformation du ressort qui correspond à la position du point  $P$  selon  $Ox$ .

### Force de gravitation

La force de gravitation est une force conservative. Considérons la force produite par un corps de masse  $M$  sur un point matériel de masse  $m$ . Choisissons

l'origine du système de coordonnées au centre de gravité du corps de masse  $M$  de sorte que la force de gravitation s'écrit :

$$\vec{F}_G = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

L'énergie potentielle se calcule ainsi :

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}}(P) &= \int_P^{P_0} -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_P^{P_0} -G \frac{Mm}{r^2} dr \\ &= GMm \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \end{aligned}$$

où  $r$  et  $r_0$  sont les distances radiales des points  $P$  et  $P_0$ . En choisissant le zéro de l'énergie potentielle à l'infini, on obtient :

$$E_{\text{pot}}(P) = -\frac{GMm}{r}$$

Une énergie potentielle négative indique que l'objet de masse  $m$  est piégé par l'attraction gravitationnelle du corps de masse  $M$ , il s'agit de l'énergie qu'il faudrait lui donner pour le libérer.

## 8.7. Forces non conservatives

Les forces de frottement sont non conservatives car leur travail dépend du chemin parcouru par l'objet. On ne peut donc pas leur associer d'énergie potentielle, et il faut tenir compte de leur travail dans le terme  $W_{\text{nc}}$  de l'équation de conservation de l'énergie :

$$E_{\text{cin}}^Q + E_{\text{pot}}^Q = E_{\text{cin}}^P + E_{\text{pot}}^P + W_{\text{nc}}$$

Le frottement est toujours opposé à la vitesse, donc le travail qu'il produit est négatif :

$$W_{\text{nc}} = \int \vec{F}_F \cdot d\vec{l} < 0$$

ce qui provoque une diminution de l'énergie mécanique. L'énergie dissipée par les forces de frottement est principalement convertie sous forme de chaleur, une autre forme de l'énergie. Il est important de souligner que l'énergie ne peut pas être détruite, ni créée, elle peut seulement être transformée de sorte que l'énergie totale reste constante.

## 8.8. Exemples et démonstrations

### Exemple 1 : balistique

Un objet est lancé verticalement vers le haut depuis le sol. Sachant que la vitesse initiale vaut  $\vec{v}_0$ , calculer la hauteur qu'il atteint si les frottements sont négligeables. On suppose que  $v_0$  n'est pas trop grande de sorte que l'accélération de la pesanteur  $g$  peut être considérée comme constante tout au long de la trajectoire.

### Exemple 2 : plan incliné

Un objet, qui peut être considéré comme ponctuel, descend d'une hauteur  $h$  sur un plan incliné. Les frottements sont négligeables et la vitesse initiale est nulle. Calculer la vitesse finale de l'objet lorsqu'il arrive en bas du plan incliné. Comment est-ce que cette vitesse finale dépend de l'angle que le plan incliné fait avec l'horizontale ?

### Exemple 3 : vitesse de libération

Un objet est lancé verticalement vers le haut depuis la Terre et on néglige les frottements. Calculer la vitesse initiale minimale qui est nécessaire pour libérer complètement l'objet de l'attraction terrestre, c'est-à-dire pour que l'objet s'éloigne indéfiniment de la Terre. Cette vitesse est appelée *la vitesse de libération*.

### Démonstration de cours

Une bille descend d'une hauteur  $h$  sur un rail pour effectuer un looping suivant un cercle de rayon  $R$ . Calculer la hauteur minimale, par rapport au point le plus bas du cercle, pour qu'elle effectue le looping sans jamais décoller du rail. Sa vitesse initiale est nulle et on néglige les frottements.

### Démonstration de cours

Un objet retenu par un ressort est lâché dans le champ de la pesanteur. Calculer sa position au point le plus bas sachant que sa vitesse initiale est nulle, que sa position initiale correspond au ressort non tendu, et que la constante du ressort vaut  $k$ .

## 9. Quantité de mouvement et collisions

La quantité de mouvement joue un rôle fondamental en physique. Elle est conservée car les lois de la physique sont invariantes sous l'effet des translations. Dans ce chapitre nous allons établir les théorèmes fondamentaux puis nous étudierons leurs conséquences.

### 9.1. Quantité de mouvement

#### Définition pour un point matériel

La quantité de mouvement d'un point matériel est le produit de sa masse par sa vitesse :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

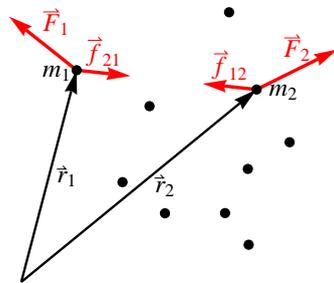
L'unité de la quantité de mouvement est le kilogramme mètre par seconde (kg m/s).

### 9.2. Théorème du centre de masse

#### Système de points matériels

Considérons un système composé de  $N$  points matériels  $m_i$  de positions  $\vec{r}_i$ . Introduisons les notations suivantes :

- $\vec{F}_i$  la somme des forces externes agissant sur  $m_i$ ,
- $\vec{f}_{ki}$  la force interne de  $m_k$  sur  $m_i$ ,
- $M = \sum_i m_i$  la masse totale,
- $\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$  la position du centre de masse.



#### Quantité de mouvement totale

La quantité de mouvement totale du système de points matériels s'écrit alors :

$$\vec{P}_{\text{tot}} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = M \dot{\vec{R}}_{CM}$$

On constate que la quantité de mouvement totale est égale au produit de la masse totale par la vitesse du centre de masse.

#### Théorème du centre de masse

Chaque point matériel  $m_i$  satisfait l'équation de Newton :

$$\vec{F}_i + \sum_k \vec{f}_{ki} = m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

En sommant les équations de Newton pour tous les points matériels, il vient :

$$\sum_i (\vec{F}_i + \sum_k \vec{f}_{ki}) = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

Toutefois, selon la loi d'action-réaction on a  $f_{ki} = -f_{ik}$  donc la somme de toute les forces internes est nulle :

$$\sum_i \sum_k \vec{f}_{ki} = 0$$

En insérant ce résultat ainsi que la quantité de mouvement totale dans l'équation précédente, on obtient :

$$\sum_i \vec{F}_i = \dot{\vec{P}}_{\text{tot}} = M \ddot{\vec{R}}_{CM}$$

Autrement dit, le mouvement du centre de masse obéit à l'équation de Newton d'un point matériel de masse  $M$  soumis à la résultante des forces externes.

### 9.3. Conservation de la quantité de mouvement

Considérons un système composé de  $N$  points matériels  $m_i$  de positions  $\vec{r}_i$ . Selon le théorème du centre de masse, si la résultante des forces externes est nulle alors la quantité de mouvement totale est constante :

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \vec{P}_{\text{tot}} = \text{const}$$

Il s'agit d'un théorème important de conservation de la quantité de mouvement, qui dépasse le cadre de la mécanique classique et reste valable aussi bien dans le contexte de la mécanique quantique que celui de la théorie de la relativité.

#### Démonstration de cours : propulsion d'une fusée

Une fusée se propulse en éjectant du gaz dans la direction opposée au mouvement. Pour que la quantité de mouvement totale du système (gaz et fusée) soit conservée, il faut que la fusée accélère dans l'autre sens. De cette façon la propulsion de la fusée est aussi possible dans le vide, elle ne s'appuie pas sur le sol ou sur l'atmosphère comme on pourrait le croire naïvement.

## 9.4. Collisions

On dit qu'il y a collision ou choc entre plusieurs particules lorsqu'elles subissent une interaction mutuelle qui est localisée dans le temps et dans l'espace. Ceci signifie que la durée du choc est courte par rapport au temps d'observation de sorte qu'on peut distinguer la période qui précède le choc (avant) et celle qui le suit (après). Durant la collision, les forces externes sont négligeables par rapport aux forces internes. Par conséquent, la quantité de mouvement totale du système est toujours conservée lors d'une collision.

$$\vec{P}_{\text{tot}} = \text{const}$$

Par contre, ce n'est pas le cas pour l'énergie cinétique totale qui peut varier durant la collision :

$$E_{\text{cin}}^{\text{finale}} = E_{\text{cin}}^{\text{initiale}} + Q$$

La collision est dite élastique lorsque  $Q = 0$  et inélastique lorsque  $Q \neq 0$ .

### 9.4.1. Collisions inélastiques

Considérons une collision unidimensionnelle entre deux particules de masses  $m_1$  et  $m_2$ . Leurs vitesses sont  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  avant la collision et  $\vec{v}'_1, \vec{v}'_2$  après la collision. La conservation de la quantité de mouvement totale s'écrit de la façon suivante :

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$$

Cette équation ne suffit pas, en général, pour déterminer les vitesses finales en fonction des vitesses initiales. Pour poursuivre, nous analyserons quelques cas particuliers instructifs.

#### Exemple 1 : choc mou

Lorsque les particules restent collées après la collision, on dit qu'il s'agit d'un *choc mou* ou d'une *collision complètement inélastique*. Dans ce cas :

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}'_2 \equiv \vec{v}'$$

et on peut résoudre l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour obtenir la vitesse finale :

$$\vec{v}' = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Notons que la variation d'énergie cinétique vaut :

$$Q = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 < 0$$

#### Démonstration de cours

Observation de chocs mou avec des chariots sur rail à coussin d'air :

1. Si  $m_1 = m_2$  et  $\vec{v}_2 = 0$  alors  $\vec{v}' = \vec{v}_1/2$ .
2. Si  $m_1 = m_2$  et  $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$  alors  $\vec{v}' = 0$ .

#### Exemple 2 : explosion

Lors d'une explosion, les deux particules initialement au repos  $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = 0$  sont éjectées avec des vitesses  $\vec{v}'_1, \vec{v}'_2$ . Comme la quantité de mouvement totale est nulle, les vitesses finales sont liées par :

$$\vec{v}'_2 = -\frac{m_1}{m_2}\vec{v}'_1$$

#### Démonstration de cours

Simulation d'une explosion avec deux chariots sur rail à coussin d'air qui sont repoussés par un ressort.

1. Si  $m_1 = m_2$  alors  $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ .
2. Si  $m_1 = 2m_2$  alors  $\vec{v}_1 = \vec{v}_2/2$ .

### 9.4.2. Collisions élastiques

Considérons la collision élastique d'un projectile de masse  $m_1$  sur une cible de masse  $m_2$  qui est immobile. Leurs vitesses sont  $\vec{v}_1 \neq 0, \vec{v}_2 = 0$  avant la collision et  $\vec{v}'_1, \vec{v}'_2$  après la collision. Comme la collision est élastique, la quantité de mouvement et l'énergie cinétique sont conservées :

$$m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$$

En résolvant ce système d'équations, on obtient les vitesses finales suivantes :

$$\vec{v}'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_1$$

$$\vec{v}'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_1$$

On observe que  $\vec{v}'_2$  va dans la même direction que  $\vec{v}_1$  alors que  $\vec{v}'_1$  peut changer de sens suivant les valeurs des masses. Etudions quelques cas intéressants.

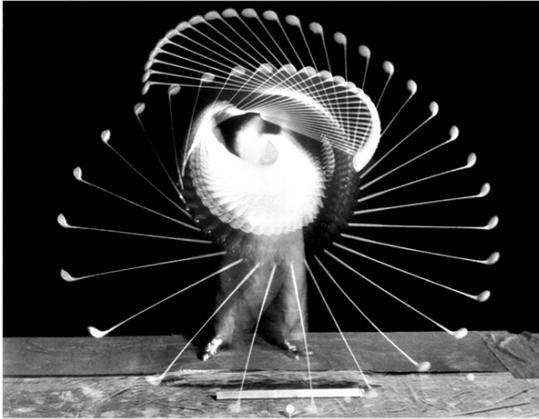
#### Exemple 1 : Balle qui rebondit

Si  $m_2 \gg m_1$  alors  $\vec{v}'_1 = -\vec{v}_1$  et  $\vec{v}'_2 = 0$ . La cible reste immobile et le projectile rebondit avec une vitesse finale opposée à la vitesse incidente. Ceci est bien visible sur le premier rebond de la balle dans la photographie ci-dessous.



**Exemple 2 : Swing**

Si  $m_1 \gg m_2$  alors  $\vec{v}'_1 = \vec{v}_1$  et  $\vec{v}'_2 = 2\vec{v}_1$ . Le projectile continue non perturbé et la cible est projetée à une vitesse double de celle du projectile. Ceci est bien visible sur la photographie stroboscopique d'un swing ci-dessous : après l'impact, le club de golf continue à la même vitesse alors que la balle part avec une vitesse double.

**Exemple 3 : échange des vitesses**

Si  $m_1 = m_2$  alors  $\vec{v}'_1 = 0$  et  $\vec{v}'_2 = \vec{v}_1$ . Le projectile et la cible ont échangé leurs vitesses.

**Démonstration de cours**

Démonstration de l'échange des vitesses avec des chariots sur rail à coussin d'air ainsi qu'avec le pendule de Newton, voir la photo ci-dessous.





## 10. Mouvement de rotation

Le mouvement de rotation peut conduire à des manifestations spectaculaires qui défient l'intuition. Pourtant les lois physiques qui régissent la rotation d'un solide rigide résultent des lois de Newton appliquées aux éléments de masse qui composent le solide. Dans ce chapitre, nous allons commencer par démontrer ces lois, puis étudier leurs conséquences.

### 10.1. Mouvement circulaire général d'un point matériel

#### Description du mouvement

Le mouvement est dit *circulaire* si la trajectoire est un cercle. L'horaire peut s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} x(t) &= R \cos(\theta(t)) \\ y(t) &= R \sin(\theta(t)) \\ z(t) &= 0 \end{aligned}$$

où  $\theta(t)$  est la *position angulaire* qui se mesure en radians ( $1\text{rad} = \frac{360}{2\pi}$  degrés) et  $R$  le rayon du cercle.

#### Vitesse vectorielle et angulaire

La vitesse s'obtient par dérivation de la position :

$$\begin{aligned} v_x(t) &= -\omega R \sin(\theta(t)) \\ v_y(t) &= \omega R \cos(\theta(t)) \\ v_z(t) &= 0 \end{aligned}$$

où  $\omega = \dot{\theta}$  est la *vitesse angulaire instantanée* (rad/s). Notons que la vitesse  $\vec{v}$  est perpendiculaire au rayon  $\vec{r}$  et sa norme est donnée par :

$$\|\vec{v}\| = \omega R$$

#### Accélération vectorielle et angulaire

L'accélération s'obtient par dérivation de la vitesse :

$$\begin{aligned} a_x(t) &= -\omega^2 R \cos(\theta(t)) - \alpha R \sin(\theta(t)) \\ a_y(t) &= -\omega^2 R \sin(\theta(t)) + \alpha R \cos(\theta(t)) \\ a_z(t) &= 0 \end{aligned}$$

où  $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$  est l'*accélération angulaire* (rad/s<sup>2</sup>). On constate que l'accélération  $\vec{a}$  est composée de deux termes :

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r} + \alpha R \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

Le premier terme est l'*accélération centripète* qui est dirigée vers le centre :

$$\vec{a}_c = -\omega^2 \vec{r}$$

Le second terme est l'*accélération tangentielle* :

$$\vec{a}_t = \alpha R \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

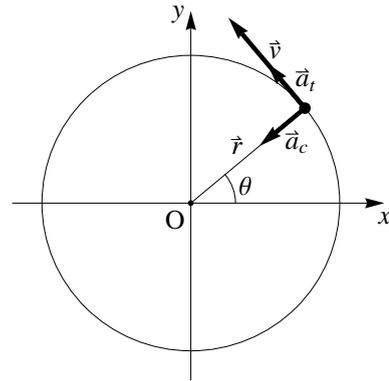


Figure 10.1.: Illustration du mouvement circulaire général d'un point matériel.

#### Dynamique de la rotation

Si le point matériel subit une force tangentielle, alors selon l'équation de Newton il en résulte une accélération tangentielle qui satisfait :

$$F_t = ma_t = mR\alpha$$

Multiplions les deux membres de l'équation par  $R$  pour faire apparaître le moment de la force par rapport à  $O$  :

$$\tau_o = RF_t = mR^2\alpha$$

Cette équation relie le moment de force à l'accélération angulaire qu'il produit. Elle suggère que  $mR^2$  est l'équivalent rotationnel de la masse, qu'on appelle le *moment d'inertie* du point matériel par rapport à l'axe de rotation passant par  $O$  :

$$I_o = mR^2$$

Le moment d'inertie est d'autant plus grand que la masse est grande et qu'elle se trouve éloignée de l'axe de rotation. L'unité du moment d'inertie est le kilogramme mètre au carré (kg m<sup>2</sup>).

#### Résumé des variables de rotation

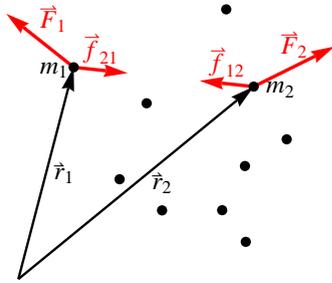
Translation	Rotation
position $\vec{r}$	angle $\theta$
vitesse $\vec{v}$	vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$
accélération $\vec{a}$	accélération angulaire $\alpha = \dot{\omega}$
dynamique $\vec{F} = m\vec{a}$	dynamique $\tau_o = I_o\alpha$

## 10.2. Théorème du moment cinétique

### Système de points matériels

Considérons un système composé de  $N$  points matériels  $m_i$  de positions  $\vec{r}_i$ . Introduisons les notations suivantes :

- $\vec{F}_i$  la somme des forces externes agissant sur  $m_i$ ,
- $\vec{f}_{ki}$  la force interne de  $m_k$  sur  $m_i$ ,
- $M = \sum_i m_i$  la masse totale,
- $\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$  la position du centre de masse.



### Théorème du moment cinétique

Chaque point matériel  $m_i$  satisfait l'équation de Newton :

$$\vec{F}_i + \sum_k \vec{f}_{ki} = m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

En multipliant cette équation vectoriellement par  $\vec{r}_i$  et en sommant sur  $i$ , il vient pour le membre de gauche :

$$\sum_i \vec{r}_i \times (\vec{F}_i + \sum_k \vec{f}_{ki}) = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{\tau}_0$$

où  $\vec{\tau}_0$  est le moment résultant des forces externes par rapport à  $O$  et la première égalité découle du fait que le moment résultant des forces internes est nul car  $\vec{f}_{ki} = -\vec{f}_{ik}$  et avec l'hypothèse que  $\vec{f}_{ki} \propto \vec{r}_k - \vec{r}_i$ . Pour le membre de droite, on obtient :

$$\sum_i \vec{r}_i \times m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} \left( \sum_i \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i \right) = \frac{d}{dt} \vec{L}_0$$

où l'on a défini le *moment cinétique total* par rapport à  $O$  de la façon suivante :

$$\vec{L}_0 = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i$$

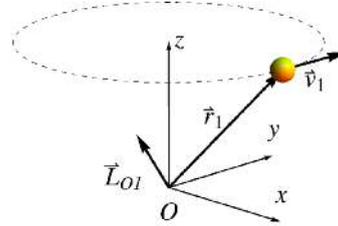
Il s'agit d'une grandeur importante qui est l'analogue de la quantité de mouvement mais pour les rotations. Nous avons ainsi démontré le théorème du moment cinétique :

$$\vec{\tau}_0 = \frac{d}{dt} \vec{L}_0$$

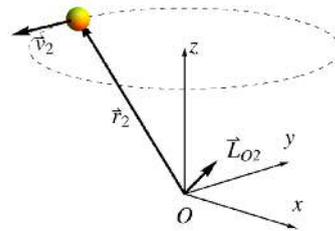
Notons que ce théorème est valable par rapport à l'origine  $O$  d'un référentiel d'inertie. En principe, il perd sa validité dans un référentiel non inertiel. Toutefois, on peut montrer qu'il reste valable par rapport au centre de masse du solide, quelque soit le mouvement du centre de masse :

$$\vec{\tau}_{CM} = \frac{d}{dt} \vec{L}_{CM}$$

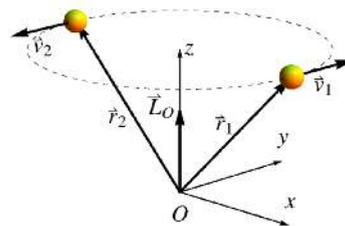
(a)



(b)



(c)



**Figure 10.2.:** Exemples de moment cinétique. La rotation s'effectue autour de  $Oz$  et  $\vec{L}_{0i} = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$  est perpendiculaire à  $\vec{r}_i$  et  $\vec{v}_i$ . (a) Situation où l'axe de rotation n'est pas un axe de symétrie :  $\vec{L}_{O1}$  n'est pas parallèle à  $\vec{\omega}$ . (b) Idem. (c) Situation où l'axe de rotation est un axe de symétrie :  $\vec{L}_0$  est parallèle à  $\vec{\omega}$  car les composantes perpendiculaires se compensent.

## 10.3. Conservation du moment cinétique

Considérons un système composé de  $N$  points matériels  $m_i$  de positions  $\vec{r}_i$ . Selon le théorème du moment cinétique, si le moment résultant des forces externes est nul alors le moment cinétique total est constant :

$$\vec{\tau}_0 = 0 \Rightarrow \vec{L}_0 = \text{const}$$

Il s'agit d'un théorème important, qui est l'équivalent rotationnel du théorème de la conservation de la quantité de mouvement.

### Démonstration de cours : gyroscope de Foucault

Observation d'un gyroscope libre s'orienter selon trois axes. Ceci garantit que le moment résultant



**Figure 10.3.:** Louis Poinsot (1777 - 1859) était un mathématicien et physicien français. Ses contributions à la mécanique classique sont nombreuses, en particulier, en 1851 il publia un livre intitulé "Théorie nouvelle de la rotation des Corps" dans lequel il résout le problème général du mouvement d'un corps rigide autour d'un point fixe.

sur le rotor est nul. Par conséquent le rotor, qui est aligné avec le moment cinétique, garde son orientation fixe indépendamment du mouvement des cercles extérieurs.

#### Démonstration de cours : chaise tournante et roue

Observation du mouvement de rotation d'une personne assise sur une chaise libre de tourner autour d'un axe vertical. La personne tient une roue en rotation avec ses mains. En changeant l'orientation ainsi que la vitesse de rotation de la roue, on constate que la vitesse de rotation de la chaise s'adapte de sorte que le moment cinétique total soit constant.

### 10.4. Moment d'inertie et moment cinétique

Le moment d'inertie est l'équivalent rotationnel de la masse. Il joue donc un rôle important pour la dynamique d'un corps en rotation. Il permet d'exprimer le moment cinétique en fonction de la vitesse angulaire :

$$\vec{L}_0 = I_0 \vec{\omega}$$

où  $I_0$  est le moment d'inertie et  $\vec{\omega}$  est un vecteur dirigé selon l'axe de rotation, dont la norme est égale à la vitesse angulaire.

#### 10.4.1. Cas général

Dans le cas général d'un solide quelconque soumis à une rotation  $\vec{\omega}$  d'axe quelconque, le moment d'inertie n'est pas un nombre mais un *tenseur*, ce qui signifie que  $\vec{L}$  n'est pas parallèle à  $\vec{\omega}$ , comme illustré dans la figure 10.2. La dynamique de la rotation est alors compliquée. Par la suite, nous allons nous

restreindre à des cas plus simples où le moment d'inertie se réduit à un nombre.

#### 10.4.2. Solide rigide en rotation autour d'un axe fixe

Dans le cas d'un solide rigide en rotation autour d'un axe fixe, bien que  $\vec{L}$  ne soit pas forcément parallèle à  $\vec{\omega}$ , on peut simplifier la description de la dynamique en projetant les grandeurs vectorielles sur l'axe de rotation. En choisissant l'axe  $Oz$  aligné sur  $\vec{\omega}$ , la relation entre le moment cinétique et la vitesse angulaire devient :

$$L_z = I_z \omega$$

où  $I_z$  est le moment d'inertie par rapport à l'axe fixe  $Oz$  défini de la façon suivante :

$$I_z = \sum_i m_i r_{\perp i}^2$$

où  $r_{\perp i}$  est la distance de la masse  $m_i$  à l'axe de rotation. Finalement, le théorème du moment cinétique fournit l'équation de la dynamique :

$$\tau_z = \frac{d}{dt} L_z = I_z \alpha$$

qui est l'équivalent rotationnel de l'équation de Newton.

#### Démonstration de cours : variation de $I_z$

Observation du mouvement de rotation d'une personne assise sur une chaise libre de tourner autour d'un axe vertical. La vitesse angulaire diminue lorsqu'on écarte les bras et elle augmente lorsqu'on rapproche les bras du corps.

#### 10.4.3. Solide rigide en rotation autour d'un axe de symétrie

Dans le cas d'un solide rigide en rotation autour d'un axe de symétrie, le moment cinétique  $\vec{L}_0$ , par rapport à un point  $O$  situé sur l'axe de symétrie, est parallèle à  $\vec{\omega}$  car les composantes perpendiculaires se compensent comme illustré dans l'exemple (c) de la figure 10.2. On peut donc écrire :

$$\vec{L}_0 = I_{00'} \vec{\omega}$$

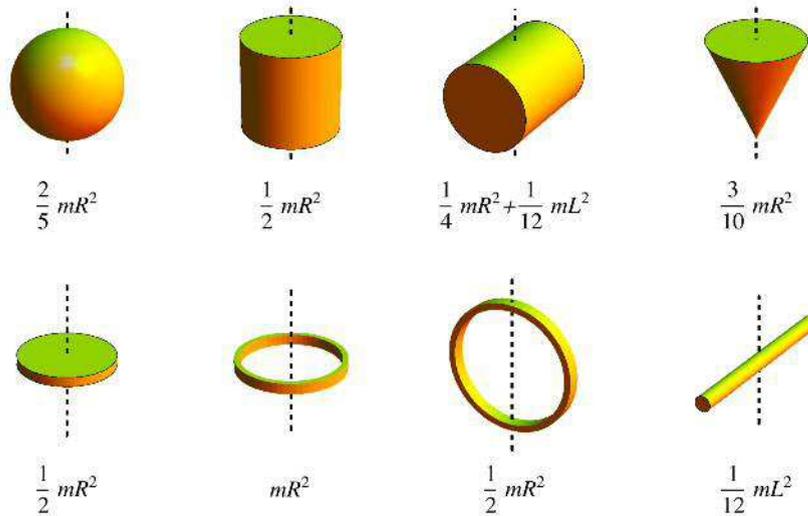
où  $I_{00'}$  est le moment d'inertie par rapport à l'axe de symétrie passant par  $O$  et  $O'$ . Il est défini de la façon suivante :

$$I_{00'} = \sum_i m_i r_{\perp i}^2$$

où  $r_{\perp i}$  est la distance de la masse  $m_i$  à l'axe de symétrie. Finalement, le théorème du moment cinétique fournit l'équation de la dynamique :

$$\vec{\tau}_0 = \frac{d}{dt} \vec{L}_0 = I_{00'} \vec{\alpha}$$

qui est l'équivalent rotationnel de l'équation de Newton.



**Figure 10.4.:** Table de moments d'inertie  $I_{00'}$  calculés par rapport à l'axe  $00'$  indiqué en trait discontinu dans chaque figure.  $R$  désigne le rayon du solide,  $L$  sa longueur, et  $m$  sa masse. Le moment d'inertie par rapport à un autre axe parallèle au premier se calcule à l'aide du théorème énoncé dans la section 10.4.4.

### Démonstration de cours : mouvement gyroscopique

Observation du mouvement de précession d'une roue en rotation qui est suspendue par une extrémité de son axe de rotation. Calcul de la vitesse de précession  $\Omega_{\text{pr}}$  :

$$\Omega_{\text{pr}} = \frac{r g}{\omega R^2}$$

où  $R$  est le rayon de la roue,  $\omega$  sa vitesse de rotation, et  $r$  la distance entre le point d'attache et le centre de l'axe de la roue.

#### 10.4.4. Calcul du moment d'inertie

Pour un solide homogène, le moment d'inertie par rapport à un axe  $00'$  se calcule de la façon suivant :

$$I_{00'} = \sum_i m_i r_{\perp i}^2 = \int_V \rho r_{\perp}^2 dV$$

où  $\rho$  est la masse volumique et  $r_{\perp}$  est la distance de l'élément de volume  $dV$  à l'axe de symétrie. D'une façon générale, le moment d'inertie sera d'autant plus grand que la masse est éloignée de l'axe. La figure 10.4 donne les valeurs de quelques moments d'inertie pour des solides symétriques par rapport à un axe de symétrie. On peut facilement calculer le moment d'inertie par rapport à un autre axe  $BB'$  parallèle à l'axe de symétrie  $AA'$  en utilisant le *théorème de l'axe parallèle* :

$$I_{BB'} = I_{AA'} + m d^2$$

où  $d$  est la distance séparant les deux axes.

### 10.5. Energie cinétique de rotation

Pour un corps rigide, l'énergie cinétique totale s'écrit :

$$E_{\text{cin}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Dans le cas d'un solide rigide en rotation autour d'un axe fixe  $Oz$  :

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

où  $I_z$  est le moment d'inertie par rapport à l'axe fixe  $Oz$ , qui se calcule comme expliqué dans la section 10.4.2. Dans le cas d'un solide rigide en translation et en rotation autour d'un axe de symétrie passant par son centre de masse, l'énergie cinétique est la somme de deux termes :

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} M R_{\text{CM}}^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \vec{\omega}^2$$

Le premier est l'énergie cinétique de translation et le second l'énergie cinétique de rotation.

### Démonstration de cours

Observation du mouvement de cylindres, un plein et l'autre creux, qui sont lâchés sur un plan incliné. Comparaison du cas où le plan incliné fait un angle petit avec l'horizontale avec celui où il fait un angle plus grand que  $45^\circ$ . Dans le premier cas, le frottement statique est suffisant pour que les cylindres roulent sans glisser, alors que ce n'est plus vrai dans le second cas de sorte qu'ils glissent sans rouler.

### **10.6. Correspondance entre les mouvements de translation et de rotation**

Il y a une grande similitude entre les mouvements de translation et de rotation. On retrouve la même structure pour les équations décrivant la cinématique et la dynamique. Le tableau 10.1 a pour but de rendre explicite la correspondance entre les grandeurs physiques associées aux translations et celles associées aux rotations.

**Table 10.1.:** Ce tableau résume la correspondance entre les grandeurs physiques associées aux translations et celles associées aux rotations. On constate que la structure des équations est la même.

Translation		Rotation	
Position	$\vec{r}$	Angle	$\theta$
Vitesse	$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$	Vitesse angulaire	$\omega = \dot{\theta}$
Accélération	$\vec{a} = \dot{\vec{v}}$	Accélération angulaire	$\alpha = \dot{\omega}$
Masse	$m$	Moment d'inertie	$I_z = \sum_i m_i r_{\perp i}^2$
Force	$\vec{F}$	Moment de force	$\vec{\tau}$
Quantité de mouvement	$\vec{P} = m\vec{v}$	Moment cinétique	$L_z = I_z\omega$
Dynamique I	$\vec{F} = \dot{\vec{P}}$	Dynamique I	$\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}$
Dynamique II	$\vec{F} = m\vec{a}$	Dynamique II	$\tau_z = I_z\alpha$
Energie cinétique	$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$	Energie cinétique	$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}I_z\omega^2$

## 11. Mouvement harmonique et résonance

Ce chapitre est consacré à l'étude des propriétés des systèmes oscillants. Nous commencerons par l'oscillateur harmonique simple, idéal et sans pertes d'énergie. Ensuite nous étudierons les conséquences d'une force dissipative qui introduit des pertes d'énergie dans le système. Puis, nous verrons comment une force extérieure peut fournir de l'énergie au système et ainsi le conduire au phénomène de résonance.

### 11.1. Oscillateur harmonique simple

Considérons une masse  $m$  attachée à un ressort selon le schéma de la figure 11.1. L'équation de Newton selon l'horizontale s'écrit :

$$m\ddot{x} = -kx$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

La solution est une oscillation (figure 11.2(a)) :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

où  $A$  est l'amplitude du mouvement,  $\phi$  est un déphasage constant,  $\omega_0 = 2\pi/T$  est la fréquence angulaire et  $T$  est la période, c'est-à-dire le temps nécessaire pour effectuer une oscillation complète. Lorsqu'on insère cette solution dans l'équation différentielle, on obtient la valeur de  $\omega_0$  :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

qui dépend de la constante du ressort  $k$  ainsi que de la masse  $m$ , mais est indépendante de l'amplitude  $A$  et de la phase  $\phi$ . On en déduit la valeur de la période du mouvement :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

#### Démonstration de cours

Observation du mouvement d'un chariot sur rail à coussin d'air qui est attaché à deux ressorts. On montre ainsi que la période dépend de la masse mais pas de l'amplitude du mouvement.

#### Conservation de l'énergie

L'énergie mécanique totale de l'oscillateur harmonique simple est conservée. Lorsque l'extension est maximale, toute l'énergie du système est sous forme

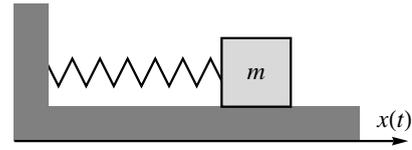


Figure 11.1.: Oscillateur harmonique simple.

potentielle élastique, de sorte que l'énergie totale vaut :

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}kA^2$$

Nous allons maintenant considérer le cas de l'oscillateur amorti pour lequel l'énergie mécanique totale diminue avec le temps à cause des frottements.

### 11.2. Oscillateur harmonique amorti

On ajoute un terme d'amortissement à l'équation de Newton de la section précédente :

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x}$$

où  $F_f = -\gamma\dot{x}$  est une force de frottement visqueux. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants.

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Pour trouver la solution, il faut essayer :

$$x(t) = Ae^{\lambda t}$$

On obtient ainsi l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 + \frac{\gamma}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

Cette équation possède deux solutions :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \omega_0^2}$$

ce qui donne la solution générale pour  $x(t)$  :

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

On distingue trois situations physiques différentes suivant la valeur du coefficient d'amortissement.

#### 11.2.1. Amortissement sous-critique

Lorsque  $\gamma \ll 2m\omega_0$  alors  $\lambda_{1,2}$  sont complexes conjugués :

$$\lambda_{1,2} \approx -\frac{\gamma}{2m} \pm i \left( \omega_0 - \frac{\gamma^2}{8\omega_0 m^2} \right)$$

On obtient :

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2m}t} \cos(\omega t + \phi)$$

où la fréquence de l'oscillation  $\omega$  est proche de la fréquence propre de résonance de l'oscillateur non amorti :

$$\omega \approx \omega_0 - \frac{\gamma^2}{8\omega_0 m^2}$$

Cette solution est illustrée dans la figure 11.2(b).

### 11.2.2. Amortissement critique

Lorsque  $\gamma = 2m\omega_0$  alors :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m}$$

La solution générale s'écrit :

$$x(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\frac{\gamma}{2m}t}$$

Cette solution est illustrée dans la figure 11.2(c).

### 11.2.3. Amortissement sur-critique

Lorsque  $\gamma \gg 2m\omega_0$  alors  $\lambda_{1,2}$  sont réels :

$$\lambda_1 \approx -\frac{\gamma}{m}$$

$$\lambda_2 \approx -\frac{m\omega_0^2}{\gamma}$$

On obtient :

$$x(t) = A_1 e^{-\frac{\gamma}{m}t} + A_2 e^{-\frac{m\omega_0^2}{\gamma}t}$$

Cette solution est illustrée dans la figure 11.2(d).

### Aspects énergétiques

Notons que l'énergie mécanique totale de l'oscillateur amorti décroît de façon exponentielle au cours du temps :

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}k \left( Ae^{-\frac{\gamma}{2m}t} \right)^2 = \frac{1}{2}kA^2 e^{-\frac{\gamma}{m}t}$$

Ceci signifie que pour maintenir le système en oscillation, il faut lui fournir de l'énergie de sorte à compenser les pertes. Nous allons donc considérer dans la section suivante le cas d'un oscillateur harmonique excité par une force externe.

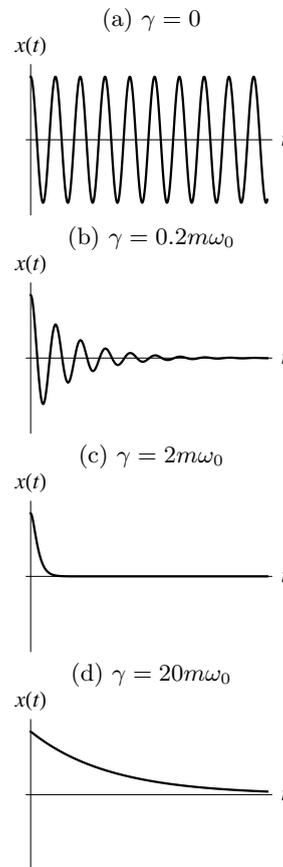
### 11.3. Oscillateur harmonique forcé

On ajoute un terme d'excitation à l'équation de Newton de la section précédente :

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + F_e(t)$$

où  $F_e(t) = F_0 \cos(\omega t)$  est une force externe qui excite le système. Il s'agit d'une équation différentielle inhomogène, du deuxième ordre à coefficients constants.

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_e}{m}$$



**Figure 11.2.:** Evolution de l'oscillateur harmonique pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement. (a) Sans amortissement (b) Amortissement sous-critique (c) Amortissement critique (d) Amortissement sur-critique.

La solution s'obtient en sommant la solution générale de l'équation homogène (sans second membre) avec une solution particulière de l'équation inhomogène (avec second membre). Physiquement, la solution de l'équation homogène représente le régime transitoire, qui se manifeste lorsqu'on enclenche le système, et qui disparaît avec le temps comme illustré sur les figures 11.2(b)-(d). Lorsqu'on attend suffisamment longtemps pour que le régime transitoire disparaisse, on atteint le régime stationnaire dans lequel le système oscille à la fréquence d'excitation. La solution stationnaire de l'équation inhomogène est donc de la forme :

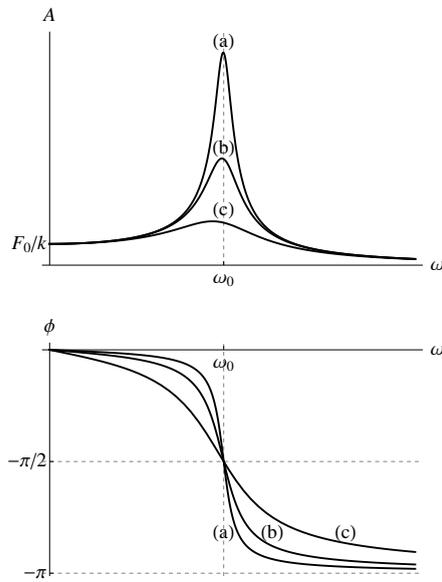
$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

En insérant cette expression dans l'équation différentielle, on constate qu'il s'agit d'une solution particulière à condition que :

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega/m)^2}}$$

et

$$\phi = -\arctan\left(\frac{\gamma\omega/m}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$



**Figure 11.3.:** Courbes de résonance de l'oscillateur harmonique forcé pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement. (a)  $\gamma = 0.1m\omega_0$  (b)  $\gamma = 0.2m\omega_0$  (c)  $\gamma = 0.5m\omega_0$

## 11.4. Résonance

Dans le cas de l'oscillateur harmonique forcé, l'amplitude  $A$  ainsi que la phase  $\phi$  des oscillations sont des fonctions de la fréquence d'excitation. Nous avons représenté ces deux grandeurs en fonction de  $\omega$  dans la figure 11.3. On observe que l'amplitude devient très importante lorsque la fréquence d'excitation est proche de la fréquence propre du système  $\omega \approx \omega_0$ . C'est le phénomène de résonance, qui peut avoir des conséquences spectaculaires, comme illustré dans les exemples suivants.

### Démonstrations de cours

1. Observation de la résonance du chariot sur rail à coussin d'air qui est attaché à deux ressorts.
2. Observation de la résonance d'un moteur avec balourd.

### Exemple du pont de Tacoma

Seulement quatre mois après son inauguration, le pont de Tacoma fut mis en résonance, excité par le vent. Après quelques heures d'oscillations forcées d'amplitude croissante, il s'effondra, comme en témoigne la photo de la figure 11.4.

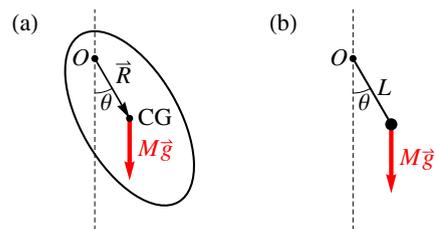
## 11.5. Autres systèmes oscillants

### Pendule composé

Le pendule composé est constitué d'un corps rigide libre d'osciller dans un plan vertical autour d'un



**Figure 11.4.:** Effondrement du pont de Tacoma suite à sa résonance induite par le vent.



**Figure 11.5.:** (a) Pendule composé (b) Pendule simple.

point  $O$ . Son équation du mouvement est :

$$\tau_0 = -MgR \sin \theta = I_0 \alpha$$

où  $\alpha = \ddot{\theta}$  est l'accélération angulaire. Pour de petits angles  $\theta$  on peut faire l'approximation  $\sin \theta \approx \theta$  de sorte qu'on obtient :

$$\ddot{\theta} + \frac{MgR}{I_0} \theta = 0$$

On retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique simple, de sorte qu'elle possède les mêmes solutions :

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

avec la fréquence angulaire :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{MgR}{I_0}}$$

et la période :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{MgR}}$$

### Pendule simple

Le pendule simple est un cas particulier de pendule composé ayant le moment d'inertie  $I_0 = ML^2$  où  $L$  est sa longueur. On obtient donc sa fréquence angulaire :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

et sa période :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$



## 12. Propriétés élastiques des matériaux

Les solides sont constitués d'assemblages d'atomes ou de molécules qui sont liés les uns aux autres par des forces d'origine électromagnétique. Ils se déforment sous l'effet de contraintes, et leurs propriétés mécaniques résultent des interactions entre leurs constituants microscopiques. Toutefois, au vu de la complexité du problème une approche phénoménologique s'impose, ce qui fait l'objet de ce chapitre.

### 12.1. Contrainte

Considérons une barre de longueur  $L$  et section  $S$  soumise à une force de traction  $\vec{F}$ . La force nécessaire pour produire un allongement donné est proportionnelle à la section. On en conclut que la déformation d'un matériau dépend du rapport entre la force et la section, qu'on appelle la *contrainte* :

$$\sigma = F/S$$

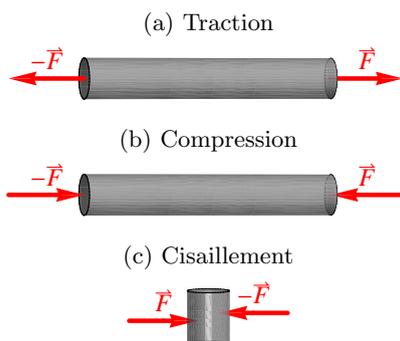
L'unité de la contrainte est le Pascal ( $1\text{ Pa} = 1\text{ N/m}^2$ ). Comme illustré dans la figure 12.1, on distingue trois types de contraintes : la traction, la compression et le cisaillement.

### 12.2. Déformation

L'allongement résultant d'une traction est d'autant plus grand que la barre est longue. Pour être indépendant de la dimension de l'objet, on définit la *déformation* comme l'allongement relatif :

$$\epsilon = \Delta l/l$$

La déformation est une grandeur sans dimension.



**Figure 12.1.:** Trois types de contraintes : (a) la traction, (b) la compression, (c) le cisaillement.



**Figure 12.2.:** Thomas Young (1773 - 1829) était un médecin, physicien et égyptologue anglais. Personnage brillant, parlant une dizaine de langues à l'âge de quinze ans, il contribua à de nombreux domaines de la physique, de l'optique aux propriétés élastiques des matériaux, sans pour autant abandonner son activité de médecin.

### 12.3. Loi de Hooke

Pour de petites déformations,  $\sigma$  est proportionnelle à  $\epsilon$  et l'objet reprend sa forme initiale lorsqu'on relâche l'effort. On dit qu'il s'agit d'une déformation *élastique*. Le rapport entre la contrainte et la déformation est une constante qui dépend du matériau et du type de contrainte. Pour les efforts de traction et de compression, on définit le *module d'Young*  $E$  de la façon suivante :

$$\sigma = E \epsilon$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l}$$

Pour un matériau homogène, le module d'Young est le même en traction et en compression, mais ce n'est pas le cas pour des matériaux inhomogènes. Le tableau 12.1 donne des valeurs indicatives du module d'Young  $E$  pour quelques matériaux. Pour les contraintes de cisaillement, on définit le *module de cisaillement*  $G$  de façon analogue :

$$\sigma_{ci} = G \epsilon_{ci}$$

### 12.4. Déformation inélastique

Au delà du domaine linéaire, la déformation n'est plus proportionnelle à la contrainte, et l'objet ne

**Table 12.1.:** Valeurs indicatives du module d'Young  $E$  et des limites de résistance en traction  $\sigma_{tmax}$  et en compression  $\sigma_{cmax}$  pour quelques matériaux.

	$E$ (GPa)	$\sigma_{tmax}$ (MPa)	$\sigma_{cmax}$ (MPa)
Bois	10	-	100
Os traction	20	120	-
Os compression	10	-	170
Aluminium	70	300	-
Acier	210	800	-
Diamant	1200	-	-

reprend plus sa forme initiale lorsqu'on relâche l'effort. On dit qu'il s'agit d'une déformation *plastique*. La contrainte maximale avant la rupture, qu'on appelle limite de résistance, dépend du matériau et du type de contrainte. Quelques valeurs indicatives sont données dans le tableau 12.1 pour les efforts de traction et de compression.

## 12.5. Mesure du module d'Young

La mesure directe du module d'Young se fait par un essai de traction. Toutefois, il est aussi possible d'exploiter les propriétés élastiques du matériau pour en faire un système oscillant. En mesurant la fréquence de résonance, on peut en déduire le module d'Young comme nous allons le montrer dans les deux exemples suivants.

### Démonstration de cours : Oscillation d'une masse suspendue à un fil d'acier

Une masse  $m$  suspendue à un fil d'acier constitue un oscillateur harmonique simple. La constante de ressort du fil d'acier vaut  $k = ES/l$ . La période de l'oscillation vaut donc

$$T = 2\pi\sqrt{m/k} = 2\pi\sqrt{ml/ES}$$

On utilise cette relation pour déduire le module d'Young  $E$  à partir d'une mesure de la période  $T$ .

### Démonstration de cours : Résonance d'une barre d'aluminium

La période fondamentale de l'oscillation d'une barre d'aluminium excitée en compression longitudinale vaut  $T = 2L/v$ . On peut montrer que la vitesse des ondes de compression vaut  $v = \sqrt{E/\rho}$  de sorte que

$$T = 2L\sqrt{\rho/E}$$

On utilise cette relation pour déduire le module d'Young  $E$  à partir d'une mesure de la période  $T$ .

## 13. Statique des fluides

Ce chapitre est consacré à l'étude des fluides incompressibles et au repos. Nous commencerons par introduire la notion de pression ainsi que le principe de Pascal. Ensuite nous étudierons le rôle de la pesanteur avant de discuter la pression atmosphérique ainsi que ses nombreuses applications pratiques. Finalement, nous terminerons avec le principe d'Archimède.

### 13.1. Pression et principe de Pascal

Lors qu'une force  $\vec{F}$  est appliquée perpendiculairement sur un petit élément de surface  $S$  alors la *pression* est définie comme le rapport :

$$P = \frac{F}{S}$$

Considérons une sphère creuse remplie d'un fluide incompressible, c'est-à-dire de masse volumique homogène et constante. Si on applique une force extérieure  $\vec{F}$  perpendiculaire à un élément de surface  $S$  comme illustré sur la figure 13.2, alors la pression induite dans la sphère vaut  $P = F/S$ . Selon le *principe de Pascal*, si le fluide est au repos alors la pression est la même en tout point à l'intérieur de la sphère. On considère ici que le volume est suffisamment petit pour négliger l'effet de la pesanteur, qui fait varier la pression avec la hauteur. Cet effet sera considéré dans la section suivante. Le fluide exerce donc une force  $\vec{F}_i$  sur chaque élément de surface  $S_i$  de la sphère. La force  $\vec{F}_i$  est perpendiculaire à la surface, dirigée vers l'extérieur, et son intensité vaut :

$$F_i = PS_i$$

La pression est une grandeur scalaire dont l'unité est le Pascal ( $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ ). Toutefois, pour des raisons pratiques il existe plusieurs autres unités de pression comme :

- le bar ( $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ ),
- le millibar ( $1 \text{ mbar} = 10^2 \text{ Pa}$ ),
- l'hectoPascal ( $1 \text{ hPa} = 10^2 \text{ Pa}$ ),
- le torr ou mmHg ( $1 \text{ torr} = 1 \text{ mmHg} = 133.3 \text{ Pa}$ ),
- l'atmosphère ( $1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$ ),
- le psi ( $1 \text{ psi} = 6894 \text{ Pa}$ ).

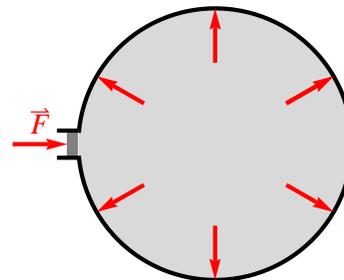
#### Application : Presse hydraulique

Une presse hydraulique est composée de deux pistons de section  $S_1$  et  $S_2$  qui sont reliées par un tube contenant un fluide incompressible. Soient  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  les forces respectives qui agissent perpendiculairement sur les deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$ , alors l'égalité de la pression dans le fluide implique que :

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$



**Figure 13.1.:** Blaise Pascal (1623 - 1662) était un mathématicien, philosophe et physicien français. Il est connu pour avoir inventé la première machine à calculer, appelée pascaline, qui était capable d'effectuer des additions, soustractions et multiplications. Il contribua de façon significative à la mécanique des fluides en clarifiant la notion de pression.



**Figure 13.2.:** Principe de Pascal. La pression est la même en tous les points d'un fluide au repos si on néglige l'effet de la pesanteur.

Ceci permet d'amplifier une force en ajustant le rapport des surfaces :

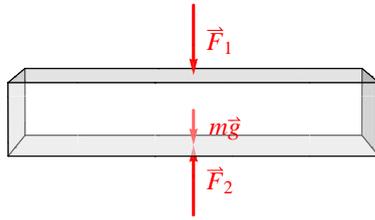
$$F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1$$

Notons que le travail effectué par les deux forces est toutefois le même.

### 13.2. Influence de la pesanteur

Dans la section précédente, nous avons négligé l'effet de la pesanteur. Pour comprendre son rôle, considérons les forces qui agissent sur un élément de fluide rectangulaire comme illustré dans la figure 13.3. Pour que le fluide soit au repos il faut que :

$$F_2 = F_1 + mg$$



**Figure 13.3.:** Element d'un fluide au repos sous l'effet de la force de pesanteur.

avec  $F_1 = P_1 S$ ,  $F_2 = P_2 S$  et pour un fluide de masse volumique  $\rho$  on obtient :

$$P_2 - P_1 = \rho g h$$

Le poids du fluide provoque donc une variation de pression avec la hauteur. Cette variation de pression est d'autant plus grande que la masse volumique du fluide est élevée.

### Pression hydrostatique

Le résultat précédent implique que la pression à une profondeur  $h$  au-dessous de la surface du liquide vaut :

$$P = P_0 + \rho g h$$

où  $P_0$  est la pression extérieure qui s'exerce sur la surface libre.

### Application : Vases communicants

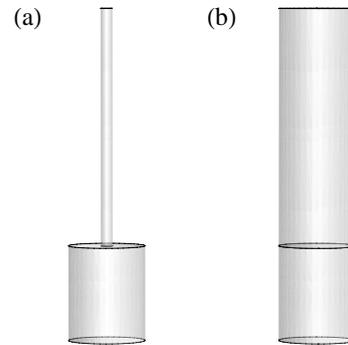
Lorsque deux vases sont reliés par un tuyau, connecté aux fonds des vases, qui permet au fluide de passer de l'un à l'autre, le système évolue jusqu'à ce que la surface libre du liquide se trouve à la même hauteur dans les deux vases. Le système est alors à l'équilibre puisque la pression hydrostatique à une profondeur  $h$  donnée est partout la même dans le fluide, en accord avec le principe de Pascal.

### Démonstration de cours : Siphon

Le siphon est un système de vases communicants où le tuyau qui relie les deux vases passe au-dessus des surfaces libres. En analysant la pression hydrostatique dans le tuyau, on est amenés à conclure que le liquide du vase le plus élevé est poussé par la pesanteur vers l'autre vase, à condition que la surface libre la plus élevée reste au-dessus de la sortie du tuyau.

### Application : Tonneau de Pascal

La pression hydrostatique en un point donné ne dépend que de la profondeur du point au-dessous de la surface libre et non pas du poids du liquide qui se trouve au-dessus. L'expérience du tonneau de Pascal met en évidence l'aspect contre-intuitif de cette affirmation, comme illustré dans la figure 13.4. La pression dans les deux tonneaux est la même,



**Figure 13.4.:** (a) Tonneau de Pascal (b) Tonneau surmonté d'une masse d'eau beaucoup plus grande. La pression dans les deux tonneaux ne dépend que de la hauteur du liquide se trouvant au-dessus des tonneaux. Elle est donc la même dans les deux situations.

malgré la différence significative du poids du liquide qu'ils doivent supporter.

## 13.3. Pression atmosphérique

L'atmosphère terrestre, sous l'effet de la pesanteur, produit une pression atmosphérique à la surface de la Terre qui vaut en moyenne  $P_0 = 1.01325 \times 10^5$  Pa. Cette pression varie avec l'altitude mais ne suit pas la loi de la pression hydrostatique car la masse volumique de l'air diminue avec l'altitude. Elle varie aussi dans le temps, suivant l'évolution de la situation météorologique. Il y a plusieurs expériences qui permettent de la mettre en évidence et que nous allons décrire ci-dessous.

### Démonstration de cours : Colonne d'eau

On soulève un tube rempli d'eau dans le champ de la pesanteur tout en maintenant son extrémité fermée de sorte que l'eau reste à l'intérieur. Quelle hauteur maximale peut-on atteindre pour la colonne d'eau ainsi formée ? Quelle est la force qui maintient l'eau dans le tube ?

### Mesure de la pression atmosphérique

Le premier physicien à mettre en évidence la pression atmosphérique fut Torricelli en 1644. Il inventa le baromètre à mercure qui permet de mesurer  $P_0$  à l'aide d'un tube de verre scellé à une extrémité et rempli de mercure. Il ferma l'autre extrémité avec son pouce, retourna le tube, plongea l'extrémité ouverte dans un bain de mercure avant de retirer son pouce. En mesurant la colonne de mercure  $h$  que la pression atmosphérique permet de soutenir, il en déduit la valeur de  $P_0$  selon :

$$P_0 = \rho_{\text{Hg}} g h$$

Il obtient  $h = 760$  mm, ce qui donne avec  $\rho_{\text{Hg}} = 13.6 \rho_{\text{eau}}$  :

$$P_0 = 1.01325 \times 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ mmHg} = 1 \text{ atm}$$

La hauteur de la colonne de mercure est donc une mesure de la pression atmosphérique ce qui explique l'existence de l'unité de pression mmHg.

#### Démonstration de cours : Hémisphères de Magdebourg

Dans cette expérience, on évacue une sphère constituée de deux hémisphères. La pression atmosphérique exerce alors deux forces opposées qui poussent les deux hémisphères l'une contre l'autre. Pour un rayon  $R = 0.05$  m la pression atmosphérique exerce une force  $F = P_0 \pi R^2 \approx 800$  N. Notons que  $P_0$  correspond à un poids de 10 N par  $\text{cm}^2$ .

#### Démonstration de cours : Boîte sous vide

On chauffe une boîte métallique contenant un peu d'eau, de sorte qu'elle se rempli de vapeur d'eau qui chasse l'air. Il suffit alors de fermer la boîte et d'attendre qu'elle se refroidisse pour que la vapeur d'eau se condense. De cette façon la pression à l'intérieur de la boîte diminue en-dessous de la pression atmosphérique et la boîte est écrasée par les forces dues à la pression qui règne à l'extérieur.

#### Définition de la pression manométrique

En pratique, lorsqu'on gonfle un pneu ou lorsqu'on remplit une bouteille de gaz, on s'intéresse souvent à la surpression relative à la pression atmosphérique. On définit ainsi la *pression manométrique*  $P_M$  comme étant la différence entre la pression  $P$  et la pression atmosphérique  $P_0$  :

$$P_M = P - P_0$$

Un manomètre est un appareil qui mesure la pression manométrique.

#### Démonstration de cours : Manomètre

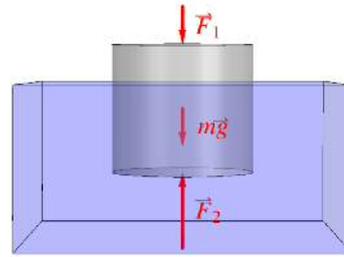
Un tube en forme de U à moitié rempli d'eau permet de réaliser un manomètre. La différence de hauteur  $h$  entre les deux surfaces libres est une mesure de la différence de pression donc  $P_M = \rho gh$ .

#### Application : Pression des pneumatiques

Considérons une voiture dont les pneus sont gonflés avec une pression manométrique de 2 atm et calculons la surface de contact avec la route. La pression absolue dans chaque pneu vaut 3 atm. Pour une voiture de 1250 kg on obtient  $S = mg/P = 0.04$  m<sup>2</sup> pour les quatre roues. Autrement dit, la surface de contact vaut 100 cm<sup>2</sup> par pneu.

### 13.4. Poussée d'Archimède

Considérons un cylindre immergé dans un fluide comme illustré dans la figure 13.5. La différence



**Figure 13.5.:** La poussée d'Archimède résulte de la différence de pression exercée sur le haut et sur le bas du cylindre.

de pression entre le haut et le bas du cylindre provoque une force résultante dirigée vers le haut qu'on appelle la *poussée d'Archimède* et qu'on note  $\vec{F}_A$ . Cette force vaut :

$$F_A = F_2 - F_1 = (P_2 - P_1)S = \rho_{\text{fluide}}ghS$$

où  $S$  est la section du cylindre,  $h$  la hauteur de la partie immergée, et  $\rho_{\text{fluide}}$  la masse volumique du fluide. On constate donc que la poussée d'Archimède est égale au poids du fluide déplacé, ce qui nous amène à l'énoncé suivant :

#### Principe d'Archimède

Tout corps plongé dans un fluide sous l'effet de la pesanteur subit une poussée vers le haut égale au poids du fluide déplacé.

#### Démonstration de cours : Poussée d'Archimède dans l'air

Les objets dans l'atmosphère terrestre subissent une poussée d'Archimède due à la différence de pression atmosphérique entre leur base et leur sommet. On peut mettre cet effet en évidence de la façon suivante. On suspend deux objets de densité différente, donc de volume différent, à une balance qui est équilibrée dans l'atmosphère terrestre. Lorsqu'on met cette balance sous vide d'air, la poussée d'Archimède disparaît et, comme elle est différente pour les deux objets, la balance devient déséquilibrée.

#### Application : Mesure de densité

La poussée d'Archimède permet de mesurer la densité d'un objet plus lourd que l'eau en le pesant deux fois : la première fois dans l'air et la seconde fois dans l'eau. La différence fournit le poids de l'eau déplacée donc  $\rho/\rho_{\text{eau}} = m/m_{\text{eau}} = mg/F_A$ .

#### Application : Flottabilité

Un objet flotte si son poids est inférieur au poids de l'eau qu'il peut déplacer. C'est le cas des navires à condition qu'ils contiennent une quantité suffisante de volumes vides. Il faut distinguer le centre

de gravité du navire où  $m\vec{g}$  s'applique, du centre de flottaison ou centre de carène, où la poussée d'Archimède agit. Lorsque le centre de gravité est situé au-dessous du centre de flottaison le navire est naturellement stable. En effet, lorsqu'il s'incline, le couple produit par son poids et la poussée d'Archimède tend à le ramener dans la position verticale. Ceci n'est plus vrai lorsque le centre de gravité est situé au-dessus du centre de flottaison. Dans ce cas, la forme de la coque est conçue pour que le centre de flottaison se déplace transversalement d'une distance plus grande que le centre de gravité lorsque le bateau s'incline, de sorte que le couple ramène le bateau vers la verticale.

## 14. Dynamique des fluides parfaits

Ce chapitre est consacré à l'étude de la dynamique des fluides parfaits en régime stationnaire. Nous commencerons par préciser les hypothèses simplificatrices avant d'énoncer les deux lois fondamentales : l'équation de continuité qui exprime la conservation du débit et le théorème de Bernoulli qui résulte de la conservation de l'énergie. Finalement, nous appliquerons ces lois à des systèmes simples.

### 14.1. Régimes d'écoulement

#### Fluide parfait

On dira qu'un fluide est *parfait* s'il est incompressible et sans frottement interne, autrement-dit si sa viscosité est nulle. Nous étudierons le cas des fluides visqueux dans un chapitre ultérieur.

#### Régime laminaire

On dira qu'un écoulement est en *régime stationnaire* s'il peut être décrit par un champ de vitesses indépendant du temps. Dans cette situation, les éléments de fluide se déplacent selon des trajectoires continues et régulières qu'on appelle les *lignes de courant*, voir la figure 14.1. Dans le cas où l'écoulement peut être décrit par un champ de vitesses univoque, on dit qu'il est en *régime laminaire*. Il s'agit d'un écoulement régulier du fluide dans lequel les lignes de courant ne se croisent pas, sans quoi il y aurait au moins deux vitesses différentes possibles au point de croisement.

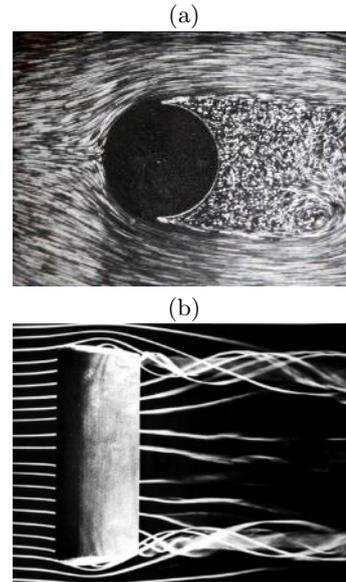
#### Régime turbulent

Lorsque l'écoulement n'est pas laminaire, on dit qu'il est *turbulent*. L'écoulement est alors irrégulier, il produit des tourbillons chaotiques et deux éléments de fluide qui sont voisins à un instant donné peuvent suivre des trajectoires complètement différentes. Ceci est illustré sur les photos de la figure 14.1.

### 14.2. Equation de continuité

Lorsque l'écoulement est laminaire, la matière qui s'écoule dans un tube de courant est conservée. Si de plus le fluide est incompressible alors le débit entrant dans le tube doit être égal au débit sortant. Nous définissons le débit  $Q$  comme le rapport du volume écoulé par unité de temps :

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$



**Figure 14.1.:** (a) Photo de l'écoulement d'un liquide autour d'un disque. L'écoulement est turbulent derrière le disque et laminaire partout ailleurs. (b) Photo d'un écoulement d'air autour d'un cylindre. L'écoulement est laminaire à gauche et devient turbulent à droite.

L'unité du débit est le  $\text{m}^3/\text{s}$  et on démontre facilement que :

$$Q = Sv$$

où  $S$  est la section du tube et  $v$  la vitesse du fluide. La conservation du débit s'écrit donc de la manière suivante :

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

où les indices 1 et 2 désignent deux endroits différents le long du même tube de courant. Cette équation s'appelle l'équation de continuité.

### 14.3. Equation de Bernoulli

#### Energie et pression

Considérons l'équation vue au chapitre précédent qui décrit la variation de la pression hydrostatique. Nous pouvons l'écrire sous la forme suivante :

$$P_1 + \rho g z_1 = P_2 + \rho g z_2$$

où  $P_1$  et  $P_2$  sont les pressions aux profondeurs  $z_1$  et  $z_2$ . Lorsqu'elle est multipliée par un élément de volume  $V$ , cette équation exprime la conservation de l'énergie mécanique, somme de l'énergie potentielle gravitationnelle  $mgh$  et de l'énergie de pression  $PV$ . On constate ainsi que la pression est une mesure de la densité d'énergie liée à l'agitation désordonnée des molécules qui constituent le fluide.



**Figure 14.2.:** Daniel Bernoulli (1700 - 1782) était un médecin, mathématicien et physicien suisse. Il enseigna l'astronomie, la philosophie et la médecine à l'université de Bâle. Ses contributions scientifiques sont nombreuses, du calcul infinitésimal aux probabilités, et de la dynamique des fluides à la théorie cinétique des gaz.

### Théorème de Bernoulli

Lorsque le fluide est en mouvement, il faut ajouter un terme d'énergie cinétique à la conservation de l'énergie mécanique totale. On obtient ainsi l'équation de Bernoulli qui est valable le long d'une ligne de courant :

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz = \text{const}$$

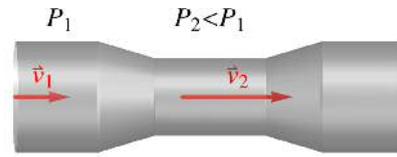
Les trois termes de cette équation sont des densités d'énergie. Le premier terme ( $P$ ) est une densité d'énergie de pression liée au mouvement microscopique des constituants du fluide, le second terme ( $\frac{1}{2}\rho v^2$ ) est une densité d'énergie cinétique liée au déplacement des éléments de fluide le long de la ligne de courant, et le dernier terme ( $\rho gz$ ) est une densité d'énergie potentielle. Cette équation exprime donc la conservation de l'énergie mécanique totale le long des lignes de courant. Elle a été établie pour la première fois au 18<sup>ème</sup> siècle par Daniel Bernoulli (voir la figure 14.2).

### Démonstration du théorème de Bernoulli

Considérons un tube de courant dans lequel s'écoule un petit élément de fluide de forme tubulaire dont la face arrière a une section  $S_1$  et la face avant une section  $S_2$ . Appliquons le théorème de conservation de l'énergie à cet élément de fluide pendant qu'il effectue un petit déplacement  $\Delta l_1$  pour sa face arrière et  $\Delta l_2$  pour sa face avant :

$$E_{\text{cin}}^B + E_{\text{pot}}^B = E_{\text{cin}}^A + E_{\text{pot}}^A + W_{\text{nc}}$$

La variation d'énergie potentielle est donnée par  $E_{\text{pot}}^B - E_{\text{pot}}^A = \Delta mg(z_2 - z_1)$  où  $\Delta m$  est la masse du fluide transférée de la face arrière vers la face avant. La variation d'énergie cinétique vaut  $E_{\text{cin}}^B - E_{\text{cin}}^A = \Delta m(v_2^2 - v_1^2)/2$ . Finalement, le travail effectué par les forces de pression vaut  $W_{\text{nc}} = P_1 S_1 \Delta l_1 - P_2 S_2 \Delta l_2$ . En remplaçant ces trois termes dans



**Figure 14.3.:** Effet Venturi.

l'équation ci-dessus et en divisant par l'élément de volume  $\Delta V = S_1 \Delta l_1 = S_2 \Delta l_2$  on obtient l'équation de Bernoulli.

### 14.4. Théorème de Torricelli

Considérons un vase rempli de liquide et supposons qu'il y a un petit trou sur le côté par lequel le liquide peut s'échapper. En appliquant l'équation de Bernoulli à une ligne de courant qui part de la surface libre du liquide (point 1) pour terminer à l'orifice de sortie (point 2), on obtient :

$$P_0 + 0 + \rho g z_1 = P_0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$$

où  $P_0$  est la pression atmosphérique et nous avons négligé la vitesse de la surface libre car l'orifice de sortie est petit. La vitesse du liquide à la sortie (point 2) vaut donc :

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

où  $h = z_1 - z_2$  est la hauteur de la surface libre par rapport à l'orifice de sortie. Tout se passe comme si le liquide tombait en chute libre uniquement sous l'effet de la pesanteur.

### 14.5. Effet Venturi

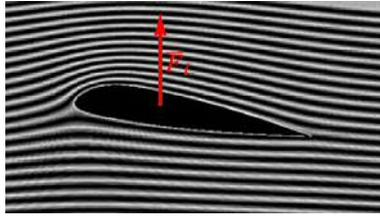
Considérons l'écoulement laminaire d'un liquide dans un tuyau horizontal de section  $S_1$  ayant un rétrécissement local de section  $S_2 < S_1$  comme illustré sur la figure 14.3. En appliquant l'équation de Bernoulli à une ligne de courant qui parcourt le centre du tuyau entre un point 1 de section  $S_1$  et un point 2 de section  $S_2$ , on obtient :

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$$

Toutefois  $z_1 = z_2$  car le tuyau est horizontal, et l'équation de continuité donne  $v_2 = v_1 S_1 / S_2$ , donc :

$$P_2 = P_1 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 \left[ \left( \frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right]$$

Comme  $S_2 < S_1$ , le terme entre parenthèses carrées est positif, donc  $P_2 < P_1$ . On peut donc conclure que la pression est plus faible à l'endroit du rétrécissement local car la vitesse du fluide y est plus élevée. Remarquons que la dépression augmente avec le carré de la vitesse du fluide.



**Figure 14.4.** Écoulement de l'air autour d'une aile d'avion. Les lignes de courant sont plus serrées au-dessus de l'aile (extrados) qu'en dessous (intrados). Cela signifie que la vitesse de l'air est plus grande au-dessus, ce qui crée une dépression et produit donc la portance.

### Rétrécissement d'un vaisseau sanguin

Lorsqu'un vaisseau sanguin se rétrécit, par exemple à cause d'un dépôt local, cela provoque une dépression à l'endroit du rétrécissement par effet Venturi. Cette dépression a pour effet de provoquer un pincement de la veine ce qui augmente encore le rétrécissement. L'effet Venturi est donc à la base de la sténose vasculaire.

## 14.6. Portance

### Aile d'avion

La figure 14.4 montre l'écoulement de l'air autour d'une aile d'avion. Les lignes de courant sont plus serrées au-dessus de l'aile (extrados) qu'en dessous (intrados). Selon l'équation de continuité, cela signifie que la vitesse de l'air au-dessus de l'aile  $v_e$  est plus grande que celle au-dessous  $v_i$ . Selon le théorème de Bernoulli :

$$P_i - P_e = \frac{1}{2}\rho(v_e^2 - v_i^2)$$

La pression est plus faible à l'extrados qu'à l'intrados,  $P_i > P_e$ , ce qui produit une force dirigée vers le haut qu'on appelle la portance :

$$F_L = (P_i - P_e)S = S\frac{\rho}{2}(v_e^2 - v_i^2)$$

Bien qu'il soit difficile de connaître précisément les deux vitesses  $v_i$  et  $v_e$ , on peut supposer qu'elles sont proportionnelles à la vitesse de l'avion, et on obtient :

$$F_L = C_L S \frac{\rho}{2} v^2$$

où  $S$  est la surface de l'aile,  $v$  est la vitesse de l'avion, et  $C_L$  est le coefficient de portance que l'on détermine expérimentalement. Il dépend de la forme de l'aile et de l'angle d'attaque. On observe que  $C_L$  augmente linéairement avec l'angle d'attaque pour autant que l'angle reste petit. Au-delà d'une certaine valeur, des turbulences apparaissent et la valeur de  $C_L$  chute brusquement, on dit que l'avion décroche. En observant cette dernière équation, on constate que :

1. La portance est proportionnelle à la surface de l'aile. Les avions plus lourds doivent avoir des ailes plus grandes, l'inconvénient étant que ceci augmente aussi la traînée.
2. La portance est proportionnelle au carré de la vitesse. On peut donc diminuer la surface des ailes si on utilise une vitesse plus élevée. Toutefois, il faudra alors une vitesse suffisamment grande pour permettre à l'avion de décoller.

### Vol des oiseaux

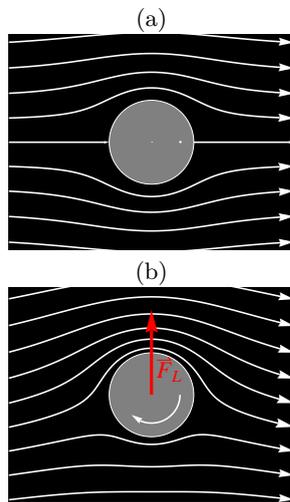
Considérons un oiseau de taille globale  $L$ . Il s'agit là d'une description grossière, à un seul paramètre, et nous ferons l'hypothèse que la forme de l'oiseau reste la même indépendamment de sa taille. Son poids est proportionnel à  $L^3$  et la surface de ses ailes à  $L^2$ . Pour qu'il vole, il faut que la portance soit au moins égale à son poids. En injectant ces ingrédients dans l'équation de la portance, on constate que  $v_{\min} \propto \sqrt{L}$ . On comprend ainsi pourquoi les grands oiseaux doivent courir vite avant de pouvoir décoller !

### Démonstration de cours : portance et turbulences

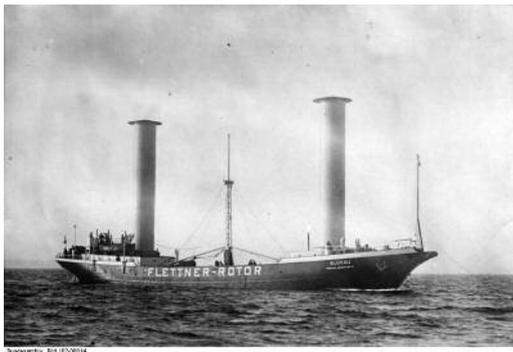
Observation des lignes de courant lors de l'écoulement d'eau autour d'un profil d'aile. Lorsque l'angle d'attaque augmente au-delà d'une valeur critique, il y a formation de turbulences qui réduisent la portance et augmentent la traînée. Ce modèle est aussi valable pour la voile. Présentation de moyens pour éliminer les turbulences (foc). Observation des lignes de courant autour d'autres profils plus ou moins aérodynamiques et discussion de l'effet des turbulences.

### Effet Magnus

Lorsque l'air s'écoule autour d'une aile d'avion, nous avons vu que la portance résulte d'une différence de pression produite par l'asymétrie des lignes de courant. Dans ce cas, l'asymétrie de l'écoulement provient aussi bien de la forme de l'aile, que de l'angle d'attaque. Toutefois, le principe selon lequel une asymétrie des lignes de courant d'un fluide qui s'écoule autour d'un objet provoque une force de portance est plus général. Il résulte du théorème de Bernoulli et s'applique à bien d'autres situations. Par exemple dans le cas d'un fluide qui s'écoule autour d'un objet cylindrique, l'écoulement est asymétrique si l'objet tourne sur lui-même car il entraîne le fluide dans son mouvement de rotation. Les deux situations, avec et sans rotation du cylindre sont illustrées dans la figure 14.5. On observe que les lignes de courant sont asymétriques dans le cas où le cylindre tourne sur lui-même. Selon le théorème de Bernoulli, il y a donc une force de portance qui résulte de la différence de pression, c'est l'effet Magnus. Cet effet est utilisé dans le football ou le tennis (lift ou slice) pour donner un effet à la balle. Il a aussi été utilisé



**Figure 14.5.:** (a) Fluide qui s'écoule autour d'un cylindre au repos : les lignes de courant sont symétriques. (b) Fluide qui s'écoule autour d'un cylindre en rotation : les lignes de courant sont asymétriques. Selon le théorème de Bernoulli, il y a une force de portance qui résulte de la différence de pression, c'est l'effet Magnus.

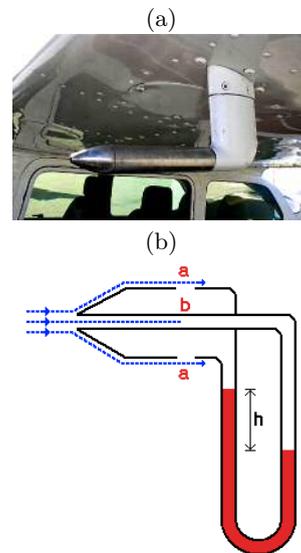


**Figure 14.6.:** Cette photo qui date de 1924 montre le navire expérimental Buckau qui était propulsé par l'effet Magnus. Le système de propulsion fut mis au point par Anton Flettner.

pour propulser le navire expérimental Buckau avec deux rotors Flettner, du nom de leur concepteur, voir la figure 14.6. Toutefois, le rendement des rotor reste moins bon que celui des voiles traditionnelles.

#### Démonstration de cours : effet Magnus

Un plan incliné permet de laisser tomber des objets dans une bassin rempli d'eau. On observe les trajectoires d'objets différents. Lorsqu'il s'agit d'une bille qui roule, elle pénètre dans l'eau en tournant sur elle-même, donc elle subit l'effet Magnus qui dévie sa trajectoire. Par contre ce n'est pas le cas pour un cube qui glisse sur le plan incliné et pénètre donc dans l'eau en pure translation. L'effet Magnus est donc révélé par l'observation des trajectoires qui sont notablement différentes.



**Figure 14.7.:** (a) Photo d'une sonde de Pitot installée sous l'aile d'un avion pour mesurer sa vitesse. (b) Schéma de principe de la sonde de Pitot.

#### Démonstration de cours : balle volante

En laissant de l'air s'échapper d'une bouteille sous pression, on crée un flux d'air divergent. Puisque la vitesse est maximale au centre du jet, la pression passe par un minimum local à cet endroit. On peut donc y placer un objet qui reste ainsi en équilibre. On peut répéter cette démonstration avec une balle dans un entonnoir. Contre toute attente, la balle est aspirée par la dépression produite par l'air sortant rapidement de l'entonnoir.

### 14.7. Sonde de Pitot

La sonde de Pitot, ou sonde de Prandtl, est utilisée pour mesurer la vitesse d'un fluide, notamment en aéronautique, voir la figure 14.7(a). L'idée est de mesurer la pression en deux points  $a$  et  $b$  où la vitesse du fluide vaut respectivement  $v$  et  $0$  comme illustré sur le schéma de la figure 14.7(b). Selon l'équation de Bernoulli :

$$P_b = P_a + \frac{1}{2}\rho v^2$$

Cette différence de pression va provoquer une différence de hauteur  $h$  du liquide utilisé dans le manomètre. En appliquant une seconde fois l'équation de Bernoulli on obtient :

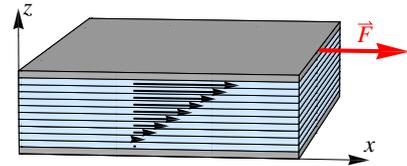
$$P_b - P_a = (\rho_l - \rho)gh$$

où  $\rho_l$  est la masse volumique du liquide dans le manomètre. Finalement, la vitesse est donc donnée par :

$$v = \sqrt{2gh \frac{\rho_l - \rho}{\rho}}$$

## 15. Mécanique des fluides visqueux

Ce chapitre est consacré à l'étude des frottements visqueux qui apparaissent dans un fluide en mouvement. Ces frottements sont nuls pour un fluide au repos mais ils deviennent important lorsque la vitesse du fluide est grande. Nous commencerons par définir la viscosité dans le cas d'un écoulement laminaire, puis nous énoncerons la loi de Poiseuille qui joue un rôle fondamental dans le système cardiovasculaire. Nous étudierons ensuite la transition entre les écoulements laminaire et turbulent. Finalement, nous étudierons le frottement qui s'oppose au mouvement d'un objet dans un fluide, que ce soit dans le régime laminaire ou turbulent.



**Figure 15.1.:** Définition de la viscosité. Une plaque de surface  $S$  posée sur une couche de liquide d'épaisseur  $\Delta z$  est tirée avec une force  $\vec{F}$ . La vitesse horizontale du liquide varie linéairement de 0 à  $v$ .

### 15.1. Viscosité

Considérons une plaque de surface  $S$  posée sur une couche de liquide d'épaisseur  $\Delta z$  comme illustré dans la figure 15.1. Pour entraîner la plaque avec une vitesse horizontale  $v$  il faut exercer une force  $\vec{F}$  qui est d'autant plus grande que la surface et la vitesse sont grandes, et qui est inversement proportionnelle à l'épaisseur de la couche de fluide :

$$F = \eta S \frac{\Delta v}{\Delta z}$$

Cette équation est valable lorsque la vitesse varie linéairement dans la couche de fluide, sans quoi il faut passer à la limite où  $\Delta z$  tend vers 0 et on obtient :

$$F = \eta S \frac{dv}{dz}$$

où  $\eta$  est appelée la *viscosité* qui caractérise les forces de frottement interne du fluide, et  $dv/dz$  est le gradient de vitesse. L'unité de la viscosité est le Pascal seconde (Pa.s). Quelques valeurs typiques sont données dans le tableau 15.1 pour des liquides ainsi que pour l'air. On remarque que la viscosité d'un liquide diminue de façon significative lorsque la température augmente, alors que celle d'un gaz augmente légèrement avec la température. Notons encore que l'équation précédente est phénoménologique et qu'en pratique la valeur de  $\eta$  peut varier avec le gradient de vitesse pour certains fluides. Lorsqu'un fluide satisfait parfaitement cette équation, avec  $\eta$  constante, on dit qu'il est Newtonien.

#### Démonstration de cours : viscosité de l'air

Observation de la viscosité de l'air à l'aide d'un disque en rotation rapide proche d'une plaque légère. A cause du frottement visqueux, le disque entraîne l'air qui à son tour entraîne la plaque.

**Table 15.1.:** Quelques valeurs de viscosité.

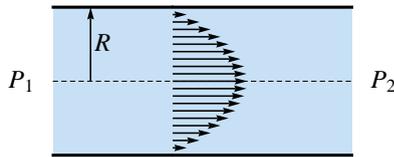
	Température (°C)	$\eta$ (Pa.s)
Miel	20	1 – 10
Glycérine	20	1.49
Sang	20	$3.02 \times 10^{-3}$
	37	$2.08 \times 10^{-3}$
Eau	20	$1.01 \times 10^{-3}$
	50	$0.55 \times 10^{-3}$
	100	$0.28 \times 10^{-3}$
Air	20	$1.81 \times 10^{-5}$
	37	$1.87 \times 10^{-5}$
	40	$1.90 \times 10^{-5}$
	60	$2.00 \times 10^{-5}$
	80	$2.09 \times 10^{-5}$
	100	$2.18 \times 10^{-5}$

### 15.2. Loi de Poiseuille

Considérons fluide visqueux qui s'écoule en régime stationnaire dans un tuyau de section constante. Il subit une diminution de pression, qu'on appelle perte de charge, à cause de la force nécessaire pour vaincre le frottement visqueux. Poiseuille a été le premier à calculer la distribution des vitesses d'un fluide qui s'écoule à l'intérieur d'un tuyau cylindrique (voir la figure 15.2) ce qui lui a permis de déduire la perte de charge qui résulte d'un débit  $Q$ . Il a ainsi obtenu la *loi de Poiseuille* :

$$Q = \pi R^4 \frac{\Delta P}{8\eta l}$$

où  $Q$  est le débit,  $R$  le rayon du tuyau,  $l$  sa longueur,  $\eta$  la viscosité du fluide et  $\Delta P = P_1 - P_2$  la perte de charge. Pour une différence de pression donnée, le débit varie donc avec le rayon à la puissance quatre, ce qui peut avoir des conséquences considérables notamment pour le système cardiovasculaire.



**Figure 15.2.:** Champ des vitesses pour un écoulement visqueux dans un tuyau cylindrique de rayon  $R$ . La vitesse du fluide en contact avec le tuyau est nulle, puis elle augmente de façon quadratique lorsqu'on se rapproche du centre.

### Démonstration de la loi de Poiseuille

L'écoulement étant stationnaire, la force de frottement visqueux doit être égale à la résultante des forces de pression pour tout élément cylindrique de fluide de rayon  $r < R$  et longueur  $l$  :

$$\Delta P \pi r^2 = -\eta 2\pi r l \frac{dv}{dr}$$

En intégrant cette équation, on obtient :

$$v = \frac{\Delta P}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

La vitesse est maximale au centre du tuyau et nulle sur les bords. On peut utiliser cette expression de la vitesse pour calculer le débit :

$$Q = \int_0^R v(r) 2\pi r dr = \pi R^4 \frac{\Delta P}{8\eta l}$$

### Résistance à l'écoulement

Il est utile de définir la résistance à l'écoulement  $R_f$  par la relation suivante :

$$\Delta P = R_f Q$$

Selon Poiseuille cette résistance pour un tuyau cylindrique de rayon  $R$  et de longueur  $l$  vaut :

$$R_f = \frac{8\eta l}{\pi R^4}$$

On peut ainsi calculer la perte de charge d'un circuit hydraulique en calculant la résistance totale par combinaison des résistances individuelles, de façon analogue à un circuit électrique. Pour deux résistances en série :

$$R_f^{\text{tot}} = R_{f1} + R_{f2}$$

et pour deux résistances en parallèle :

$$\frac{1}{R_f^{\text{tot}}} = \frac{1}{R_{f1}} + \frac{1}{R_{f2}}$$



**Figure 15.3.:** Jean-Louis-Marie Poiseuille (1797 - 1869) était un médecin et physicien français. Il fit de nombreuses applications des lois de la physique à la physiologie. Il est connu pour ses travaux sur l'écoulement du sang dans le corps humain.

### 15.3. Nombre de Reynolds

L'écoulement est laminaire lorsque la vitesse est faible et il devient turbulent lorsque la vitesse augmente. La transition d'un régime à l'autre a lieu pour une valeur déterminée du *nombre de Reynolds* qui est défini de la façon suivante :

$$\mathcal{R} = \frac{\rho v L}{\eta}$$

où  $\eta$  est la viscosité du fluide,  $\rho$  sa masse volumique,  $L$  est une dimension caractéristique de l'écoulement (diamètre du tuyau ou dimension d'un obstacle) et  $v$  est la vitesse de l'écoulement. L'expérience montre qu'il existe une valeur critique du nombre de Reynolds qui dépend de la géométrie de l'écoulement. En-dessous de cette valeur l'écoulement est laminaire, et au-dessus de cette valeur il devient turbulent.

#### Cas d'un tuyau cylindrique

Par exemple, pour l'écoulement d'un fluide dans un tuyau cylindrique ( $L = 2R$ ) l'expérience montre que :

- si  $\mathcal{R} < 2300$ , l'écoulement est laminaire
- si  $\mathcal{R} > 2300$ , l'écoulement est turbulent.

### 15.4. Frottements dans un fluide

Considérons un objet qui se déplace à vitesse constante dans un fluide visqueux. La force de frottement qu'il subit dépend de sa vitesse. En régime laminaire, le frottement résulte de la viscosité, alors qu'en régime turbulent la dissipation d'énergie augmente considérablement à cause des turbulences.

**Faible vitesse : régime laminaire**

La force de frottement visqueux est proportionnelle à la vitesse :

$$F_F = K\eta Rv$$

où  $\eta$  est la viscosité du fluide,  $R$  est le rayon de l'objet et  $K$  est une constante qui dépend de sa forme. On a  $K = 6\pi$  pour une sphère et  $K = 16$  pour un disque perpendiculaire à la vitesse.

**Haute vitesse : régime turbulent**

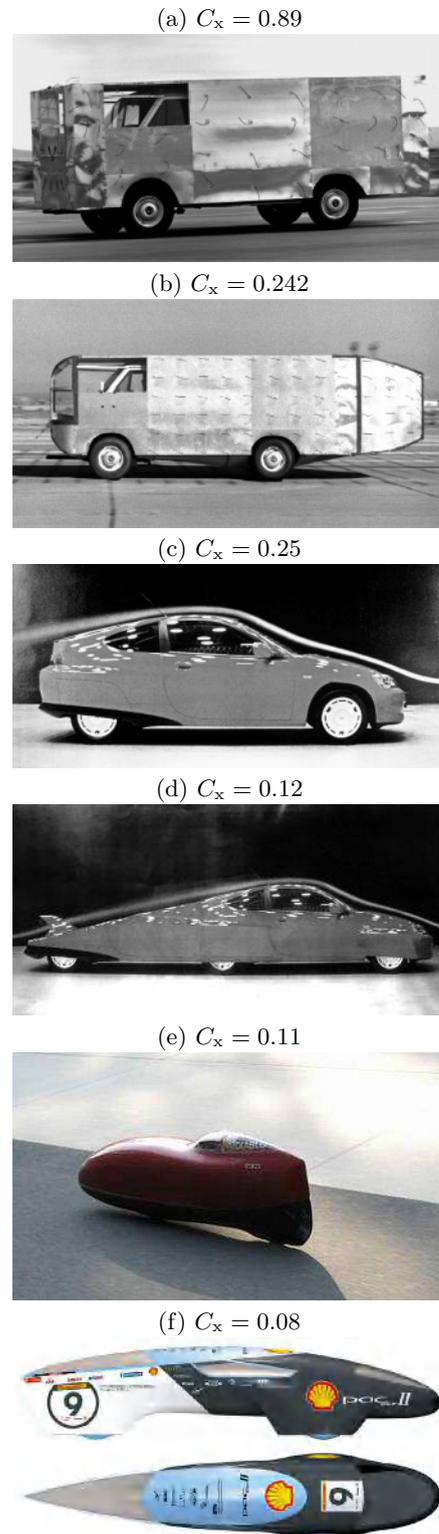
La force de frottement résulte de l'énergie dissipée dans les turbulences, elle augmente donc avec  $\rho v^2$  :

$$F_F = C_x S \frac{\rho v^2}{2}$$

où  $\rho$  est la masse volumique du fluide,  $S$  est la section apparente de l'objet et  $C_x$  est le coefficient de traînée qui dépend de la forme. On a  $C_x = 0.24$  pour une sphère,  $C_x = 1.32$  pour un disque perpendiculaire à la vitesse, et  $C_x = 0.04$  pour un profil aérodynamique en forme de goutte d'eau.

**Etudes aérodynamique**

Les études aérodynamiques de la forme des véhicules en vue de minimiser le frottement avec l'air sont d'une importance capitale pour réduire leur consommation. Comme illustré par les exemples de la figure 15.4, il faut minimiser le coefficient de traînée en limitant les turbulences à l'arrière du véhicule et aussi diminuer autant que possible la section apparente. De cette façon, le Pac car II a réussi l'exploit de parcourir 5385 km avec l'équivalent en hydrogène de 1 litre d'essence.



**Figure 15.4.:** (a),(b) Etude aérodynamique menée par la NASA entre 1973 et 1982 qui montre l'importance de la forme de l'arrière du camion pour éviter les turbulences et réduire le coefficient de traînée. (c),(d) Etude aérodynamique de la Honda insight. (e) Vélo couché Varna Diablo qui permet d'atteindre la vitesse de 130 km/h. (f) Pac car II.



## A. Définition des unités de base du Système international d'unités (SI)

Les unités de base du Système international d'unités (SI) sont définies par le Bureau international des poids et mesures<sup>1</sup> (BIPM) de la façon suivante :

- Le *mètre* (m) est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de  $1/299792458$  de seconde. *Il en résulte que la vitesse de la lumière dans le vide,  $c_0$ , est égale à  $299792458$  m/s exactement.*
- Le *kilogramme* (kg) est l'unité de masse ; il est égal à la masse du prototype international du kilogramme. *Il en résulte que la masse du prototype international du kilogramme,  $m(\kappa)$ , est toujours égale à  $1$  kg exactement.*
- La *seconde* (s) est la durée de  $9'192'631'770$  périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133. *Il en résulte que la fréquence de la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133,  $\nu(\text{hfs Cs})$ , est égale à  $9192631770$  Hz exactement.*
- L'*ampère* (A) est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de  $1$  mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force égale à  $2 \times 10^{-7}$  newton par mètre de longueur. *Il en résulte que la constante magnétique,  $\mu_0$ , aussi connue sous le nom de perméabilité du vide, est égale à  $4\pi \times 10^{-7}$  H/m exactement.*
- Le *kelvin* (K), unité de température thermodynamique, est la fraction  $1/273,16$  de la température thermodynamique du point triple de l'eau. *Il en résulte que la température thermodynamique du point triple de l'eau,  $T_{tpw}$ , est égale à  $273,16$  K exactement.*
- La *mole* (mol) est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans  $0,012$  kilogramme de carbone 12. Lorsqu'on emploie la mole, les entités élémentaires doivent être spécifiées et peuvent être des atomes, des molécules, des ions, des électrons, d'autres particules ou des groupements spécifiés de telles particules. *Il en résulte que la masse molaire du carbone 12,  $M(^{12}\text{C})$ , est égale à  $12$  g/mol exactement.*
- La *candela* (cd) est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence  $540 \times 10^{12}$  hertz et dont l'intensité énergétique

dans cette direction est  $1/683$  watt par stéradian.

1. <http://www.bipm.org>



## B. Références

1. Joseph Kane, Morton Sternheim, Physique (Dunod, ISBN-13 978-2100071692)
2. Eugene Hecht, Physique (de Boeck, 1999, ISBN-13 978-2744500183)
3. Jean Rossel, Physique (éditions du Griffon, Neuchâtel, 1970)
4. J.-A. Monard, Mécanique
5. Bureau International des Poids et Mesures, <http://www.bipm.org>
6. Office fédéral de Métrologie METAS, <http://www.metas.ch>
7. Ressources biographiques : <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html>, <http://www.wikipedia.org>