EQUATIONS ET PARABOLES

CORRIGE

Exercice 1

Equations	dans $\mathbb{N}$	dans $\mathbb{Z}$	dans $\mathbb{Q}$	dans $\mathbb{R}$
a) $2x=6 \quad \vert :2$ $x=3$	3	3	3	3
b) $3x=5 \quad \vert :3$ $x=\frac{5}{3}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$
c) $4x=-3 \quad \vert :4$ $x=-\frac{3}{4}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$
d) $5x=-10 \quad \vert :5$ $x=-2$	$\emptyset$	-2	-2	-2
e) $x^2=4 \quad \vert \sqrt{\ }$ $x=\pm 2$	2	2 et -2	2 et -2	2 et -2
f) $x^2=-9$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
g) $x^2=5 \quad \vert \sqrt{\ }$ $x=\pm\sqrt{5}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\pm\sqrt{5}$
h) $9x^2=25 \quad \vert :9$ $x^2=\frac{25}{9} \quad \vert \sqrt{\ }$ $x=\pm\frac{5}{3}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\pm\frac{5}{3}$	$\pm\frac{5}{3}$
i) $x^3=-8 \quad \vert \sqrt[3]{\ }$ $x=-2$	$\emptyset$	-2	-2	-2

$\emptyset$ = ensemble vide ; cela signifie que l'équation n'a pas de solutions.

Exercice 2

a) $\begin{cases} 3x-7y=1 \\ 6x+y=0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot 1 \Rightarrow 3x-7y=1 \\ \cdot 7 \Rightarrow 42x+7y=0 \end{array} \right| + \Rightarrow 45x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{45}$

$\begin{cases} 3x-7y=1 \\ 6x+y=0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot(-2) \Rightarrow -6x+14y=-2 \\ \cdot 1 \Rightarrow 6x+y=0 \end{array} \right| + \Rightarrow 15y=-2 \Rightarrow y=-\frac{2}{15}.$

b) $\begin{cases} 2x+9y=3 \\ -x+5y=8 \Rightarrow 5y=x+8 \Rightarrow x=5y-8 \end{cases}$

$\Rightarrow 2(5y-8)+9y=3$ | distributivité

$10y-16+9y=3$ | réduction

$19y=19$ | $:19$

$y=1$

$\Rightarrow x=5\cdot 1-8=5-8=-3$

c) $\begin{cases} 2x+3y-4z=-4 \\ 3x-y+z=4 \\ x+y-z=0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot 1 \Rightarrow 2x+3y-4z=-4 \\ \cdot 4 \Rightarrow 12x-4y+4z=16 \end{array} \right| + \Rightarrow 14x-y=12$

$\begin{cases} 2x+3y-4z=-4 \\ 3x-y+z=4 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Big| + \Rightarrow 4x=4 \Rightarrow x=1$

$\Rightarrow 14\cdot 1-y=12 \Rightarrow 14-12=y \Rightarrow y=2$

$\Rightarrow 1+2-z=0 \Rightarrow z=3$

d) $\begin{cases} -2x+3y-5z=11 \\ 7x+y-2z=-3 \\ x-6y+3z=2 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot 2 \Rightarrow -4x+6y-10z=22 \\ \cdot(-5) \Rightarrow -35x-5y+10z=15 \end{array} \right| + \Rightarrow -39x+y=37$

$\begin{cases} -2x+3y-5z=11 \\ 7x+y-2z=-3 \\ x-6y+3z=2 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \\ \cdot 3 \Rightarrow 21x+3y-6z=-9 \\ \cdot 2 \Rightarrow 2x-12y+6z=4 \end{array} \right| + \Rightarrow 23x-9y=-5$

$\begin{cases} -39x+y=37 \\ 23x-9y=-5 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot 9 \Rightarrow -351x+9y=333 \\ \cdot 1 \Rightarrow 23x-9y=-5 \end{array} \right| + \Rightarrow -328x=328 \Rightarrow x=-1$

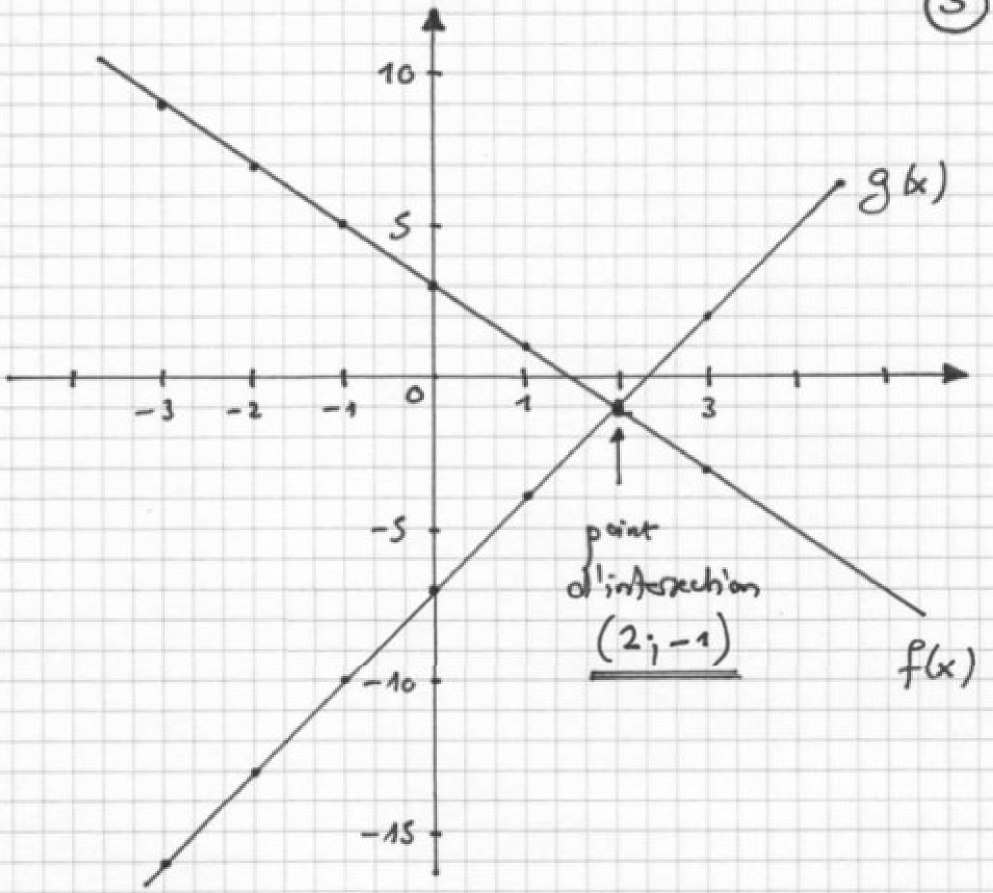
$\Rightarrow 23\cdot(-1)-9y=-5 \Rightarrow -9y=18 \Rightarrow y=-2$

$\Rightarrow -2\cdot(-1)+3\cdot(-2)-5z=11 \Rightarrow 2-6-5z=11 \Rightarrow -4-5z=11$

$\Rightarrow -5z=11+4 \Rightarrow -5z=15 \Rightarrow z=-3$

Exercice 3

x	$f(x)$	$g(x)$
-3	9	-16
-2	7	-13
-1	5	-10
0	3	-7
1	1	-4
2	-1	-1
3	-3	2



Vérification par calcul :

Les 2 fonctions f et g se coupent pour x satisfaisant $f(x) = g(x)$, i.e.

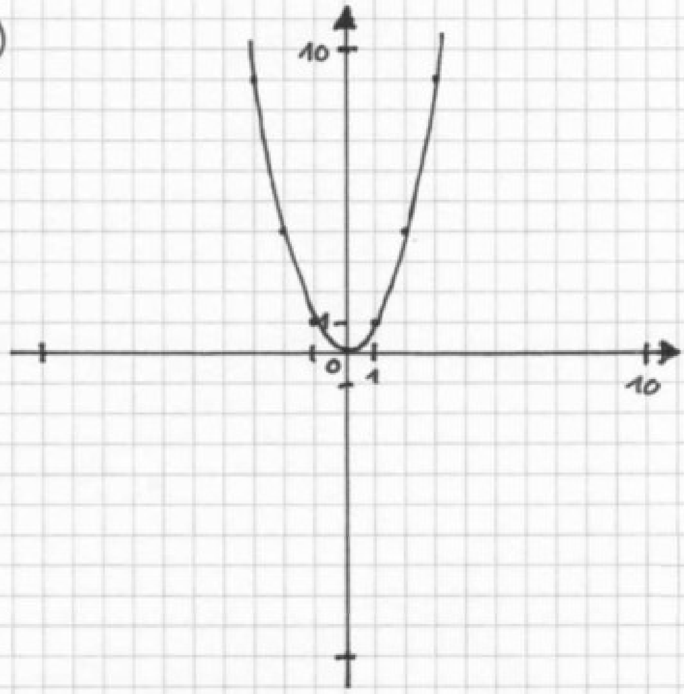
$$\begin{aligned} -2x+3 &= 3x-7 && \mid -3x \\ -5x+3 &= -7 && \mid -3 \\ -5x &= -10 && \mid :(-5) \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Avec $x = 2$, on a $f(2) = -2\cdot 2+3 = -1 \quad (= g(2))$.

Le point d'intersection est donc $\underline{(2; -1)}$.

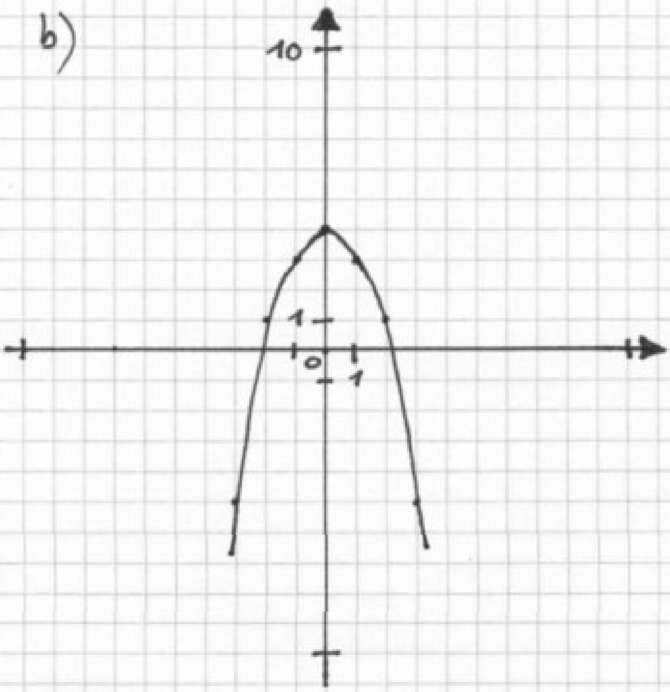
Exercice 4

a)



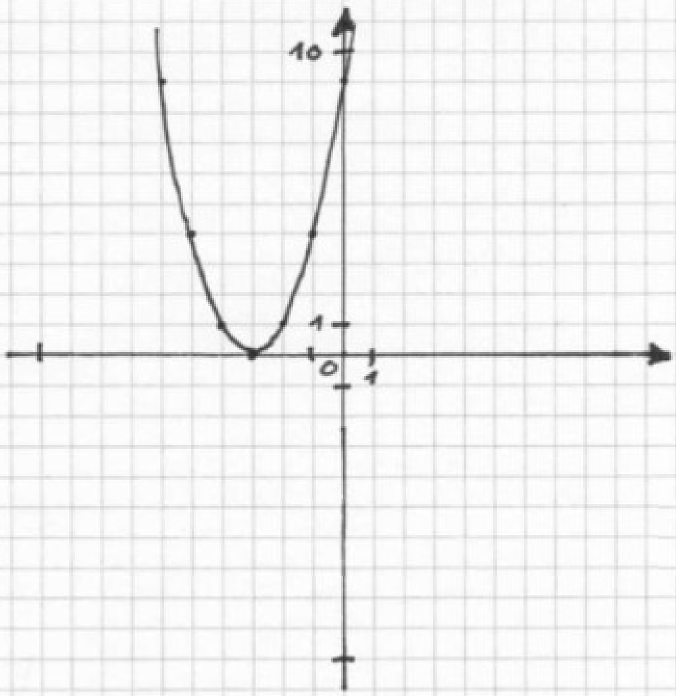
Sommet : (0;0) = minimum

b)



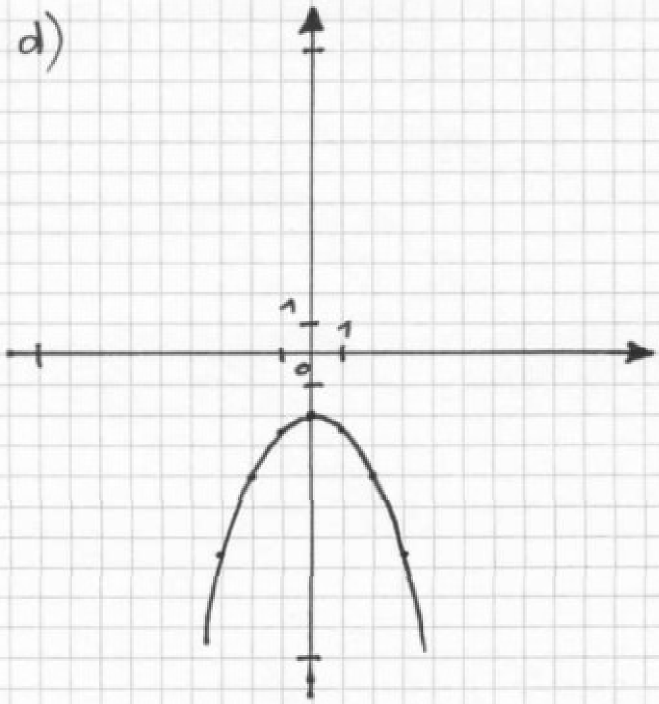
Sommet : (0;4) = maximum

c)



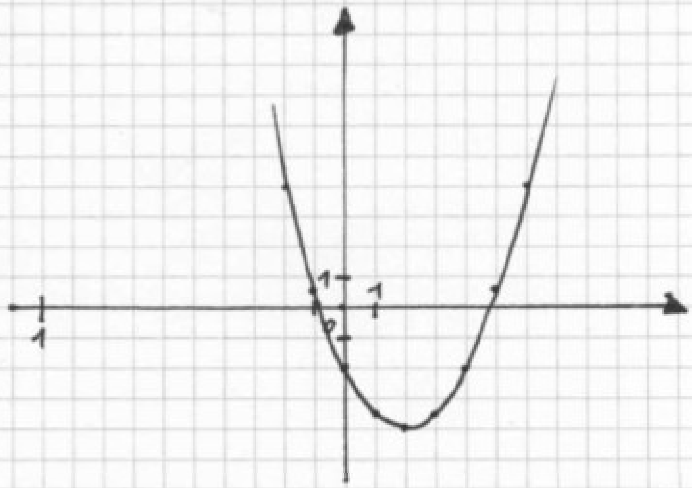
Sommet : (-3;0) = minimum

d)



Sommet : (0;-2) = maximum

e)



Sommet : (2;-4) = minimum

Exercice 5

Lorsqu'on a une parabole de la forme $y = ax^2 + bx + c$, le sommet est donné par $x_S = -\frac{b}{2a}$. On calcule la valeur correspondante y_S par $y_S = ax_S^2 + bx_S + c$.
$(x_S ; y_S)$ sera un minimum si $a > 0$ et un maximum si $a < 0$.

a) $y = x^2 - 4x + 8$: on a : $a = 1$, $b = -4$ et $c = 8$;

$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$;

$y_S = 2^2 - 4 \cdot 2 + 8 = 4 - 8 + 8 = 4$;

$a = 1 > 0$;

ainsi $(2;4)$ est le sommet de la parabole et est un minimum.

b) $y = x^2 - 10x + 25$: on a : $a = 1$, $b = -10$ et $c = 25$;

$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-10}{2 \cdot 1} = 5$;

$y_S = 5^2 - 10 \cdot 5 + 25 = 25 - 50 + 25 = 0$;

$a = 1 > 0$;

ainsi $(5;0)$ est le sommet de la parabole et est un minimum.

c) $y = x^2 + 6x$: on a : $a = 1$, $b = 6$ et $c = 0$;

$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot 1} = -\frac{6}{2} = -3$;

$y_S = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) = 9 - 18 = -9$;

$a = 1 > 0$;

ainsi $(-3;-9)$ est le sommet de la parabole et est un minimum.

d) $y = -2x^2 + 8x - 5$: on a : $a = -2$, $b = 8$ et $c = -5$;

$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot (-2)} = -\frac{8}{-4} = 2$;

$y_S = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 5 = -8 + 16 - 5 = 3$;

on a $a = -2 < 0$;

ainsi $(2;3)$ est le sommet de la parabole et est un maximum.

e) $y = 3x^2 - 12x + 9$: on a : $a = 3$, $b = -12$ et $c = 9$;

$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \cdot 3} = \frac{12}{6} = 2$;

$y_S = 3\cdot 2^2 - 12\cdot 2 + 9 = 12 - 24 + 9 = -3$;

on a $a = 3 > 0$;

ainsi $\underline{\underline{(2; -3) \text{ est le sommet de la parabole et est un minimum.}}}$

f) $y = -x^2 + 4$: on a $a = -1$, $b = 0$ et $c = 4$;

$x_S = -\frac{b}{2a} = 0$;

$y_S = -0^2 + 4 = 4$;

on a $a = -1 < 0$;

ainsi $\underline{\underline{(0; 4) \text{ est le sommet de la parabole et est un maximum.}}}$

g) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x$: on a $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$ et $c = 0$;

$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2\cdot(-\frac{1}{2})} = -\frac{1}{-1} = 1$;

$y_S = -\frac{1}{2}\cdot 1^2 + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$;

on a $a = -\frac{1}{2} < 0$;

ainsi $\underline{\underline{(1; \frac{1}{2}) \text{ est le sommet de la parabole et est un maximum.}}}$

h) $y = -x^2 + x$: on a $a = -1$, $b = 1$ et $c = 0$;

$x_S = \frac{-b}{2a} = -\frac{1}{2\cdot(-1)} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$;

$y_S = -(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$;

on a $a = -1 < 0$;

ainsi $\underline{\underline{(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}) \text{ est le sommet de la parabole et est un maximum.}}}$

i) $y = x^2 + 2bx + c$: on a $a = 1$, $b = 2b$ et $c = c$;

$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{2b}{2\cdot 1} = -b$;

$y_S = (-b)^2 + 2b(-b) + c = b^2 - 2b^2 + c = -b^2 + c$;

on a $a = 1 > 0$;

ainsi $\underline{\underline{(-b; -b^2 + c) \text{ est le sommet de la parabole et est un minimum.}}}$

Exercice 6

Le sommet de la parabole d'équation $y = ax^2+bx+c$ est donné par $x_S = -\frac{b}{2a}$ et $y_S = ax_S^2 + bx_S + c$.

Les coordonnées de l'intersection de la parabole $y = ax^2+bx+c$ et de la droite $y = m$ revient à résoudre l'équation $ax^2+bx+c = m$, i.e. $ax^2+bx+c-m=0$, en utilisant la formule de résolution d'une équation du 2^e degré, puis de calculer le ou les y correspondant(s).

Pour résoudre une équation de la forme $Ax^2+Bx+C=0$, on calcule $\Delta = B^2-4AC$.

Si $\Delta>0$, les solutions sont $x_1 = \frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A}$ et $x_2 = \frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}$;

si $\Delta = 0$, la seule solution est $x = -\frac{B}{2A}$;

si $\Delta<0$, il n'y a pas de solution.

a) $p : y = x^2+2x-2$: on a $a=1$, $b=2$, $c=-2$;

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\cdot 1} = -\frac{2}{2} = -1;$$

$$y_S = (-1)^2+2\cdot(-1)-2 = 1-2-2 = -3;$$

<u>le sommet de la parabole est donc $(-1;-3)$.</u>

intersection de p et d : $x^2+2x-2 = 1$, i.e. $x^2+2x-3=0$;

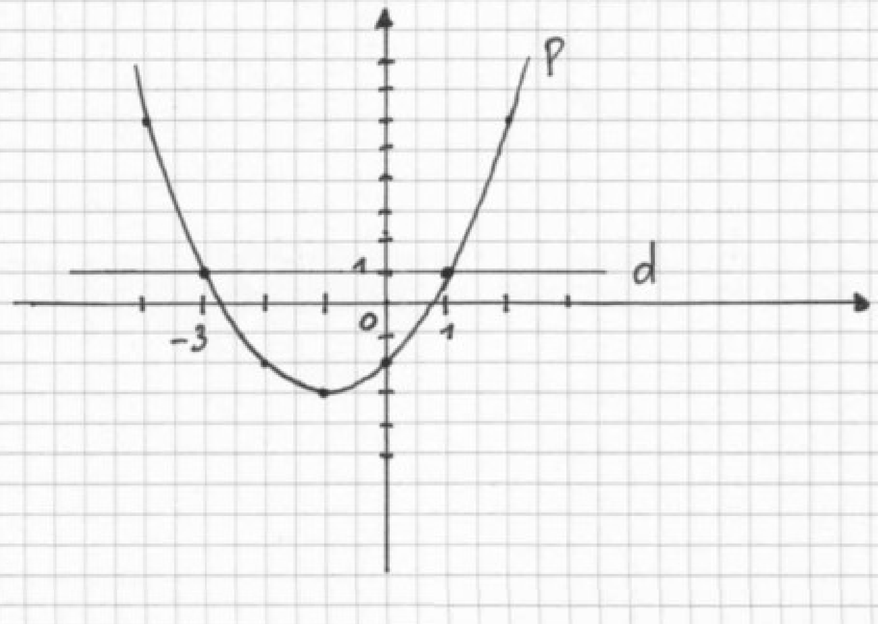
on a $A=1$, $B=2$ et $C=-3$;

$\Delta = B^2-4AC = 2^2-4\cdot1\cdot(-3) = 4+12 = 16$; $\sqrt{\Delta} = 4$;

ainsi $x_1 = \frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+4}{2\cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$ et

$x_2 = \frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-4}{2\cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3$;

ainsi <u>les intersections de p et d sont $(1;1)$ et $(-3;1)$.</u>



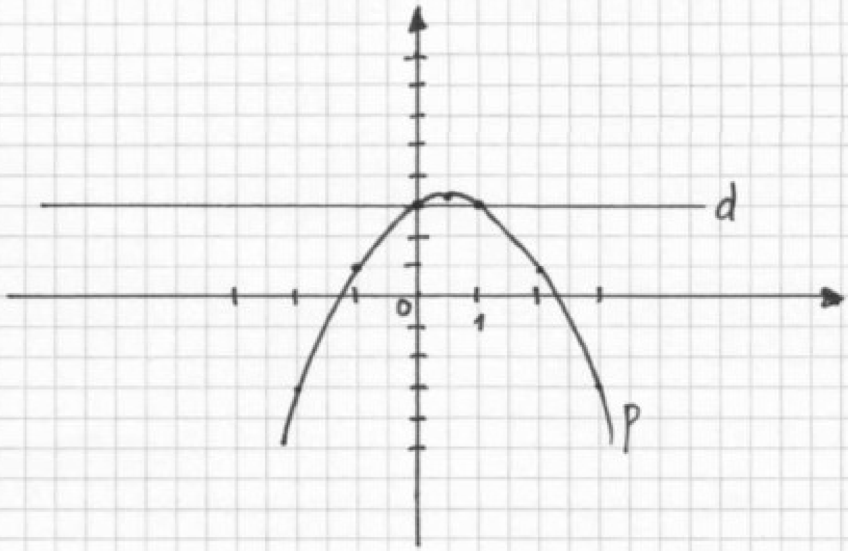
b) $p: y=-x^2+x+3$: on a $a=-1$, $b=1$, $c=3$;

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2\cdot(-1)} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2} \;;$$

$$y_S = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4} \;;$$

le sommet de la parabole est $\left(\frac{1}{2} ; \frac{13}{4}\right)$.

intersection de p et d: $-x^2+x+3 = 3$, i.e. $-x^2+x=0$, i.e. $x(-x+1)=0$;
ainsi soit $x=0$, soit $-x+1=0$, i.e. $x=1$;
ainsi les intersections de p et d sont $(0;3)$ et $(1;3)$.



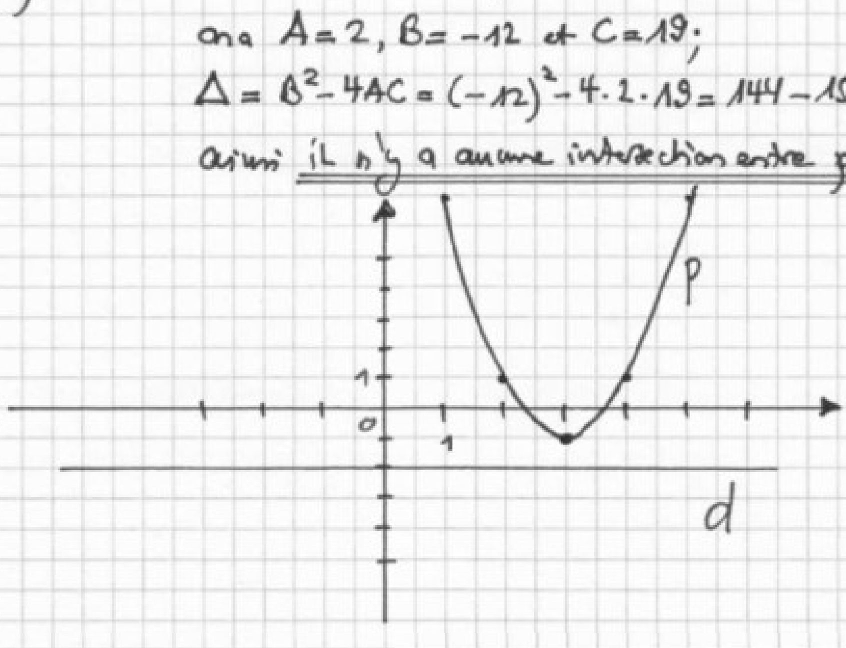
c) $p: y = 2x^2-12x+17$: on a $a=2$, $b=-12$ et $c=17$;

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2\cdot 2} = \frac{12}{4} = 3 \;;$$

$$y_S = 2\cdot 3^2 - 12\cdot 3 + 17 = 18 - 36 + 17 = -1 \;;$$

le sommet de la parabole est donc $(3;-1)$.

intersection de p et d: $2x^2-12x+17=-2$, i.e. $2x^2-12x+19=0$;
on a $A=2$, $B=-12$ et $C=19$;
$\Delta = B^2-4AC = (-12)^2-4\cdot 2\cdot 19 = 144-152 = -8 < 0$;
ainsi il n'y a aucune intersection entre p et d.



Exercice 7

Avec l'équation de la parabole $y = x^2 + bx - 3$, on a $a = 1$, $b = b$ et $c = -3$.
Le sommet de la parabole est donné par $(x_S\,;\,y_S)$:

$x_S = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{b}{2\cdot 1} = -\dfrac{b}{2}$;

$y_S = \left(-\dfrac{b}{2}\right)^2 + b\cdot\left(-\dfrac{b}{2}\right) - 3 = \dfrac{b^2}{4} - \dfrac{b^2}{2} - 3 = -\dfrac{b^2}{4} - 3.$

On doit avoir $y_S = -4$.

Ainsi $-\dfrac{b^2}{4} - 3 = -4$, i.e. $-\dfrac{b^2}{4} = -1$, i.e. $b^2 = 4$, i.e. $\underline{\underline{b = \pm 2}}$.

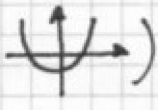
Exercice 8

Pour la parabole $y = x^2 + 4x + c$, on a $a = 1$, $b = 4$ et $c = c$.

a) On a : $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2\cdot 1} = -\frac{4}{2} = -2$ et

$y_S = (-2)^2 + 4\cdot(-2) + c = 4 - 8 + c = -4 + c$.

Ainsi l'ordonnée du minimum est $\underline{\underline{y_S = -4+c}}$.

b) Comme $a > 1$, la parabole est ouverte vers le haut (i.e. de la forme ).

Si $y_S < 0$, la parabole coupe l'axe des abscisses en 2 points.
Si $y_S = 0$, la parabole coupe l'axe des abscisses en 1 seul point.
Si $y_S > 0$, la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.

1. Il faut que $y_S < 0$, i.e. $-4 + c < 0$, i.e. $\underline{\underline{c < 4}}$.
2. Il faut que $y_S = 0$, i.e. $-4 + c = 0$, i.e. $\underline{\underline{c = 4}}$.
3. Il faut que $y_S > 0$, i.e. $-4 + c > 0$, i.e. $\underline{\underline{c > 4}}$.

Exercice 9

La parabole donnée par la forme $y = a(x-m)^2 + p$ a pour sommet $(m;p)$.
Si on connaît le sommet, il suffit de remplacer m et p par les valeurs correspondantes. On calcule a en utilisant un point autre que le sommet de la parabole.

a) Le sommet est $S(2;-3)$; ainsi $m = 2$ et $p = -3$.
L'équation de p_1 est donc $y = a(x-2)^2 - 3$.
p_1 passe par le point $(0;9)$; par substitution, on a :
$9 = a(0-2)^2 - 3$, i.e. $9 = 4a - 3$, i.e. $4a = 12$, i.e. $a = 3$.
Ainsi $p_1 : y = 3(x-2)^2 - 3.$

b) Le sommet est $S(-3;7)$ puisque le sommet appartient à l'axe de symétrie vertical de la parabole ; ainsi $m = -3$ et $p = 7$.
L'équation de p_2 est donc $y = a(x+3)^2 + 7$.
p_2 passe par le point $(-1;-1)$; par substitution, on a :
$-1 = a(-1+3)^2 + 7$; $-1 = 4a + 7$, i.e. $4a = -8$, i.e. $a = -2$.
Ainsi $p_2 : y = -2(x+3)^2 + 7.$

c) La parabole p_3 passe par $A(4;32)$ et $B(-2;32)$.
Comme une parabole est symétrique par rapport à un axe vertical, cet axe passera par le milieu du segment AB, i.e. par le point $(1;32)$. Comme le sommet de p_3 est sur l'axe de symétrie, on a $m = 1$.
L'équation de p_3 s'écrit donc : $y = a(x-1)^2 + p$.
Avec le point $A(4;32)$, on a $32 = a(4-1)^2 + p$, i.e. $32 = 9a + p$.
Avec le point $C(3;12)$, on a $12 = a(3-1)^2 + p$, i.e. $12 = 4a + p$.
Par soustraction de ces 2 relations, on obtient $20 = 5a$, i.e. $a = 4$.
Avec $a = 4$, on a $12 = 4 \cdot 4 + p$, i.e. $12 = 16 + p$, i.e. $p = -4$.

L'équation de p_3 est donc : $y = 4(x-1)^2 - 4.$

Exercice 10

Si la parabole est sous la forme $y=a(x-m)^2+p$, le sommet est $(m;p)$.
Si la parabole est sous la forme $y=ax^2+bx+c$, l'abscisse du sommet est $-\frac{b}{2a}$.

a) $y=(x-3)^2-16$: on a $m=3$ et $p=-16$;
donc le sommet est $(3;-16)$.

intersections avec l'axe x : $(x-3)^2-16=0$, i.e. $(x-3)^2=16$, i.e.
$x-3=4$ ou $x-3=-4$, i.e. $x=7$ ou $x=-1$;
ainsi les intersections sont $(7;0)$ et $(-1;0)$.

b) $y=-3(x-2)^2+75$: on a $m=2$ et $p=75$;
donc le sommet est $(2;75)$.

intersections avec l'axe x : $-3(x-2)^2+75=0$, i.e. $3(x-2)^2=75$, i.e.
$(x-2)^2=25$, i.e. $x-2=5$ ou $x-2=-5$, i.e
$x=7$ ou $x=-3$;
ainsi les intersections sont $(7;0)$ et $(-3;0)$.

c) $y=x^2-16x+39$: on a $a=1$, $b=-16$ et $c=39$;
$x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{-16}{2\cdot 1}=\frac{16}{2}=8$ et
$y_S=8^2-16\cdot 8+39=64-128+39=-25$;
donc le sommet est $(8;-25)$.

intersections avec l'axe x : $x^2-16x+39=0$; $a=1$, $b=-16$ et $c=39$;
$\Delta=b^2-4ac=(-16)^2-4\cdot 1\cdot 39=256-156=100$;
$\sqrt{\Delta}=10$;
ainsi $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{16+10}{2\cdot 1}=\frac{26}{2}=13$ et
$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{16-10}{2\cdot 1}=\frac{6}{2}=3$;
ainsi les intersections sont $(13;0)$ et $(3;0)$.

d) $y=x^2-x+1$: on a $a=1$, $b=-1$ et $c=1$;
$x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{-1}{2\cdot 1}=\frac{1}{2}$ et
$y_S=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$;
donc le sommet est $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$.

intersections avec l'axe x: $x^2 - x + 1 = 0$; $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$;
$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$;
ainsi il n'y a pas d'intersection avec l'axe x.

e) $y = x^2 + bx + c$: on a $a = 1$, $b = b$ et $c = c$;
$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2 \cdot 1} = -\frac{b}{2}$;
$y_s = \left(-\frac{b}{2}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2}\right) + c = \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{2} + c = -\frac{b^2}{4} + c$;
ainsi le sommet est $\left(-\frac{b}{2} ; -\frac{b^2}{4} + c\right)$.

intersections avec l'axe x: $x^2 + bx + c = 0$; $a = 1$, $b = b$ et $c = c$;
$\Delta = b^2 - 4ac = b^2 - 4c$.
Si $\Delta < 0$, i.e si $b^2 - 4c < 0$, il n'y a pas d'intersection avec l'axe x;
Si $\Delta = 0$, i.e si $b^2 - 4c = 0$, il y a une seule intersection, le sommet : $\left(-\frac{b}{2} ; 0\right)$;
Si $\Delta > 0$, i.e. si $b^2 - 4c > 0$, il y a 2 solutions:
$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$ et
$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$;
donc si $b^2 - 4c > 0$, les intersections sont
$\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} ; 0\right)$ et $\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} ; 0\right)$.

f) $y = ax^2 + bx + c$: $x_s = -\frac{b}{2a}$ et $y_s = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c =$
$= a\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = -\frac{b^2}{4a} + c$;
ainsi le sommet est $\left(-\frac{b}{2a} ; -\frac{b^2}{4a} + c\right)$.

intersections avec l'axe x: $ax^2 + bx + c = 0$; $\Delta = b^2 - 4ac$;
Si $\Delta < 0$, i.e si $b^2 - 4ac < 0$, il n'y a pas d'intersection;
Si $\Delta = 0$, i.e. $b^2 - 4ac = 0$, il y a une seule intersection, le sommet : $\left(-\frac{b}{2a} ; 0\right)$;
Si $\Delta > 0$, i.e. si $b^2 - 4ac > 0$, il y a 2 solutions:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

donc si $b^2-4ac>0$, les intersections sont

$$\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a};0\right) \text{ et } \left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a};0\right).$$

Exercice 11

L'équation de la forme $ax^2+bx+c=0$ a les solutions $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, où $\Delta=b^2-4ac$.

Si $\Delta>0$, l'équation a 2 solutions, données par x_1 et x_2 ci-dessus.
Si $\Delta=0$, l'équation a 1 solution, donnée par $x=-\frac{b}{2a}$.
Si $\Delta<0$, l'équation n'a pas de solutions.

a) $x^2+19x+18=0$: on a $a=1, b=19, c=18$;
$\Delta=b^2-4ac=19^2-4.1.18=361-72=289$; $\sqrt{\Delta}=17$;
ainsi $x_1=\frac{-19+17}{2.1}=\frac{-2}{2}=-1$ et
$x_2=\frac{-19-17}{2.1}=\frac{-36}{2}=-18$;
ainsi <u>les solutions sont -18 et -1.</u>

b) $x^2-4x+4=0$: on a $a=1, b=-4, c=4$;
$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4.1.4=16-16=0$;
ainsi $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2.1}=\frac{4}{2}=2$;
ainsi <u>la solution est $x=2$.</u>

c) $15x^2+x-6=0$: on a $a=15, b=1, c=-6$;
$\Delta=b^2-4ac=1^2-4.15.(-6)=1+360=361$; $\sqrt{\Delta}=19$;
ainsi $x_1=\frac{-1+19}{2.15}=\frac{18}{30}=\frac{3}{5}$ et
$x_2=\frac{-1-19}{2.15}=\frac{-20}{30}=-\frac{2}{3}$;
ainsi <u>les solutions sont $-\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{5}$.</u>

d) $x^2+x+5=0$: on a $a=1, b=1, c=5$;
$\Delta=b^2-4ac=1^2-4.1.5=1-20=-19<0$;
ainsi <u>il n'y a pas de solution.</u>

e) $x-\frac{1}{x}=1 \Rightarrow x^2-1=x \Rightarrow x^2-x-1=0$:
on a $a=1, b=-1$ et $c=-1$;
$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4.1.(-1)=1+4=5$; $\sqrt{\Delta}=\sqrt{5}$;
ainsi $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2.1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cong 1{,}618$ et
$x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2.1}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cong -0{,}618$;
ainsi <u>les solutions sont $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cong 1{,}618$ et $x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cong -0{,}618$.</u>

f) $m^2x^2 - 3mx + 2 = 0$: on a $a = m^2$, $b = -3m$, $c = 2$;

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3m)^2 - 4 \cdot m^2 \cdot 2 = 9m^2 - 8m^2 = m^2$;

$\sqrt{\Delta} = m$;

ainsi $x_1 = \frac{3m+m}{2m^2} = \frac{4m}{2m^2} = \frac{2}{m}$ et

$x_2 = \frac{3m-m}{2m^2} = \frac{2m}{2m^2} = \frac{1}{m}$;

ainsi <u>les solutions sont $x_1 = \frac{1}{m}$ et $x_2 = \frac{2}{m}$.</u>

g) $x^2 + 2ux + u^2 - v^2 = 0$: on a $a = 1$, $b = 2u$, $c = u^2 - v^2$;

$\Delta = b^2 - 4ac = (2u)^2 - 4 \cdot 1 (u^2 - v^2) = 4u^2 - 4u^2 + 4v^2 =$

$= 4v^2$; $\sqrt{\Delta} = \sqrt{4v^2} = \sqrt{4}\sqrt{v^2} = 2v$;

ainsi $x_1 = \frac{-2u+2v}{2 \cdot 1} = \frac{-2u+2v}{2} = -u+v$ et

$x_2 = \frac{-2u-2v}{2 \cdot 1} = \frac{-2u-2v}{2} = -u-v$;

ainsi <u>les solutions sont $-u+v$ et $-u-v$.</u>

h) $x^2 - (u+v)x + uv = 0$: on a $a = 1$, $b = -(u+v)$, $c = uv$;

$\Delta = b^2 - 4ac = [-(u+v)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot uv =$

$= (u+v)^2 - 4uv = u^2 + 2uv + v^2 - 4uv =$

$= u^2 - 2uv + v^2 = (u-v)^2$; $\sqrt{\Delta} = u - v$;

ainsi $x_1 = \frac{u+v+u-v}{2 \cdot 1} = \frac{2u}{2} = u$ et

$x_2 = \frac{u+v-(u-v)}{2 \cdot 1} = \frac{u+v-u+v}{2} = \frac{2v}{2} = v$;

ainsi <u>les solutions sont u et v.</u>

i) $ax^2 - (a^2+1)x + a = 0$: on a $a = a$, $b = -(a^2+1)$ et $c = a$;

$\Delta = b^2 - 4ac = [-(a^2+1)]^2 - 4 \cdot a \cdot a =$

$= (a^2+1)^2 - 4a^2 = a^4 + 2a^2 + 1 - 4a^2 =$

$= a^4 - 2a^2 + 1 = (a^2-1)^2$; $\sqrt{\Delta} = a^2 - 1$;

ainsi $x_1 = \frac{a^2+1+a^2-1}{2 \cdot a} = \frac{2a^2}{2a} = a$ et

$x_2 = \frac{a^2+1-(a^2-1)}{2 \cdot a} = \frac{a^2+1-a^2+1}{2a} = \frac{2}{2a} = \frac{1}{a}$;

ainsi <u>les solutions sont a et $\frac{1}{a}$.</u>

Exercice 12

Les points d'intersection de $p: y=\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{3}x+\frac{4}{3}$ et de $d: 4x+3y-10=0$, sont les solutions de ces 2 équations à 2 inconnues.

Par substitution, on a :

$$4x+3\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{3}x+\frac{4}{3}\right)-10=0 \qquad \text{distributivité}$$
$$4x+x^2-5x+4-10=0 \qquad \text{réduction}$$
$$x^2-x-6=0,$$

ce qui est une équation du 2^e degré avec $a=1$, $b=-1$, $c=-6$;

on a $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-6)=1+24=25$ et $\sqrt{\Delta}=5$;

ainsi $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+5}{2\cdot1}=\frac{6}{2}=3$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-5}{2\cdot1}=\frac{-4}{2}=-2$;

avec $x_1=3$, on obtient $y_1=\frac{1}{3}\cdot3^2-\frac{5}{3}\cdot3+\frac{4}{3}=3-5+\frac{4}{3}=-\frac{2}{3}$;

avec $x_2=-2$, on obtient $y_2=\frac{1}{3}(-2)^2-\frac{5}{3}\cdot(-2)+\frac{4}{3}=\frac{4}{3}+\frac{10}{3}+\frac{4}{3}=\frac{18}{3}=6$.

Les intersections sont donc $\left(3;-\frac{2}{3}\right)$ et $(-2;6)$.

Exercice 13

Les points d'intersection de $p_1: y = \frac{1}{2}(x^2+x)$ et $p_2: y = x^2-3$, sont les solutions de ces 2 équations à 2 inconnues.

On doit avoir : $\frac{1}{2}(x^2+x) = x^2-3 \quad | \cdot 2$

$x^2+x = 2x^2-6 \quad | -x^2-x$

$0 = x^2-x-6$,

ce qui est une équation du 2e degré avec $a=1$, $b=-1$ et $c=-6$;

on a $\Delta = b^2-4ac = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-6) = 1+24 = 25$ et $\sqrt{\Delta} = 5$;

ainsi $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+5}{2\cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-5}{2\cdot 1} = \frac{-4}{2} = -2$;

avec $x_1 = 3$, on obtient $y_1 = 3^2-3 = 9-3 = 6$;

avec $x_2 = -2$, on obtient $y_2 = (-2)^2-3 = 4-3 = 1$.

Les intersections sont donc : $(3;6)$ et $(-2;1)$.

Exercice 14

L'équation $ax^2+bx+c=0$ a 2 solutions confondues et, donc, une unique solution, si $\Delta = b^2-4ac=0$.

L'équation $x^2+mx+m-0{,}75=0$ donne $a=1$, $b=m$, $c=m-0{,}75$.

On a $\Delta = b^2-4ac = m^2-4\cdot1\cdot(m-0{,}75) = m^2-4m+3$.

On doit donc résoudre $m^2-4m+3=0$. Ici $A=1$, $B=-4$ et $C=3$.

On a $\Delta = B^2-4AC = (-4)^2-4\cdot1\cdot3 = 16-12 = 4$ et $\sqrt{\Delta}=2$.

Ainsi $m_1 = \dfrac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A} = \dfrac{4+2}{2\cdot1} = \dfrac{6}{2} = 3$ et $m_2 = \dfrac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A} = \dfrac{4-2}{2\cdot1} = \dfrac{2}{2} = 1$.

Les valeurs de m sont donc : $m=3$ et $m=1$.

Exercice 15

a) $3x+2 < -x+4$ | $+x$

$4x+2 < 4$ | -2

$4x < 2$ | $:4$

$\underline{\underline{x < \frac{1}{2}}}$

b) $-2x+2 > x-5$ | $-x$

$-3x+2 > -5$ | -2

$-3x > -7$ | $:(-3)$ ⚠ division par un nombre négatif ⟹ changement de sens de l'inégalité

$\underline{\underline{x < \frac{7}{3}}}$

c) $x-5 < 4x-9$ | $-4x$

$-3x-5 < -9$ | $+5$

$-3x < -4$ | $:(-3)$ ⚠

$\underline{\underline{x > \frac{4}{3}}}$

d) $x-1 > 3x-1$ | $-3x$

$-2x-1 > -1$ | $+1$

$-2x > 0$ | $:(-2)$ ⚠

$\underline{\underline{x < 0}}$

Exercice 16

Pour résoudre une inéquation quadratique, on commence par résoudre l'équation où le signe > ou < de l'inéquation est remplacé par le signe =, puis on fait un tableau de signes pour répondre à la question.

a) $x^2-8x+15<0$: $x^2-8x+15=0$: $a=1, b=-8, c=15$;

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\cdot1\cdot15=64-60=4$;

$\sqrt{\Delta}=2$;

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8+2}{2\cdot1}=\frac{10}{2}=5$ et

$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8-2}{2\cdot1}=\frac{6}{2}=3$.

tableau de signes:

x		3		5	
$x^2-8x+15$	+	0	−	0	+

$\Rightarrow$ les solutions sont l'intervalle $]3;5[$.

b) $5x^2-4x>0$: $5x^2-4x=0 \Rightarrow x(5x-4)=0 \Rightarrow$ soit $x=0$,

soit $5x-4=0$, i.e. $5x=4$, i.e. $x=\frac{4}{5}$.

tableau de signes:

x		0		$\frac{4}{5}$	
$5x^2-4x$	+	0	−	0	+

$\Rightarrow$ les solutions sont $]-\infty;0[\,\cup\,]\frac{4}{5};+\infty[$.

c) $x^2>4$: $x^2=4 \Rightarrow x=\pm2$.

tableau de signes:

x		−2		2	
x^2-4	+	0	−	0	+

$\Rightarrow$ les solutions sont $]-\infty;-2[\,\cup\,]2;+\infty[$.

d) $x^2-12x+20<0$: $x^2-12x+20=0$: $a=1, b=-12, c=20$;

$\Delta=b^2-4ac=(-12)^2-4\cdot1\cdot20=$

$=144-80=64$; $\sqrt{\Delta}=8$;

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12+8}{2.1} = \frac{20}{2} = 10 \text{ et}$$
$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12-8}{2.1} = \frac{4}{2} = 2.$$

tableau de signes :

x		2		10	
$x^2-12x+20$	+	0	−	0	+

$\Rightarrow$ les solutions sont l'intervalle $]2;10[$.

e) $-x^2-4x+60>0$: $-x^2-4x+60=0$: $a=-1$, $b=-4$, $c=60$;
$\Delta = b^2-4ac = (-4)^2-4\cdot(-1)\cdot 60 =$
$= 16+240 = 256$; $\sqrt{\Delta} = 16$;
$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+16}{2\cdot(-1)} = \frac{20}{-2} = -10 \text{ et}$$
$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-16}{2\cdot(-1)} = \frac{-12}{-2} = 6.$$

tableau de signes :

x		−10		6	
$-x^2-4x+60$	−	0	+	0	−

$\Rightarrow$ les solutions sont l'intervalle $]-10;6[$.

f) $-x^2+3x-4<0$: $-x^2+3x-4=0$: $a=-1$, $b=3$, $c=-4$;
$\Delta = b^2-4ac = 3^2-4\cdot(-1)\cdot(-4) =$
$= 9-16 = -7 < 0$
$\Rightarrow$ pas de solution.

tableau de signes :

x	
$-x^2+3x-4$	−

$\Rightarrow$ les solutions sont $\mathbb{R}$ entier.

g) $x^2+x+1<0$: $x^2+x+1=0$: $a=1$, $b=1$, $c=1$;
$\Delta = b^2-4ac = 1^2-4.1.1 = 1-4 = -3 < 0$
$\Rightarrow$ pas de solution.

tableau de signes :

x	
x^2+x+1	$+$

$\Rightarrow$ il n'y a aucune solution.

h) $-x^2+10x-21 > 0$: $-x^2+10x-21=0$: $a=-1$, $b=10$, $c=-21$;

$\Delta = b^2-4ac = 10^2-4\cdot(-1)\cdot(-21) =$
$= 100-84 = 16$, $\sqrt{\Delta}=4$;

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-10+4}{2\cdot(-1)} = \dfrac{-6}{-2} = 3$ et

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-10-4}{2\cdot(-1)} = \dfrac{-14}{-2} = 7$.

tableau de signe :

x		3		7	
$-x^2+10x-21$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\Rightarrow$ les solutions sont l'intervalle $]3;7[$.

i) $x^2-2 > x \Rightarrow x^2-x-2>0$: $x^2-x-2=0$: $a=1$, $b=-1$, $c=-2$;

$\Delta = b^2-4ac = (-1)^2-4\cdot1\cdot(-2) =$
$= 1+8 = 9$; $\sqrt{\Delta} = 3$;

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1+3}{2\cdot1} = \dfrac{4}{2} = 2$ et

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1-3}{2\cdot1} = \dfrac{-2}{2} = -1$.

tableau de signes

x		-1		2	
x^2-x-2	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow$ les solutions sont $]-\infty;-1[\,\cup\,]2;+\infty[$.

Exercice 17

Pour qu'une équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ admette deux solutions distinctes, il faut que $\Delta = b^2-4ac > 0$.

Ici $a = p-2$, $b = 5p-1$ et $c = 14p+7$.

On a : $\Delta = b^2-4ac = (5p-1)^2 - 4(p-2)(14p+7) =$

$$= 25p^2 - 10p + 1 - 4(14p^2 + 7p - 28p - 14) =$$

$$= 25p^2 - 10p + 1 - 4(14p^2 - 21p - 14) =$$

$$= 25p^2 - 10p + 1 - 56p^2 + 84p + 56 =$$

$$= -31p^2 + 74p + 57.$$

Ainsi $\Delta > 0$ si $-31p^2 + 74p + 57 > 0$.

Cherchons tout d'abord les p tels que $-31p^2 + 74p + 57 = 0$.

C'est une équation du 2e degré où $A = -31$, $B = 74$ et $C = 57$.

On a : $\Delta = B^2 - 4AC = 74^2 - 4\cdot(-31)\cdot 57 = 5476 + 7068 = 12544$.

Ainsi $\sqrt{\Delta} = 112$.

On a donc les solutions : $p_1 = \dfrac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A} = \dfrac{-74+112}{2\cdot(-31)} = \dfrac{38}{-62} = -\dfrac{19}{31}$ et

$$p_2 = \frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{-74-112}{2\cdot(-31)} = \frac{-186}{-62} = 3.$$

Faisons maintenant un tableau de signes pour la parabole $-31p^2+74p+57$:

p		$-\frac{19}{31}$		3	
$-31p^2+74p+57$	$-$	0	$+$	0	$-$

Ainsi $-31p^2 + 74p + 57 > 0$ si $p \in \left]-\frac{19}{31} ; 3\right[$.

Donc, pour que l'équation de départ ait 2 solutions distinctes, il faut que $p \in \left]-\frac{19}{31} ; 3\right[$.

Exercice 18

Une équation du 2^e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ n'admet aucune solution réelle si $\Delta = b^2-4ac < 0$.

Ici $a = m-3$, $b = -2(3m-2)$ et $c = 7m$.

On a : $\Delta = b^2-4ac = [-2(3m-2)]^2 - 4\cdot(m-3)\cdot 7m =$

$= 4(3m-2)^2 - 28m(m-3) =$

$= 4(9m^2-12m+4) - 28m^2 + 84m =$

$= 36m^2 - 48m + 16 - 28m^2 + 84m =$

$= 8m^2 - 36m + 16.$

Ainsi $\Delta < 0$ si $8m^2-36m+16 < 0$.

Cherchons les m pour lesquels on a $8m^2-36m+16=0$.

On a : $A = 8$, $B = -36$ et $C = 16$.

$\Delta = B^2 - 4AC = (-36)^2 - 4\cdot 8\cdot 16 = 1296 - 512 = 784$ et $\sqrt{\Delta} = 28$.

Les solutions sont donc :

$$m_1 = \frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{36+28}{2\cdot 8} = \frac{64}{16} = 4 \quad \text{et} \quad m_2 = \frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{36-28}{2\cdot 8} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}.$$

Faisons maintenant un tableau de signe pour la parabole $8m^2-36m+16$:

x		$\frac{1}{2}$		4	
$8m^2-36m+16$	$+$	0	$-$	0	$+$

Ainsi $8m^2-36m+16 < 0$ si $m \in \left]\frac{1}{2}; 4\right[$.

L'équation de départ n'admet donc aucune solution réelle si $m \in \left]\frac{1}{2}; 4\right[$.

Exercice 19

Pour résoudre une équation de la forme $ax^4+bx^2+c=0$, on pose $y=x^2$ et on résoud $ay^2+by+c=0$. Avec les solutions obtenues, on trouve alors les valeurs de x qui sont $\pm\sqrt{y}$.

a) $x^4-13x^2+36=0$: on pose $y=x^2$ et on résoud $y^2-13y+36=0$:

on a $a=1$, $b=-13$ et $c=36$;

$\Delta=b^2-4ac=(-13)^2-4\cdot1\cdot36=169-144=25$;

$\sqrt{\Delta}=5$; ainsi :

$$y_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{13+5}{2\cdot1}=\frac{18}{2}=9 \text{ et}$$

$$y_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{13-5}{2\cdot1}=\frac{8}{2}=4;$$

avec $y_1=9$, on obtient $x=\pm\sqrt{9}=\pm3$;

avec $y_2=4$, on obtient $x=\pm\sqrt{4}=\pm2$.

$\Rightarrow$ les solutions sont donc $x=2$, $x=-2$, $x=3$ et $x=-3$.

b) $36x^4-13x^2+1=0$: on pose $y=x^2$ et on résoud $36y^2-13y+1=0$:

on a $a=36$, $b=-13$ et $c=1$;

$\Delta=b^2-4ac=(-13)^2-4\cdot36\cdot1=169-144=25$;

$\sqrt{\Delta}=5$; ainsi :

$$y_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{13+5}{2\cdot36}=\frac{18}{72}=\frac{1}{4} \text{ et}$$

$$y_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{13-5}{2\cdot36}=\frac{8}{72}=\frac{1}{9};$$

avec $y_1=\frac{1}{4}$, on obtient $x=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2}$;

avec $y_2=\frac{1}{9}$, on obtient $x=\pm\sqrt{\frac{1}{9}}=\pm\frac{1}{3}$.

$\Rightarrow$ les solutions sont donc $x=\frac{1}{2}$, $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{3}$ et $x=-\frac{1}{3}$.

c) $x^4-14x^2-32=0$: on pose $y=x^2$ et on résoud $y^2-14y-32=0$:

on a $a=1$, $b=-14$ et $c=-32$;

$\Delta=b^2-4ac=(-14)^2-4\cdot1\cdot(-32)=196+128=$

$=324$; $\sqrt{\Delta}=18$; ainsi :

$y_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{14+18}{2 \cdot 1} = \dfrac{32}{2} = 16$ et

$y_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{14-18}{2 \cdot 1} = \dfrac{-4}{2} = -2$;

avec $y_1 = 16$, on obtient $x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$;

avec $y_2 = -2$, on obtient $x = \pm\sqrt{-2}$, ce qui n'existe pas.

$\Longrightarrow$ les solutions sont donc $x = 4$ et $x = -4$.

d) $6x^4 + 7x^2 + 2 = 0$: on pose $y = x^2$ et on résoud : $6y^2 + 7y + 2 = 0$:

on a $a = 6$, $b = 7$ et $c = 2$;

$\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = 49 - 48 = 1$; $\sqrt{\Delta} = 1$; ainsi:

$y_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-7+1}{2 \cdot 6} = \dfrac{-6}{12} = -\dfrac{1}{2}$ et

$y_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-7-1}{2 \cdot 6} = \dfrac{-8}{12} = -\dfrac{2}{3}$;

Comme $y_1 < 0$ et $y_2 < 0$, il n'existe pas de x tel que $x^2 = y_1$ ou $x^2 = y_2$.

$\Longrightarrow$ l'équation n'a aucune solution.

e) $x^4 + x^2 + 1 = 0$: on pose $y = x^2$ et on résoud: $y^2 + y + 1 = 0$:

on a $a = 1$, $b = 1$ et $c = 1$;

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$;

ainsi $y^2 + y + 1 = 0$ n'a aucune solution; c'est la même chose pour $x^4 + x^2 + 1 = 0$.

$\Longrightarrow$ l'équation n'a aucune solution.

f) $9x^4 = 0 \Longrightarrow x^4 = 0 \Longrightarrow x = 0$.

$\Longrightarrow$ la solution est $x = 0$.

g) $x^4 - 81 = 0 \Longrightarrow x^4 = 81 \Longrightarrow (x^2)^2 = 81 \Longrightarrow$ on a 2 possibilités:

1) $x^2 = 9 \Longrightarrow x = \pm 3$;

2) $x^2 = -9 \Longrightarrow$ pas de solution.

$\Longrightarrow$ les solutions sont $x = 3$ et $x = -3$.

h) $x^2 \cdot (x^2 - 9) = 0$: un produit est nul si au moins un des facteurs est nul;

ainsi : soit $x^2 = 0$, i.e. $x = 0$;

soit $x^2 - 9 = 0$, i.e. $x^2 = 9$, i.e. $x = \pm 3$.

$\Rightarrow$ les solutions sont $x=0$, $x=3$ et $x=-3$.

i) $x^4-16x^2=0 \Rightarrow x^2(x^2-16)=0 \Rightarrow$

soit $x^2=0 \Rightarrow x=0$;

soit $x^2-16=0 \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x^2=\pm 4$.

$\Rightarrow$ les solutions sont $x=0$, $x=4$ et $x=-4$.

j) $3x^4-13x^3-10x^2=0 \Rightarrow x^2(3x^2-13x-10)=0 \Rightarrow$

soit $x^2=0 \Rightarrow x=0$;

soit $3x^2-13x-10=0$: $a=3$, $b=-13$ et $c=-10$;

$\Delta=b^2-4ac=(-13)^2-4.3.(-10)=169+120$

$=289$; $\sqrt{\Delta}=17$; ainsi :

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{13+17}{2.3}=\frac{30}{6}=5$ et

$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{13-17}{2.3}=\frac{-4}{6}=-\frac{2}{3}$.

$\Rightarrow$ les solutions sont donc $x=0$, $x=5$ et $x=-\frac{2}{3}$.

k) $x^4-6x^3+8x^2=0 \Rightarrow x^2(x^2-6x+8)=0 \Rightarrow$

soit $x^2=0 \Rightarrow x=0$;

soit $x^2-6x+8=0$: $a=1$, $b=-6$ et $c=8$;

$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4.1.8=36-32=4$; $\sqrt{\Delta}=2$;

ainsi $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{6+2}{2.1}=\frac{8}{2}=4$ et

$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{6-2}{2.1}=\frac{4}{2}=2$.

$\Rightarrow$ les solutions sont donc $x=0$, $x=2$ et $x=4$.

l) $x^3-13x^2+36x=0 \Rightarrow x(x^2-13x+36)=0 \Rightarrow$

soit $x=0$;

soit $x^2-13x+36=0$: $a=1$, $b=-13$ et $c=36$;

$\Delta=b^2-4ac=(-13)^2-4.1.36=169-144=25$; $\sqrt{\Delta}=5$;

ainsi $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{13+5}{2.1}=\frac{18}{2}=9$ et

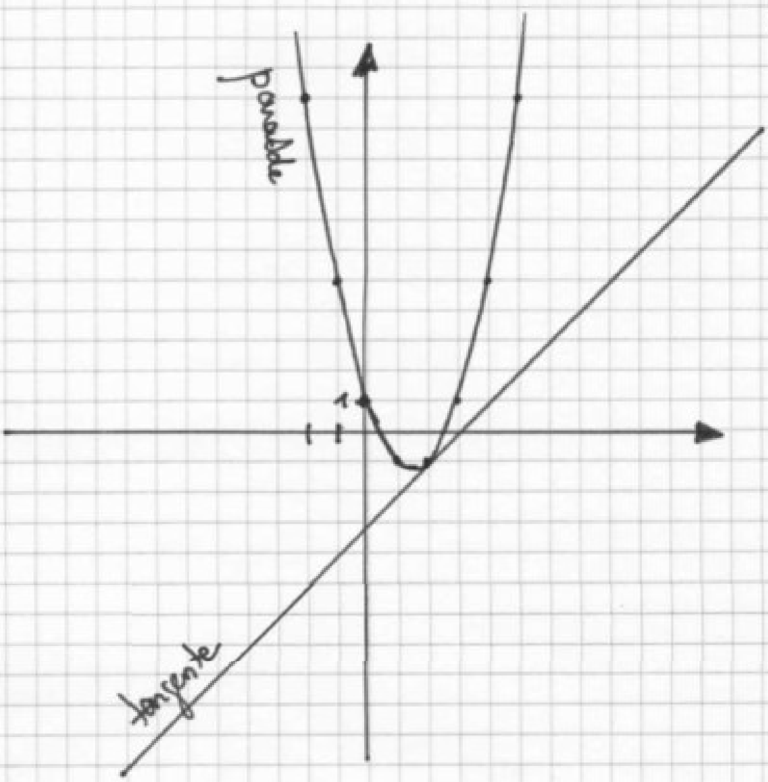
$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{13-5}{2.1}=\frac{8}{2}=4$.

$\Rightarrow$ les solutions sont $x=0$, $x=9$ et $x=4$.

Exercice 20

a)

x	y
−3	19
−2	11
−1	5
0	1
1	−1
2	−1
3	1
4	5
5	11
6	19



b) Pour que la droite soit tangente à la parabole, il faut qu'elles aient exactement une intersection.
Autrement dit, l'équation $x^2 - 3x + 1 = x + b$ doit avoir exactement une solution; donc $x^2 - 4x + 1 - b = 0$ doit avoir exactement une solution. Il faut donc que le discriminant Δ soit nul.
On a: $A = 1$, $B = -4$ et $C = 1 - b$

$$\Delta = B^2 - 4AC = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 - b) = 16 - 4 + 4b = 12 + 4b.$$

On doit avoir $\Delta = 0$, i.e. $12 + 4b = 0$, i.e. $4b = -12$, i.e. $\underline{b = -3}$.

c) Avec $b = -3$, $A = 1$, $B = -4$ et $C = 1 - (-3) = 1 + 3 = 4$.
La solution de $x^2 - 4x + 1 - b = 0$ est donc $x = -\frac{B}{2A} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$.

On a alors $y = x + b = 2 - 3 = -1$.
<u>Le point de tangence est donc $(2; -1)$.</u>
(voir ci-dessous pour la vérification graphique).

Exercice 21

Commençons par chercher les coordonnées des points A et B, intersections de p_1 et p_2.

Les premières coordonnées de A et B doivent satisfaire l'équation:

$x^2-6x+5=-x^2+10x-19$, i.e. l'équation:

$2x^2-16x+24=0$, i.e. l'équation:

$x^2-8x+12=0$ (par division par 2).

C'est une équation du 2^e degré avec $a=1$, $b=-8$ et $c=12$.

On a: $\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\cdot1\cdot12=64-48=16$; $\sqrt{\Delta}=4$.

Ainsi $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8+4}{2\cdot1}=\frac{12}{2}=6$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8-4}{2\cdot1}=\frac{4}{2}=2$.

Avec $x_1=6$, on a $y_1=6^2-6\cdot6+5=5$.

Avec $x_2=2$, on a $y_2=2^2-6\cdot2+5=-3$.

Les points d'intersection sont donc $A(2;-3)$ et $B(6;5)$.

Cherchons maintenant l'équation de la droite AB.

Elle est de la forme $y=ax+b$, où a est la pente.

On a $a=\frac{5-(-3)}{6-2}=\frac{8}{4}=2$.

La droite AB est donc $y=2x+b$.

Comme A appartient à cette droite, par substitution, on doit avoir:

$-3=2\cdot2+b$, i.e. $-3=4+b$, i.e. $b=-7$.

L'équation de la droite AB est donc $y=2x-7$.

Une droite parallèle à la droite AB sera de la forme $y=2x+b$ (la pente est la même).

Pour trouver le point de tangence entre une droite parallèle à la droite AB et la parabole p_1 (ou p_2), on va chercher b tel que la droite parallèle et p_1 (ou p_2) n'ait qu'un seul point d'intersection, puis en déduire les coordonnées du point d'intersection.

L'intersection de la droite $y=2x+b$ et p_1 correspond à:

$2x+b=x^2-6x+5$, i.e. $x^2-8x+5-b=0$.

Cette équation doit avoir une unique solution, i.e. $\Delta=0$.

On a: $A=1$, $B=-8$ et $C=5-b$; $\Delta=B^2-4AC=(-8)^2-4\cdot1\cdot(5-b)=$

$= 64 - 20 + 4b = 44 + 4b.$

$\Delta = 0$ donne $44 + 4b = 0$, i.e. $4b = -44$, i.e. $b = -11$.

Avec $b = -11$, la solution de $x^2 - 8x + 5 - b = 0$ est

$$x = \frac{-B}{2A} = \frac{8}{2.1} = \frac{8}{2} = 4.$$

Avec $x = 4$, on trouve $y = 2x + b = 2.4 - 11 = 8 - 11 = -3$

$\Longrightarrow$ le point de tangence avec p_1 est $(4; -3)$.

L'intersection de la droite $y = 2x + b$ et p_2 correspond à :

$$2x + b = -x^2 + 10x - 19, \text{ i.e. } x^2 - 8x + b + 19 = 0.$$

Cette équation doit avoir une unique solution, i.e. $\Delta = 0$.

On a : $A = 1$, $B = -8$ et $C = b + 19$; $\Delta = B^2 - 4AC = (-8)^2 - 4.1(b+19) =$
$= 64 - 4b - 76 = -4b - 12.$

$\Delta = 0$ donne $-4b - 12 = 0$, i.e. $4b = -12$, i.e. $b = -3$.

Avec $b = 3$, la solution de $x^2 - 8x + b + 19 = 0$ est

$$x = \frac{-B}{2A} = \frac{8}{2.1} = 4.$$

Avec $x = 4$, on trouve $y = 2x + b = 2.4 - 3 = 8 - 3 = 5$.

$\Longrightarrow$ le point de tangence avec p_2 est $(4; 5)$.