CALCUL ALGEBRIQUE

Corrigé des exercices

Exercice 1

$a \in \{a\}$: vrai

$a \in \{a;b\}$: vrai

$\{a;d\} \subset \{a;b;c\}$: faux car $d \notin \{a;b;c\}$

$b \in \{a;c\}$: faux

$-5 \in \mathbb{N}$: faux

$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$: vrai

$\sqrt{-4} \in \mathbb{R}$: faux

$\{a;b;c\} \setminus \{a;c\} = \emptyset$: faux (il reste $\{b\}$)

$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$: vrai

Exercice 2

$x=0$: $\left.\begin{array}{l} x^2-12x+35=35\neq 0 \\ x^2-2x=0 \\ 7x=0\neq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{0\in U}}$

$x=2$: $\left.\begin{array}{l} x^2-12x+35=4-24+35=15\neq 0 \\ x^2-2x=4-4=0 \\ 7x=28\neq 1 \end{array}\right\} \underline{\underline{2\in U}}$

$x=5$: $\left.\begin{array}{l} x^2-12x+35=25-60+35=0 \\ x^2-2x=25-10=15\neq 0 \\ 7\cdot 5=35\neq 1 \end{array}\right\} \underline{\underline{5\in S}}$

$x=7$: $\left.\begin{array}{l} x^2-12x+35=49-84+35=0 \\ x^2-2x=49-14=35\neq 0 \\ 7\cdot 7=49\neq 1 \end{array}\right\} \underline{\underline{7\in S}}$

$x=\frac{1}{7}$: $\left.\begin{array}{l} x^2-12x+35=\frac{1}{49}-84+35\neq 0 \\ x^2-2x=\frac{1}{49}-\frac{2}{7}\neq 0 \\ 7\cdot\frac{1}{7}=1 \end{array}\right\} \underline{\underline{\frac{1}{7}\in T}}$

Exercice 3

$A =]-3\,;5[$

$B =]-\infty\,;-1] \cup]3\,;+\infty[$

$C =]-\infty\,;1[$

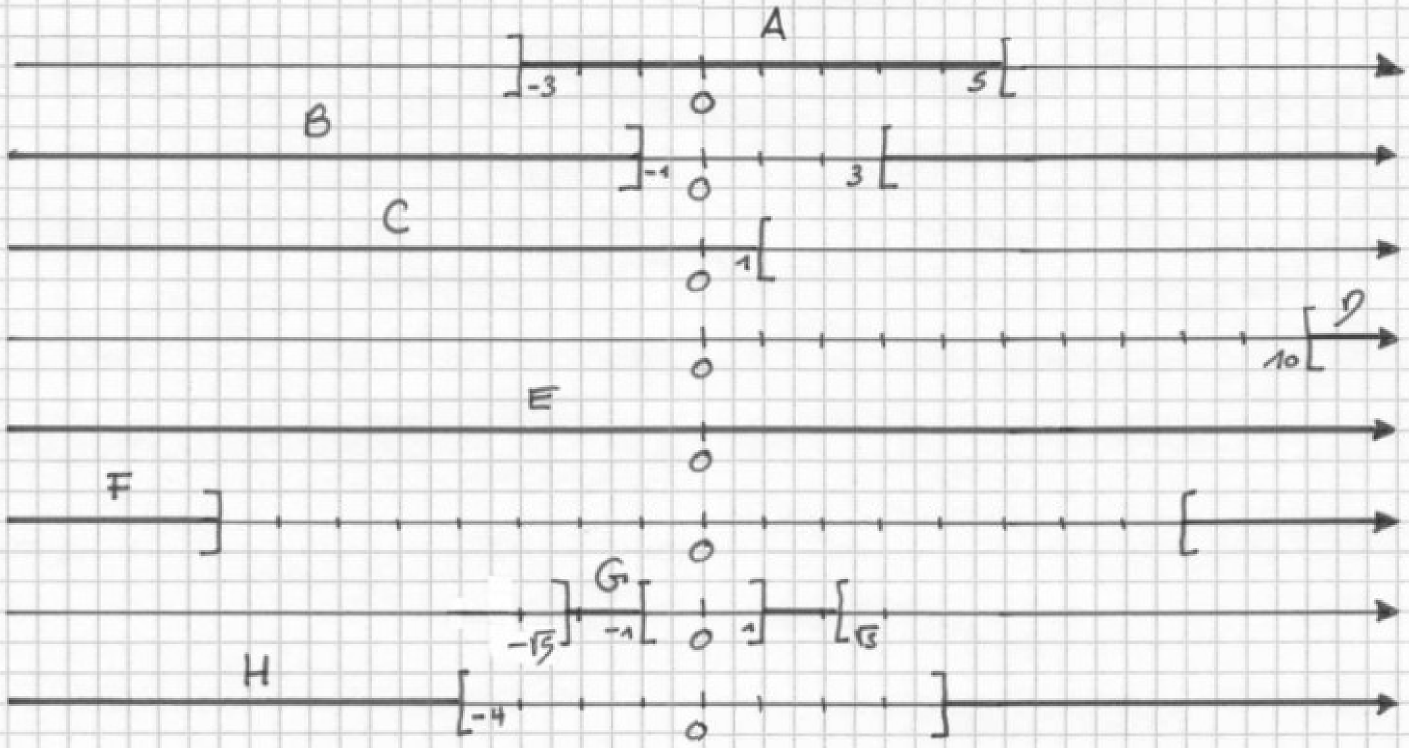
$D = [10\,;+\infty[$

$E =]-\infty\,;+\infty[$

$F =]-\infty\,;-8] \cup [8\,;+\infty[$

$G =]-\sqrt{5}\,;-1[\cup]1\,;\sqrt{5}[$

$H =]-\infty\,;-4[\cup]4\,;+\infty[$



$\overline{A} =]-\infty\,;-3] \cup [5\,;+\infty[$

$\overline{B} =]-1\,;3]$

$\overline{C} = [1\,;+\infty[$

$\overline{D} =]-\infty\,;10[$

$\overline{E} = \emptyset$

$\overline{F} =]-8\,;8[$

$\overline{G} =]-\infty\,;-\sqrt{5}] \cup [-1\,;1] \cup [\sqrt{5}\,;+\infty[$

$\overline{H} = [-4\,;4]$.

Exercice 4

$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$

$B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

$C = \{3; 5; 7; 9; 11\}$

$B \cup C = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 9; 11\}$

$D = A \setminus (B \cup C) = \underline{\underline{\{6; 8; 10\}}}$

$A \cup C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$

$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$

$E = (A \cup C) \setminus (A \cup B) = \underline{\underline{\{11\}}}$

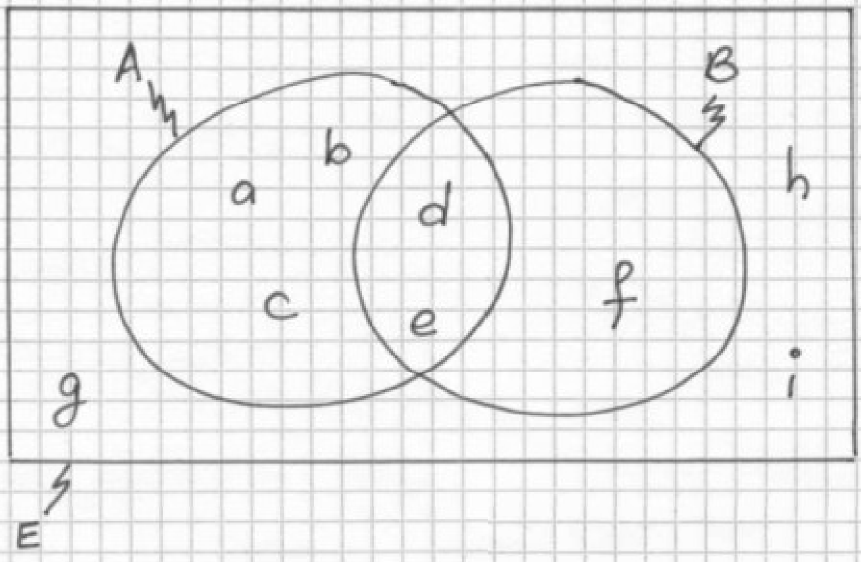
$F = (B \cup C) \setminus (B \cup C) = \underline{\underline{\emptyset}}$

$A \setminus C = \{1; 2; 4; 6; 8; 10\}$

$A \setminus B = \{6; 7; 8; 9; 10\}$

$G = (A \setminus C) \cap (A \setminus B) = \underline{\underline{\{6; 8; 10\}}}$

Exercice 5



$A = \{a; b; c; d; e\}$ et $B = \{d; e; f\}$.

Exercice 6

On a $n^2+n = n(n+1)$.

Si n est pair, le produit $n(n+1)$ est pair (pair. impair = pair).

Si n est impair, alors $n+1$ est pair et le produit $n(n+1)$ est aussi pair.

Ainsi n^2+n est pair pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7

a. On doit calculer : $1+2+3+\dots+48+49+50$.

Ajoutons :

$$\begin{array}{r} 1+2+3+\dots+48+49+50 \\ 50+49+48+\dots+3+2+1\;+ \\ \hline 51+51+51+\dots+51+51+51 = 50.51. \end{array}$$

On en déduit que $1+2+3+\dots+50 = \dfrac{50.51}{2}$.

b. On doit calculer : $1+2+3+\dots+(n-1)+n$.

Ajoutons :

$$\begin{array}{r} 1+2+3+\dots+(n-1)+n \\ n+(n-1)+\dots+2+1\;+ \\ \hline (n+1)+(n+1)+\dots+(n+1)+(n+1) = n.(n+1). \end{array}$$

On en déduit que $1+2+3+\dots+(n-1)+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 8

On a : $n^3 - n = n(n^2-1) = n(n+1)(n-1)$ (puisque $(n+1)(n-1) = n^2-1$).

Ainsi $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ est un produit de 3 nombres consécutifs.

Dans 3 nombres consécutifs, au moins un est pair et un est multiple de 3.

Ainsi le produit de 3 nombres consécutifs est forcément pair et multiple de 3, i.e. multiple de 6.

On en conclut que $n^3 - n$ est un multiple de 6.

Exercice 9

On sait que $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

On a : $2+4+6+\dots+(2n-2)+2n = 2\left(1+2+3+\dots+(n-1)+n\right) = 2\,\frac{n(n+1)}{2} = \underline{\underline{n(n+1)}}$.

De plus : $1+2+3+\dots+(2n-1)+2n = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1)$.

Ainsi : $1+3+5+\dots+(2n-3)+(2n-1) =$

$$= 1+2+3+\dots+(2n-1)+2n - \left(2+4+6+\dots+(2n-2)+2n\right) =$$

$$= n(2n+1) - n(n+1) = n\left(2n+1-n-1\right) = n\cdot n = \underline{\underline{n^2}}.$$

Exercice 10

a) Supposons que $\sqrt{5}$ soit un nombre rationnel, autrement dit qu'il existe $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, tels que $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$, la fraction $\frac{a}{b}$ étant irréductible.

Avec $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$, on trouve $5 = \frac{a^2}{b^2}$, et, donc, $a^2 = 5b^2$.

On en déduit que a^2 est un multiple de 5 et, donc, a est aussi un multiple de 5 (si a n'est pas un multiple de 5, a^2 ne peut pas être un multiple de 5).

Ainsi il existe $c \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 5c$.

On a $a^2 = 25c^2$.

De $a^2 = 5b^2$, on déduit alors que $25c^2 = 5b^2$, et $b^2 = 5c^2$.

Ainsi b^2 est un multiple de 5, d'où b est aussi un multiple de 5.

On a donc obtenu que a et b sont des multiples de 5.

Or, on avait que $\frac{a}{b}$ était une fraction irréductible.

C'est une contradiction et, donc $\sqrt{5}$ est irrationnel.

b) Appelons $n = 0,\overline{18}$.

On a $100n = 18,\overline{18}$.

Ainsi $99n = 100n - n = 18,\overline{18} - 0,\overline{18} = 18$ et, donc, $n = \frac{18}{99} = \frac{2}{11}$, ce qui est une fraction.

On a donc bien $0,\overline{18} \in \mathbb{Q}$.

Exercicio 11

a) $2-5\cdot 4+18:6=2-20+3=\underline{\underline{-15}}.$

b) $2\cdot(5\cdot 9)+(-4)-18:2=90-4-9=\underline{\underline{77}}.$

c) $(\sqrt{25}-3)^0-28:4+4\left(2+3\cdot(-4)\right)^2=1-7+4\left(2-12\right)^2=-6+4\left(-10\right)^2=$
$=-6+4\cdot 100=-6+400=\underline{\underline{394}}.$

Exercice 12

$x=2$: $A(x) = \left(\left[(2+5)\cdot 2+3\right]\cdot 2-8\right)\cdot 2+3 = \left(\left[7\cdot 2+3\right]\cdot 2-8\right)\cdot 2+3 =$
$= \left(\left[14+3\right]\cdot 2-8\right)\cdot 2+3 = (17\cdot 2-8)\cdot 2+3 = (34-8)\cdot 2+3 =$
$= 26\cdot 2+3 = 52+3 = \underline{\underline{55}}.$

$B(x) = \left[(2+5)\cdot 2+3\right](2-8)\cdot 2+3 = \left[7\cdot 2+3\right](-6)\cdot 2+3 =$
$= \left[14+3\right]\cdot(-12)+3 = 17\cdot(-12)+3 = -204+3 = \underline{\underline{-201}}.$

$C(x) = 2\left(1-2\cdot\left[1-2\cdot(1-2)\right]\right) = 2\left(1-2\cdot\left[1-2\cdot(-1)\right]\right) =$
$= 2\left(1-2\cdot\left[1+2\right]\right) = 2(1-2\cdot 3) = 2(1-6) = 2\cdot(-5) = \underline{\underline{-10}}.$

$D(x) = \left(40-\left[30-(20+2)\cdot 2\right]\cdot 2\right)\cdot 2 = \left(40-\left[30-22\cdot 2\right]\cdot 2\right)\cdot 2 =$
$= \left(40-\left[30-44\right]\cdot 2\right)\cdot 2 = \left(40-(-14)\cdot 2\right)\cdot 2 = (40+28)\cdot 2 =$
$= 68\cdot 2 = \underline{\underline{136}}.$

$x=-3$: $A(x) = \left(\left[(-3+5)\cdot(-3)+3\right]\cdot(-3)-8\right)\cdot(-3)+3 =$
$= \left(\left[2\cdot(-3)+3\right]\cdot(-3)-8\right)\cdot(-3)+3 =$
$= \left(\left[-6+3\right]\cdot(-3)-8\right)\cdot(-3)+3 = \left((-3)\cdot(-3)-8\right)\cdot(-3)+3 =$
$= (9-8)\cdot(-3)+3 = 1\cdot(-3)+3 = -3+3 = \underline{\underline{0}}.$

$B(x) = \left[(-3+5)\cdot(-3)+3\right]\cdot(-3-8)\cdot(-3)+3 =$
$= \left[2\cdot(-3)+3\right]\cdot(-11)\cdot(-3)+3 = \left[-6+3\right]\cdot 33+3 =$
$= -3\cdot 33+3 = -99+3 = \underline{\underline{-96}}.$

$C(x) = (-3)\cdot\left(1-(-3)\left[1-(-3)\left(1-(-3)\right)\right]\right) =$
$= -3\left(1+3\left[1+3(1+3)\right]\right) = -3\left(1+3\left[1+3\cdot 4\right]\right) =$
$= -3\left(1+3(1+12)\right) = -3(1+3\cdot 13) = -3(1+39) = -3\cdot 40 = \underline{\underline{-120}}.$

$D(x) = \left(40-\left[30-(20-3)(-3)\right](-3)\right)(-3) =$
$= \left(40-\left[30-17\cdot(-3)\right]\cdot(-3)\right)\cdot(-3) =$
$= \left(40-\left[30+51\right]\cdot(-3)\right)\cdot(-3) = \left(40-81\cdot(-3)\right)\cdot(-3) =$
$= (40+243)\cdot(-3) = 283\cdot(-3) = \underline{\underline{-849}}.$

Exercice 13

$$A = (3a+2b)(2a+3b) = 3a\cdot 2a + 3a\cdot 3b + 2b\cdot 2a + 2b\cdot 3b =$$
$$= 6a^2 + 9ab + 4ab + 6b^2 = \underline{\underline{6a^2 + 13ab + 6b^2}}$$

$$C = (a+2b+3c)(3a+2b+c) = a\cdot 3a + a\cdot 2b + a\cdot c + 2b\cdot 3a + 2b\cdot 2b + 2b\cdot c +$$
$$+ 3c\cdot 3a + 3c\cdot 2b + 3c\cdot c =$$
$$= 3a^2 + 2ab + ac + 6ab + 4b^2 + 2bc + 9ac + 6bc + 3c^2 =$$
$$= \underline{\underline{3a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 8ab + 10ac + 8bc}}.$$

$$B = (5x+4)(9-11x) = 5x\cdot 9 - 5x\cdot 11x + 4\cdot 9 - 4\cdot 11x =$$
$$= 45x - 55x^2 + 36 - 44x =$$
$$= \underline{\underline{-55x^2 + x + 36}}.$$

$$D = (x-5y+2)(2x+y-2) = x\cdot 2x + x\cdot y - x\cdot 2 - 5y\cdot 2x - 5y\cdot y + 5y\cdot 2 + 2\cdot 2x + 2\cdot y - 2\cdot 2 =$$
$$= 2x^2 + xy - 2x + 10xy - 5y^2 + 10y + 4x + 2y - 4 =$$
$$= \underline{\underline{2x^2 - 5y^2 + 11xy + 2x + 12y - 4}}.$$

Exercice 14

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a\cdot a - a\cdot b - b\cdot a + b\cdot b = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$

$(a+b)(a-b) = a\cdot a - a\cdot b + b\cdot a - b\cdot b = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2.$

$A = (3x+2y)^2 = (a+b)^2$ avec $a = 3x$ et $b = 2y$.

Donc $A = a^2 + 2ab + b^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 2y + (2y)^2 = \underline{\underline{9x^2 + 12xy + 4y^2}}.$

$B = 3(x+y)^2 = 3(a+b)^2$ avec $a = x$ et $b = y$.

Donc $B = 3(a^2 + 2ab + b^2) = 3(x^2 + 2xy + y^2) = \underline{\underline{3x^2 + 6xy + 3y^2}}.$

$C = (4x - \sqrt{6}y)^2 = (a-b)^2$ avec $a = 4x$ et $b = \sqrt{6}y$.

Donc $C = a^2 - 2ab + b^2 = (4x)^2 - 2\cdot 4x\cdot\sqrt{6}y + (\sqrt{6}y)^2 = \underline{\underline{16x - 8\sqrt{6}xy + 6y^2}}.$

$D = (\sqrt{2} - \sqrt{5})^2 = (a-b)^2$ avec $a = \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{5}$.

Donc $D = a^2 - 2ab + b^2 = (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2}\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 2 - 2\sqrt{10} + 5 = \underline{\underline{7 - 2\sqrt{10}}}.$

$E = (3x-y)(3x+y) = (a+b)(a-b)$ avec $a = 3x$ et $b = y$.

Donc $E = a^2 - b^2 = (3x)^2 - y^2 = \underline{\underline{9x^2 - y^2}}.$

$F = [3(x+y)]^2 = 3^2(x+y)^2 = 9(x+y)^2 = 9(a+b)^2$ avec $a = x$ et $b = y$.

Donc $F = 9(a^2 + 2ab + b^2) = 9(x^2 + 2xy + y^2) = \underline{\underline{9x^2 + 18xy + 9y^2}}.$

$G = (a+b+c)(a+b-c) = (A+B)(A-B)$ avec $A = a+b$ et $B = c$.

Donc $G = A^2 - B^2 = (a+b)^2 - c^2 = \underline{\underline{a^2 + 2ab + b^2 - c^2}}.$

$H = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right) = (a+b)(a-b)$ avec $a = x$ et $b = \frac{1}{x}$.

Donc $H = a^2 - b^2 = x^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \underline{\underline{x^2 - \frac{1}{x^2}}}.$

$I = (x-3y)^3 = (x-3y)(x-3y)^2 = (x-3y)(a-b)^2$ avec $a = x$ et $b = 3y$.

Donc $I = (x-3y)(a^2 - 2ab + b^2) = (x-3y)(x^2 - 2x\cdot 3y + (3y)^2) =$

$= (x-3y)(x^2 - 6xy + 9y^2) = x\cdot x^2 - x\cdot 6xy + x\cdot 9y^2 - 3yx^2 + 3y\,6xy - 3y\,9y^2 =$

$= x^3 - 6x^2y + 9xy^2 - 3x^2y + 18xy^2 - 27y^3 = \underline{\underline{x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3}}.$

$J = (2a+3b)^4 = [(2a+3b)^2]^2 = [(A+B)^2]^2$ avec $A = 2a$ et $B = 3b$.

Donc $J = [A^2 + 2AB + B^2]^2 = [(2a)^2 + 2\cdot 2a\cdot 3b + (3b)^2]^2 = [4a^2 + 12ab + 9b^2]^2 =$

$= (4a^2 + 12ab + 9b^2)(4a^2 + 12ab + 9b^2) = 4a^2\cdot 4a^2 + 4a^2\cdot 12ab + 4a^2\cdot 9b^2 + 12ab\cdot 4a^2 +$

$+ 12ab\cdot 12ab + 12ab\cdot 9b^2 + 9b^2\cdot 4a^2 + 9b^2\cdot 12ab + 9b^2\cdot 9b^2 = 16a^4 + 48a^3b + 36a^2b^2 +$

$+ 48a^3b + 144a^2b^2 + 108ab^3 + 36a^2b^2 + 108ab^3 + 81b^4 = \underline{\underline{16a^4 + 96a^3b + 180a^2b^2 + 216ab^3 + 81b^4}}.$

Exercice 15

$A = 4x^2 + \ldots + 25 = (2x + 5)^2$, $(2x+5)^2 = 4x^2 + 20x + 25 \Rightarrow A = 4x^2 + 20x + 25 = (x+5)^2.$

$B = x^2 - \ldots + 100 = (x - 10)^2$, $(x-10)^2 = x^2 - 20x + 100 \Rightarrow B = x^2 - 20x + 100 = (x-10)^2.$

$C = 64 + \ldots + 9x^4 = (8 + 3x^2)^2$, $(8+3x^2)^2 = 64 + 48x^2 + 9x^4 \Rightarrow C = 64 + 48x^2 + 9x^4 = (8+3x^2)^2.$

$D = x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4) \Rightarrow D = x^2 - 16 = (x+4)(x-4).$

$E = x^2 + 14x + \ldots = (x + 7)^2$, $(x+7)^2 = x^2 + 14x + 49 \Rightarrow E = x^2 + 14x + 49 = (x+7)^2.$

$F = (3x + 5)^2 = 9x^2 + \ldots + 25$, $(3x+5)^2 = 9x^2 + 30x + 25 \Rightarrow F = (3x+5)^2 = 9x^2 + 30x + 25.$

$G = \ldots - 12x + 4 = (3x - 2)^2$, $(3x-2)^2 = 9x^2 - 12x + 4 \Rightarrow G = 9x^2 - 12x + 4 = (3x-2)^2.$

$H = 4x^2 - 24x + \ldots = (2x - 6)^2$, $(2x-6)^2 = 4x^2 - 24x + 36 \Rightarrow H = 4x^2 - 24x + 36 = (2x-6)^2.$

Exercice 16

$$(x+1)^2-(x-1)^2 = x^2+2x+1-(x^2-2x+1) = x^2+2x+1-x^2+2x-1 = \underline{\underline{4x}}.$$

$$10'001^2 - 9999^2 = (10'000+1)^2-(10'000-1)^2 = 4\cdot 10'000 = \underline{\underline{40'000}}.$$

Exercice 17

Il y a 3 manières de faire :

1) Mise en évidence (voir $E(x)$)
2) Utilisation des identités remarquables (voir $A(x)$)
3) En utilisant les zéros du polynômes : si le polynôme est de la forme $P(x) = ax^2+bx+c$, alors $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les solutions de $ax^2+bx+c=0$.

$A(x) = x^2+6x+9 = a^2+2ab+b^2$ avec $a = x$ et $b = 3$ $(2ab = 2x\cdot 3 = 6x)$.
Donc $A(x) = (a+b)^2 = \underline{\underline{(x+3)^2}}$.
$A(x)$ s'annule par $\underline{\underline{x=-3}}$.

$B(x) = x^2-121 = a^2-b^2$ avec $a = x$ et $b = 11$.
Donc $B(x) = (a+b)(a-b) = \underline{\underline{(x+11)(x-11)}}$.
$B(x)$ s'annule par $\underline{\underline{x=-11 \text{ et } x=11}}$.

$C(x) = 16x^4-1 = a^2-b^2$ avec $a = 4x^2$ et $b=1$.
Donc $C(x) = (a+b)(a-b) = (4x^2+1)(4x^2-1)$.
Or $4x^2-1 = a^2-b^2$ avec $a = 2x$ et $b = 1$.
Ainsi $4x^2-1 = (a+b)(a-b) = (2x+1)(2x-1)$.
De plus $4x^2+1$ n'est pas factorisable : en effet, si on cherche les x tels que $4x^2+1=0$, on obtient $4x^2=-1$, ce qui est impossible.
Ainsi $C(x) = \underline{\underline{(4x^2+1)(2x+1)(2x-1)}}$.
$C(x)$ s'annule par $\underline{\underline{x=-\frac{1}{2} \text{ et } x=\frac{1}{2}}}$.

$D(x) = 2x^3-18x = 2x(x^2-9) = 2x(a^2-b^2)$ avec $a = x$ et $b=3$.
Donc $D(x) = 2x(a+b)(a-b) = \underline{\underline{2x(x+3)(x-3)}}$.
$D(x)$ s'annule par $\underline{\underline{x=0,\ x=-3 \text{ et } x=3}}$.

$E(x) = (x^2+1)(x-5)+2x(x-5) = (x^2+1+2x)(x-5) = (x^2+2x+1)(x-5) =$
$= (a^2+2ab+b^2)(x-5)$ avec $a = x$ et $b = 1$ $(2ab = 2x)$.
Donc $E(x) = (a+b)^2(x-5) = \underline{\underline{(x+1)^2(x-5)}}$.
$E(x)$ s'annule par $\underline{\underline{x=-1 \text{ et } x=5}}$.

$F(x) = 4x^2-4x+1 = a^2-2ab+b^2$ avec $a = 2x$ et $b = 1$ $(2ab = 2\cdot 2x\cdot 1 = 4x)$.
Donc $F(x) = (a-b)^2 = \underline{\underline{(2x-1)^2}}$.
$F(x)$ s'annule par $\underline{\underline{x=\frac{1}{2}}}$.

$G(x) = x^2 - 10x + 25 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = x$ et $b = 5$ $(2ab = 2 \cdot x \cdot 5 = 10x)$.
Donc $G(x) = (a-b)^2 = \underline{\underline{(x-5)^2}}$.
$G(x)$ s'annule pour $\underline{\underline{x = 5}}$.

$H(x) = 9x^2 + 12x + 4 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 3x$ et $b = 2$ $(2ab = 2 \cdot 3x \cdot 2 = 12x)$.
Donc $H(x) = (a+b)^2 = \underline{\underline{(3x+2)^2}}$.
$H(x)$ s'annule pour $\underline{\underline{x = -\frac{2}{3}}}$.

$I(x) = (2x+1)(x-2) + x(2x+1) = (2x+1)(x-2+x) = \underline{\underline{(2x+1)(2x-2)}}$.
$I(x)$ s'annule pour $\underline{\underline{x = -\frac{1}{2} \text{ et } x = 1}}$.

$J(x) = (x^2-5)(x^2-1) - 4(x^2-1) = (x^2-5-4)(x^2-1) = (x^2-9)(x^2-1) =$
$= \underline{\underline{(x+3)(x-3)(x+1)(x-1)}}$.
$J(x)$ s'annule pour $\underline{\underline{x = -3, x = 3, x = -1 \text{ et } x = 1}}$.

Exercice 18

$A = \frac{5}{6} + \frac{6}{7} - \frac{7}{8} = \frac{35+36}{42} - \frac{7}{8} = \frac{71}{42} - \frac{7}{8} = \frac{568-294}{336} = \frac{274}{336} = \underline{\underline{\frac{137}{168}}}.$

$B = \frac{13}{\cancel{24}_{2}} \cdot \frac{\cancel{36}^{3}}{7} = \underline{\underline{\frac{39}{14}}}.$

$C = \frac{85}{49} : \frac{34}{21} = \frac{\cancel{85}^{5}}{\cancel{49}_{7}} \cdot \frac{\cancel{21}^{3}}{\cancel{34}_{2}} = \underline{\underline{\frac{15}{14}}}.$

$D = \frac{2}{3 - \frac{5}{4}} = \frac{2}{\frac{3}{1} - \frac{5}{4}} = \frac{2}{\frac{12-5}{4}} = \frac{2}{\frac{7}{4}} = 2 : \frac{7}{4} = 2 \cdot \frac{4}{7} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{7} = \underline{\underline{\frac{8}{7}}}.$

Exercice 19

A: $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2+6}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$;

$\frac{2}{3}-\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right]=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=0$;

$\frac{1}{3}+\left[\frac{2}{3}-\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right]\right]=\frac{1}{3}+0=\frac{1}{3}$;

$A=\frac{1}{4}+\left[\frac{1}{3}+\left[\frac{2}{3}-\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right]\right]\right]=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{3+4}{12}=\underline{\underline{\frac{7}{12}}}$.

B: $\frac{1}{6}-\frac{1}{2}=\frac{2-6}{12}=\frac{-4}{6}=-\frac{1}{3}$;

$\frac{2}{3}-\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right]=\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}=1$;

$\frac{1}{3}-\left[\frac{2}{3}-\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right]\right]=\frac{1}{3}-1=\frac{1}{3}-\frac{3}{3}=-\frac{2}{3}$;

$B=\frac{1}{4}-\left[\frac{1}{3}-\left[\frac{2}{3}-\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right]\right]\right]=\frac{1}{4}-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{3+8}{12}=\underline{\underline{\frac{11}{12}}}$.

C: $\frac{4}{5}-\frac{5}{6}=\frac{24-25}{30}=-\frac{1}{30}$;

$\frac{3}{4}+\left[\frac{4}{5}-\frac{5}{6}\right]=\frac{3}{4}+\left(-\frac{1}{30}\right)=\frac{3}{4}-\frac{1}{30}=\frac{90-4}{120}=\frac{86}{120}=\frac{43}{60}$;

$\frac{2}{3}-\left[\frac{3}{4}+\left[\frac{4}{5}-\frac{5}{6}\right]\right]=\frac{2}{3}-\frac{43}{60}=\frac{40}{60}-\frac{43}{60}=-\frac{3}{60}=-\frac{1}{20}$;

$C=\frac{1}{2}-\left[\frac{2}{3}-\left[\frac{3}{4}+\left[\frac{4}{5}-\frac{5}{6}\right]\right]\right]=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{20}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{20}=\frac{10}{20}+\frac{1}{20}=\underline{\underline{\frac{11}{20}}}$.

D: $\frac{4}{5}-\frac{5}{6}=\frac{24-25}{30}=-\frac{1}{30}$;

$\frac{3}{4}-\left[\frac{4}{5}-\frac{5}{6}\right]=\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{30}\right)=\frac{3}{4}+\frac{1}{30}=\frac{90+4}{120}=\frac{94}{120}=\frac{47}{60}$;

$\frac{2}{3}+\left[\frac{3}{4}-\left[\frac{4}{5}-\frac{5}{6}\right]\right]=\frac{2}{3}+\frac{47}{60}=\frac{40}{60}+\frac{47}{60}=\frac{87}{60}=\frac{29}{20}$;

$D=\frac{1}{2}-\left[\frac{2}{3}+\left[\frac{3}{4}-\left[\frac{4}{5}-\frac{5}{6}\right]\right]\right]=\frac{1}{2}-\frac{29}{20}=\frac{10}{20}-\frac{29}{20}=\underline{\underline{-\frac{19}{20}}}$

Exercice 20

a) A: $\frac{7}{5}-\frac{3}{4}=\frac{28-15}{20}=\frac{13}{20}$;

$\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=\frac{10+3}{15}=\frac{13}{15}$;

$\left(\frac{7}{5}-\frac{3}{4}\right):\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)=\frac{13}{20}:\frac{13}{15}=\frac{\cancelto{1}{13}}{\cancelto{4}{20}}\cdot\frac{\cancelto{3}{15}}{\cancelto{1}{13}}=\frac{3}{4}$

$A=1-\left(\frac{7}{5}-\frac{3}{4}\right):\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)=1-\frac{3}{4}=\underline{\underline{\frac{1}{4}}}$

B: $\frac{13}{2}-\frac{5}{3}=\frac{39-10}{6}=\frac{29}{6}$;

$\frac{7}{3}+\frac{5}{6}=\frac{14}{6}+\frac{5}{6}=\frac{19}{6}$;

$\left(\frac{13}{2}-\frac{5}{3}\right):\left(\frac{7}{3}+\frac{5}{6}\right)=\frac{29}{6}:\frac{19}{6}=\frac{29}{\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{6}}{19}=\frac{29}{19}$;

$B=3-\left(\frac{13}{2}-\frac{5}{3}\right):\left(\frac{7}{3}:\frac{5}{6}\right)=3-\frac{29}{19}=\frac{57}{19}-\frac{29}{19}=\underline{\underline{\frac{28}{19}}}.$

C: $2+\frac{1}{a}=\frac{2a+1}{a}$; $1+\frac{2}{a}=\frac{a+2}{a}$;

$C=\left(2+\frac{1}{a}\right):\left(1+\frac{2}{a}\right)=\frac{2a+1}{a}:\frac{a+2}{a}=\frac{2a+1}{\cancel{a}}\cdot\frac{\cancel{a}}{a+2}=\underline{\underline{\frac{2a+1}{a+2}}}.$

D: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{b+a}{ab}$; $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$

$D=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{b+a}{ab}:\frac{b-a}{ab}=\frac{b+a}{\cancel{ab}}\cdot\frac{\cancel{ab}}{b-a}=\underline{\underline{\frac{b+a}{b-a}}}.$

E: $\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}=\frac{c}{abc}+\frac{b}{abc}=\frac{b+c}{abc}$;

$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}=\frac{c}{abc}+\frac{a}{abc}=\frac{a+c}{abc}$;

$E=\frac{\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}}=\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}\right):\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}\right)=\frac{b+c}{abc}:\frac{a+c}{abc}=\frac{b+c}{\cancel{abc}}\cdot\frac{\cancel{abc}}{a+c}=$

$=\underline{\underline{\frac{b+c}{a+c}}}.$

F: $\frac{3}{x}-\frac{8}{x}=-\frac{5}{x}$; $\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=\frac{x^2+4}{2x}$;

$F=\frac{\frac{3}{x}-\frac{8}{x}}{\frac{x}{2}+\frac{2}{x}}=\left(\frac{3}{x}-\frac{8}{x}\right):\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)=-\frac{5}{x}:\frac{x^2+4}{2x}=-\frac{5}{\cancel{x}}\cdot\frac{2\cancel{x}}{x^2+4}=$

$=\underline{\underline{-\frac{10}{x^2+4}}}$

b) $A = \frac{1}{b} - \frac{1}{bc} = \frac{c}{bc} - \frac{1}{bc} = \underline{\underline{\frac{c-1}{bc}}}.$

$B = \frac{x-y}{2x} - (1-y) = \frac{x-y}{2x} + y - 1 = \frac{x-y}{2x} + \frac{2xy-2x}{2x} =$

$= \frac{x-y+2xy-2x}{2x} = \underline{\underline{\frac{2xy-x-y}{2x}}}.$

$C = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-x} = \frac{x}{x^2-x} - \frac{2}{x^2-x} = \underline{\underline{\frac{x-2}{x^2-x}}}.$

$D = \frac{1}{2-x} \cdot \frac{x-2}{4} = -\frac{1}{\cancel{x-2}} \cdot \frac{\cancel{x-2}}{4} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}.$

$E = \frac{m^4-1}{(m+1)^2} = \frac{(m^2+1)(m^2-1)}{(m+1)^2} = \frac{(m^2+1)\cancel{(m+1)}(m-1)}{(m+1)^{\cancel{2}}} = \underline{\underline{\frac{(m^2+1)(m-1)}{m+1}}}.$

$F = \frac{2t}{4-t^2} + \frac{1}{2-t} = \frac{2t}{4-t^2} + \frac{2+t}{(2-t)(2+t)} = \frac{2t}{4-t^2} + \frac{2+t}{4-t^2} =$

$= \frac{2t+2+t}{4-t^2} = \underline{\underline{\frac{3t+2}{4-t^2}}}.$

Exercice 21

L'erreur est lors de la simplification (donc la division) par $(b-a)$.
Comme on est parti de $a=b$, on a $b-a=0$.
Or, on ne peut pas diviser par 0!

Exercice 22

a)

$A = a^4 \cdot a^{28} = a^{4+28} = a^{32}$.

$B = x^{-25} \cdot x^{14} = x^{-25+14} = x^{-11} \quad \left(= \frac{1}{x^{11}}\right)$.

$C = u^{x-4} \cdot u^{6-x} = u^{x-4+6-x} = u^2$.

$D = b^{4n-7} \cdot b^{-n+7} = b^{4n-7-n+7} = b^{3n}$.

$E = \frac{h^4}{h^2} = h^{4-2} = h^2$.

$F = \frac{n^0}{n^{-5}} = n^{0-(-5)} = n^5$.

$G = \frac{z^5}{z^{3-6n}} = z^{5-(3-6n)} = z^{5-3+6n} = z^{6n+2}$.

$H = \frac{e^x}{e^{-x}} = e^{x-(-x)} = e^{x+x} = e^{-2x}$.

$I = (-a)^5 = (-1 \cdot a)^5 = (-1)^5 \cdot a^5 = -a^5$.

$J = (-x^6)^4 = (-1 \cdot x^6)^4 = (-1)^4 \cdot (x^6)^4 = 1 \cdot x^{6 \cdot 4} = x^{24}$.

$K = (a^5 b^{-8} x)^4 = (a^5)^4 (b^{-8})^4 x^4 = a^{20} b^{-32} x^4$.

$L = (-3x^4)^3 = (-3)^3 (x^4)^3 = -27 x^{4 \cdot 3} = -27x^{12}$.

$M = (x^{-3} y^5)^3 = (x^{-3})^3 (y^5)^3 = x^{-9} y^{15}$.

$N = (a b^0 c^{-3})^{-n} = (a c^{-3})^{-n} = a^{-n} (c^{-3})^{-n} = a^{-n} c^{3n}$.

$O = \frac{(-a)^6}{(-a)^3} = (-a)^{6-3} = (-a)^3 = -a^3$.

$P = \frac{(-a)^{4n+3}}{(-a^n)^4} = \frac{(-a)^{4n} \cdot (-a)^3}{(-1)^4 \cdot a^{4n}} = \frac{\cancel{a^{4n}} \cdot (-a^3)}{1 \cdot \cancel{a^{4n}}} = -a^3$.

b)

$A = \left(\frac{a^5}{b^6}\right)^{-4} \left(\frac{a^4 b^{-4}}{c^7}\right)^3 = \frac{a^{-20}}{b^{-24}} \cdot \frac{a^{12} b^{-12}}{c^{21}} = \frac{a^{-8} b^{-12}}{b^{-24} c^{21}} =$

$= \frac{a^{-8} b^{-12} a^8 b^{24}}{b^{-24} c^{21} a^8 b^{24}} = \frac{b^{12}}{a^8 c^{21}}$.

$B = \left(\frac{x^3}{y^4}\right)^6 \left(\frac{x^2 z^{-2}}{y^{-1}}\right)^{-3} = \frac{x^{18}}{y^{24}} \cdot \frac{x^{-6} z^6}{y^3} = \frac{x^{12} z^6}{y^{27}}$.

$C = \frac{(x^4 y^3)^n}{(x^2 y^4)^{2n-1}} = \frac{x^{4n} y^{3n}}{x^{4n-2} y^{8n-4}} = \frac{\cancel{x^{4n-2}} \cdot x^2 \cdot \cancel{y^{3n}}}{\cancel{x^{4n-2}} \cdot \cancel{y^{3n}} \cdot y^{5n-4}} = \frac{x^2}{y^{5n-4}}$.

$D = \frac{(a^{n-1} b^n)^2}{(a^2 b^2)^{n-1}} = \frac{\cancel{a^{2n-2}} b^{2n}}{\cancel{a^{2n-2}} b^{2n-2}} = \frac{\cancel{b^{2n-2}} \cdot b^2}{\cancel{b^{2n-2}}} = b^2$.

$E = \frac{a^{-2} b^{-10}}{a^7 b^{-8}} \cdot \frac{a^4 b^{-3}}{(a^{-3} b)^2} = \frac{a^{-2} b^{-10} a^4 b^{-3}}{a^7 b^{-8} a^{-6} b^2} = \frac{a^2 b^{-13}}{a b^{-6}} = \frac{a b^{-13}}{b^{-6}} =$

$= \frac{a \cancel{b^{-13}}}{b^7 \cancel{b^{-13}}} = \frac{a}{b^7}$.

$$F = \frac{(16x^4y^2)^n}{(4x^2y)^{2n-1}} = \frac{16^n x^{4n} y^{2n}}{4^{2n-1} x^{4n-2} y^{2n-1}} = \frac{(4^2)^n \cancel{x^{4n-2}} x^2 \cancel{y^{2n-1}} y}{4^{2n-1} \cancel{x^{4n-2}} \cancel{y^{2n-1}}} =$$

$$= \frac{4^{2n} x^2 y}{4^{2n-1}} = \frac{\cancel{4^{2n-1}} \cdot 4 \cdot x^2 \cdot y}{\cancel{4^{2n-1}}} = \underline{\underline{4x^2y}}.$$

$$G = \frac{\sqrt{(2^6 \cdot x^{-12} \cdot y^{24})^{1/3}}}{(x^{-2} \cdot y)^{-4}} = \frac{\sqrt{2^2 \cdot x^{-4} y^8}}{x^8 y^{-4}} = \frac{2 \cdot x^{-2} \cdot y^4}{x^8 y^{-4}} = \frac{2 \cdot \cancel{x^{-2}} y^8 \cancel{y^{-4}}}{x^{10} \cancel{x^{-2}} \cancel{y^{-4}}} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{2y^8}{x^{10}}}}.$$

$$H = \left(81^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x)^3\right)^2 \cdot (y^{-5}xy)^2 = \left((3^4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3^3 \cdot x^3\right)^2 \cdot (y^{-4}x)^2 =$$

$$= \left(3^{-2} \cdot 3^3 \cdot x^3\right)^2 \cdot y^{-8}x^2 = (3x^3)^2 y^{-8} x^2 = 9x^6 y^{-8} x^2 =$$

$$= 9x^8 y^{-8} = \underline{\underline{\frac{9x^8}{y^8}}}.$$

Exercice 23

a)

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \to 2 \\ \to \sqrt{3} \end{array} \qquad \Longrightarrow \sqrt{12} = \underline{\underline{2\sqrt{3}}}.$$

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \to 2 \\ \to \sqrt{2} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \to 3 \end{array} \qquad \Longrightarrow \sqrt{72} = 2 \cdot 3\sqrt{2} = \underline{\underline{6\sqrt{2}}}.$$

$$\begin{array}{r|l} 216 & 2 \\ 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \to 2 \\ \to \sqrt{2} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \to 3 \\ \to \sqrt{3} \end{array}$$

$$\Longrightarrow \sqrt{216} = 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3} = 2 \cdot 3\sqrt{2}\sqrt{3} = 6\sqrt{2 \cdot 3} = \underline{\underline{6\sqrt{6}}}.$$

b)

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \left(\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 = 3\right).$$

$$B = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{27}\sqrt{15}}{\sqrt{15}\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{27 \cdot 15}}{15} = \frac{\sqrt{9 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5}}{15} = \frac{\sqrt{9}\sqrt{9}\sqrt{5}}{15} = \frac{9\sqrt{5}}{15} = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{5}}{5}}}.$$

$$C = \frac{12}{\sqrt{3}} - \sqrt{27} = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} - \sqrt{27} = \frac{12\sqrt{3}}{3} - \sqrt{27} = 4\sqrt{3} - \sqrt{27} =$$
$$= 4\sqrt{3} - \sqrt{9 \cdot 3} = 4\sqrt{3} - \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \underline{\underline{\sqrt{3}}}.$$

$$D = \sqrt{63} - \sqrt{28} = \sqrt{9 \cdot 7} - \sqrt{4 \cdot 7} = \sqrt{9}\sqrt{7} - \sqrt{4}\sqrt{7} = 3\sqrt{7} - 2\sqrt{7} = \underline{\underline{\sqrt{7}}}.$$

$$E = \frac{3\sqrt{20} - 5\sqrt{15}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{20}\sqrt{5} - 5\sqrt{15}\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{100} - 5\sqrt{75}}{5} =$$
$$= \frac{3 \cdot 10 - 5\sqrt{25 \cdot 3}}{5} = \frac{3 \cdot 2 - \sqrt{25 \cdot 3}}{1} = 6 - \sqrt{25}\sqrt{3} = \underline{\underline{6 - 5\sqrt{3}}}.$$

$$F = \frac{\sqrt{12} - \sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = 1 - \sqrt{\frac{3}{12}} = 1 - \sqrt{\frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

c) $$A=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{5}+\sqrt{2}\sqrt{2}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=$$
$$=\frac{\sqrt{10}+2}{5-2}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{10}+2}{3}}}.$$

$$B=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{6}\sqrt{3}-\sqrt{6}\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=$$
$$=\frac{\sqrt{18}-\sqrt{12}}{3-2}=\frac{\sqrt{9.2}-\sqrt{4.3}}{1}=\sqrt{9}\sqrt{2}-\sqrt{4}\sqrt{3}=$$
$$=\underline{\underline{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}}.$$

$$C=\frac{7\sqrt{5}-5\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\frac{(7\sqrt{5}-5\sqrt{7})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}=$$
$$=\frac{7\sqrt{5}\sqrt{7}-7\sqrt{5}\sqrt{5}-5\sqrt{7}\sqrt{7}+5\sqrt{7}\sqrt{5}}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2}=$$
$$=\frac{7\sqrt{35}-7.5-5.7+5\sqrt{35}}{7-5}=\frac{12\sqrt{35}-35-35}{2}=$$
$$=\frac{12\sqrt{35}-70}{2}=\underline{\underline{6\sqrt{35}-35}}.$$

$$D=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})-(1-\sqrt{5})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}=$$
$$=\frac{\sqrt{5}\cdot1+\sqrt{5}\sqrt{5}+\sqrt{3}\cdot1+\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}-(1\cdot\sqrt{5}-1\cdot\sqrt{3}-\sqrt{5}\sqrt{5}+\sqrt{5}\sqrt{3})}{1^2-(\sqrt{5})^2}=$$
$$=\frac{\cancel{\sqrt{5}}+5+\sqrt{3}+\cancel{\sqrt{15}}-\cancel{\sqrt{5}}+\sqrt{3}+5-\cancel{\sqrt{15}}}{1-5}=$$
$$=\frac{10+2\sqrt{3}}{-4}=\underline{\underline{-\frac{5+\sqrt{3}}{2}}}.$$

$$E=\frac{7+2\sqrt{10}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}-\frac{7-2\sqrt{10}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}=\frac{(7+2\sqrt{10})(\sqrt{2}-\sqrt{5})-(\sqrt{2}+\sqrt{5})(7-2\sqrt{10})}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{5})}=$$
$$=\frac{7\sqrt{2}-7\sqrt{5}+2\sqrt{10}\sqrt{2}-2\sqrt{10}\sqrt{5}-(7\sqrt{2}-2\sqrt{2}\sqrt{10}+7\sqrt{5}-\sqrt{5}\,2\sqrt{10})}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}=$$
$$=\frac{\cancel{7\sqrt{2}}-7\sqrt{5}+2\sqrt{20}-\cancel{2\sqrt{50}}-\cancel{7\sqrt{2}}+2\sqrt{20}-7\sqrt{5}+\cancel{2\sqrt{50}}}{2-5}=$$
$$=\frac{4\sqrt{20}-14\sqrt{5}}{-3}=\frac{4\sqrt{4.5}-14\sqrt{5}}{-3}=\frac{4\sqrt{4}\sqrt{5}-14\sqrt{5}}{-3}=\frac{4.2\sqrt{5}-14\sqrt{5}}{-3}=$$
$$=\frac{8\sqrt{5}-14\sqrt{5}}{-3}=\frac{-6\sqrt{5}}{-3}=\underline{\underline{2\sqrt{5}}}.$$

Exercice 24

a) Posons $n = \sqrt{5-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{5+2\sqrt{3}}$.

On a $n = \sqrt{(5-2\sqrt{3})\cdot(5+2\sqrt{3})} = \sqrt{5^2-(2\sqrt{3})^2} = \sqrt{25-4.3} = \sqrt{25-12} =$

$= \underline{\underline{\sqrt{13}}}$.

b) Posons $n = \sqrt{5+\sqrt{21}} + \sqrt{5-\sqrt{21}}$.

On a $n^2 = \left(\sqrt{5+\sqrt{21}} + \sqrt{5-\sqrt{21}}\right)^2 =$

$= \left(\sqrt{5+\sqrt{21}}\right)^2 + 2\sqrt{5+\sqrt{21}}\sqrt{5-\sqrt{21}} + \left(\sqrt{5-\sqrt{21}}\right)^2 =$

$= 5+\cancel{\sqrt{21}} + 2\sqrt{(5+\sqrt{21})(5-\sqrt{21})} + 5-\cancel{\sqrt{21}} =$

$= 10+2\sqrt{5^2-(\sqrt{21})^2} = 10+2\sqrt{25-21} = 10+2\sqrt{4} =$

$= 10+2.2 = 14$.

Comme $n = \sqrt{5+\sqrt{21}} + \sqrt{5-\sqrt{21}} > 0$, on conclut que $\underline{\underline{n = \sqrt{14}}}$.

c) Posons $n = \sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}}$.

On a $n^2 = \left(\sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2 =$

$= \left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2 - 2\sqrt{6-2\sqrt{5}}\sqrt{6+2\sqrt{5}} + \left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2 =$

$= 6-\cancel{2\sqrt{5}} - 2\sqrt{(6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})} + 6 + \cancel{2\sqrt{5}} =$

$= 12-2\sqrt{6^2-(2\sqrt{5})^2} = 12-2\sqrt{36-4.5} = 12-2\sqrt{36-20} =$

$= 12-2\sqrt{16} = 12-2.4 = 12-8 = 4$.

Comme $n = \sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}} < 0$, on en conclut que $n = \underline{\underline{-2}}$.

Exercice 25

Posons $n = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

On a $n^2 = (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{6})^2 - 2\sqrt{6}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 6 - 2\sqrt{12} + 2 =$

$= 8 - 2\sqrt{12} = 8 - 2\sqrt{4.3} = 8 - 2\sqrt{4}\sqrt{3} = 8 - 2.2\sqrt{3} = 8 - 4\sqrt{3}.$

Posons $m = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

On a $m^2 = (2\sqrt{2 - \sqrt{3}})^2 = 4(2 - \sqrt{3}) = 8 - 4\sqrt{3}$.

Ainsi, on a $n^2 = m^2$.

Comme $n > 0$ et $m > 0$, on en conclut que $n = m$, i.e.

$$\sqrt{6} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Exercice 26

$$(2e^2f^{-3})^4 = 2^4(e^2)^4(f^{-3})^4 = \underline{\underline{16e^8f^{-12}}} = \underline{\underline{\frac{16e^8}{f^{12}}}}.$$

$$\left(\sqrt[5]{\frac{p^2}{w^{-3}}}\right)^0 = \underline{\underline{1}} \quad \text{(toute expression à la puissance zéro vaut 1).}$$

$$(100r^3s^{-1}):(4r^{-2}s^5t) = \frac{100r^3s^{-1}}{4r^{-2}s^5t} = \frac{25r^3s^{-1}}{r^{-2}s^5t} =$$

$$= 25r^{3-(-2)}s^{-1-5}t^{-1} = \underline{\underline{25r^5s^{-6}t^{-1}}} = \underline{\underline{\frac{25r^5}{s^6t}}}$$

$$\sqrt[4]{c^3}\cdot c = (c^3)^{\frac{1}{4}}\cdot c = c^{\frac{3}{4}}\cdot c = c^{\frac{3}{4}+1} = \underline{\underline{c^{\frac{7}{4}}}}.$$

$$(125^{\frac{2}{3}}x^{-1}y^2)^{-\frac{1}{2}} = (125^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}(x^{-1})^{-\frac{1}{2}}(y^2)^{-\frac{1}{2}} = 125^{-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= 125^{-\frac{1}{3}}\sqrt{x}\,\frac{1}{y^{1/2}} = \frac{1}{125^{1/3}}\sqrt{x}\,\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}}\,\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \frac{1}{5}\,\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{\sqrt{x}}{5\sqrt{y}}}}.$$

$$(a^{-3}b^7)^{\frac{1}{2}}:(a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{2}})^{-2} = \frac{(a^{-3}b^7)^{1/2}}{(a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{2}})^{-2}} = \frac{a^{-\frac{3}{2}}b^{\frac{7}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}}b^{-3}} =$$

$$= a^{-\frac{3}{2}-(-\frac{1}{2})}b^{\frac{7}{2}-(-3)} = a^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}b^{\frac{7}{2}+3} = \underline{\underline{a^{-1}b^{\frac{13}{2}}}} = \underline{\underline{\frac{b^{13/2}}{a}}}.$$

$$\frac{\sqrt{x\sqrt{y}}}{\sqrt{y\sqrt{x}}} = \frac{(xy^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{(yx^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}}{y^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}} = x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{x^{1/4}}{y^{1/4}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{y}}}}.$$

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{64}} = \left(\frac{2^{1/2}}{2^6}\right)^{1/3} = \left(2^{\frac{1}{2}-6}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(2^{-\frac{11}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{11}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \underline{\underline{2^{-11/6}}} = \underline{\underline{\frac{1}{2^{11/6}}}}.$$

$$\sqrt{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}}}}}\cdot\left((a^{\frac{2}{3}})^2\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{a^{\frac{2}{3}}}{(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(a^{\frac{2}{3}\cdot 2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \left(\frac{a^{2/3}}{a^{1/6}}\right)^{1/2}a^{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}} = \left(a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{2}}a^{\frac{4}{9}} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}a^{\frac{4}{9}} = a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{4}{9}} =$$

$$= a^{\frac{1}{4}+\frac{4}{9}} = \underline{\underline{a^{\frac{25}{36}}}}.$$

Exercice 27

$A(x) = 4x^2 + 4xy + y^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 2x$ et $b = y$ $(2ab = 2 \cdot 2x \cdot y = 4xy)$.

Donc $A(x) = (a+b)^2 = \underline{\underline{(2x+y)^2}}$.

$B(x) = x^2 + 8x + 16 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = x$ et $b = 4$ $(2ab = 2 \cdot x \cdot 4 = 8x)$.

Donc $B(x) = (a+b)^2 = \underline{\underline{(x+4)^2}}$.

$C(x) = x^2 - 4y^2 = a^2 - b^2$ avec $a = x$ et $b = 2y$.

Donc $C(x) = (a+b)(a-b) = \underline{\underline{(x+2y)(x-2y)}}$.

$D(x) = 5xy^3 - 10xy^2 + 5xy = 5xy(y^2 - 2y + 1) = 5xy(a^2 - 2ab + b^2)$ avec $a = y$ et $b = 1$

$(2ab = 2 \cdot y \cdot 1 = 2y)$.

Donc $D(x) = 5xy(a-b)^2 = \underline{\underline{5xy(y-1)^2}}$.

$E(x) = 3(x^2-1)^2 - (x^2-1) = (x^2-1)\left(3(x^2-1)-1\right) = (x^2-1)(3x^2 - 3 - 1) = (3x^2-4)$.

$x^2 - 1 = a^2 - b^2$ avec $a = x$ et $b = 1$.

Donc $x^2 - 1 = (a+b)(a-b) = (x+1)(x-1)$.

$3x^2 - 4 = a^2 - b^2$ avec $a = \sqrt{3}x$ et $b = 2$.

Donc $3x^2 - 4 = (a+b)(a-b) = (\sqrt{3}x+2)(\sqrt{3}x-2)$.

Par conséquent $E(x) = \underline{\underline{(x+1)(x-1)(\sqrt{3}x+2)(\sqrt{3}x-2)}}$.

Exercice 28

a) $A = \frac{3a}{4b} - \frac{4b}{3a} = \underline{\underline{\frac{9a^2-16b^2}{12ab}}}.$

$B = \frac{x-\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x}} = \left(x-\frac{4}{x}\right) : \left(1-\frac{2}{x}\right) = \frac{x^2-4}{x} : \frac{x-2}{x} = \frac{x^2-4}{\cancel{x}} \cdot \frac{\cancel{x}}{x-2} = \frac{x^2-4}{x-2}.$

On a : $x^2-4 = a^2-b^2$ avec $a=x$ et $b=2$.

Donc : $x^2-4 = (a+b)(a-b) = (x+2)(x-2)$.

Ainsi $B = \frac{x^2-4}{x+2} = \frac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{x+2}} = \underline{\underline{x-2}}.$

$C = \frac{a+2}{2a-6} - \frac{a-2}{2a+6} = \frac{(a+2)(2a+6)-(a-2)(2a-6)}{(2a-6)(2a+6)} =$

$= \frac{2a^2+6a+4a+12-(2a^2-6a-4a+12)}{(2a-6)(2a+6)} =$

$= \frac{\cancel{2a^2}+10a+\cancel{12}-\cancel{2a^2}+10a-\cancel{12}}{(2a-6)(2a+6)} = \underline{\underline{\frac{20a}{4a^2-36}}}.$

b) $A = a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = a\left(a\left(a\cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = a\left(a\cdot\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = a\left(a\cdot a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} =$

$= a\cdot\left(a^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = a\cdot a^{\frac{7}{8}} = \underline{\underline{a^{\frac{15}{8}}}}.$

$B = \frac{(a^2)^{3n}}{\sqrt[3]{a^{6n-3}}} = \frac{a^{6n}}{(a^{6n-3})^{1/3}} = \frac{a^{6n}}{a^{2n-1}} = a^{6n-(2n-1)} =$

$= a^{6n-2n+1} = \underline{\underline{a^{4n+1}}}.$

$C = \left(\frac{4a^{-2}}{9x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{4^{-1/2}a^{+1}}{9^{-1/2}x^{-1}} = \frac{(2^2)^{-1/2}a}{(3^2)^{-1/2}x^{-1}} = \frac{2^{-1}a}{3^{-1}x^{-1}} = \underline{\underline{\frac{3ax}{2}}}$

$\left(2^{-1} = \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{3^{-1}} = 3\ ;\ \frac{1}{x^{-1}} = x\right).$

$D = \frac{(a^{-2})^3}{\sqrt{b}\cdot a^{2/3}} \cdot \frac{\sqrt{b^{-5}}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{a^{-6}(b^{-5})^{\frac{1}{2}}}{b^{1/2}a^{2/3}\cdot a^{1/3}} = \frac{a^{-6}b^{-5/2}}{b^{1/2}\cdot a} =$

$= a^{-6-1}\cdot b^{-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}} = a^{-7}\cdot b^{-3} = \underline{\underline{\frac{1}{a^7\cdot b^3}}}.$

Exercice 29

$$A = \frac{5\sqrt{72}}{\sqrt{18}} = 5\,\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{18}} = 5\sqrt{\frac{72}{18}} = 5\sqrt{4} = 5\cdot 2 = \underline{\underline{10}}.$$

$$B = \frac{12}{2\sqrt{27}+\sqrt{3}} = \frac{12}{2\sqrt{9\cdot 3}+\sqrt{3}} = \frac{12}{2\sqrt{9}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}} = \frac{12}{2\cdot 3\sqrt{3}+\sqrt{3}} = \frac{12}{6\sqrt{3}+\sqrt{3}} = \frac{12}{7\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{12\sqrt{3}}{7(\sqrt{3})^2} = \frac{12\sqrt{3}}{7\cdot 3} = \underline{\underline{\frac{4\sqrt{3}}{7}}}.$$

$$C = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+2} + \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+2} = \frac{\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+2} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} =$$

$$= \frac{2(\sqrt{3})^2 - 4\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2 - 2^2} = \frac{2\cdot 3 - 4\sqrt{3}}{9-4} = \underline{\underline{\frac{6-4\sqrt{3}}{5}}}.$$

$$D = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3}+\sqrt{5}) - (\sqrt{3}+1)(2\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{3}+\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{2(\sqrt{3})^2 + \sqrt{3}\sqrt{5} - 2\sqrt{3} - \sqrt{5} - \left(2(\sqrt{3})^2 - \sqrt{3}\sqrt{5} + 2\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)}{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2} =$$

$$= \frac{\cancel{2\cdot 3} + \sqrt{15} - 2\sqrt{3} - \cancel{\sqrt{5}} - \cancel{2\cdot 3} + \sqrt{15} - 2\sqrt{3} + \cancel{\sqrt{5}}}{4\cdot 3 - 5} =$$

$$= \frac{2\sqrt{15} - 4\sqrt{3}}{12-5} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{15} - 4\sqrt{3}}{7}}}.$$

$$E = \sqrt{5+3\sqrt{2}}\cdot\sqrt{5-3\sqrt{2}} = \sqrt{(5+3\sqrt{2})(5-3\sqrt{2})} = \sqrt{5^2 - (3\sqrt{2})^2} =$$

$$= \sqrt{25 - 9\cdot 2} = \sqrt{25-18} = \underline{\underline{\sqrt{7}}}.$$

$$F = \frac{2+\sqrt{16x}}{\sqrt{x}-\sqrt{16}} - \frac{2-\sqrt{16x}}{\sqrt{x}+\sqrt{16}} = \frac{2+\sqrt{16}\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4} - \frac{2-\sqrt{16}\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} =$$

$$= \frac{2+4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4} - \frac{2-4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} = \frac{(2+4\sqrt{x})(\sqrt{x}+4) - (2-4\sqrt{x})(\sqrt{x}-4)}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)} =$$

$$= \frac{2\sqrt{x} + 2\cdot 4 + 4(\sqrt{x})^2 + 16\sqrt{x} - \left(2\sqrt{x} - 2\cdot 4 - 4(\sqrt{x})^2 + 16\sqrt{x}\right)}{(\sqrt{x})^2 - 4^2}$$

$$= \frac{\cancel{18\sqrt{x}} + 8 + 4x - \cancel{18\sqrt{x}} + 8 + 4x}{x-16} = \underline{\underline{\frac{8x+16}{x-16}}}.$$

Exercice 30

$P(x)$: terme constant : 6 $\Rightarrow$ diviseurs de 6 : 1; 2; 3; 6;

on cherche les zéros parmi les nombres ± 1; ± 2; ± 3; ± 6;

$x=1$: $P(x) = 1^3 - 2\cdot 1^2 - 5 + 6 = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$;

$x=-1$: $P(x) = (-1)^3 - 2\cdot(-1)^2 - 5(-1) + 6 = -1 - 2 + 5 + 6 = 8$;

$x=2$: $P(x) = 2^3 - 2\cdot 2^2 - 5\cdot 2 + 6 = 8 - 8 - 10 + 6 = -4$;

$x=-2$: $P(x) = (-2)^3 - 2\cdot(-2)^2 - 5\cdot(-2) + 6 = -8 - 8 + 10 + 6 = 0$;

$x=3$: $P(x) = 3^3 - 2\cdot 3^2 - 5\cdot 3 + 6 = 27 - 18 - 15 + 6 = 0$;

$x=-3$: $P(x) = (-3)^3 - 2\cdot(-3)^2 - 5\cdot(-3) + 6 = -27 - 18 + 15 + 6 = -24$;

$x=6$: $P(x) = 6^3 - 2\cdot 6^2 - 5\cdot 6 + 6 = 216 - 72 - 30 + 6 = 120$;

$x=-6$: $P(x) = (-6)^3 - 2\cdot(-6)^2 - 5\cdot(-6) + 6 = -216 - 72 + 30 + 6 = -252$;

$\Rightarrow$ les zéros entiers de $P(x)$ sont $\underline{\underline{x=1\,;\ x=-2 \text{ et } x=3.}}$

$Q(x)$: terme constant : 9 $\Rightarrow$ diviseurs de 9 : 1; 3; 9;

on cherche les zéros parmi les nombres ± 1; ± 3; ± 9;

$x=1$: $Q(x) = 1^3 + 1^2 - 3\cdot 1 + 9 = 1 + 1 - 3 + 9 = 8$;

$x=-1$: $Q(x) = (-1)^3 + (-1)^2 - 3\cdot(-1) + 9 = -1 + 1 + 3 + 9 = 12$;

$x=3$: $Q(x) = 3^3 + 3^2 - 3\cdot 3 + 9 = 27 + 9 - 9 + 9 = 36$;

$x=-3$: $Q(x) = (-3)^3 + (-3)^2 - 3\cdot(-3) + 9 = -27 + 9 + 9 + 9 = 0$;

$x=9$: $Q(x) = 9^3 + 9^2 - 3\cdot 9 + 9 = 729 + 81 - 27 + 9 = 792$;

$x=-9$: $Q(x) = (-9)^3 + (-9)^2 - 3\cdot(-9) + 9 = -729 + 81 + 27 + 9 = -612$;

$\Rightarrow$ le seul zéro entier de $Q(x)$ est $\underline{\underline{x=-3.}}$

Exercice 31

$P(x)$: terme constant : $-1 \Rightarrow$ diviseur de 1 : 1 ;

coefficient dominant : 4 $\Rightarrow$ diviseur de 4 : 1 ; 2 ; 4 ;

on cherche les zéros parmi les nombres ± 1 ; $\pm \frac{1}{2}$; $\pm \frac{1}{4}$;

$x=1$: $P(x) = 4\cdot 1^2 + 3\cdot 1 - 1 = 4+3-1 = 6$;

$x=-1$: $P(x) = 4\cdot(-1)^2 + 3\cdot(-1) - 1 = 4-3-1 = 0$;

$x=\frac{1}{2}$: $P(x) = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\cdot\frac{1}{2} - 1 = 4\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 1 = 1 + \frac{3}{2} - 1 = \frac{3}{2}$;

$x=-\frac{1}{2}$: $P(x) = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = 4\cdot\frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 1 = 1 - \frac{3}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$;

$x=\frac{1}{4}$: $P(x) = 4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 3\cdot\frac{1}{4} - 1 = 4\cdot\frac{1}{16} + \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 1 = 0$;

$x=-\frac{1}{4}$: $P(x) = 4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) - 1 = 4\cdot\frac{1}{16} - \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 1 = -\frac{3}{2}$;

$\Rightarrow$ les zéros rationnels de $P(x)$ sont $\underline{\underline{x=-1 \text{ et } x=\frac{1}{4}}}$.

$Q(x)$: terme constant : $-2 \Rightarrow$ diviseur de 2 : 1 ; 2 ;

coefficient dominant : 6 $\Rightarrow$ diviseur de 6 : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ;

on cherche les zéros parmi les nombres ± 1 ; $\pm\frac{1}{2}$; $\pm\frac{1}{3}$; $\pm\frac{1}{6}$; ± 2 ; $\pm\frac{2}{3}$;

$x=1$: $Q(x) = 6\cdot 1^2 - 1 - 2 = 6-1-2 = 3$;

$x=-1$: $Q(x) = 6\cdot(-1)^2 - (-1) - 2 = 6+1-2 = 5$;

$x=\frac{1}{2}$: $Q(x) = 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 = 6\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - 2 = -1$;

$x=-\frac{1}{2}$: $Q(x) = 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 = 6\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 2 = 0$;

$x=\frac{1}{3}$: $Q(x) = 6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} - 2 = 6\cdot\frac{1}{9} - \frac{1}{3} - 2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}$;

$x=-\frac{1}{3}$: $Q(x) = 6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right) - 2 = 6\cdot\frac{1}{9} + \frac{1}{3} - 2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} - 2 = -1$;

$x=\frac{1}{6}$: $Q(x) = 6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{6} - 2 = 6\cdot\frac{1}{36} - \frac{1}{6} - 2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - 2 = -2$;

$x=-\frac{1}{6}$: $Q(x) = 6\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)^2 - \left(-\frac{1}{6}\right) - 2 = 6\cdot\frac{1}{36} + \frac{1}{6} - 2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - 2 = -\frac{5}{3}$;

$x=2$: $Q(x) = 6\cdot 2^2 - 2 - 2 = 6\cdot 4 - 2 - 2 = 24 - 4 = 20$;

$x=-2$: $Q(x) = 6\cdot(-2)^2 - (-2) - 2 = 6\cdot 4 + 2 - 2 = 24$;

$x=\frac{2}{3}$: $Q(x) = 6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} - 2 = 6\cdot\frac{4}{9} - \frac{2}{3} - 2 = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} - 2 = 0$;

$x=-\frac{2}{3}$: $Q(x) = 6\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{2}{3}\right) - 2 = 6\cdot\frac{4}{9} + \frac{2}{3} - 2 = \frac{8}{3} + \frac{2}{3} - 2 = \frac{4}{3}$;

$\Rightarrow$ les zéros rationnels de $P(x)$ sont $\underline{\underline{x=-\frac{1}{2} \text{ et } x=\frac{2}{3}}}$.

Exercice 32

A:

$$
\begin{array}{r|l}
x^4+2x^3-1 & x^2-1 \\ \hline
-(x^4-x^2) & x^2+2x+1 \\ \hline
2x^3+x^2-1 & \\
-(2x^3-2x) & \\ \hline
x^2+2x-1 & \\
-(x^2-1) & \\ \hline
2x &
\end{array}
$$

B:

$$
\begin{array}{r|l}
7x^4-3x^2+2x-4 & x^2-4 \\ \hline
-(7x^4-28x^2) & 7x^2+25 \\ \hline
25x^2+2x-4 & \\
-(25x^2-100) & \\ \hline
2x+96 &
\end{array}
$$

C:

$$
\begin{array}{r|l}
x^6-3x^5+2 & x^3+3x \\ \hline
-(x^6+3x^4) & x^3-3x^2-3x+9 \\ \hline
-3x^5-3x^4+2 & \\
-(-3x^5-9x^3) & \\ \hline
-3x^4+9x^3+2 & \\
-(-3x^4-9x^2) & \\ \hline
9x^3+9x^2+2 & \\
-(9x^3+27x) & \\ \hline
9x^2-27x+2 &
\end{array}
$$

D:

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3-11x^2+23x-26 & 2x-5 \\ \hline
-(2x^3-5x^2) & x^2-3x+4 \\ \hline
-6x^2+23x-26 & \\
-(-6x^2+15x) & \\ \hline
8x-26 & \\
-(8x-20) & \\ \hline
-6 &
\end{array}
$$

Exercice 33

$P(x)$ est divisible par $x - x_0$ si $P(x_0) = 0$.

a) $x_0 = 3$: $P(3) = 3^3 + 2\cdot 3^2 - 2\cdot 3 - 12 = 27 + 18 - 6 - 12 = 27 \neq 0$;

$\Longrightarrow$ $P(x)$ n'est pas divisible par $x-3$.

b) $x_0 = -1$: $P(-1) = (-1)^3 + 2\cdot(-1)^2 - 2\cdot(-1) - 12 = -1 + 2 + 2 - 12 = -9 \neq 0$;

$\Longrightarrow$ $P(x)$ n'est pas divisible par $x+1$.

c) $x_0 = 2$: $P(2) = 2^3 + 2\cdot 2^2 - 2\cdot 2 - 12 = 8 + 8 - 4 - 12 = 0$;

$\Longrightarrow$ $P(x)$ est divisible par $x-2$.

Exercice 34

$P(x)$ est divisible par $x - x_0$ si $P(x_0) = 0$.

a) Pour que $P(x)$ soit divisible par $x+2$, il faut que $P(-2) = 0$.

On a : $P(-2) = 2\cdot(-2)^3 + m(-2)^2 - 3\cdot(-2) - 2 =$

$= 2\cdot(-8) + 4m + 6 - 2 = -16 + 4m + 4 = 4m - 12$.

Ainsi, on doit avoir $4m - 12 = 0$, i.e. $4m = 12$, i.e. $\underline{\underline{m = 3}}$.

b) Pour que $Q(x)$ soit divisible par $x-2$, il faut que $Q(2) = 0$.

On a : $Q(2) = k\cdot 2^3 + k^2\cdot 2^2 + k\cdot 2 - 4k^2 + 6 =$

$= 8k + \cancel{4k^2} + 2k - \cancel{4k^2} + 6 = 10k + 6$.

Ainsi, on doit avoir $10k + 6 = 0$, i.e. $10k = -6$, i.e. $\underline{\underline{k = -\frac{3}{5}}}$.

Exercice 35

A :

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^2 - 2x + 1 & x - 1 \\ \cline{3-3}
 & -(x^2 - x) & x - 1 \\ \cline{2-2}
 & -x + 1 & \\
 & -(-x + 1) & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

Pour $x = 1$, $x^2 - 2x + 1 =$
$= 1 - 2 + 1 = 0$, ce qui signifie que $x^2 - 2x + 1$ est divisible par $x - 1$ (reste $= 0$).

B :

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 2x^2 + 3x + 4 & x + 1 \\ \cline{3-3}
 & -(2x^2 + 2x) & 2x + 1 \\ \cline{2-2}
 & x + 4 & \\
 & -(x + 1) & \\ \cline{2-2}
 & 3 &
\end{array}
$$

Pour $x = -1$, $2x^2 + 3x + 4 =$
$= 2 - 3 + 4 = 3$, ce qui signifie que $2x^2 + 3x + 4$ n'est pas divisible par $x + 1$ (reste $= 3$).

C :

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 3x^2 + 2x + 5 & x + 3 \\ \cline{3-3}
 & -(3x^2 + 9x) & 3x - 7 \\ \cline{2-2}
 & -7x + 5 & \\
 & -(-7x - 21) & \\ \cline{2-2}
 & 26 &
\end{array}
$$

Pour $x = -3$, $3x^2 + 2x + 5 =$
$= 27 - 6 + 5 = 26$, ce qui signifie que $3x^2 + 2x + 5$ n'est pas divisible par $x + 3$ (reste $= 26$).

D :

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^3 + 2x^2 + 3x + 4 & x + 2 \\ \cline{3-3}
 & -(x^3 + 2x^2) & x^2 + 3 \\ \cline{2-2}
 & 3x + 4 & \\
 & -(3x + 6) & \\ \cline{2-2}
 & -2 &
\end{array}
$$

Pour $x = -2$, $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 =$
$= -8 + 8 - 6 + 4 = -2$, ce qui signifie que $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ n'est pas divisible par $x + 2$ (reste $= -2$).

Exercice 36

$A = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

quotient $= x - 1$ reste $= 0$

$B = \dfrac{2x^2 + 3x + 4}{x + 1}$:

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ \hline & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

quotient $= 2x + 1$ reste $= 3$

$C = \dfrac{3x^2 + 2x + 5}{x + 3}$:

$$\begin{array}{c|ccc} & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -9 & 21 \\ \hline & 3 & -7 & 26 \end{array}$$

quotient $= 3x - 7$ reste $= 26$

$D = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{x + 2}$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & -2 \end{array}$$

quotient $= x^2 + 3$ reste $= -2$

Exercice 37

1.

$3x-2=\frac{1}{2}x+1$	$\cdot 2$
$6x-4=x+2$	$-x$
$5x-4=2$	$+4$
$5x=6$	$:5$
$\underline{\underline{x=\frac{6}{5}}}$	

2.

$\frac{8}{6-2x}=\frac{9}{4-3x}$	$\cdot(6-2x)$
$8=\frac{9(6-2x)}{4-3x}$	$\cdot(4-3x)$
$8(4-3x)=9(6-2x)$	distributivité
$32-24x=54-18x$	$+18x$
$32-6x=54$	-32
$-6x=22$	$:(-6)$
$\underline{x=-\frac{22}{6}}$	

3.

$\frac{3x-12}{x-4}=2$	$\cdot(x-4)$
$3x-12=2(x-4)$	distributivité
$3x-12=2x-8$	$-2x$
$x-12=-8$	$+12$
$x=4$	

Or : $\frac{3x-12}{x-4}=\frac{3(x-4)}{x-4}=3\neq 2.$

$\Rightarrow$ <u>aucune solution</u>

4.

$(8x-2)(3x+4)=(4x+3)(6x-1)$	distributivité
$24x^2+32x-6x-8=24x^2-4x+18x-3$	réduction
$24x^2+26x-8=24x^2+14x-3$	$-24x^2$
$26x-8=14x-3$	$-14x$
$12x-8=-3$	$+8$
$12x=5$	$:12$
$\underline{\underline{x=\frac{5}{12}}}$	

5. $$ax+1=2x-a \quad \Big| \; -2x$$
$$ax-2x+1=-a \quad \Big| \; -1$$
$$ax-2x=-a-1 \quad \Big| \; \text{mise en évidence}$$
$$(a-2)x=-(a-1) \quad \Big| \; :(a-2) \quad (a\neq 2)$$
$$x=-\frac{a-1}{a-2}$$

Si $a=2$, on a:
$$2x+1=2x-2 \quad \Big| \; -2x$$
$$1=2$$
impossible

Donc, si $a\neq 2$, la solution est $x=-\frac{a-1}{a-2}$, et si $a=2$, l'équation n'a pas de solution.

6. $$(x+1)^2-16=0 \quad \Big| \; +16$$
$$(x+1)^2=16 \quad \Big| \; \sqrt{}$$
$$x+1=\pm 4$$

(+) $x+1=4 \Rightarrow x=3$

(−) $x+1=-4 \Rightarrow x=-5$.

Donc, les solutions sont $x=3$ et $x=-5$.

7. $(a-x)(b+x)=0$.

Un produit est nul si au moins un des facteurs est nul.

Ainsi, soit $a-x=0$, i.e. $x=a$, soit $b+x=0$, i.e. $x=-b$.

Les solutions sont donc $x=a$ et $x=-b$.

8. $$\frac{x+3}{x-4}=1 \quad \Big| \; \cdot(x-4)$$
$$x+3=x-4 \quad \Big| \; -x$$
$$-3=-4$$
impossible.

Donc, l'équation n'a pas de solution.

9. $$x^2+5=2 \quad \Big| \; -5$$
$$x^2=-3$$

impossible, car $x^2 \geqslant 0$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Donc l'équation n'a pas de solution.

10. $\frac{1-x}{4} - \frac{2x+3}{3} = \frac{x}{2}$ | calculs

$\frac{3(1-x)-4(2x+3)}{12} = \frac{x}{2}$ | distributivité

$\frac{3-3x-8x-12}{12} = \frac{x}{2}$ | réduction

$\frac{-11x-9}{12} = \frac{x}{2}$ | $\cdot 12$

$-11x-9 = 6x$ | $+11x$

$-9 = 17x$ | $:17$

$\underline{\underline{x = -\frac{9}{17}}}$

11. $\frac{-2x^2}{2x-1} = -x-1$ | $\cdot(2x-1)$

$-2x^2 = (-x-1)(2x-1)$ | distributivité

$-2x^2 = -2x^2+x-2x+1$ | réduction

$-2x^2 = -2x^2-x+1$ | $+2x^2$

$0 = -x+1$ | $+x$

$\underline{\underline{x = 1}}$

12. $5a+2x = x - \frac{x}{a}$ | $\cdot a$

$5a^2+2ax = ax - x$ | $-2ax$

$5a^2 = -ax - x$ | mise en évidence

$5a^2 = x(-a-1)$ | $:(-a-1) \quad (a \neq -1)$

$\frac{5a^2}{-a-1} = x$

ce que l'on peut écrire $x = -\frac{5a^2}{a+1}$.

Si $a=-1$, on a $-5+2x = x+x$, i.e. $-5+2x = 2x$, i.e. $-5 = 0$, ce qui est impossible.

Donc, $\underline{\underline{\text{si } a \neq -1, \text{ la solution est } x = -\frac{5a^2}{a+1} \text{ et si } a=-1, \text{ il n'y a pas de solution.}}}$