

# **ALGÈBRE LINÉAIRE**

---

## Exercice 1

- a) Interpréter géométriquement l'application linéaire de  $V_3$  dans  $V_3$  donnée dans une base orthonormée par  $f : \vec{v} \rightarrow \vec{w} = 2(\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{u} - \vec{v}$  où  $\vec{u}$  est un vecteur-unité donné.

Indication : trouver l'image de  $\vec{u}$  et d'un vecteur quelconque orthogonal à  $\vec{u}$ .

- b) Trouver la matrice  $B$  associée à  $f$  pour  $\vec{u} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- c) Soit la matrice  $C = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 1 & -4 \\ 1 & -8 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de l'application linéaire de matrice  $C$ .

Donner une interprétation géométrique de cette application linéaire.

- d) On considère l'application linéaire de matrice  $M = C \cdot B$ .

Donner une interprétation géométrique de cette application linéaire.

## Exercice 2

- a) Dans une base orthonormée directe  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$  on considère l'application  $f : \vec{v} \rightarrow f(\vec{v}) = \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v})$  de  $V_3$  dans  $V_3$  où  $\vec{u}$  est un vecteur-unité fixe.

1) Montrer que  $f$  est linéaire (justification détaillée).

2) Montrer que  $f$  est symétrique (justification détaillée).

- b) On envisage l'application linéaire  $g$  de  $V_3$  dans  $V_3$  donnée dans la base

$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$  par la matrice  $G = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -9 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$

1) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de  $g$ .

2) Lorsque  $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{10}}\vec{u}_1 + \frac{3}{\sqrt{10}}\vec{u}_2$ , choisir trois vecteurs propres indépendants de  $g$  et chercher leurs images par l'application  $f$ .

3) Comparer  $g$  et  $f$ .

### Exercice 3

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  la matrice d'une application linéaire  $f$  dans une base donnée

- Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $A$ .
- Déterminer la matrice  $M$  de  $f$  dans une base de vecteurs propres, puis calculer  $M^n$ .
- Déterminer l'expression de  $A^n$ .

### Exercice 4

- Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Montrer que chaque vecteur propre de  $C$  est orthogonal à deux vecteurs propres indépendants de la matrice transposée de  $C$ .

On considère maintenant l'affinité de matrice  $C$  qui laisse fixe l'origine.

- Dessiner l'image par l'affinité du cube construit sur les vecteurs de base  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ .
- Quelle est l'image du plan  $\pi$  d'équation  $x + y + z = 1$  par cette affinité ?

### Exercice 5

Dans un repère métrique  $(O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ , on considère le plan  $\pi$  normal à  $\vec{n} = \vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$  passant par  $O$  et la droite  $d$  parallèle à  $\vec{n}$  et passant également par  $O$ .

- Écrire l'équation de  $\pi$ , puis calculer la distance de  $\pi$  à  $E_1(1; 0; 0)$ .

- b) On envisage l'application linéaire  $f_1$  qui associe à  $\overline{OP}$  son symétrique  $\overline{OP_1}$  par rapport à  $\pi$ . Trouver la matrice  $C_1$  de  $f_1$ .
- c) Trouver la matrice  $C_2$  de l'application qui associe à  $\overline{OP}$  sa projection orthogonale  $\overline{OP_2}$  sur  $d$ .
- d) Calculer  $C_1^2$ ,  $C_2^2$ , et  $I - 2C_2$ ,  $I$  étant la matrice-unité.
- e) Les résultats obtenus au point d) sont-ils inattendus ? Quels commentaires peut-on donner ?

### Exercice 6

Dans une base orthonormée  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ , une application linéaire  $f$  est donnée par

la matrice symétrique  $A = \begin{pmatrix} a & b & \frac{36}{23} \\ b & c & \frac{6}{23} \\ \frac{36}{23} & \frac{6}{23} & \frac{28}{23} \end{pmatrix}$

- a) Déterminer (en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $c$ ) l'image de  $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_3$  et de  $\vec{v}_2 = 3\vec{u}_2 + \vec{u}_3$  puis calculer  $a$ ,  $b$  et  $c$  sachant que  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  sont des vecteurs propres.
- b) Soit  $\vec{v}_3$  un vecteur orthogonal à  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ . Trouver son image par  $f$ .
- c) Écrire la matrice  $B$  de  $f$  dans la base  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$  et interpréter géométriquement la transformation  $f$ .
- d) On pose  $f^2 = f \circ f$ ,  $f^3 = f \circ f^2$ ,  $f^4 = f \circ f^3$ , etc. Interpréter géométriquement  $f^n$ .

## Exercice 7

Relativement à une base orthonormée de l'espace, on considère une application

linéaire  $f$  donnée par la matrice  $M = \begin{pmatrix} a & b & a \\ a & a & b \\ b & a & a \end{pmatrix}$

a) Montrer que  $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre et donner la valeur propre correspondante.

b) Soit  $S$  le sous-espace des vecteurs  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  tels que  $x + y + z = 0$ .

Choisir dans  $S$  deux vecteurs linéairement indépendants  $\vec{s}$  et  $\vec{t}$ .

Calculer leur image  $f(\vec{s})$  et  $f(\vec{t})$ .

Montrer que  $S$  est globalement invariant par  $f$ .

c) On pose  $a = 2$  et  $b = -1$ . Calculer  $f(\vec{r})$ ,  $f(\vec{s})$  et  $f(\vec{t})$  dans ce cas particulier.

Donner la matrice  $N$  de  $f$  dans la base  $(\vec{r}, \vec{s}, \vec{t})$ .

d) Pour quelles valeurs non nulles de  $a$  et  $b$  la matrice  $M$  représente-t-elle une rotation ?

Préciser alors l'angle de la rotation.

## Exercice 8

a) Dans le plan muni d'une origine et d'une base orthonormée  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ , on considère les applications linéaires  $m$  et  $n$ , données par leurs matrices

$$M = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$$

1) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $M$  puis interpréter  $m$  géométriquement.

2) Vérifier que les vecteurs  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$  et  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$  sont des vecteurs propres de  $N$ , puis interpréter  $n$  géométriquement.

- b) Dans l'espace muni d'une origine et d'une base orthonormée  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ , on considère l'application linéaire  $r$  donnée par sa matrice

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- 1) Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de  $R$  puis interpréter  $r$  géométriquement.
- 2) Écrire les matrices  $R^2, R^3, R^4$  et  $R^n$ .

### Exercice 9

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne une transformation linéaire  $f$  par sa matrice  $F$  :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ a & 1 & -3 \\ a & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad a \text{ étant une constante.}$$

- a) On note  $\lambda$  un nombre et  $I$  la matrice de l'identité. Vérifier que le déterminant de la matrice  $F - \lambda I$  peut s'écrire :  $\det(F - \lambda I) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 - a\lambda$
- b) Trouver une base du sous-espace des vecteurs propres associés à la valeur propre 0.
- c) Lorsque  $a = -3$ , calculer les valeurs propres de la transformation  $f$ . Dans ce cas, en observant son effet sur une base propre, on peut interpréter  $f$  comme la composition d'une projection oblique sur un plan suivie d'une affinité axiale dans ce plan. Quels sont alors la direction de la projection et le rapport de l'affinité axiale ?

Pour la fin du problème, on pose  $a = 1$ .

- d) Déterminer tous les vecteurs propres de la transformation  $f$ .
- e) Calculer l'image par  $f$  de chacun des vecteurs ci-dessous

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exprimer ces images dans la base  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ . Dans cette base, quelle serait la matrice  $M$  de  $f$  ?

On considère maintenant l'affinité de matrice  $F$  qui laisse fixe l'origine.

- f) Quelle est, par cette affinité, l'image de la droite horizontale d'équations  $z = -1$  et  $x = y$  ?
- g) Quels sont les points de l'espace dont l'image est dans le plan d'équation  $y - z = 0$  ?

### Exercice 10

- a) Une affinité axiale est donnée par son axe  $a$  d'équation  $3x + y + 3 = 0$ , sa direction  $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et son rapport  $r = -2$ .
- 1) Exprimer l'image  $P'(x'; y')$  d'un point  $P(x; y)$  quelconque.
  - 2) Trouver l'équation de  $d'$ , image de la droite  $d$  d'équation  $x + 5y - 5 = 0$ .
- b) On envisage l'affinité donnée par
- $$\begin{cases} x' = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + 1 \\ y' = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - 2 \end{cases}$$
- 1) Étudier cette affinité et la décrire géométriquement.
  - 2) Déterminer l'image par cette affinité du cercle de centre  $M(-4; 10)$  et de rayon  $r = 2\sqrt{5}$ .