Lycée Denis-de-Rougemont | Mathématiques de niveau 2

ALGEBRE LINEAIRE

Corrigés des exercices de révision

Exercice 1

a) On a $f : \vec{v} \to \vec{w} = 2(\vec{v}\cdot\vec{u})\vec{u} - \vec{v}$ où $\vec{u}$ est un vecteur-unité donné.

On a $f(\vec{u}) = 2(\vec{u}\cdot\vec{u})\vec{u} - \vec{u} = 2\,\|\vec{u}\|^2\vec{u} - \vec{u} = 2\cdot 1\cdot\vec{u} - \vec{u} = 2\vec{u} - \vec{u} = \vec{u}$.

Soit $\vec{v} \perp \vec{u}$; on a $f(\vec{v}) = 2(\vec{v}\cdot\vec{u})\vec{u} - \vec{v} = 2\cdot 0\cdot\vec{u} - \vec{v} = -\vec{v}$ (car, si $\vec{v}\perp\vec{u}$, $\vec{v}\cdot\vec{u} = 0$).

On en déduit que f est la symétrie d'axe parallèle à $\vec{u}$ et passant par l'origine.

b) La matrice B associée à f pour $\vec{u} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ (on a bien $\|\vec{u}\| = 1$) aura des colonnes constituées par les images par f des vecteurs de la base standard $(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$.

On a $f(\vec{e_1}) = 2(\vec{e_1}\cdot\vec{u})\vec{u} - \vec{e_1} = 2\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right)\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\cdot 2\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} =$

$= \frac{4}{9}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8/9\\8/9\\4/9\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/9\\8/9\\4/9\end{pmatrix}$,

$f(\vec{e_2}) = 2(\vec{e_2}\cdot\vec{u})\vec{u} - \vec{e_2} = 2\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right)\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\cdot 2\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} =$

$= \frac{4}{9}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8/9\\8/9\\4/9\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8/9\\-1/9\\4/9\end{pmatrix}$ et

$f(\vec{e_3}) = 2(\vec{e_3}\cdot\vec{u})\vec{u} - \vec{e_3} = 2\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right)\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} =$

$= \frac{2}{9}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4/9\\4/9\\2/9\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4/9\\4/9\\-7/9\end{pmatrix}$.

Par conséquent, on a $B = \begin{pmatrix}-1/9 & 8/9 & 4/9\\ 8/9 & -1/9 & 4/9\\ 4/9 & 4/9 & -7/9\end{pmatrix}$.

c) On a $C = \begin{pmatrix}-8/9 & 1/9 & -4/9\\ 1/9 & -8/9 & -4/9\\ -4/9 & -4/9 & 7/9\end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de C sont les λ solutions de $\det(C - \lambda I) = 0$.

On a $\det(C-\lambda I) = \begin{vmatrix}-\frac{8}{9}-\lambda & 1/9 & -4/9\\ 1/9 & -\frac{8}{9}-\lambda & -4/9\\ -4/9 & -4/9 & \frac{7}{9}-\lambda\end{vmatrix} =$

$= \left(-\frac{8}{9}-\lambda\right)^2\left(\frac{7}{9}-\lambda\right) + \frac{1}{9}\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)^2 + \frac{1}{9}\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)^2 - \left(-\frac{4}{9}\right)^2\left(-\frac{8}{9}-\lambda\right) - \left(-\frac{4}{9}\right)^2\left(-\frac{8}{9}-\lambda\right) - \left(\frac{1}{9}\right)^2\left(\frac{7}{9}-\lambda\right) =$

$= \left(\frac{8}{9}+\lambda\right)^2\left(\frac{7}{9}-\lambda\right) + \frac{16}{729} + \frac{16}{729} + \frac{16}{81}\left(\frac{8}{9}+\lambda\right) + \frac{16}{81}\left(\frac{8}{9}+\lambda\right) - \frac{1}{81}\left(\frac{7}{9}-\lambda\right) =$

$= \left(\frac{8}{9}+\lambda\right)^2\left(\frac{7}{9}-\lambda\right) + \frac{32}{729} + \frac{32}{81}\left(\frac{8}{9}+\lambda\right) - \frac{1}{81}\left(\frac{7}{9}-\lambda\right) =$

$= \left(\frac{8}{9}+\lambda\right)^2\left(\frac{7}{9}-\lambda\right) + \frac{32}{729} + \frac{256}{729} + \frac{32}{81}\lambda - \frac{7}{729} + \frac{1}{81}\lambda =$

$= \left(\frac{8}{9}+\lambda\right)^2\left(\frac{7}{9}-\lambda\right) + \frac{281}{729} + \frac{11}{27}\lambda = \left(\frac{64}{81} + \frac{16}{9}\lambda + \lambda^2\right)\left(\frac{7}{9}-\lambda\right) + \frac{281}{729} + \frac{11}{27}\lambda =$

$= \frac{448}{729} - \frac{64}{81}\lambda + \frac{112}{81}\lambda - \frac{16}{9}\lambda^2 + \frac{7}{9}\lambda^2 - \lambda^3 + \frac{281}{729} + \frac{11}{27}\lambda =$

$= -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1.$

Ainsi $\det(C-\lambda I) = 0 \Rightarrow -\lambda^3-\lambda^2+\lambda+1 = 0.$

Une solution est $\lambda = 1$ $\quad (-1-1+1+1=0)$.

Divisons $-\lambda^3-\lambda^2+\lambda+1$ par $\lambda-1$:

$$\begin{array}{r|l} -\lambda^3-\lambda^2+\lambda+1 & \lambda-1 \\ \hline -(-\lambda^3+\lambda^2) & -\lambda^2-2\lambda-1 \\ \hline -2\lambda^2+\lambda+1 & \\ -(-2\lambda^2+2\lambda) & \\ \hline -\lambda+1 & \\ -(-\lambda+1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

On obtient ainsi $-\lambda^3-\lambda^2+\lambda+1 = (\lambda-1)(-\lambda^2-2\lambda-1) = -(\lambda-1)(\lambda^2+2\lambda+1) = (-\lambda-1)(\lambda+1)^2$.

Par conséquent, les solutions de $\det(C-\lambda I)=0$, et par conséquent les valeurs propres de C sont $\lambda_1=-1$ et $\lambda_2=1$.

Cherchons maintenant les vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

$\lambda_1=-1$: on a $C\vec{v} = \lambda_1\vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} -8/9 & 1/9 & -4/9 \\ 1/9 & -8/9 & -4/9 \\ -4/9 & -4/9 & 7/9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{8}{9}v_1 + \frac{1}{9}v_2 - \frac{4}{9}v_3 = -v_1 \\ \frac{1}{9}v_1 - \frac{8}{9}v_2 - \frac{4}{9}v_3 = -v_2 \\ -\frac{4}{9}v_1 - \frac{4}{9}v_2 + \frac{7}{9}v_3 = -v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8v_1 + v_2 - 4v_3 = -9v_1 \\ v_1 - 8v_2 - 4v_3 = -9v_2 \\ -4v_1 - 4v_2 + 7v_3 = -9v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 + v_2 - 4v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 - 4v_3 = 0 \\ -4v_1 - 4v_2 + 16v_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 + v_2 - 4v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 - 4v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 - 4v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 + v_2 - 4v_3 = 0 \Rightarrow v_3 = \frac{v_1+v_2}{4} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \frac{v_1+v_2}{4} \end{pmatrix};$$

en prenant $v_1 = 4$ et $v_2 = 0$, on obtient $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

en prenant $v_1 = 0$ et $v_2 = 4$, on obtient $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont pas parallèles;

ainsi les vecteurs propres correspondant à la valeur propre $\lambda_1 = -1$ sont les combinaisons linéaires de $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2=1$: on a $C\vec{v} = \lambda_2\vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} -8/9 & 1/9 & -4/9 \\ 1/9 & -8/9 & -4/9 \\ -4/9 & -4/9 & 7/9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{8}{9}v_1 + \frac{1}{9}v_2 - \frac{4}{9}v_3 = v_1 \\ \frac{1}{9}v_1 - \frac{8}{9}v_2 - \frac{4}{9}v_3 = v_2 \\ -\frac{4}{9}v_1 - \frac{4}{9}v_2 + \frac{7}{9}v_3 = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8v_1 + v_2 - 4v_3 = 9v_1 \\ v_1 - 8v_2 - 4v_3 = 9v_2 \\ -4v_1 - 4v_2 + 7v_3 = 9v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -17v_1 + v_2 - 4v_3 = 0 \\ v_1 - 17v_2 - 4v_3 = 0 \\ -4v_1 - 4v_2 - 2v_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -17v_1+v_2-4v_3=0 \\ v_1-17v_2-4v_3=0 \\ v_3=-2v_1-2v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -17v_1+v_2-4(-2v_1-2v_2)=0 \\ v_1-17v_2-4(-2v_1-2v_2)=0 \\ v_3=-2v_1-2v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -17v_1+v_2+8v_1+8v_2=0 \\ v_1-17v_2+8v_1+8v_2=0 \\ v_3=-2v_1-2v_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -9v_1+9v_2=0 \\ 9v_1-9v_2=0 \\ v_3=-2v_1-2v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1=v_2 \\ v_3=-2v_1-2v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2=v_1 \\ v_3=-4v_1 \end{cases} \rightarrow \vec{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \\ -4v_1 \end{pmatrix};$$

en prenant $v_1=1$, on obtient $\vec{v_2}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$;

ainsi le vecteur propre correspondant à la valeur propre $\lambda_2=1$ est $\vec{v_2}'=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

On remarque que $\vec{v_1}=\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \vec{v_2}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ et que $\vec{v_1}'=\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \vec{v_2}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Comme $\lambda_1=-1$ et $\lambda_2=1$, on en déduit que l'application linéaire associée à la matrice C est la symétrie d'axe parallèle à $\vec{v_2}'=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ et passant par l'origine.

d) On a $M=C\cdot B=\begin{pmatrix} -8/9 & 1/9 & -4/9 \\ 1/9 & -8/9 & -4/9 \\ -4/9 & -4/9 & 7/9 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1/9 & 8/9 & 4/9 \\ 8/9 & -1/9 & 4/9 \\ 4/9 & 4/9 & -7/9 \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} \frac{8}{81}+\frac{8}{81}-\frac{16}{81} & -\frac{64}{81}-\frac{1}{81}-\frac{16}{81} & -\frac{32}{81}+\frac{4}{81}+\frac{28}{81} \\ -\frac{1}{81}-\frac{64}{81}-\frac{16}{81} & \frac{8}{81}+\frac{8}{81}-\frac{16}{81} & \frac{4}{81}-\frac{32}{81}+\frac{28}{81} \\ \frac{4}{81}-\frac{32}{81}+\frac{28}{81} & -\frac{32}{81}+\frac{4}{81}+\frac{28}{81} & -\frac{16}{81}-\frac{16}{81}-\frac{49}{81} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'image par l'application linéaire associée à M de $\vec{e_1}$ est $-\vec{e_2}$, de $\vec{e_2}$ est $-\vec{e_1}$ et de $\vec{e_3}$ est $-\vec{e_3}$.

M correspond donc à la composition de 2 symétries planaires : une symétrie de plan $x=y$ et une symétrie de plan $z=0$.

Exercice 2

a) On a $f : \vec{v} \to f(\vec{v}) = \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v})$, où $\vec{u}$ est un vecteur-unité fixe.

1) Pour montrer que f est linéaire, il faut montrer :

i) $f(\vec{0}) = \vec{0}$;

ii) $f(\vec{v}+\vec{w}) = f(\vec{v}) + f(\vec{w})$;

iii) $f(\lambda\vec{v}) = \lambda f(\vec{v})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a : i) $f(\vec{0}) = \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{0}) = \vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0} \to$ ok ;

ii) $f(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge (\vec{v}+\vec{w})) = \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}) =$
$= \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) + \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{w}) = f(\vec{v}) + f(\vec{w}) \to$ ok ;

iii) $f(\lambda\vec{v}) = \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge (\lambda\vec{v})) = \vec{u} \wedge (\lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})) = \lambda(\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v})) =$
$= \lambda f(\vec{v}) \to$ ok.

Ainsi f est bien linéaire.

2) Pour montrer que f est symétrique, on montre que sa matrice F est symétrique, autrement dit que F est égale à sa transposée : $F = {}^tF$.

Posons $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3})$. Comme $\vec{u}$ est un vecteur-unité, on a $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$.

De plus, $\vec{u} \wedge \vec{e_1} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_3 \\ -u_2 \end{pmatrix}$, $\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{e_1}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ u_3 \\ -u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_2^2 - u_3^2 \\ u_1u_2 \\ u_1u_3 \end{pmatrix}$,

$\vec{u} \wedge \vec{e_2} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_3 \\ 0 \\ u_1 \end{pmatrix}$, $\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{e_2}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -u_3 \\ 0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1u_2 \\ -u_3^2 - u_1^2 \\ u_2u_3 \end{pmatrix}$,

$\vec{u} \wedge \vec{e_3} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{e_3}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1u_3 \\ u_2u_3 \\ -u_1^2 - u_2^2 \end{pmatrix}$.

Ainsi $f(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} -u_2^2 - u_3^2 \\ u_1u_2 \\ u_1u_3 \end{pmatrix}$, $f(\vec{e_2}) = \begin{pmatrix} u_1u_2 \\ -u_3^2 - u_1^2 \\ u_2u_3 \end{pmatrix}$ et $f(\vec{e_3}) = \begin{pmatrix} u_1u_3 \\ u_2u_3 \\ -u_1^2 - u_2^2 \end{pmatrix}$.

On a donc $F = \begin{pmatrix} -u_2^2 - u_3^2 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_1u_2 & -u_3^2 - u_1^2 & u_2u_3 \\ u_1u_3 & u_2u_3 & -u_1^2 - u_2^2 \end{pmatrix}$, ce qui est bien une matrice symétrique : $F = {}^tF$.

Ainsi f est symétrique.

b) On a $G = \begin{pmatrix} -9/10 & 3/10 & 0 \\ 3/10 & -1/10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Les valeurs propres de G sont les λ tels que $\det(G - \lambda I) = 0$.

On a $\det(G - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\frac{9}{10} - \lambda & \frac{3}{10} & 0 \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$

$= \left(-\frac{9}{10} - \lambda\right)\left(-\frac{1}{10} - \lambda\right)(-1-\lambda) - \left(\frac{3}{10}\right)^2(-1-\lambda) = (-1-\lambda)\left(\left(-\frac{9}{10} - \lambda\right)\left(-\frac{1}{10} - \lambda\right) - \left(\frac{3}{10}\right)^2\right) =$

$$= -(\lambda+1)\left(\frac{9}{100}+\lambda+\lambda^2-\frac{9}{100}\right) = -(\lambda+1)(\lambda+\lambda^2) = -\lambda(\lambda+1)^2.$$

Ainsi $\det(G-\lambda I)=0 \Rightarrow \lambda_1=0$ et $\lambda_2=-1$ (zéro double).

Les valeurs propres de G sont donc $\lambda_1=0$ et $\lambda_2=-1$.

Cherchons maintenant les vecteurs propres associées à ces valeurs propres.

Avec $\lambda_1=0$: on a $G\vec{v}=\lambda_1\vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} -9/10 & 3/10 & 0 \\ 3/10 & -1/10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{9}{10}v_1+\frac{3}{10}v_2=0 \\ \frac{3}{10}v_1-\frac{1}{10}v_2=0 \\ -v_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2=3v_1 \\ v_3=0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ 3v_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi le vecteur propre associé à $\lambda_1=0$ est $\vec{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ (on prend $v_1=1$).

Avec $\lambda_2=-1$: on a $G\vec{v}=\lambda_2\vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} -9/10 & 3/10 & 0 \\ 3/10 & -1/10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{9}{10}v_1+\frac{3}{10}v_2=-v_1 \\ \frac{3}{10}v_1-\frac{1}{10}v_2=-v_2 \\ -v_3=-v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{10}v_2=-\frac{1}{10}v_1 \\ \frac{3}{10}v_1=-\frac{9}{10}v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3v_2=-v_1 \\ 3v_1=-9v_2 \end{cases} \Rightarrow v_1=-3v_2$$

$\Rightarrow \vec{v}=\begin{pmatrix} v_2 \\ -3v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$; on peut choisir $v_2=1, v_3=0 \Rightarrow \vec{v_2}=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2=0, v_3=1$

$\Rightarrow \vec{v_2}'=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; les solutions de $G\vec{v}=\lambda_2\vec{v}$ seront alors les $\vec{v}$ combinaisons linéaires de $\vec{v_2}$ et $\vec{v_2}'$.

Ainsi les vecteurs propres associés à $\lambda_2=-1$ sont $\vec{v_2}=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}'=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) On choisit les 3 vecteurs propres indépendants de g : $\vec{v_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2}=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}'=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. De plus $\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{10}}\vec{u_1}+\frac{3}{\sqrt{10}}\vec{u_2}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a : $f(\vec{v_1})=\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v_1})$; $\vec{u}\wedge\vec{v_1}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \\ 0 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{\sqrt{10}}-\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

ainsi $f(\vec{v_1})=\vec{u}\wedge\vec{0}=\vec{0}$;

$f(\vec{v_2})=\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v_2})$; $\vec{u}\wedge\vec{v_2}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \\ 0 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{10}}-\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6/\sqrt{10} \end{pmatrix}$;

ainsi $f(\vec{v_2})=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \\ 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6/\sqrt{10} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 6/10 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3/5 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$f(\vec{v_2}')=\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v_2}')$; $\vec{u}\wedge\vec{v_2}'=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \\ 0 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} \\ -1/\sqrt{10} \\ 0 \end{pmatrix}$;

ainsi $f(\vec{v_2}')=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \\ 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} \\ -1/\sqrt{10} \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{10}-\frac{9}{10} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $f(\vec{v_1})=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\vec{v_2})=\begin{pmatrix} 0 \\ 3/5 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f(\vec{v_2}')=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3) D'après 2), on a $f(\vec{v_1})=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\vec{v_2})=\begin{pmatrix} 0 \\ 3/5 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f(\vec{v_2}')=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. En outre,

$g(\vec{v_1}) = G\vec{v_1} = \lambda_1 \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $g(\vec{v_2}) = G\vec{v_2} = \lambda_2 \vec{v_2} = -\vec{v_2} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et

$g(\vec{v_2}') = G\vec{v_2}' = \lambda_2 \vec{v_2}' = -\vec{v_2}' = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On a $g(\vec{v_1}) = f(\vec{v_1})$ et $g(\vec{v_2}') = f(\vec{v_2}')$. De plus $g(\vec{v_2}) = -\vec{v_2}$.

Par conséquent, dans le plan formé par l'origine, $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}'$, $g = f$. En dehors de ce plan, g envoie $\vec{v_2}$ sur $-\vec{v_2}$, autrement dit g est une affinité planaire de plan formé par l'origine, $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}'$, d'axe $\vec{v_2}$ et de rapport -1.

Exercice 3

On a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Les valeurs propres de A sont les λ solutions de $\det(A - \lambda I) = 0$.

On a $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^3 + 1^3 + 1^3 - 1^2(-\lambda) - 1^2(-\lambda) - 1^2(-\lambda) =$
$= -\lambda^3 + 3\lambda + 2.$

Ainsi $\det(A-\lambda I) = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0.$

Une solution est $\lambda_1 = -1$ $\left((-1)^3 - 3(-1) - 2 = -1 + 3 - 2 = 0\right)$.

Divisons $\lambda^3 - 3\lambda - 2$ par $\lambda + 1$:

$$\begin{array}{r|l} \lambda^3 \quad -3\lambda - 2 & \lambda + 1 \\ \cline{2-2} -(\lambda^3 + \lambda^2) & \lambda^2 - \lambda - 2 \\ \cline{1-1} -\lambda^2 - 3\lambda - 2 & \\ -(-\lambda^2 - \lambda) & \\ \cline{1-1} -2\lambda - 2 & \\ -(-2\lambda - 2) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

On a ainsi $\lambda^3 - 3\lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda-2) = (\lambda+1)^2(\lambda-2)$.

Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = -1$ (double) et $\lambda_2 = 2$ (simple).

Avec $\lambda_1 = -1$, on a $A\vec{v} = \lambda_1 \vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} v_2 + v_3 = -v_1 \\ v_1 + v_3 = -v_2 \\ v_1 + v_2 = -v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 + v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_3 = -v_1 - v_2 \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ -v_1 - v_2 \end{pmatrix}$;

en prenant $v_1 = 1$ et $v_2 = 0$, on obtient $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et, en prenant $v_1 = 0$ et $v_2 = 1$, on obtient $\vec{v_1}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; ainsi les vecteurs propres associés à $\lambda_1 = -1$ sont les combinaisons linéaires de $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_1}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Avec $\lambda_2 = 2$, on a $A\vec{v} = \lambda_2 \vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 \\ 2v_2 \\ 2v_3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} v_2 + v_3 = 2v_1 \\ v_1 + v_3 = 2v_2 \\ v_1 + v_2 = 2v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = 2v_1 - v_2 \\ v_1 + v_3 = 2v_2 \\ v_1 + v_2 = 2v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = 2v_1 - v_2 \\ v_1 + 2v_1 - v_2 = 2v_2 \\ v_1 + v_2 = 4v_1 - 2v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = 2v_1 - v_2 \\ 3v_1 = 3v_2 \\ 3v_1 = 3v_2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} v_3 = 2v_1 - v_2 \\ v_1 = v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = v_1 \\ v_3 = v_1 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$; en prenant $v_1 = 1$, on obtient

$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; ainsi le vecteur propre associé à $\lambda_2 = 2$ est $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Dans la base $(\vec{v_1} ; \vec{v_1}' ; \vec{v_2})$, la matrice A s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a $M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,

$M^3 = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, etc.

Ainsi $M^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

c) Comme $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_1}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, la matrice de passage de la base $(\vec{v_1} ; \vec{v_2} ; \vec{v_3})$ à la base de départ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a alors $A = PMP^{-1}$. Il faut trouver P^{-1}.

On a $\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.1.1 + 0.(-1).1 + (-1).0.1 - (-1).1.1$
$- 0.0.0 - (-1).1.1 = 1+1+1 = 3.$

De plus, $P_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1 = 2$, $P_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $P_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$,

$P_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $P_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, $P_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$,

$P_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $P_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1$ et $P_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

Ainsi $P^{-1} = \frac{1}{3} {}^t\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

On a alors $A^n = (PMP^{-1})^n = PM\underbrace{P^{-1} \cdot P}_{I}M\underbrace{P^{-1} \cdot \ldots}_{I} \underbrace{\ldots}_{I} PMP^{-1} =$

$= PM \cdot M \cdot \ldots \cdot P^{-1} = P \cdot M^n \cdot P^{-1}$.

On a $M^n \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^n \cdot \frac{2}{3} & (-1)^n \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) & (-1)^n \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \\ (-1)^n \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) & (-1)^n \cdot \frac{2}{3} & (-1)^n \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \\ \frac{2^n}{3} & \frac{2^n}{3} & \frac{2^n}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^n \cdot \frac{2}{3} & (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{3} & (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{3} \\ (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{3} & (-1)^n \cdot \frac{1}{3} & (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{3} \\ \frac{2^n}{3} & \frac{2^n}{3} & \frac{2^n}{3} \end{pmatrix} \quad \text{et}$$

$$A^n = P \cdot M^n \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n \cdot \frac{2}{3} & (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{3} & (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{3} \\ (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{3} & (-1)^n \cdot \frac{2}{3} & (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{3} \\ \frac{2^n}{3} & \frac{2^n}{3} & \frac{2^n}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^n \cdot \frac{2}{3} + \frac{2^n}{3} & (-1)^n \cdot \frac{2}{3} + \frac{2^n}{3} & (-1)^n \cdot \frac{2}{3} + \frac{1^n}{3} \\ (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2^n}{3} & (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2^n}{3} & (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2^n}{3} \\ \frac{2^n}{3} & \frac{2^n}{3} & \frac{2^n}{3} \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

On a $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Les valeurs propres de C sont les λ solutions de $\det(C - \lambda I) = 0$.

On a $\det(C-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$.

Ainsi $\det(C-\lambda I) = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 3$.

Avec $\lambda_1 = 1$: $C\vec{v} = \lambda_1 \vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 + v_3 = v_1 \\ 2v_2 = v_2 \\ 3v_3 = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = 0 \\ v_2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; avec $v_1 = 1$, le vecteur propre associé à $\lambda_1 = 1$ est $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Avec $\lambda_2 = 2$: $C\vec{v} = \lambda_2 \vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 \\ 2v_2 \\ 2v_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 + v_3 = 2v_1 \\ 2v_2 = 2v_2 \\ 3v_3 = 2v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = 0 \\ v_1 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$; avec $v_2 = 1$, le vecteur propre associé à $\lambda_2 = 2$ est $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Avec $\lambda_3 = 3$: $C\vec{v} = \lambda_3 \vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v_1 \\ 3v_2 \\ 3v_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 + v_3 = 3v_1 \\ 2v_2 = 3v_2 \\ 3v_3 = 3v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = 2v_1 \\ v_2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ 2v_1 \end{pmatrix}$; avec $v_1 = 1$, le vecteur propre associé à $\lambda_3 = 3$ est $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) On a ${}^tC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de ${}^tC$ sont aussi $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 3$.

Avec $\lambda_1 = 1$: ${}^tC\vec{v} = \lambda_1 \vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = v_1 \\ 2v_2 = v_2 \\ v_1 + 3v_3 = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = 0 \\ v_1 = -2v_3 \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} -2v_3 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix}$; avec $v_3 = 1$, le vecteur propre associé à $\lambda_1 = 1$ est $\vec{v_1}' = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Avec $\lambda_2 = 2$: ${}^tC\vec{v} = \lambda_2 \vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 \\ 2v_2 \\ 2v_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 2v_1 \\ 2v_2 = 2v_2 \\ v_1 + 3v_3 = 2v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$; avec $v_2 = 1$, le vecteur propre associé à $\lambda_2 = 2$ est $\vec{v_2}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Avec $\lambda_3 = 3$: ${}^tC\vec{v} = \lambda_3 \vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v_1 \\ 3v_2 \\ 3v_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 3v_1 \\ 2v_2 = 3v_2 \\ v_1 + 3v_3 = 3v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix}$; avec $v_3 = 1$, le vecteur propre associé à $\lambda_3 = 3$ est $\vec{v_3}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs propres de C sont $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Ceux de ${}^tC$ sont $\vec{v_1}' = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_3}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a : $\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}\,' = 0$ et $\vec{v_1}\cdot\vec{v_3}\,' = 0$;

$\vec{v_2}\cdot\vec{v_1}\,' = 0$ et $\vec{v_2}\cdot\vec{v_3}\,' = 0$;

$\vec{v_3}\cdot\vec{v_1}\,' = 0$ et $\vec{v_3}\cdot\vec{v_2}\,' = 0$.

Ainsi, chaque vecteur propre de C est orthogonal à 2 vecteurs propres indépendants de ${}^tC$.

c) Si l'affinité de matrice C laisse fixe l'origine, alors l'affinité s'écrit :

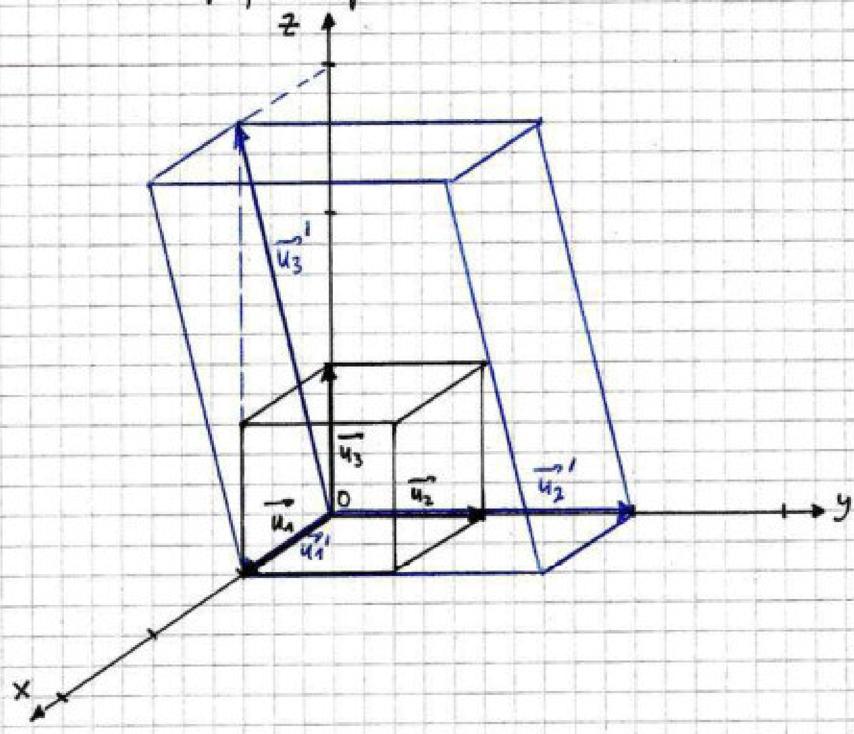
$$\vec{OP} \longrightarrow \vec{OP'} = C\cdot\vec{OP}.$$

Avec $\vec{u_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, on a $\vec{u_1}\,' = C\vec{u_1} = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Avec $\vec{u_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, on a $\vec{u_2}\,' = C\vec{u_2} = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$.

Avec $\vec{u_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, on a $\vec{u_3}\,' = C\vec{u_3} = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$.

On peut alors dessiner l'image par l'affinité du cube construit sur les vecteurs de base $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$:



d) Les points $(1;0;0)$, $(0;1;0)$ et $(0;0;1)$ appartiennent au plan $\Pi : x+y+z=1$.
L'image de $(1;0;0)$ est $(1;0;0)$; l'image de $(0;1;0)$ est $(0;2;0)$; l'image de $(0;0;1)$ est $(1;0;3)$ (voir c)).
L'image du plan Π est donc le plan Π' passant par $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$ et $C(1;0;3)$.

On a $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$.

De plus $\vec{AB}\wedge\vec{AC} = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\3\\0\end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$.

Le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est perpendiculaire au plan π'.
L'équation de π' s'écrit donc $2x + y + d = 0$.
Avec $A(1;0;0)$, on obtient $2 \cdot 1 + 0 + d = 0 \Rightarrow d = -2$.
L'équation de π' est donc $2x + y - 2 = 0$. C'est un plan parallèle à Oz.

Exercice 5

a) Π est normal à $\vec{n} = \vec{u_1} - 2\vec{u_2} + 2\vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

L'équation de Π s'écrit alors $x - 2y + 2z + d = 0$.
Π passe par l'origine. On a donc $d = 0$.
Par conséquent, l'équation de Π est $x - 2y + 2z = 0$.

Avec $E_1 = (1;0;0)$, on a $d(E_1;\Pi) = \dfrac{|1 - 2.0 + 2.0|}{\sqrt{1+(-2)^2+2^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{9}} = \dfrac{1}{3}$.

b) Soit $P(x_0;y_0;z_0)$ un point quelconque.
L'équation de la droite e perpendiculaire à Π et passant par P est, puisque $\vec{n} \perp \Pi$ et donc $\vec{n} \parallel e$, $\begin{cases} x = x_0 + \lambda \\ y = y_0 - 2\lambda \\ z = z_0 + 2\lambda . \end{cases}$

L'intersection I de Π et e est donnée par $x_0 + \lambda - 2(y_0 - 2\lambda) + 2(z_0 + 2\lambda) = 0$
$\Rightarrow x_0 + \lambda - 2y_0 + 4\lambda + 2z_0 + 4\lambda = 0 \Rightarrow 9\lambda = -x_0 + 2y_0 - 2z_0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{-x_0 + 2y_0 - 2z_0}{9}$
$\Rightarrow x = x_0 + \lambda = x_0 + \dfrac{-x_0 + 2y_0 - 2z_0}{9} = \dfrac{8x_0 + 2y_0 - 2z_0}{9}$,

$y = y_0 - 2\lambda = y_0 - \dfrac{-2x_0 + 4y_0 - 4z_0}{9} = \dfrac{2x_0 + 5y_0 + 4z_0}{9}$ et

$z = z_0 + 2\lambda = z_0 + \dfrac{-2x_0 + 4y_0 - 4z_0}{9} = \dfrac{-2x_0 + 4y_0 + 5z_0}{9}$

$\Rightarrow I\left(\dfrac{8x_0 + 2y_0 - 2z_0}{9} ; \dfrac{2x_0 + 5y_0 + 4z_0}{9} ; \dfrac{-2x_0 + 4y_0 + 5z_0}{9} \right)$.

L'image P' de P par la symétrie de plan Π sera donnée par $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PI} =$

$= \overrightarrow{OP} + 2(\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OI} - 2\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OP} =$

$= \begin{pmatrix} \frac{16x_0 + 4y_0 - 4z_0}{9} \\ \frac{4x_0 + 10y_0 + 8z_0}{9} \\ \frac{-4x_0 + 8y_0 + 10z_0}{9} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7x_0 + 4y_0 - 4z_0}{9} \\ \frac{4x_0 + y_0 + 8z_0}{9} \\ \frac{-4x_0 + 8y_0 + z_0}{9} \end{pmatrix}$.

Si $P(1;0;0)$, on a $x_0 = 1$ et $y_0 = z_0 = 0$ et $\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 7/9 \\ 4/9 \\ -4/9 \end{pmatrix}$.

Si $P(0;1;0)$, on a $y_0 = 1$ et $x_0 = z_0 = 0$ et $\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 4/9 \\ 1/9 \\ 8/9 \end{pmatrix}$.

Si $P(0;0;1)$, on a $z_0 = 1$ et $y_0 = x_0 = 0$ et $\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} -4/9 \\ 8/9 \\ 1/9 \end{pmatrix}$.

Ainsi la matrice de f_1 est $C_1 = \begin{pmatrix} 7/9 & 4/9 & -4/9 \\ 4/9 & 1/9 & 8/9 \\ -4/9 & 8/9 & 1/9 \end{pmatrix}$.

c) Un vecteur directeur de d est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. d passe par O.

Des équations paramétriques de d sont $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$.

Soit $P(x_0 ; y_0 ; z_0)$ un point quelconque.

L'équation du plan perpendiculaire à d peut s'écrire $x - 2y + 2z + d = 0$.

Avec le point $P(x_0 ; y_0 ; z_0)$, on obtient $x_0 - 2y_0 + 2z_0 + d = 0 \Rightarrow d = -x_0 + 2y_0 - 2z_0$.

Ainsi l'équation du plan $\perp$ à d et passant par P est $x - 2y + 2z - x_0 + 2y_0 - 2z_0 = 0$.

La projection orthogonale de P sur d sera $P_2 = d \cap$ plan $x - 2y + 2z - x_0 + 2y_0 - 2z_0 = 0$.

Par substitution, on obtient $\lambda - 2(-2\lambda) + 2 \cdot 2\lambda - x_0 + 2y_0 - 2z_0 = 0$

$$\Rightarrow 9\lambda = x_0 - 2y_0 + 2z_0 \Rightarrow \lambda = \frac{x_0 - 2y_0 + 2z_0}{9}$$

$$\Rightarrow x = \frac{x_0 - 2y_0 + 2z_0}{9}, \quad y = \frac{-2x_0 + 4y_0 - 4z_0}{9}, \quad z = \frac{2x_0 - 4y_0 + 4z_0}{9}$$

$$\Rightarrow P_2\left(\frac{x_0 - 2y_0 + 2z_0}{9} ; \frac{-2x_0 + 4y_0 - 4z_0}{9} ; \frac{2x_0 - 4y_0 + 4z_0}{9}\right).$$

Si $P(1;0;0)$, on a $x_0 = 1$ et $y_0 = z_0 = 0$ et $P_2\left(\frac{1}{9} ; -\frac{2}{9} ; \frac{2}{9}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} 1/9 \\ -2/9 \\ 2/9 \end{pmatrix}$.

Si $P(0;1;0)$, on a $y_0 = 1$ et $x_0 = z_0 = 0$ et $P_2\left(-\frac{2}{9} ; \frac{4}{9} ; -\frac{4}{9}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} -2/9 \\ 4/9 \\ -4/9 \end{pmatrix}$.

Si $P(0;0;1)$, on a $z_0 = 1$ et $x_0 = y_0 = 0$ et $P_2\left(\frac{2}{9} ; -\frac{4}{9} ; \frac{4}{9}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} 2/9 \\ -4/9 \\ 4/9 \end{pmatrix}$.

Ainsi, la matrice cherchée est $C_2 = \begin{pmatrix} 1/9 & -2/9 & 2/9 \\ -2/9 & 4/9 & -4/9 \\ 2/9 & -4/9 & 4/9 \end{pmatrix}$.

d) $$C_1^2 = \begin{pmatrix} 7/9 & 4/9 & -4/9 \\ 4/9 & 1/9 & 8/9 \\ -4/9 & 8/9 & 1/9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7/9 & 4/9 & -4/9 \\ 4/9 & 1/9 & 8/9 \\ -4/9 & 8/9 & 1/9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{49}{81} + \frac{16}{81} + \frac{16}{81} & \frac{28}{81} + \frac{4}{81} - \frac{32}{81} & -\frac{28}{81} + \frac{32}{81} - \frac{4}{81} \\ \frac{28}{81} + \frac{4}{81} - \frac{32}{81} & \frac{16}{81} + \frac{1}{81} + \frac{64}{81} & -\frac{16}{81} + \frac{8}{81} + \frac{8}{81} \\ -\frac{28}{81} + \frac{32}{81} - \frac{4}{81} & -\frac{16}{81} + \frac{8}{81} + \frac{8}{81} & \frac{16}{81} + \frac{64}{81} + \frac{4}{81} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

$$C_2^2 = \begin{pmatrix} 1/9 & -2/9 & 2/9 \\ -2/9 & 4/9 & -4/9 \\ 2/9 & -4/9 & 4/9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/9 & -2/9 & 2/9 \\ -2/9 & 4/9 & -4/9 \\ 2/9 & -4/9 & 4/9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{81} + \frac{4}{81} + \frac{4}{81} & -\frac{2}{81} - \frac{8}{81} - \frac{8}{81} & \frac{2}{81} + \frac{8}{81} + \frac{8}{81} \\ -\frac{2}{81} - \frac{8}{81} - \frac{8}{81} & \frac{4}{81} + \frac{16}{81} + \frac{16}{81} & -\frac{4}{81} - \frac{16}{81} - \frac{16}{81} \\ \frac{2}{81} + \frac{8}{81} + \frac{8}{81} & -\frac{4}{81} - \frac{16}{81} - \frac{16}{81} & \frac{4}{81} + \frac{16}{81} + \frac{16}{81} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/9 & -2/9 & 2/9 \\ -2/9 & 4/9 & -4/9 \\ 2/9 & -4/9 & 4/9 \end{pmatrix} = C_2.$$

$$I - 2C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/9 & -4/9 & 4/9 \\ -4/9 & 8/9 & -8/9 \\ 4/9 & -8/9 & 8/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/9 & 4/9 & -4/9 \\ 4/9 & 1/9 & 8/9 \\ -4/9 & 8/9 & 1/9 \end{pmatrix} = C_1.$$

e) $C_1^2 = I$: logique, car la composition de 2 symétries identiques est l'identité.

$C_2^2 = C_2$: logique, car la projection de la projection est la projection.

$I - 2C_2 = C_1$: moins logique ; cependant $C_1 + 2C_2$ représente la symétrie de plan Π à laquelle on ajoute 2 fois les coordonnées de la projection sur l'axe d $\Rightarrow$ on revient au point de départ $\Rightarrow C_1 + 2C_2 = I \Rightarrow I - 2C_2 = C_1$.

Exercice 6

On a $A=\begin{pmatrix} a & b & 36/23 \\ b & c & 6/23 \\ 36/23 & 6/23 & 28/23 \end{pmatrix}$.

a) On a $\vec{v_1}=\vec{u_1}+2\vec{u_3}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}=3\vec{u_2}+\vec{u_3}=\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$.

Ainsi $f(\vec{v_1})=A\vec{v_1}=\begin{pmatrix} a & b & 36/23 \\ b & c & 6/23 \\ 36/23 & 6/23 & 28/23 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+\frac{72}{23}\\ b+\frac{12}{23}\\ \frac{36}{23}+\frac{56}{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+\frac{72}{23}\\ b+\frac{6}{23}\\ 4\end{pmatrix}$ et

$f(\vec{v_2})=A\vec{v_2}=\begin{pmatrix} a & b & 36/23 \\ b & c & 6/23 \\ 36/23 & 6/23 & 28/23 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3b+\frac{36}{23}\\ 3c+\frac{6}{23}\\ \frac{18}{23}+\frac{28}{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3b+\frac{36}{23}\\ 3c+\frac{6}{23}\\ 2\end{pmatrix}$.

Si $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont des vecteurs propres, cela signifie qu'il existe λ_1 et $\lambda_2\in\mathbb{R}$ tels que $f(\vec{v_1})=\lambda_1\vec{v_1}$ et $f(\vec{v_2})=\lambda\vec{v_2}$.

$$f(\vec{v_1})=\lambda_1\vec{v_1} \Rightarrow \begin{pmatrix}a+\frac{72}{23}\\ b+\frac{12}{23}\\ 4\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+\frac{72}{23}=\lambda_1 \\ b+\frac{12}{23}=0 \\ 4=2\lambda_1 \Rightarrow \lambda_1=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2-\frac{72}{23}=-\frac{26}{23} \\ b=-\frac{12}{23}\end{cases}.$$

$$f(\vec{v_2})=\lambda_2\vec{v_2} \Rightarrow \begin{pmatrix}3b+\frac{36}{23}\\ 3c+\frac{6}{23}\\ 2\end{pmatrix}=\lambda_2\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3b+\frac{36}{23}=0 \\ 3c+\frac{6}{23}=3\lambda_2 \\ 2=\lambda_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-\frac{12}{23} \\ c=\frac{1}{3}\left(6-\frac{6}{23}\right)=\frac{44}{23}\end{cases}.$$

Ainsi $a=-\frac{26}{23}$, $b=-\frac{12}{23}$ et $c=\frac{44}{23}$.

b) Un vecteur $\vec{v_3}$ orthogonal à $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sera un vecteur parallèle à $\vec{v_1}\wedge\vec{v_2}$.

On a $\vec{v_1}\wedge\vec{v_2}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot1-2\cdot3\\ 2\cdot0-1\cdot1\\ 1\cdot3-0\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-1\\3\end{pmatrix}$.

On peut donc choisir $\vec{v_3}=\begin{pmatrix}6\\1\\-3\end{pmatrix}$.

Avec $a=-\frac{26}{23}$, $b=-\frac{12}{23}$ et $c=\frac{44}{23}$, on a $A=\begin{pmatrix} -26/23 & -12/23 & 36/23 \\ -12/23 & 44/23 & 6/23 \\ 36/23 & 6/23 & 28/23 \end{pmatrix}$.

Ainsi $f(\vec{v_3})=A\vec{v_3}=\begin{pmatrix} -26/23 & -12/23 & 36/23 \\ -12/23 & 44/23 & 6/23 \\ 36/23 & 6/23 & 28/23 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{156}{23}-\frac{12}{23}-\frac{108}{23}\\ -\frac{72}{23}+\frac{44}{23}-\frac{18}{23}\\ \frac{216}{23}+\frac{6}{23}-\frac{84}{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\-2\\6\end{pmatrix}$

La matrice de passage de la base $(\vec{v_1};\vec{v_2};\vec{v_3})$ à la base $(\vec{u_1};\vec{u_2};\vec{u_3})$ est

$$P=\begin{pmatrix}1&0&6\\0&3&1\\2&1&-3\end{pmatrix}\ \left(\text{puisque } \vec{v_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \vec{v_2}=\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v_3}=\begin{pmatrix}6\\1\\-3\end{pmatrix}\right).$$

La matrice B de f dans la base $(\vec{v_1};\vec{v_2};\vec{v_3})$ est alors donnée par $B=P^{-1}AP$.

Il faut calculer P^{-1}.

On a $\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 1.3.(-3) - 2.3.6 - 1.1.1 = -9 - 36 - 1 = -46.$

En autre : $D_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9-1 = -10$, $D_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6$, $D_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -18$,

$D_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -2$, $D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3-12 = -15$, $D_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$,

$D_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6$, $D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$.

Ainsi $P^{-1} = \frac{1}{-46} {}^t\begin{pmatrix} -10 & 2 & -6 \\ 6 & -15 & -1 \\ -18 & -1 & 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{46} \begin{pmatrix} -10 & 6 & -18 \\ 2 & -15 & -1 \\ -6 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 5/23 & -3/23 & 9/23 \\ -1/23 & 15/46 & 1/46 \\ 3/23 & 1/46 & -3/46 \end{pmatrix}.$$

On a alors $AP = \begin{pmatrix} -26/23 & -12/23 & 36/23 \\ -12/23 & 44/23 & 6/23 \\ 36/23 & 6/23 & 28/23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{26}{23} + \frac{72}{23} & -\frac{36}{23} + \frac{36}{23} & -\frac{156}{23} - \frac{12}{23} - \frac{108}{23} \\ -\frac{12}{23} + \frac{12}{23} & \frac{132}{23} + \frac{6}{23} & -\frac{72}{23} + \frac{44}{23} - \frac{18}{23} \\ \frac{36}{23} + \frac{56}{23} & \frac{18}{23} + \frac{28}{23} & \frac{216}{23} + \frac{6}{23} - \frac{84}{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -12 \\ 0 & 6 & -2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$B = P^{-1} \cdot AP = \begin{pmatrix} 5/23 & -3/23 & 9/23 \\ -1/23 & 15/46 & 1/46 \\ 3/23 & 1/46 & -3/46 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -12 \\ 0 & 6 & -2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{10}{23} + \frac{36}{23} & -\frac{18}{23} + \frac{18}{23} & -\frac{60}{23} + \frac{6}{23} + \frac{54}{23} \\ -\frac{2}{23} + \frac{4}{46} & \frac{90}{46} + \frac{2}{46} & \frac{12}{23} - \frac{30}{46} + \frac{6}{46} \\ \frac{6}{23} - \frac{12}{46} & \frac{6}{46} - \frac{6}{46} & -\frac{36}{23} - \frac{2}{46} - \frac{18}{46} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi la matrice B de f dans la base $(\vec{v_1}; \vec{v_2}; \vec{v_3})$ est $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

On voit ainsi que f est la symétrie de plan contenant $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ et passant par l'origine, suivie d'une homothétie de facteur -2.

d) D'après c), la matrice de f dans la base $(\vec{v_1}; \vec{v_2}; \vec{v_3})$ est $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

La matrice de $f^2 = f \circ f$ est $B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^2 \end{pmatrix}$.

La matrice de $f^3 = f \circ f^2$ est $B^3 = B \cdot B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^3 \end{pmatrix}$.

On aura alors $f^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$.

Si n est pair, on a $f^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$, ce qui est donc une homothétie de centre O et de facteur 2^n.

Si n est impair, on a $f^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & -2^n \end{pmatrix}$, ce qui est donc la composition de la symétrie de plan contenant $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ et passant par l'origine et d'une homothétie de facteur 2^n.

Exercice 7

On a $M=\begin{pmatrix} a & b & a \\ a & a & b \\ b & a & a \end{pmatrix}$, matrice de f.

a) Pour montrer que $\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M, il faut montrer qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $M\vec{r}=\lambda\vec{r}$. λ est alors la valeur propre correspondante.

$$M\vec{r}=\lambda\vec{r} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & a \\ a & a & b \\ b & a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\\lambda\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=\lambda \\ 2a+b=\lambda \\ 2a+b=\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda=2a+b.$$

Il existe donc $\lambda\in\mathbb{R}$ $(\lambda=2a+b)$ tel que $M\vec{r}=\lambda\vec{r}$.

Ainsi $\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M et la valeur propre correspondante est $\lambda=2a+b$.

b) On peut choisir $\vec{s}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{t}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. $\vec{s}$ et $\vec{t}$ sont clairement linéairement indépendants.

On a: $f(\vec{s})=M\vec{s}=\begin{pmatrix} a & b & a \\ a & a & b \\ b & a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b\\a-a\\b-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b\\0\\b-a\end{pmatrix}$ et

$f(\vec{t})=M\vec{t}=\begin{pmatrix} a & b & a \\ a & a & b \\ b & a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-a\\a-b\\b-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\a-b\\b-a\end{pmatrix}$.

Tout vecteur de S peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{s}$ et $\vec{t}$.

En effet: soit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in S$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$;

la relation $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\alpha\vec{s}+\beta\vec{t}$ s'écrit: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\-\alpha\\-\beta\end{pmatrix}$; on a donc $\alpha=-y$ et $\beta=-z$; avec $\alpha=-y$ et $\beta=-z$, on a $\alpha+\beta=-y-z$; comme $x+y+z=0$ (puisque $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in S$), on a $x=-y-z$; ainsi, on a bien $\alpha+\beta=x$; pour tout $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in S$, il existe donc α et $\beta\in\mathbb{R}$ $(\alpha=-y$ et $\beta=-z)$ tels que $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\alpha\vec{s}+\beta\vec{t}$.

Pour $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in S$, on a alors $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=f(\alpha\vec{s}+\beta\vec{t})=\alpha f(\vec{s})+\beta f(\vec{t})$ puisque f est une application linéaire.

Ainsi $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=\alpha f(\vec{s})+\beta f(\vec{t})=\alpha\begin{pmatrix}a-b\\0\\b-a\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\a-b\\b-a\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}\alpha(a-b)\\\beta(a-b)\\(\alpha+\beta)(b-a)\end{pmatrix}$; or, on a $\alpha(a-b)+\beta(a-b)+(\alpha+\beta)(b-a)=$

$=\alpha(a-b)+\beta(a-b)-\alpha(a-b)-\beta(a-b)=0$; ainsi $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)\in S$.

On en conclut que S est globalement invariant par f.

c) Avec $a=2$ et $b=-1$, on a $M=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

On a $\vec{r}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{s}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{t}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $f(\vec{r})=M\vec{r}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-1+2 \\ 2+2-1 \\ -1+2+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$f(\vec{s})=M\vec{r}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+1 \\ 2-2 \\ -1-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ et

$f(\vec{t})=M\vec{t}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-2 \\ 2+1 \\ -1-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

On a donc $f(\vec{r})=3\vec{r}$, $f(\vec{s})=3\vec{t}$ et $f(\vec{t})=3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=3\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)=$

$=3\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)=3(\vec{t}-\vec{s})=-3\vec{s}+3\vec{t}$.

Dans la base $(\vec{r};\vec{s};\vec{t})$, on a ainsi $f(\vec{r})=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\vec{s})=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $f(\vec{t})=\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, la matrice de f dans la base $(\vec{r};\vec{s};\vec{t})$ est

$$N=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

d) Dans l'espace, la matrice d'une rotation est orthogonale.

Ainsi, il faut trouver a et b tels que M soit orthogonale.

On sait que $M^{-1}={}^tM$ si M est orthogonale.

On cherche donc a et b tels que $M^{-1}\cdot M=I$, autrement dit ${}^tM\cdot M=I$,

où I est la matrice identité.

On a $M=\begin{pmatrix} a & b & a \\ a & a & b \\ b & a & a \end{pmatrix}$ et ${}^tM=\begin{pmatrix} a & a & b \\ b & a & a \\ a & b & a \end{pmatrix}$.

Ainsi ${}^tM\cdot M=\begin{pmatrix} a & a & b \\ b & a & a \\ a & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & a \\ a & a & b \\ b & a & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a^2+b^2 & a^2+2ab & a^2+2ab \\ a^2+2ab & 2a^2+b^2 & a^2+2ab \\ a^2+2ab & a^2+2ab & 2a^2+b^2 \end{pmatrix}$.

On doit donc avoir $\begin{pmatrix} 2a^2+b^2 & a^2+2ab & a^2+2ab \\ a^2+2ab & 2a^2+b^2 & a^2+2ab \\ a^2+2ab & a^2+2ab & 2a^2+b^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, on doit avoir $2a^2+b^2=1$ et $a^2+2ab=0$.

On a $a^2+2ab=0 \Rightarrow a(a+2b)=0 \Rightarrow$ soit $a=0$, soit $a+2b=0$.

Si $a+2b=0$, on a $a=-2b$. Dans $2a^2+b^2=1$, on obtient $2(-2b)^2+b^2=1$

$\Rightarrow 8b^2+b^2=1 \Rightarrow 9b^2=1 \Rightarrow b^2=\frac{1}{9} \Rightarrow b=\pm\frac{1}{3}$. Si $b=\frac{1}{3}$, on a

$a=-2b=-\frac{2}{3}$. Si $b=-\frac{1}{3}$, on a $a=-2b=\frac{2}{3}$.

Si $a=0$, on a $b^2=1 \Rightarrow b=\pm 1$.

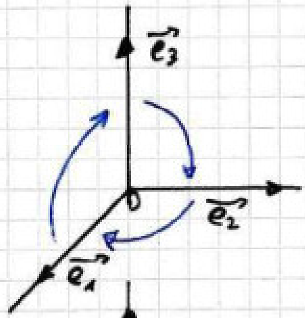
On obtient alors quatre possibilités: $a=-\frac{2}{3}$ et $b=\frac{1}{3}$, $a=\frac{2}{3}$ et $b=-\frac{1}{3}$,

$a=0$ et $b=1$, $a=0$ et $b=-1$.

Cela donne donne les 4 matrices suivantes :

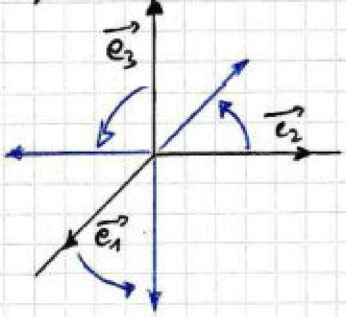
$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$



$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(\vec{e_1}) = \vec{e_3},\ f(\vec{e_2}) = \vec{e_1},\ f(\vec{e_3}) = \vec{e_2} :$$

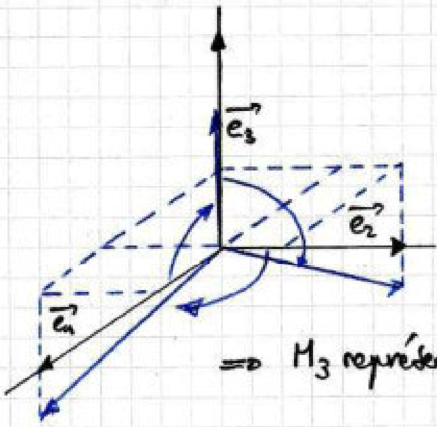
$\Rightarrow$ M_1 représente bien une rotation.



$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(\vec{e_1}) = -\vec{e_3},\ f(\vec{e_2}) = -\vec{e_1},\ f(\vec{e_3}) = -\vec{e_2} :$$

$\Rightarrow$ M_2 représente bien une rotation.

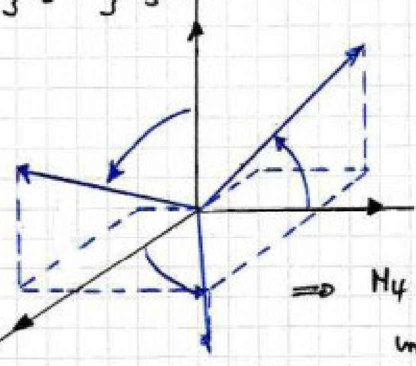
$$M_3 = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} f(\vec{e_1}) &= -\tfrac{2}{3}\vec{e_1} - \tfrac{2}{3}\vec{e_2} + \tfrac{1}{3}\vec{e_3}, \\ f(\vec{e_2}) &= \tfrac{1}{3}\vec{e_1} - \tfrac{2}{3}\vec{e_2} - \tfrac{2}{3}\vec{e_3}, \\ f(\vec{e_3}) &= -\tfrac{2}{3}\vec{e_1} + \tfrac{1}{3}\vec{e_2} - \tfrac{2}{3}\vec{e_3} : \end{aligned}$$



$\Rightarrow$ M_3 représente bien une rotation.

$$M_4 = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \Rightarrow f(\vec{e_1}) = \tfrac{2}{3}\vec{e_1} + \tfrac{2}{3}\vec{e_2} - \tfrac{1}{3}\vec{e_3},\ f(\vec{e_2}) = -\tfrac{1}{3}\vec{e_1} + \tfrac{2}{3}\vec{e_2} + \tfrac{2}{3}\vec{e_3},$$

$$f(\vec{e_3}) = \tfrac{2}{3}\vec{e_1} - \tfrac{1}{3}\vec{e_2} + \tfrac{2}{3}\vec{e_3} :$$



$\Rightarrow$ M_4 représente bien une rotation.

Il faut chercher les angles de rotation.

On a $M_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$M_1^3 = M_1^2 \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Ainsi, en faisant 3 rotations successives représentées par M_1, on revient au départ.

Par conséquent, l'angle de rotation de M_1 est $\frac{360°}{3} = 120°$.

On a $M_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$M_2^3 = M_2^2 \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I \text{ et}$$

$$M_2^6 = M_2^3 \cdot M_2^3 = (-I)\cdot(-I) = I^2 = I.$$

Ainsi, en faisant 6 rotations successives représentées par M_2, on revient au départ.

Par conséquent, l'angle de rotation de M_2 est $\frac{360°}{6} = 60°$.

On a $M_3^2 = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} - \frac{2}{9} + \frac{4}{9} & \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} + \frac{4}{9} - \frac{2}{9} & \frac{4}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} + \frac{4}{9} - \frac{2}{9} & \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} - \frac{2}{9} + \frac{4}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_3^3 = M_3^2 \cdot M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

$$M_3^4 = M_3^2 \cdot M_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$M_3^6 = M_3^4 \cdot M_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Ainsi, en faisant 6 rotations successives représentées par M_3, on revient au départ.

Par conséquent, l'angle de rotation de M_3 est $\frac{360°}{6} = 60°$.

On a $M_4^2 = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et, comme

ci-dessus, $M_4^6 = I$.

Ainsi, en faisant 6 rotations successives représentées par M_4, on revient au départ.
Par conséquent, l'angle de rotation de M_4 est $\frac{360°}{6} = 60°$.

Exercice 8

a) On a $M = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$.

1) Les valeurs propres de M sont les λ solutions de $\det(M - \lambda I) = 0$.

On a: $\det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{4}{5}-\lambda & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5}-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{4}{5}-\lambda\right)\left(-\frac{4}{5}-\lambda\right) - \left(\frac{3}{5}\right)^2 =$

$= \left(\lambda - \frac{4}{5}\right)\left(\lambda + \frac{4}{5}\right) - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \lambda^2 - \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)$.

Ainsi $\det(M-\lambda I) = 0 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 1$.

Les valeurs propres de M sont donc $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 1$.

Avec $\lambda_1 = -1$, on a $M\vec{v} = \lambda_1 \vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{5}v_1 + \frac{3}{5}v_2 = -v_1 \\ \frac{3}{5}v_1 - \frac{4}{5}v_2 = -v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4v_1 + 3v_2 = -5v_1 \\ 3v_1 - 4v_2 = -5v_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9v_1 + 3v_2 = 0 \\ 3v_1 + v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_2 = -3v_1$

$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -3v_2 \end{pmatrix}$.

Avec $v_1 = 1$, le vecteur propre associé à $\lambda_1 = -1$ est $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Avec $\lambda_2 = 1$, on a $M\vec{v} = \lambda_2\vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{5}v_1 + \frac{3}{5}v_2 = v_1 \\ \frac{3}{5}v_1 - \frac{4}{5}v_2 = v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4v_1 + 3v_2 = 5v_1 \\ 3v_1 - 4v_2 = 5v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 3v_2 \\ 3v_1 = 9v_2 \end{cases} \Rightarrow v_1 = 3v_2$

$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 3v_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

Avec $v_2 = 1$, le vecteur propre associé à $\lambda_2 = 1$ est $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dans la base $(\vec{v_1} ; \vec{v_2})$, la matrice de m s'écrit $M' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, m est une affinité d'axe parallèle à $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, de direction $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et de facteur -1 (voir Formulaires et Tables p. 26).

2) On a $N = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$, $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$.

On a: $N\vec{v_1} = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha)\cos(\alpha) + \sin(2\alpha)\sin(\alpha) \\ \sin(2\alpha)\cos(\alpha) - \cos(2\alpha)\sin(\alpha) \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))\cos(\alpha) + 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\cos(\alpha) - (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))\sin(\alpha) \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \cos^3(\alpha) - \sin^2(\alpha)\cos(\alpha) + 2\sin^2(\alpha)\cos(\alpha) \\ 2\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) - \sin(\alpha)\cos^2(\alpha) + \sin^3(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^3(\alpha) + \sin^2(\alpha)\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha)\cos^2(\alpha) + \sin^3(\alpha) \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)(\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)) \\ \sin(\alpha)(\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} = \vec{v_1} = \lambda_1 \vec{v_1}$ avec $\lambda_1 = 1$;

$N\vec{v_2} = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha)\sin(\alpha) - \sin(2\alpha)\cos(\alpha) \\ \sin(2\alpha)\sin(\alpha) + \cos(2\alpha)\cos(\alpha) \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))\sin(\alpha) - 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\cos(\alpha) \\ 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\sin(\alpha) + (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))\cos(\alpha) \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha)\sin(\alpha) - \sin^3(\alpha) - 2\cos^2(\alpha)\sin(\alpha) \\ 2\cos(\alpha)\sin^2(\alpha) + \cos^3(\alpha) - \cos(\alpha)\sin^2(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin^3(\alpha) - \cos^2(\alpha)\sin(\alpha) \\ \cos^3(\alpha) + \cos(\alpha)\sin^2(\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin(\alpha)\left(\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)\right) \\ \cos(\alpha)\left(\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \end{pmatrix} = -\vec{v_2} = \lambda_2 \vec{v_2} \text{ avec } \lambda_2 = -1.$$

Ainsi, $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de N (correspondant à la valeur propre $\lambda_1 = 1$) et $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de N (correspondant à la valeur propre $\lambda_2 = -1$).

Par conséquent, dans la base $(\vec{v_1}; \vec{v_2})$, la matrice associée à n s'écrit $N' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Ainsi, n est une affinité d'axe parallèle à $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$, de direction $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$ et de facteur -1 (voir Formulaires et Tables p. 26).

b) On a $R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1) Les valeurs propres de R sont les λ solutions de $\det(R - \lambda I) = 0$.

On a $\det(R-\lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-4-\lambda)(5-\lambda) - 3^2(5-\lambda) =$

$= (5-\lambda)\left((\lambda-4)(\lambda+4) - 9\right) = (5-\lambda)(\lambda^2 - 16 - 9) = (5-\lambda)(\lambda^2 - 25) =$
$= (5-\lambda)(\lambda+5)(\lambda-5) = -(\lambda+5)(\lambda-5)^2.$

Ainsi $\det(R-\lambda I) = 0 \Rightarrow -(\lambda+5)(\lambda-5)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -5$ et $\lambda_2 = 5$.

Les valeurs propres de R sont $\lambda_1 = -5$ et $\lambda_2 = 5$.

Avec $\lambda_1 = -5$, on a $R\vec{v} = \lambda_1 \vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5v_1 \\ -5v_2 \\ -5v_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4v_1 + 3v_2 = -5v_1 \\ 3v_1 - 4v_2 = -5v_2 \\ 5v_3 = -5v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9v_1 + 3v_2 = 0 \\ 3v_1 + v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = -3v_1 \\ v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -3v_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Avec $v_1 = 1$, un vecteur propre associé à $\lambda_1 = -5$ est $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Avec $\lambda_2 = 5$, on a $R\vec{v} = \lambda_2 \vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5v_1 \\ 5v_2 \\ 5v_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4v_1 + 3v_2 = 5v_1 \\ 3v_1 - 4v_2 = 5v_2 \\ 5v_3 = 5v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3v_2 = v_1 \\ 3v_1 = 9v_2 \end{cases} \Rightarrow v_1 = 3v_2 \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 3v_2 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Avec $v_2 = 1$ et $v_3 = 0$, on a un premier vecteur propre associé à $\lambda = 5$: $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Avec $v_2 = 0$ et $v_3 = 1$, on a un deuxième vecteur propre associé à $\lambda = 5$: $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dans la base $(\vec{v_1}; \vec{v_2}; \vec{v_3})$, la matrice associée à r s'écrit $R' = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

On peut écrire $R' = 5\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D'après Formulaires et Tables p. 26, on peut alors dire que r est la composition d'une symétrie par rapport au plan contenant $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et passant par l'origine et d'une homothétie de centre O et de facteur 5.

On peut trouver l'équation du plan de symétrie.

On a $\vec{v_2} \wedge \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Comme il passe par l'origine, le plan de symétrie s'écrit $x - 3y = 0$.

Par conséquent, r est la composition d'une symétrie par rapport au plan $x-3y=0$ et d'une homothétie de centre O et de facteur 5.

2) On a $R^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$,

$$R^3 = R^2 \cdot R = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 75 & 0 \\ 75 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & 125 \end{pmatrix},$$

$$R^4 = R^2 \cdot R^2 = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 625 & 0 & 0 \\ 0 & 625 & 0 \\ 0 & 0 & 625 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$R^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}$ si n est pair,

$R^n = \begin{pmatrix} 4 \cdot 5^{n-1} & 3 \cdot 5^{n-1} & 0 \\ 3 \cdot 5^{n-1} & -4 \cdot 5^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}$ si n est impair.

Exercice 9

On a $F=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ a & 1 & -3 \\ a & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

a) $F-\lambda I=\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -2 \\ a & 1-\lambda & -3 \\ a & 1 & -3-\lambda \end{pmatrix}$.

$$\det(F-\lambda I)=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -2 \\ a & 1-\lambda & -3 \\ a & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(-3-\lambda)-2a-3a+2a(1-\lambda)-3\lambda - a(-3-\lambda)=$$

$$=-\lambda(-3-\lambda+3\lambda+\lambda^2)-5a+2a-2a\lambda-3\lambda+3a+a\lambda=$$

$$=3\lambda+\lambda^2-3\lambda^2-\lambda^3-3a-2a\lambda-3\lambda+3a+a\lambda=$$

$$=-\lambda^3-2\lambda^2-a\lambda.$$

b) $\lambda=0$ est une solution de $\det(F-\lambda I)=-\lambda^3-2\lambda^2-a\lambda=0$. C'est donc une valeur propre de F. Les vecteurs propres associés à $\lambda=0$ sont :

$$F\vec{V}=\vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ a & 1 & -3 \\ a & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_2-2v_3=0 \\ av_1+v_2-3v_3=0 \\ av_1+v_2-3v_3=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_2=2v_3 \\ av_1+v_2-3v_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2=2v_3 \\ av_1-v_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2=2v_3 \\ v_3=av_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2=2av_1 \\ v_3=av_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{V}=\begin{pmatrix} v_1 \\ 2av_1 \\ av_1 \end{pmatrix}.$$

En posant $v_1=1$, le vecteur propre associé à $\lambda=0$ est $\vec{V}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2a \\ a \end{pmatrix}$.

Ainsi, une base du sous-espace des vecteurs propres associés à la valeur propre 0 est $(\vec{V})$, avec $\vec{V}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2a \\ a \end{pmatrix}$.

c) Les valeurs propres de f sont les λ solutions de $\det(F-\lambda I)=0$.
D'après a), on a $\det(F-\lambda I)=-\lambda^3-2\lambda^2-a\lambda$.
Avec $a=-3$, on obtient $\det(F-\lambda I)=-\lambda^3-2\lambda^2+3\lambda$.
Ainsi, $\det(F-\lambda I)=0 \Rightarrow -\lambda^3-2\lambda^2+3\lambda=0 \Rightarrow -\lambda(\lambda^2+2\lambda-3)=0$
$\Rightarrow -\lambda(\lambda+3)(\lambda-1)=0 \Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=-3,\ \lambda_3=1$.
Les valeurs propres de f sont donc $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-3$ et $\lambda_3=1$.

Avec $\lambda_1=0$, $F\vec{V}=\lambda_1\vec{V} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_2-2v_3=0 \\ -3v_1+v_2-3v_3=0 \\ -3v_1+v_2-3v_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2=2v_3 \\ -3v_1+2v_3-3v_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2=2v_3 \\ -3v_1-v_3=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_2 = 2v_3 \\ v_3 = -3v_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = -6v_1 \\ v_3 = -3v_1 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -6v_1 \\ -3v_1 \end{pmatrix}.$$

Avec $v_1 = 1$, le vecteur propre associé à $\lambda_1 = 0$ est $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Avec $\lambda_2 = -3$, $F\vec{v} = \lambda_2 \vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3v_1 \\ -3v_2 \\ -3v_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_2 - 2v_3 = -3v_1 \\ -3v_1 + v_2 - 3v_3 = -3v_2 \\ -3v_1 + v_2 - 3v_3 = -3v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3v_1 + v_2 - 2v_3 = 0 \\ -3v_1 + 4v_2 - 3v_3 = 0 \\ -3v_1 + v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3v_1 + v_2 - 2v_3 = 0 \\ 3v_1 - 4v_2 + 3v_3 = 0 \\ v_2 = 3v_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3v_1 + 3v_1 - 2v_3 = 0 \\ 3v_1 - 12v_1 + 3v_3 = 0 \\ v_2 = 3v_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6v_1 - 2v_3 = 0 \\ -9v_1 + 3v_3 = 0 \\ v_2 = 3v_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = 3v_1 \\ v_3 = 3v_1 \\ v_2 = 3v_1 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 3v_1 \\ 3v_1 \end{pmatrix}.$$

Avec $v_1 = 1$, le vecteur propre associé à $\lambda_2 = -3$ est $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Avec $\lambda_3 = 1$, $F\vec{v} = \lambda_3 \vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_2 - 2v_3 = v_1 \\ -3v_1 + v_2 - 3v_3 = v_2 \\ -3v_1 + v_2 - 3v_3 = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 - 2v_3 = v_1 \\ -3v_1 - 3v_3 = 0 \\ -3v_1 + v_2 - 4v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 - 2v_3 = v_1 \\ v_3 = -v_1 \\ -3v_1 + v_2 - 4v_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_2 + 2v_1 = v_1 \\ v_3 = -v_1 \\ -3v_1 + v_2 + 4v_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = -v_1 \\ v_3 = -v_1 \\ v_2 = -v_1 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1 \\ -v_1 \end{pmatrix}.$$

Avec $v_1 = 1$, le vecteur propre associé à $\lambda_3 = 1$ est $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, $(\vec{v_1}; \vec{v_2}; \vec{v_3})$ avec $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

et, dans cette base, la matrice de f est $F' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $F' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

C'est la composition d'une projection oblique sur un plan suivie d'une affinité axiale dans ce plan (voir énoncé + Formulaires et Tables p. 26).

D'après Formulaires et Tables p. 26, la direction de la projection est $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et le rapport d'affinité est -3.

Avec $a = 1$, on a $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

d) Avec $a = 1$, d'après a), $\det(F - \lambda I) = 0 \Rightarrow -\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda + 2\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda + 1)^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -1$.

Ainsi $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -1$ sont les valeurs propres de F.

Avec $\lambda_1 = 0$, $F\vec{v} = \lambda_1 \vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} v_2 - 2v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 - 3v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 - 3v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = 2v_3 \\ v_1 + v_2 - 3v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = 2v_3 \\ v_1 + 2v_3 - 3v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = 2v_3 \\ v_1 = v_3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} v_2 = 2v_1 \\ v_3 = v_1 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 2v_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$.

Avec $v_1 = 0$, le vecteur propre associé à $\lambda_1 = 0$ est $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Avec $\lambda_2 = -1$, $F\vec{v} = \lambda_2 \vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} v_2 - 2v_3 = -v_1 \\ v_1 + v_2 - 3v_3 = -v_2 \\ v_1 + v_2 - 3v_3 = -v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 + v_2 - 2v_3 = 0 \\ v_1 + 2v_2 - 3v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 - 2v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 2v_3 - v_2 \\ v_1 + 2v_2 - 3v_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = 2v_3 - v_2 \\ 2v_3 - v_2 + 2v_2 - 3v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 2v_3 - v_2 \\ v_2 - v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 2v_3 - v_2 \\ v_3 = v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 2v_2 - v_2 \\ v_3 = v_2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = v_2 \\ v_3 = v_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_2 \\ v_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

Avec $v_2 = 0$, le vecteur propre associé à $\lambda_2 = -1$ est $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

e) D'après d), on sait que $f(\vec{v_1}) = F \cdot \vec{v_1} = \lambda_1 \cdot \vec{v_1} = 0 \cdot \vec{v_1} = \vec{0}$ et $f(\vec{v_2}) = F \cdot \vec{v_2} =$
$= \lambda_2 \vec{v_2} = -1 \cdot \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Avec $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, on a $f(\vec{v_3}) = F\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On peut écrire : $f(\vec{v_1}) = 0\vec{v_1} + 0\vec{v_2} + 0\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\vec{v_2}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

et $f(\vec{v_3}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \alpha \vec{v_1} + \beta \vec{v_2} + \gamma \vec{v_3} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta + \gamma \\ 2\alpha + \beta \\ \alpha + \beta - \gamma \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ 2\alpha + \beta = 4 \\ \alpha + \beta - \gamma = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 4 \\ 2\alpha + 2\beta = 6 \\ \gamma = \alpha + \beta - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = 3 - \beta \\ \gamma = \alpha + \beta - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = 1 \\ \gamma = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow f(\vec{v_3}) = 1 \cdot \vec{v_1} + 2 \cdot \vec{v_2} - 1 \cdot \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, dans la base $(\vec{v_1}; \vec{v_2}; \vec{v_3})$, on a $f(\vec{v_1}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\vec{v_2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $f(\vec{v_3}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Dans la base $(\vec{v_1}; \vec{v_2}; \vec{v_3})$, la matrice M de f est alors

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

f) Comme l'origine est un point invariant de l'affinité, on peut écrire cette dernière par $\vec{OP'} = F \cdot \vec{OP}$

Un point P de la droite d'équations $z=-1$ et $x=y$ s'écrit $P(x;x;-1)$.

Ainsi $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}x\\x\\-1\end{pmatrix}$ et on a $\overrightarrow{OP'}=\begin{pmatrix}0&1&-2\\1&1&-3\\1&1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\x\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2\\2x+3\\2x+3\end{pmatrix}$.

L'image de $P(x;x;-1)$ est donc $P'(x+2;2x+3;2x+3)$.

Comme on peut écrire $\overrightarrow{OP'}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$, on en déduit que l'image de la droite d'équations $z=-1$ et $x=y$ est la droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ passant par le point $(2;3;3)$.

g) On a $\overrightarrow{OP'}=F\cdot\overrightarrow{OP}$. L'image P' de P doit appartenir au plan $y-z=0$.
On doit donc avoir $z=y$. Les coordonnées de P' peuvent donc s'écrire $P'(x;y;y)$.

Avec $P(x_0;y_0;z_0)$, on a $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$ et $F\cdot\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}0&1&-2\\1&1&-3\\1&1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}=$
$=\begin{pmatrix}y_0-2z_0\\x_0+y_0-3z_0\\x_0+y_0-3z_0\end{pmatrix}$. Comme les 2^e et 3^e composantes sont égales, on en déduit que P', l'image de $P(x_0;y_0;y_0)$ appartient au plan $y-z=0$ dans tous les cas.

Par conséquent, tous les points de l'espace ont leur image dans le plan d'équation $y-z=0$.

Exercice 10

a) 1) Pour trouver l'image $P'(x_0'; y_0')$ de $P(x_0; y_0)$, on commence par écrire l'équation de la droite passant par P et parallèle à $\vec{d} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; on cherchera ensuite les coordonnées de l'intersection de cette dernière droite avec la droite a : point I ; on aura alors $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IP'}$; comme le rapport est $r = -2$, on a $\overrightarrow{IP'} = 2\overrightarrow{PI}$, d'où $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PI} + 2\overrightarrow{PI} = \overrightarrow{OP} + 3\overrightarrow{PI}$.

Des équations paramétriques de la droite passant par $P(x_0; y_0)$ et parallèle à $d = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ sont $\begin{cases} x = x_0 + 2\lambda \\ y = y_0 + \lambda \end{cases}$; par substitution dans a : $3x + y + 3 = 0$, on obtient

$$3(x_0 + 2\lambda) + y_0 + \lambda + 3 = 0 \Rightarrow 3x_0 + 6\lambda + y_0 + \lambda + 3 \Rightarrow 7\lambda = -3x_0 - y_0 - 3$$

$\Rightarrow \lambda = \frac{-3x_0 - y_0 - 3}{7}$; on obtient ainsi $x = x_0 + 2\lambda = x_0 + \frac{-6x_0 - 2y_0 - 6}{7} = \frac{x_0 - 2y_0 - 6}{7}$, $y = y_0 + \lambda = y_0 + \frac{-3x_0 - y_0 - 3}{7} = \frac{-3x_0 + 6y_0 - 3}{7}$; on obtient ainsi les coordonnées de I : $I\left(\frac{x_0 - 2y_0 - 6}{7}; \frac{-3x_0 + 6y_0 - 3}{7}\right)$; on a alors

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 3\overrightarrow{PI} = \overrightarrow{OP} + 3(\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP} + 3\overrightarrow{OI} - 3\overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OI} - 2\overrightarrow{OP} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x_0 - 2y_0 - 6}{7} \\ \frac{-3x_0 + 6y_0 - 3}{7} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-13x_0 - 2y_0 - 6}{7} \\ \frac{-3x_0 - 8y_0 - 3}{7} \end{pmatrix}.$$

Ainsi $P'\left(\frac{-13x_0 - 2y_0 - 6}{7}; \frac{-3x_0 - 8y_0 - 3}{7}\right)$.

2) Les points $P(x_0; y_0)$ de la droite $x + 5y - 5 = 0$ satisfont à $x_0 + 5y_0 - 5 = 0$, i.e. $x_0 = 5 - 5y_0$.

L'image de $P(x_0; y_0)$ par l'affinité est, d'après 1), $P'\left(\frac{-13x_0 - 2y_0 - 6}{7}; \frac{-3x_0 - 8y_0 - 3}{7}\right)$.

Avec $x_0 = 5 - 5y_0$, les coordonnées de P' deviennent :

$$\frac{-13(5 - 5y_0) - 2y_0 - 6}{7} = \frac{-65 + 65y_0 - 2y_0 - 6}{7} = \frac{63y_0 - 71}{7} = 9y_0 - \frac{71}{7} \quad \text{et}$$

$$\frac{-3(5 - 5y_0) - 8y_0 - 3}{7} = \frac{-15 + 15y_0 - 8y_0 - 3}{7} = \frac{7y_0 - 18}{7} = y_0 - \frac{18}{7}.$$

On obtient ainsi $\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} 9y_0 - \frac{71}{7} \\ y_0 - \frac{18}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} y_0 + \begin{pmatrix} -71/7 \\ -18/7 \end{pmatrix}$, ce qui est la droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$ passant par $\left(-\frac{71}{7}; -\frac{18}{7}\right)$. Les équations paramétriques de cette droite sont $\begin{cases} x = 9y_0 - \frac{71}{7} \\ y = y_0 - \frac{18}{7} \end{cases}$. Par combinaison de ces équations, on obtient $x - 9y = -\frac{71}{7} + 9 \cdot \frac{18}{7} = -\frac{71}{7} + \frac{162}{7} = \frac{91}{7} = 13 \Rightarrow x - 9y - 13 = 0$.

Ainsi, d' : $x - 9y - 13 = 0$.

b) On a : $\begin{cases} x' = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + 1 \\ y' = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - 2 \end{cases}$

1) Avec $P(x;y)$ et $P'(x';y')$, on a $\overrightarrow{OP'} = F \cdot \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OO'}$, où

$F = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, l'image de O est $O'(1;-2)$.

Cherchons les points fixes de l'affinité, autrement dit les points $(x;y)$ tels que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \overrightarrow{OO'}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \overrightarrow{OO'} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + 1 \\ y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}y + 1 \\ \frac{2}{3}y = \frac{2}{3}x - 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ 2y = 2x - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ y = x - 3 \end{cases} \Rightarrow \{ y = x - 3 .$$

Ainsi les points fixes de l'affinité sont les points $P(x; x-3)$.

On a $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ x-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

L'axe de l'affinité est donc la droite passant par $(0;-3)$ et parallèle à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Des équations paramétriques de cette droite sont $\begin{cases} x = x_0 \\ y = x_0 - 3 \end{cases}$.

Par combinaison, on obtient $x - y = 3 \Rightarrow x - y - 3 = 0$.
Ainsi l'axe de l'affinité est la droite $x - y - 3 = 0$.

La direction de l'affinité est $\overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Reste à trouver le rapport.

Des équations paramétriques de la droite OO' sont $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \end{cases}$. L'intersection de cette droite avec l'axe de l'affinité $(x - y - 3 = 0)$ est donnée par

$\lambda - (-2\lambda) - 3 = 0 \Rightarrow 3\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow$ intersection $= (1;-2) = O'$.

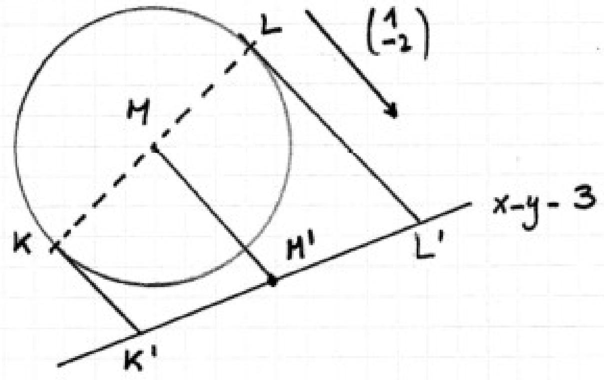
Cela signifie que l'affinité est en fait la projection parallèle au vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ sur la droite $x - y - 3 = 0$.

2) L'image de $M(-4;10)$ est donnée par $\overrightarrow{OM'} = F \cdot \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OO'} =$

$$= \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} + \frac{10}{3} \\ -\frac{8}{3} + \frac{10}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi l'image de $M(-4;10)$ est $M'\left(\frac{5}{3}; -\frac{4}{3}\right)$.

On a la situation suivante:



Cherchons des équations paramétriques de la droite passant par M et perpendiculaire à $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$. Cette droite sera parallèle à $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Des équations paramétriques de cette droite sont donc $\begin{cases} x = -4 + 2\lambda \\ y = 10 + \lambda \end{cases}$.

L'équation du cercle centré en M et de rayon $r = 2\sqrt{5} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{20}$ est
$(x+4)^2 + (y-10)^2 = 20.$

K et L sont les intersections de la droite ci-dessus et du cercle.

Par substitution, on obtient $(-4+2\lambda+4)^2 + (10+\lambda-10)^2 = 20$
$\Rightarrow (2\lambda)^2 + \lambda^2 = 20 \Rightarrow 4\lambda^2 + \lambda^2 = 20 \Rightarrow 5\lambda^2 = 20 \Rightarrow \lambda^2 = 4 \Rightarrow \lambda = \pm 2.$

Avec $\lambda = 2$, on obtient $x = -4 + 2 \cdot 2 = 0$ et $y = 10 + 2 = 12 \Rightarrow K(0;12)$.

Avec $\lambda = -2$, on obtient $x = -4 + 2 \cdot (-2) = -8$ et $y = 10 - 2 = 8 \Rightarrow L(-8;8)$.

On a $\overrightarrow{OK'} = F \cdot \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow K'(5;2)$

et $\overrightarrow{OL'} = F \cdot \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{3} + \frac{8}{3} \\ -\frac{16}{3} + \frac{8}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/3 \\ -8/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} -5/3 \\ -14/3 \end{pmatrix} \Rightarrow L'\left(-\frac{5}{3}; -\frac{14}{3}\right)$.

Par conséquent, l'image du cercle de centre $M(-4;10)$ et de rayon $r = 2\sqrt{5}$ est le segment $K'L'$, où $K'(5;2)$ et $L'\left(-\frac{5}{3}; -\frac{14}{3}\right)$.