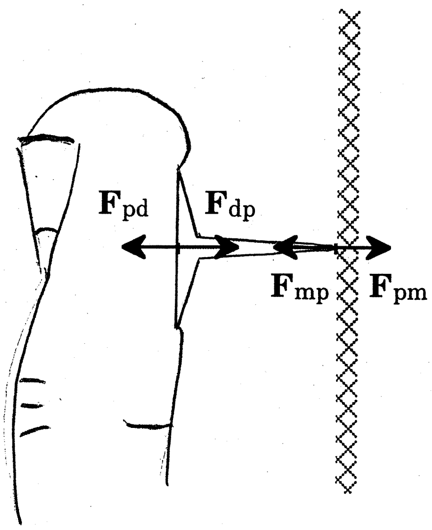
STATIQUE DES FLUIDES

Le but de ce chapitre est d'abord de saisir la notion de pression et de maîtriser son usage pour ensuite expliquer le comportement des fluides immobiles et des corps qui s'y trouvent plongés.

1. La pression

Illustration concrète: la punaise



$\mathbf{F}_{dp}$: force du doigt sur la punaise

$\mathbf{F}_{pd}$: force de la punaise sur le doigt

$\mathbf{F}_{pm}$: force de la punaise sur le mur

$\mathbf{F}_{mp}$: force du mur sur la punaise

3ème loi de Newton: $F_{dp} = F_{pd}$ et $F_{pm} = F_{mp}$

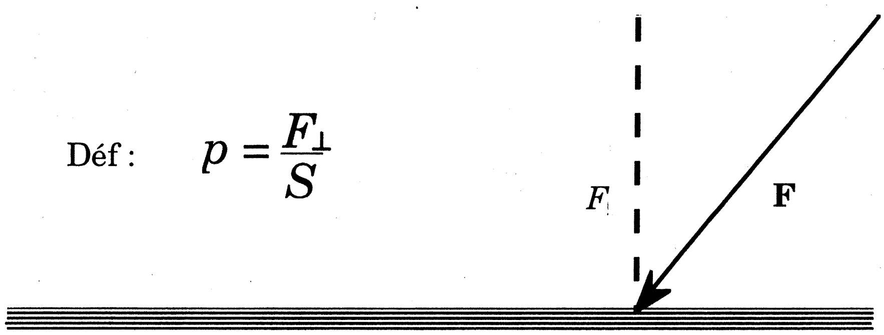
Comme l'accélération de la punaise peut être négligée, la résultante des forces agissant sur elle est nulle, donc la force exercée par le mur a la même valeur que celle exercée par le doigt. Pourtant, la punaise, si elle est correctement orientée (!), s'enfonce dans le mur et pas dans le doigt.

On se rend bien compte que c'est une question de surfaces de contact: plus la surface est **petite** plus la pression y est **grande**.

Définition :
On définit la pression comme la force par unité de surface sur laquelle elle s'exerce.

Pour être rigoureux, il n'intervient que la composante de la force qui est **normale** à la surface, la composante tangentielle, si elle existe, ne donne pas de contribution à la pression.

Déf : $$p = \frac{F_{\perp}}{S}$$



La pression est une grandeur scalaire (non vectorielle) définie positive.

Unités :

Etant une force divisée par une surface, la pression se mesure en N/m^2 dans le système MKS. On lui a donné le nom de **pascal** (Pa):

$$[p] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{N}{m^2} = Pa$$

Remarques :

a) C'est le symbole *p minuscule* qui est très généralement utilisé.

b) Une pression de 1 Pa est une faible pression; ainsi, la pression atmosphérique est de l'ordre de 100.000 Pa. La pression due au beurre d'une plaque de 100 g soigneusement tartiné sur une surface de 1 m^2 est d'environ 1 Pa !

Il existe bien d'autres unités de pression.

2. Pressions dans les fluides

On appelle **fluide** tout liquide ou tout gaz. De plus, un fluide est dit **homogène** si sa masse volumique est la même en tous ses points.

Principe de Pascal

1ère partie: *En un point d'un fluide immobile quelconque, la pression due au fluide environnant est la même dans toutes les directions.*

En particulier, elle ne dépend des dimensions (horizontales) du récipent

Illustrations:

a) Manomètre à membrane orientable;

b) récipient plein d'eau, fermé par une feuille de papier et retourné !

2ème partie: *En tous les points à même profondeur dans un fluide homogène et immobile la pression est la même.*

Illustrations:

a) Vases communicants;

b) balance, vases de formes différentes, mais de fonds identiques;

c) plongeur à 2 m de fond dans l'océan ou dans une piscine (d'eau salée);

d) freins hydrauliques;

e) presse hydraulique.

Pour ces deux derniers cas, la pression au sein du fluide est très grande, bien plus grande que les variations de pression dûs à la profondeur, qu'on peut alors négliger.

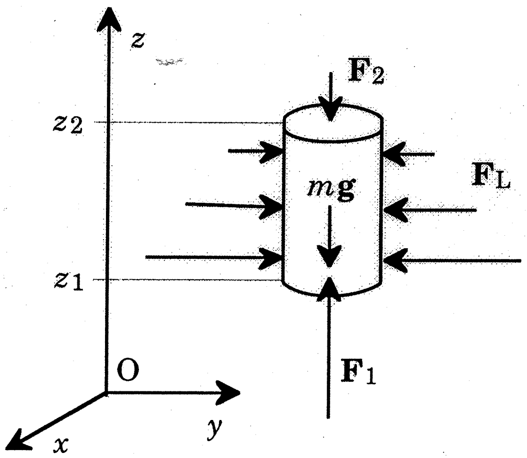
En résumé, toute variation de pression en un endroit d'un fluide se transmet intégralement dans tout le fluide et dans toutes les directions.

Voyons justement maintenant *comment varie la pression dans un fluide en fonction de la profondeur.*

3. Loi de la (dé)croissance de la pression

Pour la démonstration de la loi, on se limitera aux cas de fluides homogènes, la formule sera donc applicables aux liquides, qui sont très peu compressibles. Elle pourra s'appliquer aussi aux gaz, tel l'air atmosphérique pour autant que les différences d'altitude ne soient pas trop importantes, c-à-d qu'on puise négliger les variation de la masse volumique de l'air avec l'altitude, sinon, il faudra tenir compte de la diminution de sa masse volumique avec l'altitude.

Pour montrer la dépendance de la pression avec la profondeur (ou l'altitude), on considère un espace rempli par un fluide homogène, et dans ce fluide on en découpe par la pensée une portion de forme cylindrique. C'est du fluide dans le fluide. Il a une masse m, une hauteur $h = z_2 - z_1$ et une aire de base S .



Ce cylindre est naturellement en équilibre: la résultante des forces agissant sur lui est nulle:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_L = \mathbf{0}$$

où $\mathbf{F}_L$ représente *l'ensemble* des forces de pression latérales, elles s'annulent toutes deux à deux : $\mathbf{F}_L = \mathbf{0}$. Ainsi:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0} .$$

En projection sur Oz : (z): $-mg + F_1 - F_2 = 0$

Avec $m = \rho V = \rho Sh = \rho S(z_2 - z_1)$ et $F = pS$ on a: $-\rho S(z_2 - z_1)g + p_1 S - p_2 S = 0$

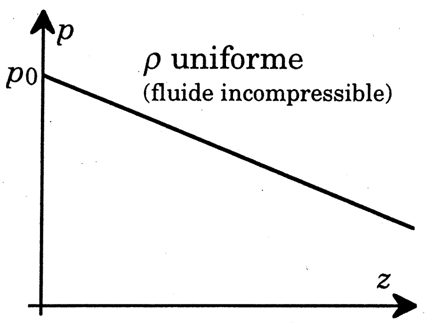
Simplifiant par S et réarrangeant, on en tire: $\Delta p = -\rho g \Delta z$

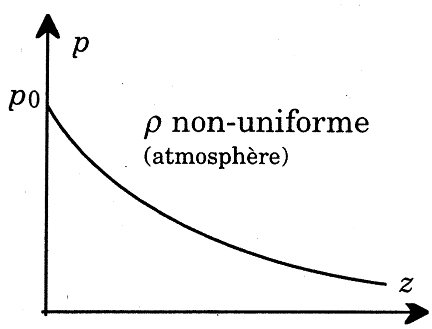
Ainsi, la variation de pression est proportionnelle à la variation de profondeur. Le signe – exprime que la pression diminue si la profondeur diminue (ou si l'altitude augmente), le sens de l'axe Oz étant choisi selon les profondeurs décroissantes, donc verticalement vers le haut.

Cette relation peut s'écrire pour une pression p en un point quelconque à une profondeur quelconque z:

$$p = p_0 - \rho g z$$

où p_0 est la pression en z = 0. Le graphe de $p(z)$ est une *droite de pente négative*.





Dans le cas particulier de l'air atmosphérique, la masse volumique ne peut pas être considérée comme constante: elle décroît avec l'altitude et la relation $p = p(z)$ n'est plus une droite mais une courbe décroissante (on peut montrer qu'il s'agit d'une exponentielle, pour autant que la température de l'air soit constante).

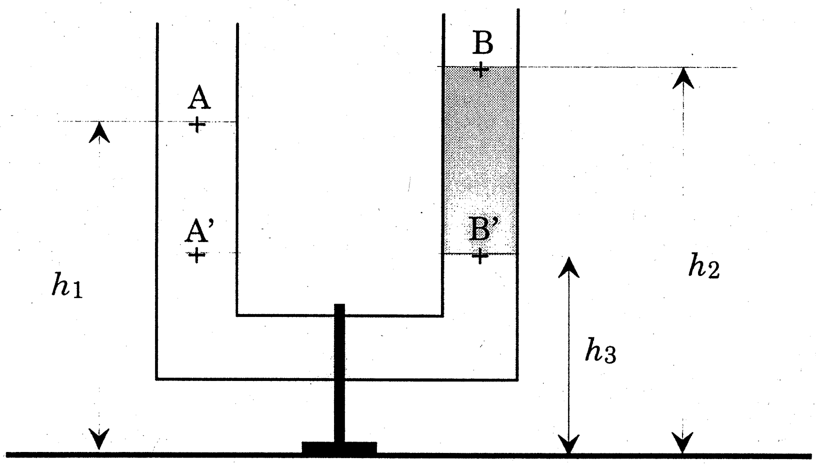
Application à la détermination de la masse volumique de liquides:

On utilise un tube en U fixé comme le montre la figure ci-dessous.

Pour une telle mesure, il faut disposer d'un autre liquide dont la masse volumique est connue. L'eau est souvent un bon candidat.

Il faut distinguer deux cas, selon que le liquide est miscible à l'eau ou non, car il ne doit en aucun cas y avoir de mélange.

Liquides non miscibles



Par exemple de l'eau (à gauche) et de l'huile ou de l'eau et du benzène.

L'application du principe de Pascal permet d'écrire:

1°) la pression atmosphérique est pratiquement la même en A et en B: $p_A = p_B$

2°) *à même niveau* dans le liquide 1 dans les *deux* branches: $p_{A'} = p_{B'}$

ce qui s'exprime par: $\rho_1 g(h_1 - h_3) = \rho_2 g(h_2 - h_3)$, d'où on tire:

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{h_1 - h_3}{h_2 - h_3}$$

Remarques:

- Le dessin montre un tube en U dont les deux branches sont de même section intérieure. Se convaincre que c'est sans importance, le loi de la croissance de la pression ne fait pas intervenir le volume du liquide mais sa *hauteur*.
- Le dessin montre le tube fixé verticalement. Se convaincre que c'est tout aussi sans importance, seule la hauteur *verticale* intervient.

4. La pression atmosphérique

Son existence n'a véritablement été mise en évidence que vers le milieu du XVII$^{\text{ème}}$ siècle par Otto von Guericke à Magdeburg (ex-RDA). L'expérience consistait à prendre deux hémisphères creuses, rigides et pouvant être réunies avec précision pour pouvoir faire un vide (partiel) à l'intérieur de la sphère ainsi formée.

La pression de l'air étant notablement diminuée à l'intérieur de la sphère alors qu'elle ne l'est pas à l'extérieur, il devient très difficile, mais pas impossible même si le vide est total, de séparer les deux hémisphères.

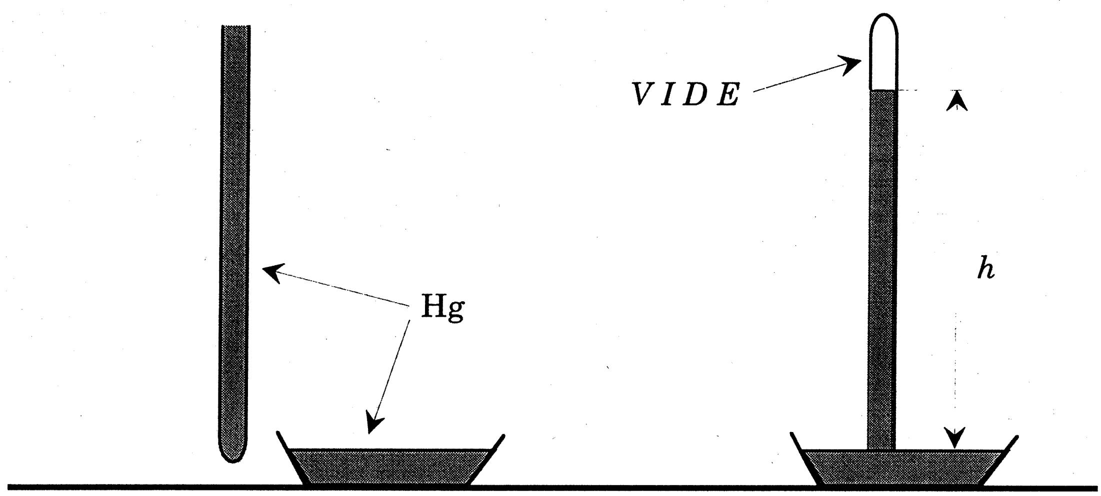
Illustrations:

- Les hémisphères "de Magdebourg";
- Un petit ballon (de foire) est placé très dégonflé et fermé sous une cloche dans laquelle on pompe l'air. L'air résiduel du ballon peut alors se dilater et le ballon se gonfle car la pression hors du ballon (sous la cloche) est très affaiblie. Notons que cette expérience nécessiterait une explication sur le comportement des gaz, ce qui est fait dans le cours "Thermique".
- Détermination de la masse volumique de l'air ambiant: un ballon de verre, donc rigide, de volume fixe, est muni de deux robinets. Il est pesé, les deux robinets étant ouverts. L'un des robinets étant ensuite fermé, le ballon est relié à une pompe qui en aspire la quasi totalité de l'air. Il est ensuite pesé à nouveau. La connaissance du volume du ballon et la différence des masses, donc celle de l'air contenu, fournit la grandeur cherchée.

Cette expérience avait déjà, d'une certaine façon, été proposée dans l'Antiquité, mais le récipient utilisé était une vessie de porc, et était donc souple, si bien que la vessie dégonflée avait un volume très faible, sur lequel la poussée d'Archimède était à peu près nulle. On n'avait pas conscience que cette expérience ne pouvait pas donner le résultat escompté, quelle qu'ait pû être la précision des balances, puisque la force d'Archimède compense presque exactement le poids de l'air intérieur. Explications complémentaires très prochainement.

Expérience de Torricelli (et Pascal):

Faite aussi vers le milieu du XVII^{ème} siècle par Torricelli en Italie d'abord puis plusieurs fois par Blaise Pascal en France à la même époque et à plusieurs altitudes. Cette expérience fut déterminante, non seulement pour la mise en évidence de la pression atmosphérique, mais aussi et surtout pour la mesure précise de sa valeur (météorologie); le principe de cette mesure est encore tout à fait actuel. Cette expérience fut aussi le prétexte, au XVII^{ème} siècle, à la querelle sur l'existence (ou la non-existence) du *vide*.



L'expérience consiste simplement à remplir complètement de mercure (Hg) un tube de verre d'une longueur d'environ un mètre et de le retourner dans un bac contenant aussi du mercure en veillant à ce qu'aucun air à aucun moment ne puisse pénétrer dans le tube. Le phénomène tout à fait remarquable à observer est d'une part la descente du mercure dans le tube et sa stabilisation à une hauteur h au dessus du niveau dans le bac, et d'autre part la place *vide* laissée par le mercure au haut du tube.

L'explication fait intervenir le principe de Pascal:

A la surface du mercure du bac, la pression est par définition la pression atmosphérique p_{atm}. Au même niveau, mais *dans* le tube, la pression est la même, elle due uniquement au poids de la colonne de mercure de hauteur h. Ainsi:

$$p_{atm} = \rho_{Hg}\, g\, h$$

Il suffit de mesurer h pour connaître, avec une bonne précision la valeur de la pression atmosphérique locale.

A une altitude nulle (au bord de la mer) la hauteur de la colonne est de 760 mmHg. C'est une valeur moyenne, qui est définitivement choisie comme étant la pression dite **normale**, de **1 atmosphère**. Sa valeur dans le système MKS s'obtient au moyen de la masse volumique du mercure à 0 °C:

$$1 \text{ atm.} = \rho_{Hg}\, g\, h = 13{,}6\cdot10^{3} \times 9{,}81 \times 0{,}760 = 1{,}013\cdot10^{5} \text{ Pa} \quad (\approx 10^{5} \text{ Pa})$$

Autres unités:

Il est fréquent d'utiliser la hauteur h de la colonne de mercure pour exprimer la pression atmosphérique, et même d'autres pressions; ainsi à Neuchâtel par exemple la pression atmosphérique moyenne est de 715 mmHg environ (altitude d'env. 450 m). L'unité de pression est alors le mmHg (qui porte parfois le nom de Torr, il vaut 133 Pa env.).

Les météorologues mesurent et indiquent les pressions atmosphériques non pas en mmHg mais en mb, en millibars; sachant que 1 bar vaut à peu près 1 atm. alors évidemment que 1000 mb = 1 bar ≈ 1 atm aussi! Mais le mb n'est pas une unité légale, ni le mmHg d'ailleurs, c'est le Pa seul qui est légal. Plus précisément:

$$1 \text{ atm} = 1013 \text{ mb} = 1{,}013\cdot10^{5} \text{ Pa} = 1013 \text{ hPa}.$$

L'hectopascal (hPa) est donc exactement égal au millibar (mb). Pour être conformes les météorologues n'ont eu qu'à changer le nom de l'unité de pression mais pas les valeurs.

Le passage des mmHg aux hPa est simple:

$$1 \text{ mmHg} = 1013/760 \approx 1{,}33 \text{ hPa} \quad \Leftrightarrow \quad 1 \text{ hPa} = 0{,}750064 \text{ mmHg} \approx 0{,}75 \text{ mmHg}$$

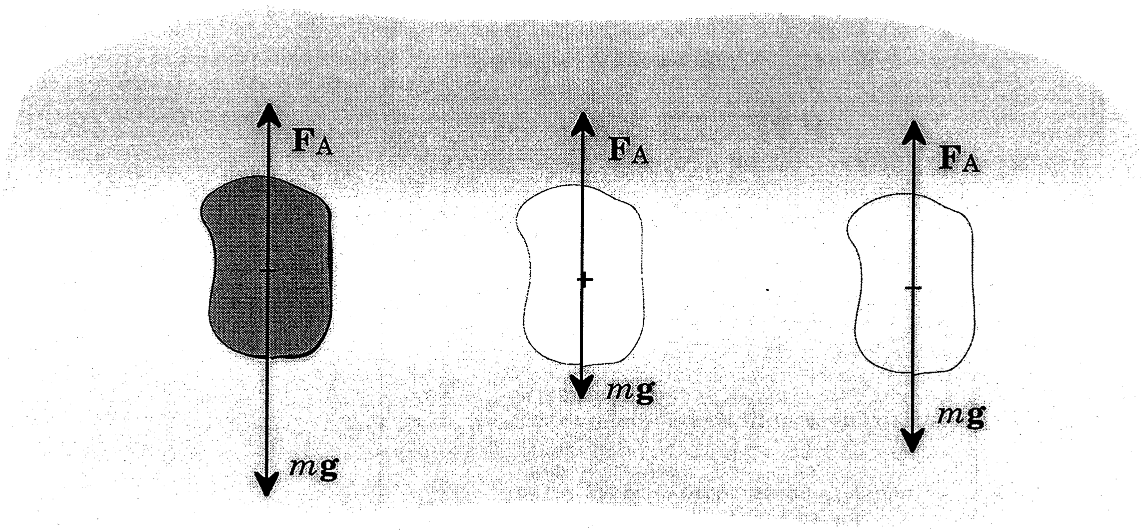
Remarques:

- S'il y a une grandeur physique qui a beaucoup (trop) d'unités, c'est bien la pression. Malgré des tentatives d'unification (le système légal MKSA), presque chaque corps de métier technique veut garder sa propre unité; la force de l'habitude!
- Un instrument permettant de mesurer une pression est, de façon générale, un **manomètre**. Lorsqu'il s'agit spécifiquement de la pression atmosphérique, un manomètre devient un **baromètre**, ce n'est qu'un manomètre particulier.
- On entend souvent évoquer le *poids de l'air* comme responsable de la pression atmosphérique. Ce n'est *pas vraiment correct*, car bien que l'attraction terrestre maintienne l'atmosphère autour de la planète, le poids est une force verticale vers le bas et donc incapable d'expliquer que la pression s'exerce dans toutes les directions. Comment expliquerait-on que la pression atmosphérique est la même en plein air que dans une chambre toutes portes et fenêtres fermées, aussi hermétiquement qu'on voudra?

Une explication phénoménologique se suffit du principe de Pascal: l'air est un fluide et dans un fluide la pression se transmet identiquement dans toutes les directions. Si on reste néanmoins sur sa faim, il est nécessaire de faire intervenir le caractère corpusculaire de la matière: l'air est constitué de particules (les molécules d'azote et d'oxygène essentiellement) qui se déplacent à très grande vitesse (env. 500 m/s) aléatoirement par agitation thermique. La pression que l'air (ou un autre gaz) exerce sur une surface est dû à la multitude de chocs de ces molécules sur la surface. Cette explication du macroscopique par le microscopique date de la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle et fût une des premières du genre dans l'histoire de la physique; elle sera suivie par beaucoup d'autres. Cette théorie peut se traiter à un niveau suffisamment simple pour qu'on puisse en parler avec quelques détails dans un chapitre du cours de “Thermique”: *la théorie cinétique des gaz.*

5. La poussée d'Archimède

Considérons un corps de volume V complètement immergé dans un fluide de masse volumique ρ_f uniforme. Trois cas à distinguer selon que la masse volumique ρ_c du corps est plus grande, plus faible, ou égale à celle du fluide.



Mais dans tous les cas les forces de pression dues au fluide ne dépendent pas de la masse volumique du corps immergé, elles dépendent de la masse volumique du fluide et de son volume; leur résultante est donc la même dans les trois cas, c'est la *poussée d'Archimède* $\mathbf{F}_A$, c'est une **force**.

Pour en trouver l'expression, il suffit de considérer le cas où le corps immergé a la même masse volumique que le fluide. Comme il est alors en équilibre “entre deux eaux”, cette force est égale à son poids. Puisque dans ce cas $\rho_f = \rho_c$, on a $mg = \rho_c V g = \rho_f V g$. Et comme $F_A = mg$, alors, en grandeur:

$$F_A = \rho_f V g$$, donc est valable quel que soit ρ_c.

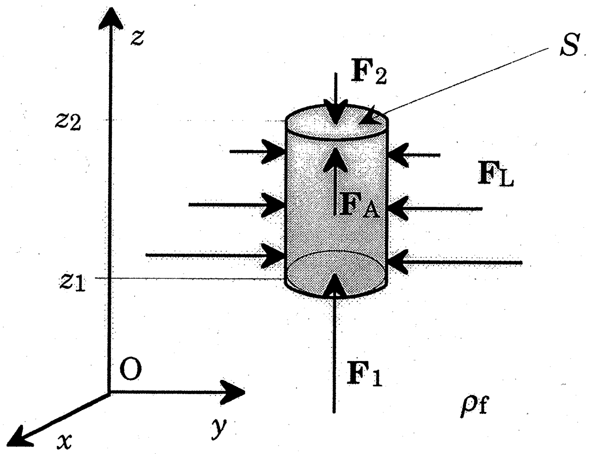
Vectoriellement: $$\mathbf{F}_A = -\rho_f V \mathbf{g}$$

où V est le *volume immergé du corps*, qui peut être inférieur au volume du corps lui-même s'il s'agit d'un corps flottant.

Le principe (théorème) d'Archimède s'exprime, en mots, par:
Tout corps plongé dans un fluide subit de la part de ce fluide une poussée verticale ascendante de grandeur égale au poids du fluide déplacé. Le volume de fluide déplacé est égal au volume immergé du corps.

Si la masse volumique du fluide est différente de celle du corps immergé, celui-ci ne restera pas en équilibre et sera accéléré vers le bas ou vers le haut, selon que le signe de $(\rho_c - \rho_f)$ est positif ou négatif. Notons que cette accélération diminuera au cours du mouvement, car immanquablement une force de frottement fluide apparaîtra dès que le corps aura une vitesse non nulle. Il pourra atteindre une vitesse limite si les conditions (géométrie du corps, masses volumiques, viscosité du fluide, durée du mouvement, etc) s'y prêtent.

Montrons encore que **la poussée d'Archimède n'est autre qu'une application du principe de Pascal:**



La figure ci-contre ne montre que les forces de pressions due au fluide sur le corps immergé.
Les forces latérales $\mathbf{F}_L$ s'annulent mutuellement. Verticalement, il ne reste que $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$.

La force d'Archimède se définit comme la résultante des forces de pression due au fluide.

Ici : $\mathbf{F}_A = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$

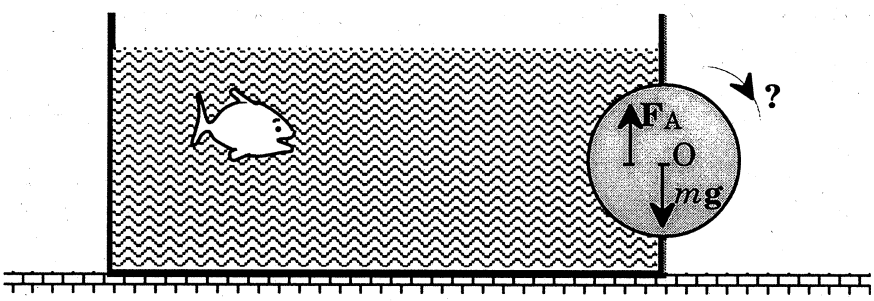
Selon Oz : $F_A = F_1 - F_2$

$= p_1 S - p_2 S = - \Delta p S$

or, par la loi de la décroissance de la pression: $\Delta p = - \rho_f g \Delta z$ => $F_A = \rho_f g \Delta z S$; et comme $V = \Delta z S$, la démonstration est achevée: $F_A = \rho_f g V$ cqfd.

Illustration

Le cylindre homogène de la figure ci-dessous pout tourner librement autour de son axe O; pourtant, il est ajusté pour que de l'eau ne s'écoule pratiquement pas (joints de qualité).



La force d'Archimède s'applique en un point du demi-cylindre immergé. Cette force a un *moment non nul* par rapport à l'axe O et doit donc *faire tourner* le cylindre. On trouvé là le mouvement perpétuel, => fortune !

Or, désenchantement, l'expérience montre qu'il n'en est rien, malgré des super-joints et des frottements quasi-nuls: le cylindre ne tourne pas.

Chercher l'erreur ! (à voir avec les moments des *forces de pression* !).

1. Un parallélipipède a deux faces carrées de côté $a = 5$ cm. Les quatre autres faces sont des rectangles de côtés a et b avec $b > a$. Il est posé couché sur une surface plane et horizontale. La pression qu'il exerce alors sur cette surface est de 1324 Pa. De quelle matière peut-être fait ce parallélipipède ?

Rép: aluminium (par exemple).

2. On peut estimer que la surface totale du corps humain est de l'ordre de 2 m^2. Quelle alors la force totale de pression que subit un plongeur se trouvant à une profondeur de 100 m sous l'eau ?

Rép: env. 2 millions de N.

3. Quel est votre volume ? Donnez-le en m^3 et expliquez comment vous êtes parvenu au résultat (à plus ou moins 10 %).

4. Tasse cylindrique de diamètre $d = 5$ cm. Elle est remplie de 1 dl de café. Quelle est la pression au fond de la tasse, en plus de la pression atmosphérique ?

Rép: 500 Pa.

5. Un réservoir sphérique archiplein contient 2000 litres d'eau. Ses parois peuvent supporter une pression maximale de $0{,}3.10^5$ Pa au dessus de la pression atm. On fixe à l'orifice de remplissage de la citerne un tuyau dont la section intérieure est de 1 cm^2. Il est tenu verticalement.
Quelle quantité d'eau nécessaire est-elle à verser dans le tuyau pour fissurer le réservoir ?

Rép: 1,5 dl.

6. Une voiture est sur un sol horizontal. La pression intérieure des pneus est 2.10^5 Pa au dessus de la p. atm. La surface de chaque pneu en contact avec le sol est un rectangle de 1 dm^2. Quelle est la masse de cette voiture ?

Rép: 815 kg.

7. La tour Eiffel a une hauteur de 300 m et une masse de 7000 t. Cette masse est aussi environ celle du cylindre d'air de même hauteur et de même base.
a) Quel est le diamètre de cette base supposée circulaire ?
b) La tour repose sur quatre pieds identiques exerçant une pression sur le sol d'environ 40 N/cm2. Quelle est la dimension d'un de ces pieds qu'on supposera de surface carrée ?

Rép: a) 151 m; b) 6,55 m.

8. Soit un objet de masse m posé sur une surface horizontale; il y exerce une pression p. Soit aussi un modèle réduit de cet objet: chaque dimension est k fois plus petite. Quelle est la masse de cette maquette et quelle est la pression qu'elle exerce sur la surface horizontale ? (L'objet et son modèle réduit son faits de la même matière).
Application: la tour Eiffel: soit un modèle réduit de la tour en tout point pareil mais d'une hauteur de 30 cm. Quelle serait sa masse et quelle serait la pression de ses pieds sur le sol ?

9. La décroissance de la pression atmosphérique avec l'altitude est d'environ 0,012 % par mètre. Quelle sera la diminution successive de la hauteur de la colonne d'un baromètre à mercure en allant du bord de la mer (760 mmHg) au lycée DdR (450 m d'altitude) puis au lycée BC (la Chaux-de-Fonds, 1000 m d'altitude) ?

Rép: 41 mm et 48 mm.

10. Un récipient cylindrique a un fond dont la surface circulaire est de 25 dm^2. On y dépose un cube de bois (ρ_b = 0,6 kg/dm^3) de 40 cm d'arête.
Quelle quantité minimale d'eau faut-il verser dans le récipient pour que le cube commence tout juste à flotter ?

Rép: 21,6 dm^3.

11. Ballon d'enfant gonflé à l'hélium (ρ_{He} = 0,18 kg/m^3). L'envèloppe et la ficelle ont une masse totale de 10 g. Quel doit être le diamètre du ballon, supposé sphérique, pour qu'il flotte immobile dans l'air ? (ρ_{air} = 1,27 kg/m^3).
N.B. C'est le ballon qui est gonflé, pas l'enfant.

Rép: 26 cm.

12. Une sphère de bois (ρ_b = 0,6 kg/dm^3) de rayon R = 2 cm est maintenue au fond de l'eau (20 °C) puis libérée. Calculer son accélération initiale et montrer qu'elle ne dépend pas du rayon de la sphère.

Rép: 6,54 m/s^2.

13. On sait que dans un fluide (un lac, par exemple) la pression augmente avec la profondeur. On sait aussi que la force d'Archimède est un effet de la pression. Il s'ensuit donc que la force d'Arch. augmente avec la profondeur ! Chercher l'erreur.

14. Une sphère creuse de fer (balise) de rayon extérieur R = 10 cm flotte sur l'eau de façon à ce que le niveau de l'eau atteigne l'équateur de la sphère. Calculer l'épaisseur de la tôle, supposée mince (volume de fer << vol. sphère). (ρ_{fer} = 7,86.10^3 kg/m^3).

Rép: 2,2 mm.

15. Expliquer pourquoi il serait impossible de déterminer la masse volumique de l'air en pesant un récipient souple d'abord vide et aplati, puis gonflé d'air à un volume mesurable. Montrer que la différence des poids mesurés ne correspond pas la masse d'air contenue.

16. Un ballon sphérique (rayon R = 5 m) est gonflé à l'hélium (ρ_{He} = 0,18 kg/m^3). Il est retenu au sol par une corde. Soit m = 400 kg la masse comprenant l'enveloppe, la nacelle et le passager. Le volume de m peut être négligé. Calculer :
a) Avec quelle force T la corde retient le ballon si la masse volumique de l'air ambiant est de 1,22 kg/m^3.
b) Quelle sera l'accélération initiale du ballon au moment où on coupe la corde.

Rép: a) 1410 N; b) 2,85 m/s^2.

17. Quels sont les métaux qui flottent sur le mercure et quels sont ceux qui n'y flottent pas ? Consulter le F&T.