Corrigé

Problème 1

On utilise la formule $C_f = C_i \cdot (1+t)^n$, où C_f est le nombre final, C_i le nombre de départ, t le taux sur une période et n le nombre de période.

a) 6 premiers mois : $C_f = ?$, $C_i = 134'251$, $t = 3{,}2\% = 0{,}032$, $n = 6$

$\Longrightarrow C_f = C_i \cdot (1+t)^n = 134'251 \cdot (1+0{,}032)^6 \cong 162'179$.

12 mois suivants : $C_f = ?$, $C_i \cong 162'179$, $t = 2{,}8\% = 0{,}028$, $n = 12$

$\Longrightarrow C_f = C_i \cdot (1+t)^n \cong 162'179 \cdot (1+0{,}028)^{12} \cong 225'898$.

Il y a donc 225'898 chômeurs après un an et demi.

b) $C_f \cong 225'898$, $C_i = 134'251$, $t = ?$, $n = 18$

$\Longrightarrow 225'898 \cong 134'251\,(1+t)^{18} \Longrightarrow (1+t)^{18} \cong 1{,}683 \Longrightarrow 1+t \cong 1{,}0293$

$\Longrightarrow t \cong 0{,}0293 = 2{,}93\%$.

Le taux moyen de croissance a été de $\sim 2{,}93\%$.

c) Après les 18 premiers mois, on a $C_i \cong 225'898$.

On a : $C_f = 300'000$, $C_i \cong 225'898$, $t = 2{,}8\% = 0{,}028$, $n = ?$

$\Longrightarrow 300'000 \cong 225'898\,(1+0{,}028)^n \Longrightarrow 1{,}028^n \cong 1{,}328$

$\Longrightarrow \log(1{,}028^n) \cong \log(1{,}328) \Longrightarrow n \log(1{,}028) \cong \log(1{,}328)$

$\Longrightarrow n \cong \dfrac{\log(1{,}328)}{\log(1{,}028)} \cong 10{,}27 \Longrightarrow n = 11$ (après les 18 premiers mois).

Le seuil de 300'000 sera donc dépassé après $11 + 18 = 29$ mois $=$ 2 ans et 5 mois.

Problème 2

On va utilisé la formule $C_f = C_i \cdot (1+i)^n$, où C_f est le nombre final, C_i est le nombre initial, i est le taux pour une période et n le nombre de période.

On peut donc écrire:

- pour le chiffre d'affaires: $C(t) = C(0)(1+i)^t$
- pour le budget publicitaire: $P(t) = P(0)(1+j)^t$

a) Pour le chiffre d'affaires: $C(12) = 156{,}67$, $C(0) = 76{,}5$, $i = ?$, $t = 12$

$\Rightarrow 156{,}67 = 76{,}5 \cdot (1+i)^{12} \Rightarrow (1+i)^{12} \cong 2{,}048$

$\Rightarrow 1+i \cong 1{,}0616 \Rightarrow i \cong 0{,}0616 = 6{,}16\%$

$\Rightarrow$ le taux annuel de croissance du chiffre d'affaires est de $\sim 6{,}16\%$.

Pour le budget publicitaire: $P(12) = 4{,}16$, $P(0) = 2{,}68$, $j = ?$, $t = 12$

$\Rightarrow 4{,}16 = 2{,}68 \cdot (1+j)^{12} \Rightarrow (1+j)^{12} \cong 1{,}552$

$\Rightarrow 1+j \cong 1{,}0373 \Rightarrow j \cong 0{,}0373 = 3{,}73\%$

$\Rightarrow$ le taux annuel de croissance du budget publicitaire est de $\sim 3{,}73\%$.

b) Pour le chiffre d'affaires: $C(15) = ?$, $C(0) = 76{,}5$, $i \cong 6{,}16\%$, $t = 15$

$\Rightarrow C(15) \cong 76{,}5 \cdot (1+0{,}0616)^{15} \cong 187{,}42$

$\Rightarrow$ le chiffre d'affaires sera de $\sim 187{,}42$ millions de francs.

Pour le budget publicitaire: $P(15) = ?$, $P(0) = 2{,}68$, $j \cong 3{,}73\%$, $t = 15$

$\Rightarrow P(15) \cong 2{,}68 \cdot (1+0{,}0373)^{15} \cong 4{,}64$

$\Rightarrow$ le budget publicitaire sera de $\sim 4{,}64$ millions de francs.

c) Avec $R(t) = \frac{C(t)}{P(t)}$, on a $R(0) = \frac{C(0)}{P(0)} = \frac{76{,}5}{2{,}68} \cong 28{,}54$. Cela signifie que pour un franc investi dans la publicité, on obtient 28,54 frs de chiffre d'affaires.

d) On veut $R(t) = 50 \Rightarrow \frac{C(t)}{P(t)} = 50 \Rightarrow \frac{C(0)(1+i)^t}{P(0)(1+j)^t} = 50$

$\Rightarrow \frac{76{,}5 \cdot (1+0{,}0616)^t}{2{,}68 \cdot (1+0{,}0373)^t} = 50 \Rightarrow \frac{(1+0{,}0616)^t}{(1+0{,}0373)^t} = \frac{50 \cdot 2{,}68}{76{,}5}$

$\Rightarrow \left(\frac{1+0{,}0616}{1+0{,}0373}\right)^t \cong 1{,}752 \Rightarrow 1{,}0234^t \cong 1{,}752$

$\Rightarrow \log(1{,}0234^t) \cong \log(1{,}752) \Rightarrow t \log(1{,}0234) \cong \log(1{,}752)$

$\Rightarrow t \cong \frac{\log(1{,}752)}{\log(1{,}0234)} \cong 24{,}27 \Rightarrow t = 25$.

Ce sera donc à partir de 2025 que $R(t) \geqslant 50$.

Problème 3

On a $N(t) = \frac{11}{1+17\cdot 2{,}6^{-0{,}22t}}$ avec t en semaines et $N(t)$ en milliers.

a) $N(7) = \frac{11}{1+17\cdot 2{,}6^{-0{,}22\cdot 7}} \cong 3{,}667 \Rightarrow$ il y aura ~ 3667 inscriptions.

b) On veut 5500 Sénévoles $\Rightarrow N(t) = 5{,}5 \Rightarrow \frac{11}{1+17\cdot 2{,}6^{-0{,}22t}} = 5{,}5$

$\Rightarrow 5{,}5\left(1+17\cdot 2{,}6^{-0{,}22t}\right) = 11 \Rightarrow 1+17\cdot 2{,}6e^{-0{,}22t} = 2$

$\Rightarrow 17\cdot 2{,}6^{-0{,}22t} = 1 \Rightarrow 2{,}6^{-0{,}22t} = \frac{1}{17}$

$\Rightarrow \log\left(2{,}6^{-0{,}22t}\right) = \log\left(\frac{1}{17}\right) \Rightarrow -0{,}22t\log(2{,}6) = \log\left(\frac{1}{17}\right)$

$\Rightarrow t = -\frac{\log(1/17)}{-0{,}22\cdot\log(2{,}6)} \cong 9{,}266 \Rightarrow t = 10.$

Ce sera donc après 10 semaines qu'il y aura 5500 Sénévoles au plus.

c) On veut savoir combien vaudra $N(t)$ si t devient très grand, autrement dit t tend vers l'infini.
Avec $t \to +\infty$, on a $2{,}6^{-0{,}22t} \to 0$ (il suffit de prendre $t = 1000$ pour obtenir $2{,}6e^{-0{,}22t} = 0$ à la calculatrice).
Ainsi, si $t \to +\infty$, $N(t) \to \frac{11}{1+17\cdot 0} = \frac{11}{1} = 11.$

A long terme, il y aura donc 11'000 Sénévoles annoncés.

Exercice 4

a) p est la pente de la droite et on a $p = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1096,5 - 293,25}{5420 - 1850} = 0,225$.

On a ainsi $y = 0,225x + h$.

Avec $x = 5420$ et $y = 1096,5$, on a : $1096,5 = 0,225 \cdot 5420 + h$

$\Rightarrow 1096,5 = 1219,5 + h \Rightarrow h = -123$.

Ainsi, $p = 0,225$ et $h = -123$ et on a $y = 0,225x - 123$.

b) Si les ventes sont de 4 millions de francs, on a $x = 4000$.

Ainsi $y = 0,225 \cdot 4000 - 123 = 777$.

Le bénéfice sera donc de 777'000.-

c) Si le bénéfice est de 664'500.-, on a $y = 664,5$.

Ainsi $664,5 = 0,225x - 123 \Rightarrow 0,225x = 787,5 \Rightarrow x = 3500$.

Le volume des ventes sera donc de 3'500'000.-.

Problème 5

On a : prix unitaire $= p$,

nombre d'articles vendus $= n = 12'500 - 2000p$,

revenus $= R = n \cdot p = (12'500 - 2000p) \cdot p = 12'500p - 2000p^2$,

frais de production $= F = 3400 + 0,8n = 3400 + 0,8(12'500 - 2000p) =$

$= 3400 + 10'000 - 1600p = 13'400 - 1600p$,

bénéfice $= B = R - F = 12'500p - 2000p^2 - (13'400 - 1600p) =$

$= -2000p^2 + 14'100p - 13'400$.

a) Les seuils de rentabilité correspondent au bénéfice nul.

$B = 0 \Longrightarrow -2000p^2 + 14'100p - 13'400 = 0 \Longrightarrow 20p^2 - 141p + 134 = 0$

$$\Longrightarrow p = \frac{141 \pm \sqrt{141^2 - 4 \cdot 20 \cdot 134}}{2 \cdot 20} = \frac{141 \pm \sqrt{9161}}{40} \cong \frac{141 \pm 95,713}{40} \cong$$

$$\cong \begin{cases} 5,92 \\ 1,13. \end{cases}$$

Les prix unitaires pour les seuils de rentabilité sont donc :

- seuil de rentabilité inférieur : $p \cong 1,13$;
- seuil de rentabilité supérieur : $p \cong 5,92$.

b) Le bénéfice est $B = -2000p^2 + 14'100p - 13'400$. C'est une parabole.

On sait que pour une parabole de la forme $y = ax^2 + bx + c$, le x correspondant au sommet est donné par $x_s = -\frac{b}{2a}$.

Ici $a = -2000$ et $b = 14'1000$. Ainsi $p_s = -\frac{14'100}{2 \cdot (-2000)} \cong 3,53$.

Avec $p_s \cong 3,53$, on a $n_s = 12'500 - 2000p_s \cong 12'500 - 2000 \cdot 3,53 = 5450$ et

$B \cong -2000 \cdot 3,53^2 + 14'100 \cdot 3,53 - 13'400 = 11'451,25$.

Ainsi le bénéfice maximal sera lorsque le prix unitaire est de $\sim 3,53$, le nombre d'articles vendus est de 5450. Le bénéfice est alors de 11'451,25.