Lycée Denis-de-Rougemont

Neuchâtel et Fleurier

Exercices de révision

Mathématiques de niveau 1

ANALYSE

Exercice 1

Étudier la fonction $f : x \mapsto y = \dfrac{(2x+1)^3}{8(x-1)^2}$.

Exercice 2

a) Montrer que, quel que soit $a \neq 0$, le graphe de la fonction $f : x \mapsto y = \dfrac{3x \cdot (x-a)}{x^2+9}$ admet deux points à tangente horizontale.

b) Que se passe-t-il si $a = 0$?

c) Étudier la fonction pour $a = 4$.

Exercice 3

On considère la fonction $f : x \mapsto y = \dfrac{ax^2+bx}{cx+1}$. Déterminer a, b et c pour que son graphe ait les asymptotes d'équation $x = -1$ et $y = 3x - 5$.

Exercice 4

On considère la fonction $f : x \mapsto y = (4x^2 - 4x + 1) \cdot e^{kx}$ avec $k \neq 0$.

a) Montrer que, pour toute valeur de k, le graphe de f admet deux points à tangente horizontale.

b) Étudier la fonction pour $k = -1$.

c) Calculer $I(b) = \displaystyle\int_0^b (4x^2 - 4x + 1) \cdot e^{-x} dx$. Que devient $I(b)$ si $b \to +\infty$?

Exercice 5

Sur l'intervalle $I = [-3\,;1]$, on considère les deux fonctions

$f : x \mapsto y = x^2 + 2x - 3$ et $g : x \mapsto y = (x^2 + 2x - 3) \cdot e^x$

a) Déterminer une primitive de chacune de ces deux fonctions.

b) Étudier ces deux fonctions sur l'intervalle donné I. Représenter les deux graphes dans un même repère orthonormé en prenant une unité égale à cinq carreaux. En particulier, calculer les trois points d'intersection des deux graphes.

c) Hachurer sur le dessin la surface comprise entre les deux graphes, lorsque x varie entre -3 et $+1$, puis calculer l'aire de la surface hachurée.

Exercice 6

On donne la fonction $f : x \mapsto y = x + 1 - \dfrac{4}{(x-2)^2}$.

a) Étudier cette fonction.

b) Trouver une primitive de f, puis calculer $I = \displaystyle\int_3^6 f(x)\mathrm{d}x$.

c) On considère la fonction $g : x \mapsto y = x - 2 - \dfrac{4}{(x-2)^2}$. En tirant parti du graphe de f, esquisser dans le même repère le graphe de g.

Exercice 7

a) Étudier la fonction $f : x \mapsto y = \dfrac{-3x+6}{x^2}$.

b) On envisage la fonction $g : x \mapsto y = \ln\left(\dfrac{-3x+6}{x^2}\right)$

1. Déduire de l'étude de f le domaine de définition de g.
2. Déduire de même le comportement de g au voisinage de $x = 0$ et au voisinage de $x = 2$.
3. Calculer les intersections du graphe de g et de l'axe des abscisses.
4. Esquisser finalement le graphe de g dans le même repère que celui utilisé pour f.

Exercice 8

Étudier la fonction $f : x \mapsto y = 3\cos(x) - 5\sin(x)$.

Exercice 9

Étudier la fonction $f : x \mapsto y = \sin(x) - \sin^3(x)$.

Exercice 10

On donne la fonction $f : x \mapsto y = \dfrac{1+\ln(x)}{x}$.

a) Étudier cette fonction. Pour le graphe, prendre une unité égale à 2 cm.

b) Trouver une primitive de f.

c) Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_{e^{-2}}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 11

On donne la fonction suivante :

$$(1)\quad f : x \mapsto y = \frac{4x^3 + 54x}{5x^2 + 5}$$

a) Vérifier que $f(x)$ peut aussi s'écrire sous la forme

$$(2)\quad f : x \mapsto y = \frac{4}{5}x + \frac{10x}{x^2 + 1}$$

b) Étudier cette fonction.

c) Hachurer la surface délimitée par l'origine, l'asymptote, la droite $x = 3$ et le graphe de f. Calculer ensuite l'aire de cette surface.
Pour l'intégration, on se servira de l'expression (2).

d) Établir l'équation de la tangente au graphe à l'origine.

e) En observant le graphe, dire pour quelles valeurs de m la droite $y = mx$ coupe le graphe de f en trois points.

Exercice 12

a) On considère la parabole p d'équation $y = 9 - x^2$ ainsi qu'un point M de p situé dans le premier quadrant. On projette le point M orthogonalement sur l'axe des x pour obtenir le point M'. Déterminer les coordonnées du point M pour que l'aire du triangle $OM'M$ soit maximale. Quelle est la valeur de cette aire ?

b) On considère la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Après avoir esquissé son graphe, déterminer la plus courte distance de l'origine au graphe de f.