STATIQUE DU CORPS SOLIDE

1. Notion de *moment* de force

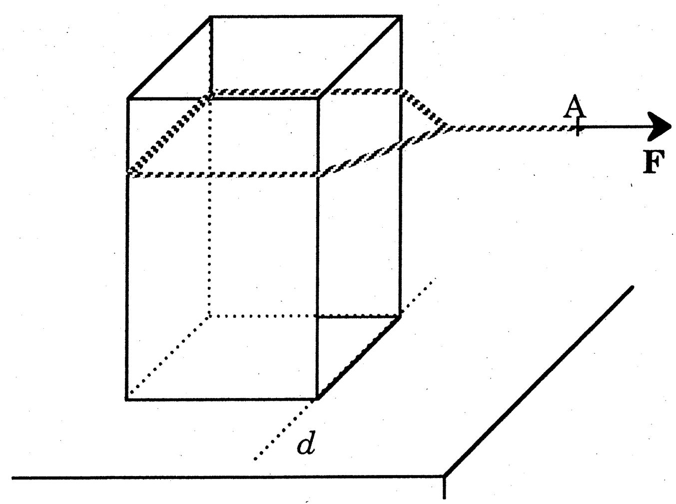
Exemples concrets

a) Quelqu'un a dit: "Donnez-moi un point d'appui et je soulèverai le Monde". On ne lui a jamais donné parce qu'il est évidemment inexistant, mais cela illustre le *principe du levier* qui permet de multiplier les forces (mais pas l'énergie !), déjà connu empiriquement depuis l'Antiquité. On sait bien qu'un levier permet par exemple de soulever un objet dont le poids est bien plus grand que la force qu'on devrait déployer pour le soulever à bras.

b) Toute personne, qu'elle soit instruite en physique ou non, et devant pousser une porte, n'exerce pas une force à l'endroit de la charnière, mais au contraire, en un point qui en est le plus éloigné, augmentant ainsi le *bras de levier* de la force. De plus, cette force est instinctivement orientée perpendiculairement à la porte, ou tout au moins pas tangentiellement.

c) Une pince-monseigneur est bien plus efficace pour couper un câble qu'une pince à ongle, tous les évadés vous le confirmeront. L'efficacité n'est donc pas seulement une question de force appliquée à la pince mais aussi de la *longueur* de ses poignées.

d) On tente de tirer horizontalement une lourde armoire au moyen d'une corde (voir figure). A cause des forces d'adhérence sur le sol, le mouvement de l'armoire sera conditionné non seulement par la valeur de la force sur la corde, mais aussi par la position de la corde, autrement dit, par la *position de la droite-support* de la force. On devine que si la corde est placée trop haut, l'armoire risque de basculer en avant en faisant une rotation autour d'un axe confondu avec son arête inférieure (droite d sur la fig.).



Ce dernier exemple montre que :

1°) Le point d'application A de la force est sans importance pourvu qu'il reste sur la même droite-support. Une force est un vecteur glissant : la longueur de la corde n'intervient pas.

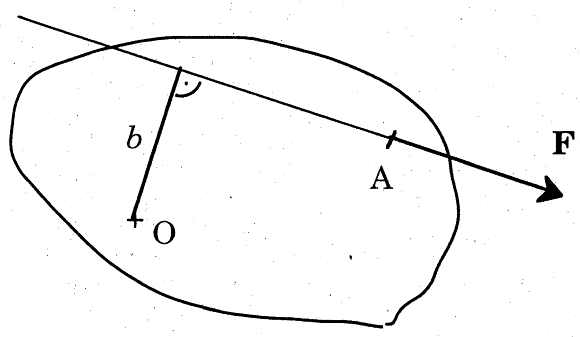
2°) Ce qui est crucial ici est la position verticale de la droite-support, donc de la corde: un déplacement de la corde vers le haut autour de l'armoire peut en modifier complètement l'équilibre.

Définitions :

On appelle bras de levier b de la force **F** la plus courte distance entre la droite-support de la force et le point O figurant l'axe de rotation possible.

On appelle moment M_0 de la force **F** le produit de la grandeur F de la force par le bras de levier b :

$$M_0 = F b$$



Cette dernière définition n'est pas tout à fait complète, mais avant de l'affiner, il est nécessaire de parler des

Unités :

Dans le système MKS, le moment étant le produit d'une force par une distance, il s'exprime en N.m, ce qu'on se gardera bien de noter joules, pour éviter des confusions.

Pour résumer et rester concret, disons que :

Le **moment** d'une force représente **l'efficacité** de cette force pour provoquer ou **empêcher** une **rotation** d'un corps solide.

Ce chapitre étant de statique, il ne devra par conséquent pas y avoir de rotation.

2. Caractère vectoriel du moment

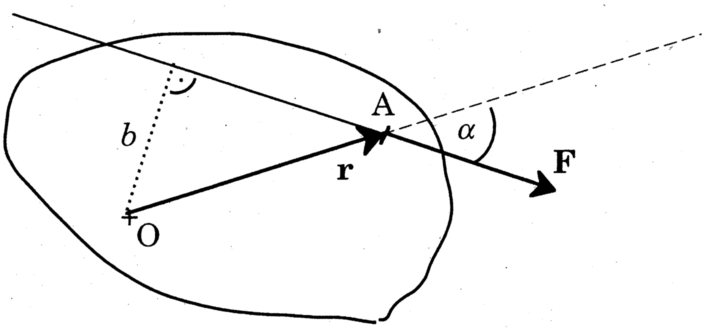
Dans l'écrasante majorité des cas que nous examinerons, toutes les forces agissant sur le corps seront dans un même plan, le plan Oxy. L'axe de rotation possible sera perpendiculaire à ce plan et donc dans la *direction* de l'axe Oz, le *sens* n'étant pas encore défini.

Considérons l'une des forces agissant sur le corps et soit O le point d'intersection de l'axe de rotation possible avec le plan contenant les forces. Ce point O peut ou non appartenir au corps. Le point d'application A de la force est repéré par le vecteur **r** = **OA**. Soit encore α l'angle entre les vecteurs **F** et **r** (ils doivent avoir même origine pour pouvoir définir l'angle qu'ils forment). Le bras de levier b est alors :

$$b = r \sin\alpha$$

où r est la norme de **r**. La grandeur du moment de **F** est alors :

$$M_O = r\, F \sin\alpha$$



Comme **r** et **F** sont des vecteurs, cela rappelle furieusement leur **produit vectoriel**. On écrit alors la **définition** complète :

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}$$

C'est le vecteur-moment de la force **F** par rapport au point O.

On ne s'intéressera dans ce chapitre qu'à l'aspect géométrique du produit vectoriel, l'aspect algébrique sera laissé de côté. Par conséquent, il est de première importance de se souvenir que, si on a deux vecteurs **a** et **b**, alors :

a) $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\,\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$ — non commutativité.

b) $\mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ — le vecteur **c** est perpendiculaire au plan formé par **a** et **b**. Le sens de **c** est donné par la fameuse *règle du tire-bouchon* (sens direct).

c) $c = a\, b \sin\alpha$ — l'angle α est celui que forment les deux vecteurs lorsqu'ils ont même origine. De plus, la valeur de **c**, donc sa norme, est égale à l'aire du parallélogramme construit sur **a** et **b**.

d) $\alpha = 0 \Rightarrow \mathbf{c} = 0$ — le produit vectoriel de deux vecteurs parallèles, de même sens ou non, est nul. Il est maximum et vaut $c = a\, b$ si les deux vecteurs sont perpendiculaires entre eux.

Si toutes les forces sont dans le plan Oxy, tous les vecteurs-moments seront selon Oz. Ce n'est donc que la composante M_z de **M** qui va intervenir, avec le signe que lui donne le produit vectoriel de **r** et de **F** en respectant la règle du tire-bouchon. Ainsi M_z sera positif si la force tend à faire tourner le corps dans le sens positif, c-à-d dans le sens direct, autrement dit le sens trigonométrique. C'est une convention de signe qui doit toujours être respectée. Ainsi par exemple, pour le trièdre direct Oxyz, le sens de l'axe Oz est donné en tournant x sur y (ordre alphabétique) et en appliquant la règle du tire-bouchon (ou du tournevis).

3. Conditions d'équilibre

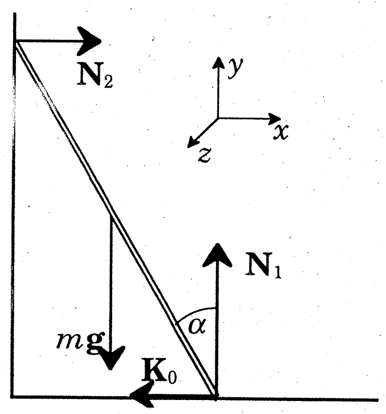
C'est en effet un pluriel qui apparaît dans ce titre. LA condition d'équilibre d'un point matériel est que la résultante des forces qui y est appliquée soit nulle : $\sum \mathbf{F}_i = 0$. Pour le corps solide ne pouvant plus être considéré comme un point matériel parce qu'il est susceptible d'effectuer des rotations, cette condition est toujours nécessaire mais n'est plus suffisante pour garantir l'équilibre, ou le plus souvent l'immobilité. Exemple : une poulie qui tourne mais dont l'axe est pourtant fixe : $\sum \mathbf{F}_i = 0$ mais elle n'est pourtant pas immobile. A cette condition, il faut donc en ajouter une seconde, celle de la *nullité de la résultante des moments* de forces. Les deux conditions d'équilibre sont donc :

$$\sum \mathbf{F}_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum \mathbf{M}_{\mathrm{O}i} = 0$$

Pratiquement on disposera de trois équations, permettant la recherche de trois inconnues. Les deux premières sont les traditionnelles $\sum F_x = 0$ et $\sum F_y = 0$, la troisième étant $\sum M_{\mathrm{O}z} = 0$. Il devient urgent de traiter un exemple :

Une échelle de longueur $2L$ et de masse m est appuyée contre un mur. Le coefficient d'adhérence au sol est μ_0 supposé connu; l'adhérence au mur est négligeable.

Il s'agit de calculer l'angle α maximum que peut avoir l'échelle avant de glisser.



La condition habituelle de nullité de la résultante des forces s'écrit :

$m\mathbf{g} + \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 + \mathbf{K}_0 = 0$ c-à-d :

(x) : $N_2 - K_0 = 0$

(y) : $-mg + N_1 = 0$

Un théorème important et bien utile sera démontré ci-après qui permet, en statique, de choisir n'importe quel point de référence O du plan des forces et figurant l'axe de rotation possible. La seule restriction sera qu'il soit le même pour toutes les forces en cause. On choisit alors évidemment le point pour lequel le calcul est le plus simple. Dans l'exemple, c'est le pied de l'échelle puisque deux des quatre forces ont un bras de levier nul.

Calculons ces moments :

bras de levier de $m\mathbf{g}$: $L\sin\alpha$ => $M_{\mathrm{O}z}(m\mathbf{g}) = +\,m\mathbf{g}L\sin\alpha$

bras de levier de $\mathbf{N}_2$: $2L\cos\alpha$ => $M_{\mathrm{O}z}(\mathbf{N}_2) = -\,2\mathbf{N}_2 L\cos\alpha$

les moments de $\mathbf{N}_1$ et de $\mathbf{K}_0$ sont nuls. La condition $\sum M_{\mathrm{O}z} = 0$ s'écrit :

(z) : $mgL\sin\alpha - 2N_2 L\cos\alpha = 0$, d'où on tire : $\tan\alpha = 2N_2/mg$.

Condition de non-glissement de l'échelle : $K_0 \leq \mu_0 N_1$. En utilisant (x) il vient : $N_2 \leq \mu_0 N_1$; puis, puisque $mg = N_1$: $N_2 \leq \mu_0 mg$. Remplaçant finalement cela dans (*), on obtient le résultat :

$$\tan \alpha \leq 2\mu_0$$

Si par exemple $\mu_0 = 0{,}5$ alors $\alpha_{max} = 45°$.

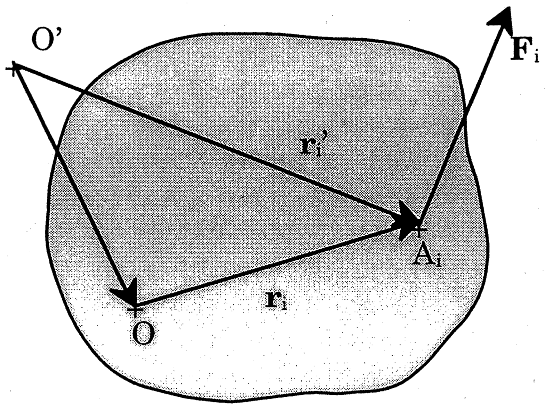
On remarque que ni la longueur ni la masse de l'échelle n'intervient.

Théorème :

Montrons que si $\sum \mathbf{F}_i = 0$ alors le choix du point de référence O est libre.

Considérons pour cela un corps solide quelconque soumis à plusieurs forces numérotées $\mathbf{F}_i$ appliquées en des points A_i, repérés par des vecteurs $\mathbf{r}_i$ partant d'un point de référence O. Soit alors un point O', appartenant ou non au corps, mais toujours dans même plan que les forces. La figure ne comprend que l'une des forces pour ne pas charger le dessin.

Calculons la somme des moments des $\mathbf{F}_i$ par rapport à O' :



Par définition : $\sum \mathbf{M}_{O'} = \sum \mathbf{r}_i' \wedge \mathbf{F}_i$ avec $\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i + \mathbf{O'O}$

$\Rightarrow \sum \mathbf{r}_i' \wedge \mathbf{F}_i = \sum (\mathbf{r}_i + \mathbf{O'O}) \wedge \mathbf{F}_i$

on développe : $\sum (\mathbf{r}_i + \mathbf{O'O}) \wedge \mathbf{F}_i = \sum \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i + \sum \mathbf{O'O} \wedge \mathbf{F}_i$

or, il n'y a qu'un **O'O**, on le met donc en évidence :

$\sum \mathbf{O'O} \wedge \mathbf{F}_i = \mathbf{O'O} \wedge \sum \mathbf{F}_i = 0$ par l'hypothèse que $\sum \mathbf{F}_i = 0$. Il reste :

$\sum \mathbf{r}_i' \wedge \mathbf{F}_i = \sum \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i = \sum \mathbf{M}_O$ c.q.f.d.

Exercice :

Refaire le problème de l'échelle en choisissant un autre point de référence, par exemple le pied du mur. On devrait trouver le même résultat, le calcul étant un peu moins simple puisque dans ce cas, $\mathbf{M}_{O'z}(\mathbf{N}_1) \neq 0$.

4. Applications

A) Centre de gravité

Chaque corps solide possède un point particulier autour duquel il peut tourner en restant en équilibre stable, quelle que soit sa position. C'est son **centre de gravité** (abrégé cdg) noté G. Ce point peut être appelé **centre de masse** (cdm), ce qui revient au même si le champ de gravitation est homogène, ce qui est toujours le cas sur Terre, mais ne l'est pas forcement en astrophysique : le centre de masse de la Lune ne coïncide pas exactement avec son centre de gravité dans le champ de gravitation terrestre. La notion de centre de masse est en fait plus générale que celle de centre de gravité car elle a un sens même en l'absence de champ de gravitation.

Un corps solide de masse totale m et donc de poids $m\,\mathbf{g}$ peut être décomposé en petits éléments de masse m_i donc de poids $m_i\mathbf{g}$.

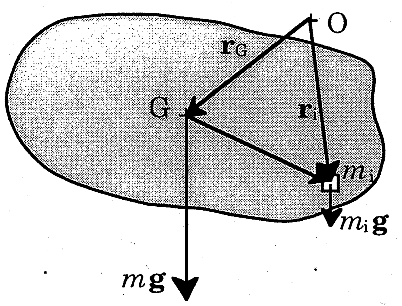
On a évidemment $\sum m_i = m$ et $\sum m_i\mathbf{g} = m\,\mathbf{g}$.

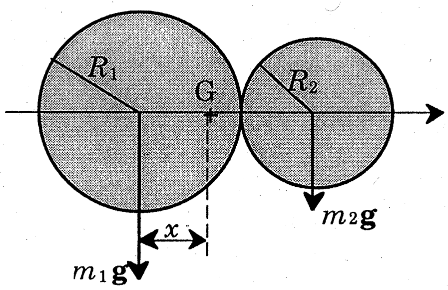
Choisissons un point O quelconque et exprimons la somme des moments des poids individuels :

$\sum \mathbf{M}_O(m_i\,\mathbf{g}) = \sum \mathbf{r}_i \wedge m_i\,\mathbf{g}$,   par définition d'un moment.

Il doit exister un point G auquel est appliqué le poids total $m\,\mathbf{g}$ et tel que le moment de ce poids soit égal à la somme ci-dessus :

$\mathbf{r}_G \wedge m\,\mathbf{g} = \sum \mathbf{r}_i \wedge m_i\,\mathbf{g}$ où $\mathbf{r}_G$ désigne le vecteur $\mathbf{OG}$.





Cela définit le vecteur $\mathbf{r}_G$, le point G est donc le cdg du corps.

Dans les cas pratiques de recherche de cdg, on déplace O en G, de façon à ce que $\mathbf{r}_G = 0$, par conséquent :

$$\sum \mathbf{M}_G(m_i\,\mathbf{g}) = 0$$

Exemple de calcul :

Détermination du cdg d'un système de deux sphères accolées, leur rayon et leur masse est connu (fig. ci-dessus).

La symétrie implique que G sera immanquablement sur l'axe qui joint les deux centres, cet axe est placé horizontalement de façon à ce que les vecteurs poids et position soient orthogonaux, évitant ainsi l'apparition de sinus.

Appliquons l'expression $\sum \mathbf{M}_G(m_i\,\mathbf{g}) = 0$ à cette situation :

$\sum \mathbf{M}_G(m_i\,\mathbf{g}) = 0 \Rightarrow m_1 g x - m_2 g\,(R_1 + R_2 - x) = 0$

d'où on extrait :

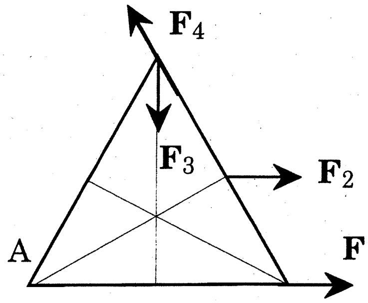
$$x = m_2\,(R_1 + R_2)\,/\,(m_1 + m_2)$$

B) Couple de forces

EXERCICES DE STATIQUE DU SOLIDE

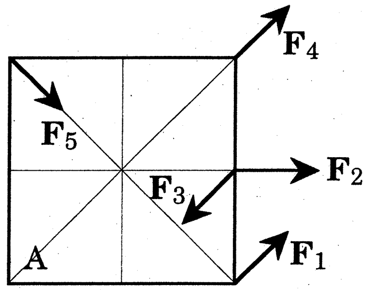
1. Triangle équilatéral de côté a. Calculer la longueur du bras de levier de chaque force par rapport au point A.

Rép.: 0; $a3^{1/2}/4$; $a/2$; $a3^{1/2}/2$.



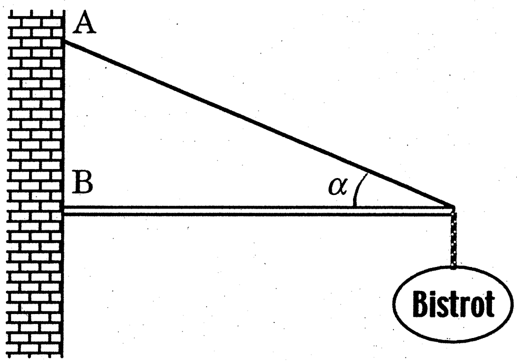
2. Carré de côté a = 10 cm. Toutes les forces sont dans le plan du carré et ont la même valeur de 20 N. Calculer leur moment par rapport à A.

Rép.: env. 1,41; - 1; - 0,71; 0; - 1,41; (en Nm).



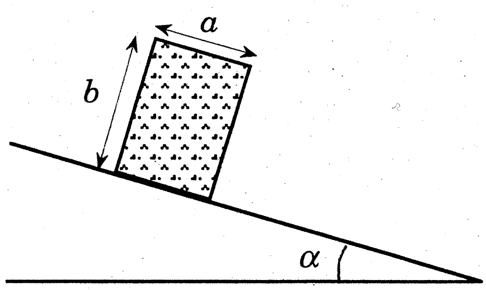
3. Une enseigne est constituée d'un disque de masse m = 10 kg et d'une tige de masse M = 20 kg et de longueur L. Le système est retenu au mur par un câble de masse négligeable et faisant un angle α = 30° avec la tige. Calculer les forces (norme et angle) sur l'enseigne aux points A et B du mur.

Rép.: 392 N; 353 N; 16° avec la tige.



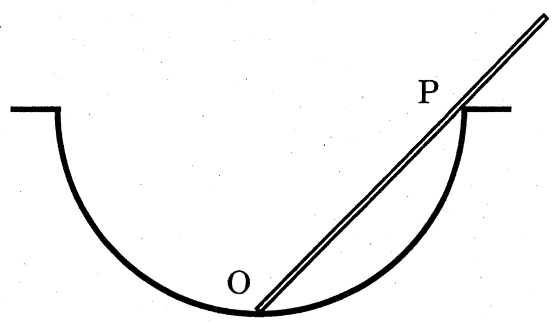
4. L'angle α du plan pouvant être varié, quelle est sa valeur maximum pour que ce bloc de bois ne bascule pas? Le coefficient d'adhérence μ_0 est suffisant pour que le bloc ne glisse jamais.
Applic. num.: a = 9 cm; b = 15 cm.

Rép.: 31°.

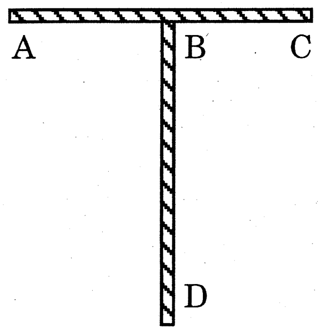


5. Dans une demi-sphère creuse de rayon R = 30 cm est posée une tige mince (m = 0,2 kg, L = 50 cm) dont une extrémité repose au fond O de la cuvette. L'adhérence est nulle au point P.
Dessiner les forces sur la tige en O et en P.
Les calculer (grandeur et angle).

Rép.: 1,38 N; 0,58 N; 0,82 N; 45°.

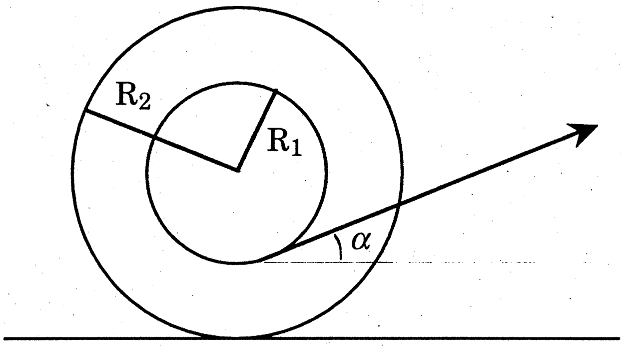


6. Deux tiges minces (mince = diamètre négligeable vis-à-vis de la longueur) identiques de longueur AC = BD = a sont réunies pour former un "T" symétrique.
a) Déterminer la position du centre de gravité G de l'objet en calculant la distance BG.
b) On suspend ensuite l'objet par le point A. Calculer l'angle que va former à l'équilibre la tige BD avec la verticale.



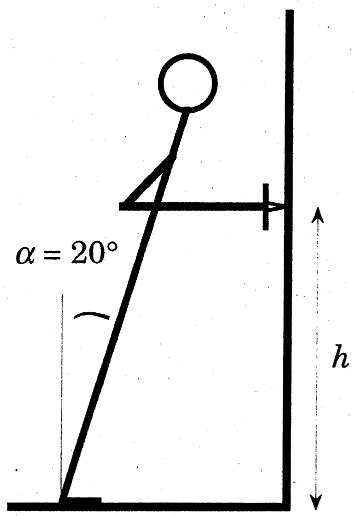
Rép.: a) $a/4$; b) arctan 2.

7. Un bobine de fil est posée sur une surface horizontale. On tire sur le fil. Examiner le mouvement de roulement de la bobine qui va avancer ou reculer selon l'angle α que fait le fil avec l'horizontale. Calculer, en fonction de R_1 et R_2, l'angle $\alpha*$ pour lequel la bobine n'avance ni recule.



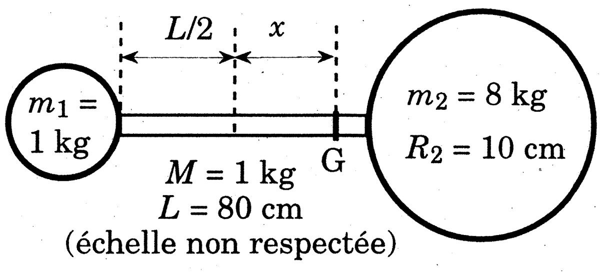
Rép.: $\alpha* = \arccos(R_1/R_2)$.

8. Un individu mesurant 1,80 m et ayant une masse de 65 kg enfonce horizontalement une punaise dans un mur vertical à la hauteur h = 1,20 m. La surface de la pointe de la punaise est de 0,02 mm^2. On considère que le cdg G du bonhomme est en son milieu, c-à-d à 90 cm de ses semelles. Calculer:
a) la pression sur le mur;
b) le coefficient d'adhérence minimum des semelles de l'individu afin qu'il ne se casse pas la figure pour l'angle indiqué.



Rép.: a) 8,2 GPa; b) 0,26.

9. Calcul de la position x du cdg G de cette haltère dissymétrique. Elle est formée de deux sphères de bois (m_1, R_1 et m_2, R_2) et d'une tige (L, M).
R_1 n'est en effet pas donné.



Rép.: 35,5 cm.