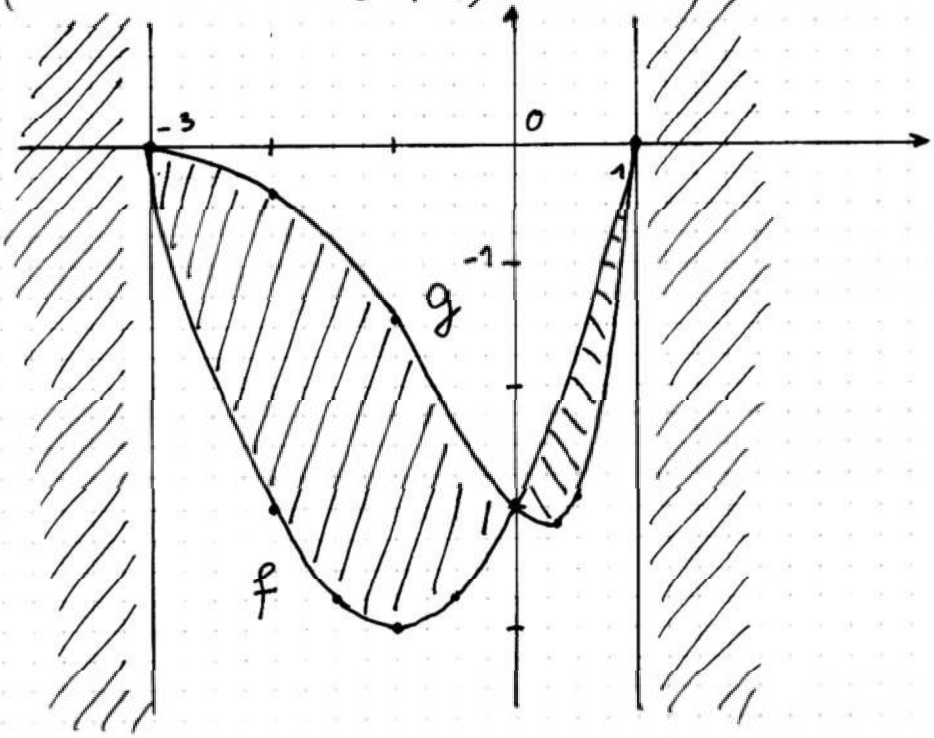
f et g ont bien 3 points d'intersection : $x=-3$, $x=0$ et $x=1$
(dans l'intervalle $[-3;1]$)

c)



L'aire hachurée est l'aire entre les courbes de f et de g sur l'intervalle $[-3;1]$.

Comme $g \geq f$ sur $[-3;0]$ et $g \leq f$ sur $[0;1]$, l'aire hachurée vaudra : $\displaystyle\int_{-3}^{0}(g(x)-f(x))\,dx + \int_{0}^{1}(f(x)-g(x))\,dx =$

$$= \int_{-3}^{0} g(x)\,dx - \int_{-3}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx - \int_{0}^{1} g(x)\,dx.$$

D'après a), $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x$ est une primitive de f et

$G(x) = (x^2-3)e^x$ est une primitive de g.

Ainsi : $\displaystyle\int_{-3}^{0} g(x)\,dx = G(0) - G(-3) = (0^2-3)e^0 - ((-3)^2-3)e^{-3} =$

$= -3 - 6e^{-3}$;

$\displaystyle\int_{-3}^{0} f(x)\,dx = F(0) - F(-3) = \frac{0^3}{3} + 0^2 - 3\cdot 0 - \left(\frac{(-3)^3}{3} + (-3)^2 - 3\cdot(-3)\right) =$

$= -(-9+9+9) = -9$;

$\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,dx = F(1) - F(0) = \frac{1^3}{3} + 1^2 - 3\cdot 1 - \left(\frac{0^3}{3} + 0^2 - 3\cdot 0\right) =$

$= \frac{1}{3} + 1 - 3 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}$;

$\displaystyle\int_{0}^{1} g(x)\,dx = G(1) - G(0) = (1^2-3)e^1 - (0^2-3)e^0 =$

$= -2e + 3.$

D'où : aire hachurée $= -3-6e^{-3}-(-9)+\left(-\frac{5}{3}\right)-(-2e+3) =$

$= -3-6e^{-3}+9-\frac{5}{3}+2e-3$

$= \underline{\underline{2e-6e^{-3}+\frac{4}{3}}} \cong 6,47.$

Exercice 6

On a $f(x) = x+1 - \frac{4}{(x-2)^2}$.

a) ① Domaine de définition: Les seul x pour lequel on ne peut pas calculer f est celui satisfaisant à $(x-2)^2 = 0$.

$(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$.

D'où $D = \mathbb{R} - \{2\}$

② Parité: Calculons $f(-x)$.

On a $f(-x) = -x+1 - \frac{4}{(-x-2)^2} = -x+1 - \frac{4}{(x+2)^2}$.

Comme $f(-x) \neq f(x)$, x n'est pas paire.

Comme $f(-x) \neq -f(x)$, x n'est pas impaire.

Périodicité: Comme f ne contient pas de fonctions trigonométriques, f n'est pas périodique.

③ Asymptote verticale: L'exclu de f est $x=2$.

On a $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \left(x+1 - \frac{4}{(x-2)^2}\right) =$

$= 2+1 - \frac{4}{0_+} = 3 - \infty = -\infty$ et

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \left(x+1 - \frac{4}{(x-2)^2}\right) = 2+1 - \frac{4}{0_+} =$

$= 3 - \infty = -\infty$.

Ainsi $x=2$ est asymptote verticale avec

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$.

Asymptote non verticale: $f(x) = x+1 - \frac{4}{(x-2)^2}$ est déjà sous la forme $f(x) = \text{quotient} + \frac{\text{reste}}{\text{diviseur}}$.

Ainsi $y = x+1$ est une asymptote oblique.

Comme $-\frac{4}{(x-2)^2} < 0$ pour toute valeur de x, f est toujours au-dessous de $y = x+1$.

④ Intersections avec l'axe x: On pose $f(x) = 0$, i.e. $x+1 - \frac{4}{(x-2)^2} = 0$ et on résoud:

$$
\begin{array}{l|l}
x+1-\dfrac{4}{(x-2)^2}=0 & \cdot\,(x-2)^2 \\
(x+1)(x-2)^2-4=0 & \text{distributivité} \\
(x+1)(x^2-4x+4)-4=0 & \text{distributivité} \\
x^3-4x^2\cancel{+4x}+x^2\cancel{-4x}\cancel{+4}\cancel{-4}=0 & \text{réduction} \\
x^3-3x^2=0 & \text{mise en évidence} \\
x^2(x-3)=0 & \\
\Rightarrow \text{ soit } x^2=0,\ \text{i.e. } x=0 & \\
\quad\ \text{soit } x-3=0,\ \text{i.e. } x=3 &
\end{array}
$$

Ainsi les zéros de f sont $x=0$ et $x=3$.

Intersection avec l'axe y: On pose $x=0$ et on calcule $f(0)$:

$$f(0)=0+1-\frac{4}{(0-2)^2}=1-\frac{4}{(-2)^2}=1-\frac{4}{4}=1-1=0.$$

$\Rightarrow$ f coupe l'axe y en $y=0$.

⑤ Tableau de signes: Les zéros de f sont $x=0$ et $x=3$. L'exclu est $x=2$.
Le tableau de signe se présente comme suit:

x		0		2		3	
$f(x)$	$-$	0	$-$	////	$-$	0	$+$

pour $x=-1$, $f(x)=-1+1-\dfrac{4}{(-1-2)^2}=-\dfrac{4}{(-3)^2}=-\dfrac{4}{9}<0$,

pour $x=1$, $f(x)=1+1-\dfrac{4}{(1-2)^2}=2-\dfrac{4}{(-1)^2}=2-\dfrac{4}{1}=2-4=-2<0$,

pour $x=2{,}5$, $f(x)=2{,}5+1-\dfrac{4}{(2{,}5-2)^2}=3{,}5-\dfrac{4}{0{,}5^2}=3{,}5-16<0$,

pour $x=4$, $f(x)=4+1-\dfrac{4}{(4-2)^2}=5-\dfrac{4}{2^2}=5-\dfrac{4}{4}=5-1=4>0$

⑥ Dérivée: On a $f(x)=x+1-\dfrac{4}{(x-2)^2}$.

La dérivée de x est 1.
La dérivée de 1 est 0.
Calculons la dérivée de $\dfrac{4}{(x-2)^2}=\dfrac{u}{v}$ avec $u=4$ et $v=(x-2)^2$.
On a $u'=0$ et $v'=2(x-2)$.
Ainsi la dérivée de $\dfrac{4}{(x-2)^2}$ est

$$\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{0.(x-2)^2-4.\,2(x-2)}{((x-2)^2)^2}=$$

$$=\frac{-8(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{-8}{(x-2)^3}$$

On en conclut que $f'(x)=1-\dfrac{-8}{(x-2)^2}=1+\dfrac{8}{(x-2)^3}$.

(7) Points à tangente horizontale: On doit résoudre $f'(x)=0$, i.e.

$$\begin{array}{c|l} 1+\dfrac{8}{(x-2)^3}=0 & \cdot (x-2)^3 \\ (x-2)^3+8=0 & -8 \\ (x-2)^3=-8 & \sqrt[3]{\ } \\ x-2=-2 & +2 \\ x=0 & \end{array}$$

Donc le zéro de f' est $x=0$.

Comme $f(0)=0$ (voir plus haut), f a un point à tangente horizontale en $(0;0)$.

(8) Tableau de croissance: Le zéro de f' est $x=0$. L'exclu est $x=2$.
Le tableau de croissance se présente comme suit:

x		0		2	
$f'(x)$	+	0	−	//////	+
$f(x)$	↗	maximum	↘	//////	↗

pour $x=-1$, $f'(x)=1+\frac{8}{(-1-2)^3}=1+\frac{8}{(-3)^3}=1-\frac{8}{27}>0$,
pour $x=1$, $f'(x)=1+\frac{8}{(1-2)^3}=1+\frac{8}{(-1)^3}=1-8=-7<0$
pour $x=3$, $f'(x)=1+\frac{8}{(3-2)^3}=1+\frac{8}{1^3}=1+8=9>0$.

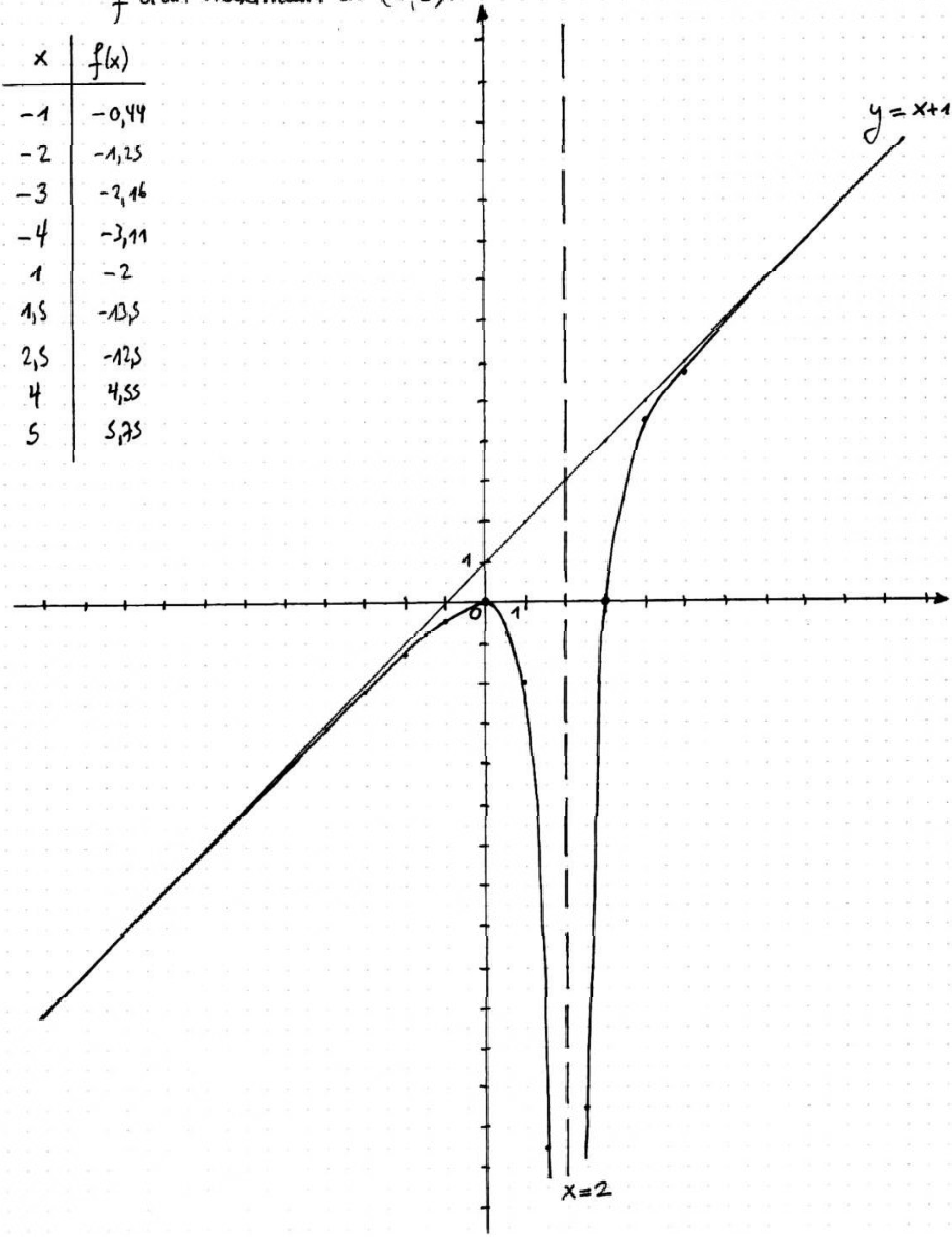
Ainsi f a un maximum en $(0;0)$.

(9) Graphe: En résumé, on a:
(1) $D=\mathbb{R}-\{2\}$
(2) f n'est ni paire, ni impaire, ni périodique
(3) $x=2$ est asymptote verticale avec $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)=2$.
$y=x+1$ est asymptote oblique et f est toujours au-dessous de $y=x+1$
(4) les zéros de f sont $x=0$ et $x=3$.
f coupe l'axe y en $y=0$.
(5) f est négative pour $x<0$, $0<x<2$ et $2<x<3$.
f est positive pour $x>3$.
(7) Le zéro de f' est $x=0$
(8) f est croissante sur $]-\infty;0[$, décroissante sur $]0;2[$ et croissante sur

$]2;+\infty[$.

f a un maximum en $(0;0)$.

x	$f(x)$
-1	$-0{,}44$
-2	$-1{,}25$
-3	$-2{,}16$
-4	$-3{,}11$
1	-2
$1{,}5$	$-13{,}5$
$2{,}5$	$-12{,}5$
4	$4{,}55$
5	$5{,}75$



b) On a $f(x) = x+1 - \frac{4}{(x-2)^2}$.

Une primitive de x est $\frac{x^2}{2}$.

Une primitive de 1 est x.

Cherchons une primitive de $\frac{4}{(x-2)^2}$:

$$\xleftarrow{\text{primitive}} \qquad \xrightarrow{\text{dérivée}}$$

$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	(cf. tables)
$\frac{1}{x-2}$	$-\frac{1}{(x-2)^2}$	
$-\frac{4}{x-2}$	$\frac{4}{(x-2)^2}$	

On a donc : primitive de $\frac{4}{(x-2)^2}$ est $-\frac{4}{x-2}$.

Ainsi F primitive de f est : $\underline{\underline{F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{4}{x-2}}}$.

Calculons $I = \int_3^6 f(x)\,dx$.

On doit avoir : $I = \int_3^6 f(x)\,dx = F(6) - F(3)$.

On a : $F(6) = \frac{6^2}{2} + 6 + \frac{4}{6-2} = 18 + 6 + 1 = 25$;

$F(3) = \frac{3^2}{2} + 3 + \frac{4}{3-2} = 4{,}5 + 3 + 4 = 11{,}5$.

Ainsi $I = 25 - 11{,}5 = \underline{13{,}5}$.

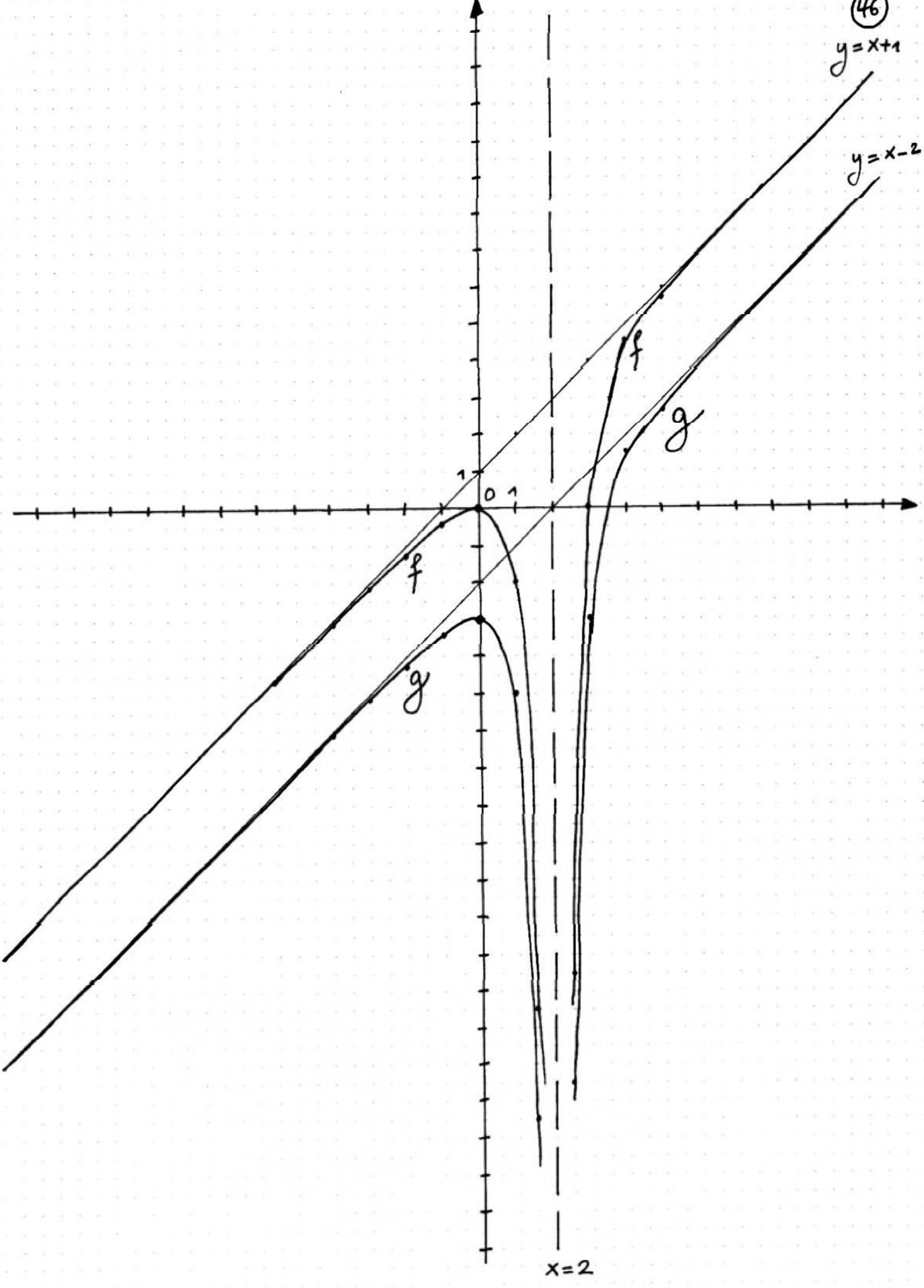
c) On a : $f(x) = x+1 - \frac{4}{(x-2)^2}$

et $g(x) = x - 2 - \frac{4}{(x-2)^2} = x+1 - \frac{4}{(x-2)^2} - 3 = f(x) - 3$.

Ainsi, à partir d'une valeur pour f, on descend de 3 unités vers le bas et on a la valeur pour g.

On peut donc dire que, pour passer du graphe de f au graphe de g, on fait une translation de 3 unités vers le bas.

Voici les graphes de f et g :



y = x+1
y = x−2
f
f
g
g
1
0
1
x = 2

Exercice 7

a) On doit étudier $f(x) = \dfrac{-3x+6}{x^2}$

① Domaine de définition: Il faut que le dénominateur soit $\neq 0$, donc $x^2 \neq 0$, i.e. $x \neq 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{D = \mathbb{R} - \{0\}}}$

② Parité: Calculons $f(-x)$.

On a $f(-x) = \dfrac{-3\cdot(-x)+6}{(-x)^2} = \dfrac{3x+6}{x^2}$

Comme $f(-x) \neq f(x)$, f n'est pas paire.

Comme $f(-x) \neq -f(x)$, f n'est pas impaire.

Périodicité: Comme f n'a pas de fonctions trigonométriques, f n'est pas périodique.

③ Asymptote verticale: L'exclu de f est $x=0$.

On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{-3x+6}{x^2} = \dfrac{6}{0_+} = +\infty$ et

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{-3x+6}{x^2} = \dfrac{6}{0_+} = +\infty$.

Ainsi $x=0$ est une asymptote verticale et on a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$.

Asymptote non verticale: Comme f est une fonction rationnelle (polynôme sur polynôme), il faut effectuer la division.

Or, comme le degré du numérateur (qui vaut 1) est inférieure au degré du dénominateur (qui vaut 2), le quotient de la division est 0.

Ainsi $y=0$ est une asymptote horizontale.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x+6}{x^2} = 0_-$ et

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3x+6}{x^2} = 0_+$.

Ainsi f s'approche de $y=0$ par en-dessous à $+\infty$ et par en dessus à $-\infty$.

④ Intersection avec l'axe x: On pose $y=0$ et on doit résoudre $f(x)=0$, i.e. $\dfrac{-3x+6}{x^2} = 0$:

$$
\begin{array}{c|c}
\dfrac{-3x+6}{x^2} = 0 & \cdot x^2 \\
-3x+6=0 & -6 \\
-3x=-6 & :-3 \\
x=2 &
\end{array}
$$

Ainsi, le <u>zéro de f est $x=2$.</u>

<u>Intersection avec l'axe y:</u> On devrait poser $x=0$ et calculer $f(0)$.
Or 0 est l'exclu de D et on ne peut pas calculer $f(0)$.
Donc, <u>f ne coupe pas l'axe y.</u>

(5) <u>Tableau de signes:</u> Le zéro de f est $x=2$. L'exclu est $x=0$.
Le tableau de signes se présente comme suit:

x		0		2	
$f(x)$	+	$\parallel$	+	0	−

pour $x=-1$, $f(x) = \dfrac{-3\cdot(-1)+6}{(-1)^2} = \dfrac{3+6}{1} > 0$,

pour $x=1$, $f(x) = \dfrac{-3\cdot 1+6}{1^2} = \dfrac{-3+6}{1} = \dfrac{3}{1} > 0$,

pour $x=3$, $f(x) = \dfrac{-3\cdot 3+6}{3^2} = \dfrac{-9+6}{9} = \dfrac{-3}{9} < 0$.

<u>Ainsi $f>0$ sur $]-\infty;0[$ et $]0;2[$, $f(2)=0$ et $f<0$ sur $]2;+\infty[$.</u>

(6) <u>Dérivée:</u> On a $f(x) = \dfrac{-3x+6}{x^2} = \dfrac{u}{v}$ avec $u=-3x+6$ et $v=x^2$.
On a: $u'=-3$ et $v'=2x$.

Donc: $f'(x) = \dfrac{u'v-uv'}{v^2} = \dfrac{-3\cdot x^2-(-3x+6)\cdot 2x}{(x^2)^2} = \dfrac{-3x^2+6x^2-12x}{x^4} =$

$= \dfrac{3x^2-12x}{x^4} = \dfrac{x(3x-12)}{x^4} = \underline{\underline{\dfrac{3x-12}{x^3}}}.$

(7) <u>Points à tangente horizontale:</u> On doit résoudre $f'(x)=0$, i.e.

$$
\begin{array}{c|c}
\dfrac{3x-12}{x^3} = 0 & \cdot x^3 \\
3x-12=0 & +12 \\
3x=12 & :3 \\
x=4 &
\end{array}
$$

Ainsi <u>le zéro de f' est $x=4$.</u>

Comme $f(4) = \dfrac{-3\cdot 4+6}{4^2} = \dfrac{-12+6}{16} = \dfrac{-6}{16} = -\dfrac{3}{8}$, on en conclut que

f a un point à tangente horizontale en $\left(4; -\frac{3}{8}\right)$.

(8) Tableau de croissance: Le zéro de f' est $x=4$. L'exclu est $x=0$.

Le tableau de croissance se présente comme suit:

x		0		4	
$f'(x)$	$+$	////	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	////	$\searrow$	minimum	$\nearrow$

pour $x=-1$, $f'(x) = \dfrac{3\cdot(-1)-12}{(-1)^3} = \dfrac{-3-12}{-1} = \dfrac{-15}{-1} = 15 > 0$,

pour $x=1$, $f'(x) = \dfrac{3\cdot 1-12}{1^3} = \dfrac{3-12}{1} = -9 < 0$,

pour $x=5$, $f'(x) = \dfrac{3\cdot 5-12}{5^3} = \dfrac{15-12}{125} = \dfrac{3}{125} > 0$

Ainsi f est croissante sur $]-\infty; 0[$, décroissante sur $]0; 4[$ et croissante sur $]4; +\infty[$. Elle a un minimum en $\left(4; -\frac{3}{8}\right)$.

(9) Graphe: En résumé, on a:

(1) $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

(2) f n'est ni paire, ni impaire, ni périodique.

(3) $x=0$ est l'asymptote verticale avec $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$

$y=0$ est l'asymptote horizontale; f s'approche de $y=0$ par en-dessous à $+\infty$ et par en-dessus à $-\infty$.

(4) Le zéro de f est $x=2$.

f ne coupe pas l'axe y.

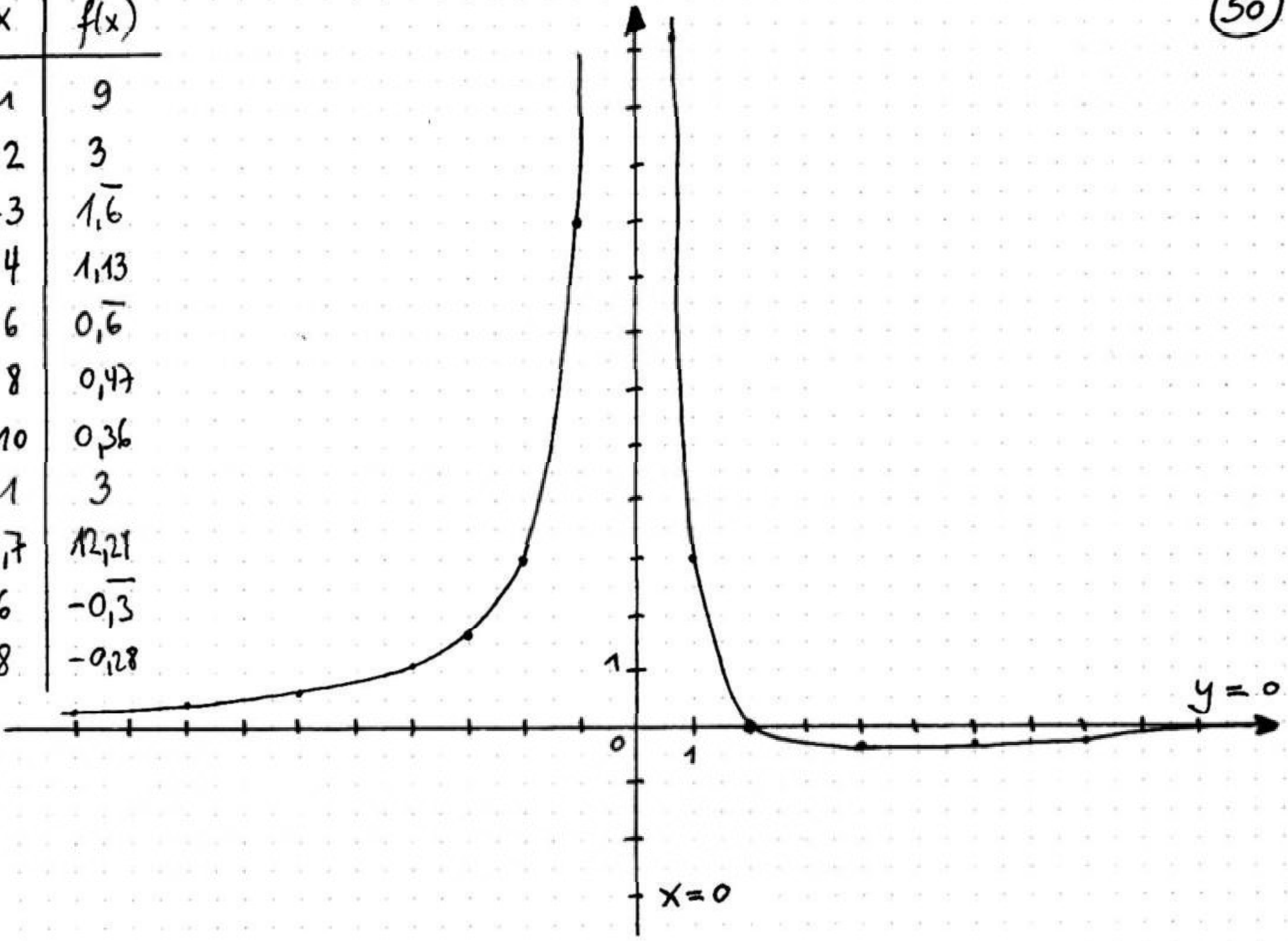
(5) $f > 0$ sur $]-\infty; 0[$ et $]0; 2[$ et $f < 0$ sur $]2; +\infty[$

(7) Le zéro de f' est $x=4$.

(8) f est croissante sur $]-\infty; 0[$, décroissante sur $]0; 4[$ et croissante sur $]4; +\infty[$. Elle a un minimum en $\left(4; -\frac{3}{8}\right)$.

Le graphe de f est donc,

x	$f(x)$
-1	9
-2	3
-3	$1,\overline{6}$
-4	$1,13$
-6	$0,\overline{6}$
-8	$0,47$
-10	$0,36$
1	3
$0,7$	$12,21$
6	$-0,\overline{3}$
8	$-0,28$



b) On a $g(x) = \ln\left(\dfrac{-3x+6}{x^2}\right) = \ln(f(x))$.

1. La fonction $\ln(z)$ n'est définie que pour $z > 0$.
Pour que $g(x)$ existe, il faut donc que $f(x) > 0$.
D'après le point ⑤ ci-dessus, $f(x) > 0$ si $x \in]-\infty; 0[\cup]0; 2[$.
Ainsi $\underline{\underline{D =]-\infty; 0[\cup]0; 2[}}$.

2. D'après le point ③ ci-dessus, on a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$.
Donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln(f(x)) =$ "$\ln(+\infty)$" $= +\infty$ et,
similairement, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} g(x) = +\infty$.

Ainsi : $\underline{\underline{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} g(x) = +\infty}}$.

D'après le point ④ ci-dessus, on a $f(2) = 0$.
Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln(x) = -\infty$, on a $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \ln(f(x)) =$

$= \lim\limits_{y \underset{>}{\to} 0} \ln(y) = -\infty.$

Comme $D =]-\infty; 0[\cup]0; 2[$, on ne peut pas chercher $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 2} g(x)$.

Ainsi on peut dire que $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 2} g(x) = -\infty$.

3. Les intersections du graphe de g et de l'axe des abscisses revient à résoudre $g(x) = 0$.

$g(x) = 0$ signifie $\ln(f(x)) = 0$.

Or $\ln(z) = 0 \implies z = 1$.

Donc $\ln(f(x)) = 0 \implies f(x) = 1$, i.e. $\dfrac{-3x+6}{x^2} = 1 \quad \Big| \cdot x^2$

$-3x+6 = x^2 \quad \Big| +3x-6$

$x^2+3x-6 = 0$

$x^2+3x-6=0$ est une équation du 2^e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$, avec $a=1$, $b=3$ et $c=-6$.

Le discriminant Δ vaut $\Delta = b^2-4ac = 3^2-4\cdot1\cdot(-6) = 9+24 = 33$.

Les solutions de $x^2+3x-6=0$ (et donc de $f(x)=1$, i.e. de $\ln(f(x))=0$) sont alors:

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3+\sqrt{33}}{2\cdot1} = \dfrac{-3+\sqrt{33}}{2} \cong 1,372$ et

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3-\sqrt{33}}{2\cdot1} = \dfrac{-3-\sqrt{33}}{2} \cong -4,372$

Ainsi les intersections du graphe de g et de l'axe des abscisses sont $(-4,372; 0)$ et $(1,372; 0)$.

Exercice 8

On a $f(x) = 3\cos(x) - 5\sin(x)$.

(1) Domaine de définition: On peut calculer f pour toutes les valeurs de x.
Donc $D = \mathbb{R}$.

(2) Parité: On a $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$.
Calculons $f(-x)$.
On a $f(-x) = 3\cos(-x) - 5\sin(-x) = 3\cos(x) + 5\sin(x)$.
Comme $f(-x) \neq f(x)$, f n'est pas paire.
Comme $f(-x) \neq -f(x)$, f n'est pas impaire.

Périodicité: Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π:
on a $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$.
Ainsi $f(x+2\pi) = 3\cos(x+2\pi) - 5\sin(x+2\pi) = 3\cos(x) - 5\sin(x) = f(x)$.

Donc f est périodique de période 2π.

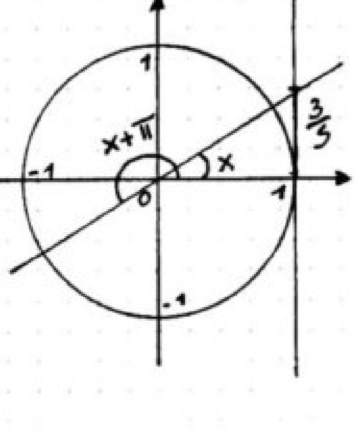
Pour l'étude de f, on peut alors se restreindre à l'étudier sur l'intervalle $[0; 2\pi]$, le graphe de la fonction se répétant ensuite à gauche et à droite de cet intervalle.

(3) Asymptotes: Comme il n'y a pas d'exclu, il n'y a pas d'asymptote verticale.
Comme la fonction est périodique, elle ne peut pas avoir d'asymptote non verticale.

(4) Intersections avec l'axe x: On pose $y = 0$ et on résoud $f(x) = 0$, i.e.

$3\cos(x) - 5\sin(x) = 0$	$+5\sin(x)$
$3\cos(x) = 5\sin(x)$	$:\cos(x)$
$3 = 5\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$:5$
$\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \dfrac{3}{5}$	

Comme $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$, cela revient à résoudre $\tan(x) = \dfrac{3}{5}$.



Dans l'intervalle $[0; 2\pi]$, on a 2 solutions:

$x = \tan^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right) = 0{,}54$ rad ($\cong 30{,}96°$)

$x = 0{,}54 + \pi = 3{,}682$ rad ($\cong 210{,}96°$)

Ainsi les zéros de f dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ sont $x = 0{,}54$ rad ($\cong 30{,}96°$) et $x = 3{,}682$ rad ($\cong 210{,}96°$).

(5) Tableau de signes: Les zéros de f sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ sont: $x = 0,54$ rad et $x = 3,682$ rad. Il n'y a pas d'exclu.
Le tableau de signes se présente de la manière suivante:

x	0		$0,54$		$3,682$		2π
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

pour $x = 0$, on a $f(x) = 3\cos(0) - 5\sin(0) = 3 \cdot 1 - 5 \cdot 0 = 3 > 0$,
pour $x = \pi$ $(= 3,14 \text{ rad})$, on a $f(x) = 3\cos(\pi) - 5\sin(\pi) =$
$= 3 \cdot (-1) - 5 \cdot 0 = -3 < 0$,
pour $x = 2\pi$, on a $f(2\pi) = f(0) = 3 > 0$.

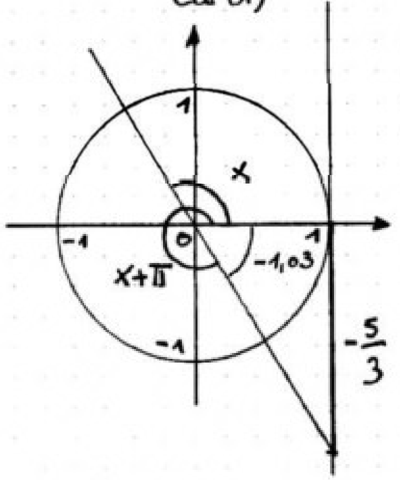
Ainsi, dans l'intervalle $[0; 2\pi]$, $f > 0$ sur $[0; 0,54]$ et $[3,682; 2\pi]$ et $f < 0$ sur $[0,54; 3682]$.

(6) Dérivée: Comme la dérivée de $\cos(x)$ est $-\sin(x)$ et celle de $\sin(x) = \cos(x)$, on a $f'(x) = -3\sin(x) - 5\cos(x)$.

(7) Points à tangente horizontale: On doit résoudre $f'(x) = 0$, i.e.

$$
\begin{array}{l|l}
-3\sin(x) - 5\cos(x) = 0 & +5\cos(x) \\
-3\sin(x) = 5\cos(x) & :\ \cos(x) \\
-3\,\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = 5 & :\ (-3) \\
\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\dfrac{5}{3} &
\end{array}
$$

Comme $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$, cela revient à résoudre $\tan(x) = -\dfrac{5}{3}$.



A la machine à calculer, on trouve:
$$x = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{3}\right) = -1,03 \quad (\cong -59,04°)$$
Ainsi, dans l'intervalle $[0; 2\pi]$, on a 2 solutions:
$$x = \pi - 1,03 = 2,11 \text{ rad } (\cong 120,96°) \text{ et}$$
$$x = 2,11 + \pi = 5,25 \text{ rad } (\cong 300,96°).$$

Ainsi les zéros de f dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ sont $x = 2,11$ rad $(\cong 120,96°)$ et $x = 5,25$ rad $(\cong 300,96°)$

(8) <u>Tableau de croissance:</u> Les zéros de f' sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ sont: $x = 2,11$ rad et $x = 5,25$ rad. Il n'y a pas d'exclu.
Le tableau de croissance se présente comme suit :

x	0		$2,11$		$5,25$		2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	minimum	$\nearrow$	maximum	$\searrow$	

pour $x=0$, on a $f'(x) = -3\sin(0) - 5\cos(0) = -3.0 - 5.1 = -5 < 0$,
pour $x = \pi$ ($= 3,14$ rad), on a $f'(x) = -3\sin(\pi) - 5\cos(\pi) =$
$= -3.0 - 5.(-1) = 5 > 0$,
pour $x = 2\pi$, on a $f'(2\pi) = f'(0) = -5 < 0$.

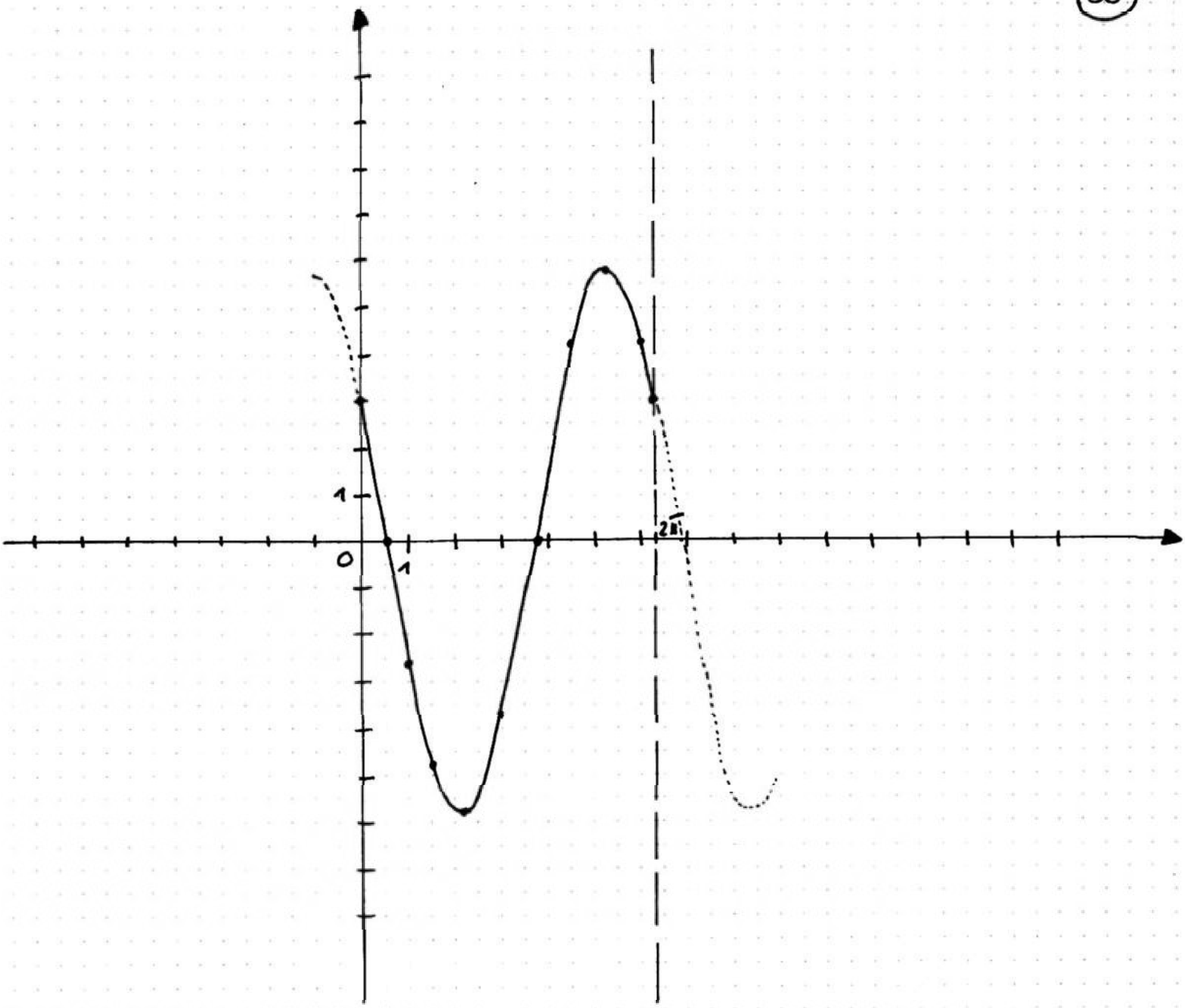
On a : $f(2,11) = 3\cos(2,11) - 5\sin(2,11) = -5,83$ et
$f(5,25) = 3\cos(5,25) - 5\sin(5,25) = 5,83$.

Ainsi f est décroissante sur $[0; 2,11]$, a un minimum au point $(2,11; -5,83)$, est croissante sur $[2,11; 5,25]$, a un maximum au point $(5,25; 5,83)$ et est décroissante sur $[5,25; 2\pi]$.

---

(9) <u>Graphe:</u> On a, en résumé:
(1) $D = \mathbb{R}$.
(2) f n'est ni paire, ni impaire.
f est périodique de période 2π et on étudie la fonction sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.
(3) Il n'y a aucune asymptote.
(4) Les zéros de f dans $[0; 2\pi]$ sont $x = 0,54$ rad ($= 30,96°$) et $x = 3,682$ rad ($= 210,96°$).
(5) $f > 0$ sur $[0; 0,54]$ et $[3,682; 2\pi]$ et $f < 0$ sur $[0,54; 3,682]$.
(7) Les zéros de f' dans $[0, 2\pi]$ sont $x = 2,11$ rad ($= 120,96°$) et $x = 5,25$ rad ($\cong 300,96°$).
(8) f est décroissante sur $[0; 2,11]$, a un minimum au point $(2,11; -5,83)$, est croissante sur $[2,11; 5,25]$, a un minimum au point $(5,25; 5,83)$ et est décroissante sur $[5,25; 2\pi]$.

Le graphe se présente alors comme suit:



x	0	1	1,5	3	4,5	6	2π
f(x)	3	-2,59	-4,78	-3,67	4,26	4,28	3

Exercice 9

On a $f(x) = \sin(x) - \sin^3(x)$

On connaît la formule valable pour tout x : $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.
On en déduit $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$.

Ainsi $\underline{\underline{f(x)}} = \sin(x)\left(1 - \sin^2(x)\right) = \underline{\underline{\sin(x)\cos^2(x)}}$, forme que l'on va utiliser.

① Domaine de définition : On peut calculer f pour toutes les valeurs de x.
Donc $\underline{\underline{D = \mathbb{R}}}$.

② Parité : On a $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$.
Calculons $f(-x)$.
On a $f(-x) = \sin(-x)\cos^2(-x) = -\sin(x)\cos^2(x) = -f(x)$.
Ainsi $\underline{\underline{f \text{ est impaire}}}$ (et, donc, le point $(0;0)$ est centre de symétrie du graphe de f).

Périodicité : les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π :
on a $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.
Ainsi $f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi)\cos^2(x + 2\pi) = \sin(x)\cos^2(x)$.

Donc $\underline{\underline{f \text{ est périodique de période } 2\pi}}$.

Pour l'étude de f, on peut alors se restreindre à l'étudier sur l'intervalle $\underline{\underline{[0; 2\pi]}}$, le graphe de la fonction se répétant ensuite à gauche et à droite de cet intervalle.

③ Asymptotes : Comme il n'y a pas d'exclu, il n'y a pas d'asymptote verticale.
Comme la fonction est périodique, elle ne peut pas avoir d'asymptote non verticale.

④ Intersections avec l'axe x : On pose $y = 0$ et on résoud $f(x) = 0$, i.e.
$$\sin(x)\cos^2(x) = 0.$$
Comme un produit nul ne peut avoir qu'un de ses facteurs nul, on a :
soit $\sin(x) = 0$,
soit $\cos^2(x) = 0$, i.e. $\cos(x) = 0$.
Sur l'intervalle $[0; 2\pi]$, $\sin(x) = 0$ si $x = 0$ ou $x = \pi$.
Sur l'intervalle $[0; 2\pi]$, $\cos(x) = 0$ si $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$.

Ainsi les zéros de f sont $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$ et $x = \frac{3\pi}{2}$ (sur l'intervalle $[0; 2\pi]$).

5) Tableau de signes: Les zéros de f sur l'intervalle $[0;2\pi]$ sont: $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\pi$ et $x=\frac{3\pi}{2}$. Il n'y a pas d'exclu.
Le tableau de signe se présente de la manière suivante:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f(x)$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0

pour $x=\frac{\pi}{4}$, $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=0,35>0$,
pour $x=\frac{3\pi}{4}$, $f(x)=\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)=0,35>0$,
pour $x=\frac{5\pi}{4}$, $f(x)=\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\cos^2\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-0,35<0$,
pour $x=\frac{7\pi}{4}$, $f(x)=\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\cos^2\left(\frac{7\pi}{4}\right)=-0,35$.

Ainsi $f>0$ sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$ et $f<0$ sur $\left]\pi;\frac{3\pi}{2}\right[$ et $\left]\frac{3\pi}{2};2\pi\right[$.

6) Dérivée: On a $f(x)=\sin(x)\cos^2(x)=u\cdot v$ où $u=\sin(x)$ et $v=\cos^2(x)$.
On a $u'=\cos(x)$.
Calculons v', avec $v=\cos^2(x)$, une fonction composée:

$$v:\ x\longmapsto z=\cos(x)\longmapsto y=z^2$$

$\downarrow$ dérivée $\qquad\qquad \downarrow$ dérivée

$$z'=-\sin(x) \qquad\qquad y'=2z=2\cos(x).$$

Ainsi $v'=z'\cdot y'=-\sin(x)\cdot 2\cos(x)=-2\sin(x)\cos(x)$.

Donc $f'(x)=u'v+uv'=\cos(x)\cdot\cos^2(x)+\sin(x)\cdot\left(-2\sin(x)\cos(x)\right)=$
$=\cos^3(x)-2\sin^2(x)\cos(x)$.

En utilisant à nouveau la relation $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$, i.e. $\sin^2(x)=1-\cos^2(x)$, on obtient:

$$f'(x)=\cos^3(x)-2\left(1-\cos^2(x)\right)\cos(x)=$$
$$=\cos^3(x)-2\cos(x)+2\cos^3(x)=$$
$$=3\cos^3(x)-2\cos(x).$$

7) Points à tangente horizontale: On doit résoudre $f'(x)=0$, i.e.

$$3\cos^3(x)-2\cos(x)=0$$
$$\cos(x)\left(3\cos^2(x)-2\right)=0 \qquad \text{mise en évidence}$$

Le produit étant nul, un des 2 facteurs est nul:
soit $\cos(x)=0$,
soit $3\cos^2(x)-2=0$.

Sur l'intervalle $[0; 2\pi]$, $\cos(x) = 0$ si $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.

Sur l'intervalle $[0; 2\pi]$,

$$\begin{array}{rl|l} 3\cos^2(x) - 2 = 0 & & +2 \\ 3\cos^2(x) = 2 & & :3 \\ \cos^2(x) = \frac{2}{3} & & \sqrt{} \\ \cos(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} & & \end{array}$$

Si $\cos(x) = \sqrt{\frac{2}{3}}$, alors $x = \cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 0{,}615$ rad $(= 35{,}26°)$
ou $x = 2\pi - 0{,}615 = 5{,}668$ rad $(= 324{,}74°)$.

Si $\cos(x) = -\sqrt{\frac{2}{3}}$, alors $x = \cos^{-1}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 2{,}526$ rad $(= 144{,}74°)$
ou $x = 2\pi - 2{,}526 = 3{,}757$ rad $(= 215{,}26°)$.

Ainsi les zéros de f' sont $x = 0{,}615$ rad, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = 2{,}526$ rad,
$x = 3{,}757$ rad, $x = \frac{3\pi}{2}$ et $x = 5{,}668$ rad.

---

(8) Tableau de croissance: Les zéros de f' dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ sont:
$x = 0{,}615$ rad, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = 2{,}526$ rad, $x = 3{,}757$ rad, $x = \frac{3\pi}{2}$ et $x = 5{,}668$ rad.
Il n'y a pas d'exclu.
Le tableau de croissance se présente comme suit:

x	0		$0{,}615$		$\frac{\pi}{2}$		$2{,}526$		$3{,}757$		$\frac{3\pi}{2}$		$5{,}668$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

pour $x = 0{,}5$ rad, $f'(x) = 3\cos^3(0{,}5) - 2\cos(0{,}5) = 0{,}27 > 0$,
pour $x = 1$ rad, $f'(x) = 3\cos^3(1) - 2\cos(1) = -0{,}61 < 0$,
pour $x = 2$ rad, $f'(x) = 3\cos^3(2) - 2\cos(2) = 0{,}62 > 0$,
pour $x = 3$ rad, $f'(x) = 3\cos^3(3) - 2\cos(3) = -0{,}93 < 0$,
pour $x = 4$ rad, $f'(x) = 3\cos^3(4) - 2\cos(4) = 0{,}47 > 0$,
pour $x = 5$ rad, $f'(x) = 3\cos^3(5) - 2\cos(5) = -0{,}50 < 0$,
pour $x = 6$ rad, $f'(x) = 3\cos^3(6) - 2\cos(6) = 0{,}74 > 0$.

Ainsi f est croissante sur $[0; 0{,}615[$, sur $]\frac{\pi}{2}; 2{,}526[$, sur $]3{,}757; \frac{3\pi}{2}[$ et sur $]5{,}668; 2\pi]$ et est décroissante sur $]0{,}615; \frac{\pi}{2}[$, $]2{,}526; 3{,}757[$ et sur $]\frac{3\pi}{2}; 5{,}668[$.

On a: $f(0{,}615) = \sin(0{,}615) \cdot \cos^2(0{,}615) = 0{,}385$,
$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, puisque $x = \frac{\pi}{2}$ est un zéro de f,

$f(2{,}526) = \sin(2{,}526) \cdot \cos^2(2{,}526) = 0{,}385,$
$f(3{,}757) = \sin(3{,}757) \cdot \cos^2(3{,}757) = -0{,}385,$
$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$, puisque $x = \frac{3\pi}{2}$ est un zéro de f,
$f(5{,}668) = \sin(5{,}668) \cdot \cos^2(5{,}668) = -0{,}385.$

Donc f a des minimums en $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$, $(3{,}757; -0{,}385)$ et $(5{,}668; -0{,}385)$ et des maximums en $(0{,}615; 0{,}385)$, $(2{,}526; 0{,}385)$ et $\left(\frac{3\pi}{2}; 0\right)$.

---

(9) Graphe: En résumé, on a: $f(x) = \sin(x)\cos^2(x)$

(1) $D = \mathbb{R}$.

(2) f est impaire (le point $(0;0)$ est centre de symétrie du graphe de f).
f est périodique de période 2π et on étudie la fonction sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

(3) f n'a pas d'asymptote.

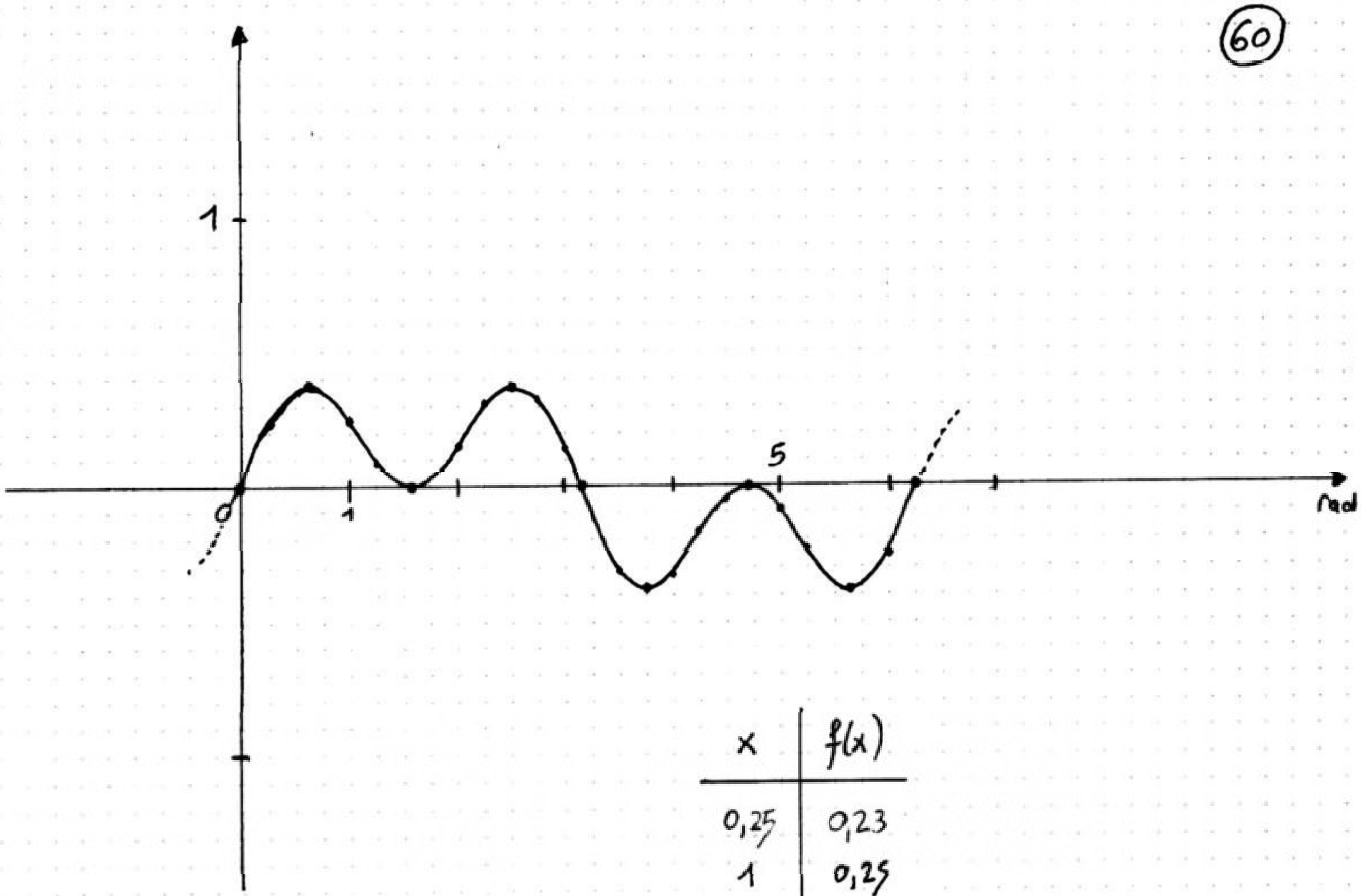
(4) Les zéros de f sont $x=0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.

(5) $f > 0$ sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et $\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ et $f < 0$ sur $\left]\pi; \frac{3\pi}{2}\right[$ et $\left]\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right[$.

(7) Les zéros de f' sont: $x = 0{,}615$ rad, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = 2{,}526$ rad, $x = 3{,}757$ rad, $x = \frac{3\pi}{2}$ et $x = 5{,}668$ rad.

(8) f est croissante sur $[0; 0{,}615[$, sur $\left]\frac{\pi}{2}; 2{,}526\right[$, sur $\left]3{,}757; \frac{3\pi}{2}\right[$ et sur $]5{,}668; 2\pi[$ et est décroissante sur $\left]0{,}615; \frac{\pi}{2}\right[$, $]2{,}526; 3{,}757[$ et sur $\left]\frac{3\pi}{2}; 5{,}668\right[$.
f a des minimums en $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$, $(3{,}757; -0{,}385)$ et $(5{,}668; -0{,}385)$ et des maximums en $(0{,}615; 0{,}385)$, $(2{,}526; 0{,}385)$ et $\left(\frac{3\pi}{2}; 0\right)$.

Le graphe de f se présente donc comme suit:



x	f(x)
0,25	0,23
1	0,25
1,25	0,09
2	0,16
2,25	0,31
2,75	0,33
3	0,14
3,5	-0,31
4	-0,32
4,25	-0,18
4,5	-0,04
5	-0,08
5,25	-0,23
6	-0,26

Exercice 10:

On a: $f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x}$.

a) ① Domaine de définition: Comme on divise par x, il faut que $x \neq 0$.
De plus, comme on a $\ln(x)$ dans la fonction, on doit avoir $x > 0$.
Ainsi $D =]0; +\infty[$ (ou $\mathbb{R}_+^*$).

② Parité: Comme on doit avoir $x > 0$, on ne peut pas calculer $f(-x)$.
Ainsi f n'est ni paire, ni impaire.
Périodicité: Comme f n'a pas de fonctions trigonométriques, f n'est pas périodique.

③ Asymptotes verticales: Comme $D =]0; +\infty[$, il est possible que f ait une asymptote verticale au bord de son intervalle, i.e. en $x = 0$.
Calculons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ (on ne peut pas calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x)$ puisqu'on doit avoir $x > 0$).
Si $x = 0{,}000001$, on a $f(x) = -12815510{,}56$.
On conclut donc que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$.
Ainsi $x = 0$ est une asymptote verticale et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$.

Asymptote non verticale: Comme $D =]0; +\infty[$, il suffit de considérer le cas $x \longrightarrow +\infty$.
Comme f n'est pas une fonction rationnelle (polynôme sur polynôme), on va chercher $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et, si m existe, $h = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$.

Si m et h existe, alors $y = mx + h$ sera asymptote.
Si $x = 1'000'000$, on a $\frac{f(x)}{x} = \frac{0{,}000014816}{1'000'000} = 1{,}48 \cdot 10^{-11}$.
Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ et donc m existe et vaut 0.

Si $x = 1'000'000$, on a $f(x) - mx = f(x) = 0{,}000014816$.
Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = 0$ et donc $h = 0$.
On en conclut que $y = 0$ est asymptote horizontale à $+\infty$.

(4) Intersections avec l'axe x: On pose $y=0$ et on résoud donc $f(x)=0$, i.e.

$$\frac{1+\ln(x)}{x}=0 \quad \Big| \cdot x$$
$$1+\ln(x)=0 \quad \Big| -1$$
$$\ln(x)=-1 \quad \Big| e^{\cdots}$$
$$x=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

Ainsi f a un seul zéro en $x=\frac{1}{e}$ $(\cong 0{,}368)$

Intersection avec l'axe y: Comme $D=\,]0;+\infty[$, on a $x>0$. On devrait pouvoir poser $x=0$ et calculer $f(0)$, mais c'est exclu.
Par conséquent, f ne coupe pas l'axe y.

(5) Tableau de signes: Le zéro de f est $x=\frac{1}{e}$. On a $D=\,]0;+\infty[$.
Le tableau de signes a donc la forme suivante:

x	0		$\frac{1}{e}$	
$f(x)$	//////	$-$	0	$+$

pour $x=0{,}1$, $f(x)=\frac{1+\ln(0{,}1)}{0{,}1}=-13{,}03<0$,

pour $x=1$, $f(x)=\frac{1+\ln(1)}{1}=1>0$.

Ainsi $f<0$ sur $]0;\frac{1}{e}[$ et $f>0$ sur $]\frac{1}{e};+\infty[$.

(6) Dérivée: On a $f(x)=\frac{1+\ln(x)}{x}=\frac{u}{v}$ avec $u=1+\ln(x)$ et $v=x$.

On a: $u'=\frac{1}{x}$ et $v'=1$.

Donc: $f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(1+\ln(x))\cdot 1}{x^2}=\frac{1-1-\ln(x)}{x^2}=$

$$=\frac{-\ln(x)}{x^2}.$$

(7) Points à tangente horizontale: On doit résoudre $f'(x)=0$, i.e.

$$\frac{-\ln(x)}{x^2}=0 \quad \Big| \cdot x^2$$
$$-\ln(x)=0 \quad \Big| \cdot(-1)$$
$$\ln(x)=0 \quad \Big| e^{\cdots}$$
$$x=e^0=1$$

Ainsi f' a un zéro en $x=1$.

8 Tableau de croissance: f' a un zéro en $x = 1$. $D =]0; +\infty[$.

Le tableau de croissance se présente comme suit:

x	0		1	
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	maximum	$\searrow$

pour $x = 0{,}5$, $f'(x) = \dfrac{-\ln(0{,}5)}{0{,}5^2} = 2{,}77 > 0$,

pour $x = 2$, $f'(x) = \dfrac{-\ln(2)}{2^2} = -0{,}17 < 0$.

On a $f(1) = \dfrac{1 + \ln(1)}{1} = \dfrac{1}{1} = 1$.

Ainsi f est croissante sur $]0; 1[$, décroissante sur $]1; +\infty[$ et a un maximum en $(1; 1)$.

---

9 Graphe: En résumé, on a:

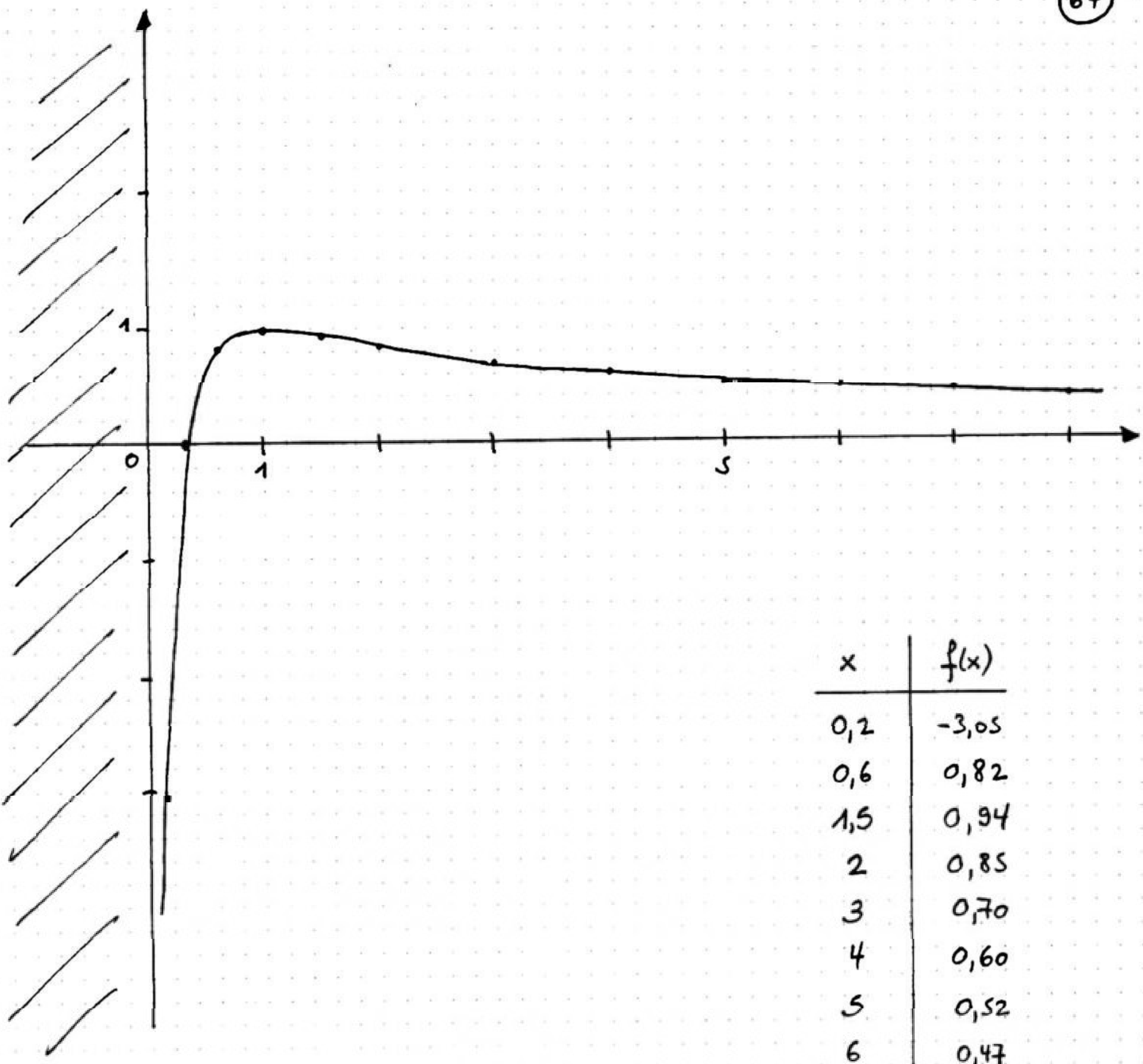
1. $D =]0; +\infty[$.
2. f n'est ni paire, ni impaire, ni périodique.
3. $x = 0$ est asymptote verticale et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$.

   $y = 0$ est asymptote horizontale à $+\infty$.
4. $x = \frac{1}{e}$ est le zéro de f.

   f ne coupe pas l'axe y.
5. $f < 0$ sur $]0; \frac{1}{e}[$ et $f > 0$ sur $]\frac{1}{e}; +\infty[$.

7. $x = 1$ est le zéro de f'.
8. f est croissante sur $]0; 1[$, décroissante sur $]1; +\infty[$ et a un maximum en $(1; 1)$.

Le graphe de f se présente donc comme suit:



x	$f(x)$
0,2	-3,05
0,6	0,82
1,5	0,94
2	0,85
3	0,70
4	0,60
5	0,52
6	0,47
7	0,42
8	0,38

b) On peut écrire $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$, avec $x \in]0 ; +\infty[$.

Ainsi F, primitive de f, sera la somme de la primitive de $\frac{1}{x}$ et de la primitive de $\frac{\ln(x)}{x}$.

La primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln(|x|) = \ln(x)$ (puisque $x > 0$).

Cherchons la primitive $G(x)$ de $g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

On peut écrire $g(x) = \ln(x) \cdot \frac{1}{x}$.

On va utiliser l'intégration par parties et la relation suivante :

primitive de $(u' \cdot v) = u \cdot v -$ primitive de $(u \cdot v')$.

On peut écrire $g(x) = \ln(x) \cdot \frac{1}{x} = u' \cdot v$ avec $u' = \frac{1}{x}$ et $v = \ln(x)$ (on ne choisit pas $u' = \ln(x)$, car alors u devient plus compliqué).

Si $u' = \frac{1}{x}$, on a alors $u = \ln(|x|) = \ln(x)$ (puisque $x > 0$).
Si $v = \ln(x)$, on a alors $v' = \frac{1}{x}$.

Ainsi $G(x) =$ primitive de $g(x) =$ primitive de $\left(\ln(x) \cdot \frac{1}{x}\right) =$

$=$ primitive de $(u' \cdot v) = u \cdot v -$ primitive de $(u \cdot v') =$

$= \ln(x) \cdot \ln(x) -$ primitive de $\left(\ln(x) \cdot \frac{1}{x}\right) =$

$= \ln(x) \cdot \ln(x) -$ primitive de $g(x) =$

$= \ln(x) \cdot \ln(x) - G(x)$.

On a donc obtenu : $G(x) = (\ln(x))^2 - G(x)$.
En additionnant $G(x)$ des 2 côtés de cette égalité, on trouve :

$$2\,G(x) = (\ln(x))^2.$$

Par division par 2, on conclut que $G(x) = \frac{(\ln(x))^2}{2}$.

Finalement $F(x) =$ primitive de $f(x) =$

$=$ primitive de $\frac{1}{x}$ + primitive de $\frac{\ln(x)}{x} =$

$= \ln(x) + G(x) = \underline{\underline{\ln(x) + \frac{(\ln(x))^2}{2} + c}}$ (c est une constante).

c) On a $F(x) = \ln(x) + \frac{(\ln(x))^2}{2}$, primitive de $f(x)$.

Ainsi $I = \int_{e^{-2}}^{1} f(x)\,dx = F(1) - F(e^{-2})$.

On a $F(1) = \ln(1) + \frac{(\ln(1))^2}{2} = 0 + \frac{0^2}{2} = 0$,

et $F(e^{-2}) = \ln(e^{-2}) + \frac{(\ln(e^{-2}))^2}{2} = -2 + \frac{(-2)^2}{2} = -2 + \frac{4}{2} =$

$= -2 + 2 = 0$ (puisque les fonctions $\ln(\dots)$ et $e^{\dots}$ sont des fonctions inverses qui s'annulent).

Par conséquent $I = 0 - 0 = \underline{\underline{0}}$.

Exercice 11.

On a $f(x) = \dfrac{4x^3+54x}{5x^2+5}$.

a) Effectuons la division euclidienne du numérateur par le dénominateur :

$$\begin{array}{r|l} 4x^3+54x & 5x^2+5 \\ \cline{2-2} -(4x^3+4x) & \frac{4}{5}x \\ \cline{1-1} 50x & \end{array}$$

On peut alors écrire $f(x) = \text{quotient} + \dfrac{\text{reste}}{\text{diviseur}} =$

$$= \frac{4}{5}x + \frac{50x}{5x^2+5} = \frac{4}{5}x + \frac{50x}{5(x^2+1)} = \underline{\underline{\frac{4}{5}x + \frac{10x}{x^2+1}}}.$$

b) ① Domaine de définition: Comme f est une fonction rationnelle (polynôme sur polynôme), il faut que le dénominateur soit différent de zéro.
Voyons quand $5x^2+5=0$:

$$\begin{array}{r|l} 5x^2+5=0 & -5 \\ 5x^2=-5 & :5 \\ x^2=-1 & \sqrt{} \\ x=\sqrt{-1} & \end{array}$$

Or $\sqrt{-1}$ n'existe pas.
Ainsi $5x^2+5$ n'est jamais zéro.
Par conséquent : $\underline{\underline{D=\mathbb{R}.}}$

② Parité: Calculons $f(-x)$.
On a $f(-x) = \dfrac{4(-x)^3+54\cdot(-x)}{5(-x)^2+5} = \dfrac{-4x^3-54x}{5x^2+5} = \dfrac{-(4x^3+54x)}{5x^2+5} =$
$= -\dfrac{4x^3+54x}{5x^2+5} = -f(x)$.

On en conclut donc que $f(-x) = -f(x)$, c'est-à-dire que <u>f est impaire</u> ($(0;0)$ est un centre de symétrie pour le graphe de f).

Périodicité: Comme f ne contient pas de fonctions trigonométriques, <u>f n'est pas périodique.</u>

③ Asymptote verticale: Comme f n'a pas d'exclu, f n'a <u>pas d'asymptote verticale.</u>

Asymptote non verticale: Comme f est une fonction rationnelle (polynôme sur polynôme), il faut effectuer la division euclidienne du numérateur par le dénominateur et le quotient est l'asymptote non verticale.

Cela a été fait à la question a), où on avait obtenu

$$f(x) = \frac{4}{5}x + \frac{10x}{x^2+1} \quad , \text{ où } \frac{4}{5}x \text{ est le quotient.}$$

Ainsi $y = \frac{4}{5}x$ est l'asymptote oblique.

Comme $\frac{10x}{x^2+1} > 0$ si $x > 0$, le graphe de f sera au-dessus de l'asymptote oblique à $+\infty$.

Comme $\frac{10x}{x^2+1} < 0$ si $x < 0$, le graphe de f sera au-dessous de l'asymptote oblique à $-\infty$.

(4) Intersections avec l'axe x: On pose $y=0$ et on résoud $f(x)=0$, i.e.

$\frac{4x^2+54x}{5x^2+x} = 0$	$\cdot (5x^2+x)$
$4x^3+54x = 0$	mise en évidence
$2x(2x^2+27) = 0$	

Le produit étant nul, on en conclut que:

soit $2x=0$, i.e $x=0$,

soit $2x^2+27=0$, i.e. $2x^2=-27$, i.e $x^2=-13{,}5$ qui n'a aucune solution (puisque $x^2 \geq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$).

Ainsi, l'unique zéro de f est $x=0$.

Intersection avec l'axe y: On pose $x=0$ et on calcule $f(0)$:

On a $f(0) = \frac{0}{5} = 0$.

Ainsi, le graphe de f coupe l'axe y en $y=0$.

(5) Tableau de signes: le zéro de f est $x=0$. Il n'y a pas d'exclu.

Le tableau de signes se présente alors comme suit:

x		0	
$f(x)$	$-$	0	$+$

pour $x=-1$, $f(x) = \frac{4(-1)^3+54(-1)}{5(-1)^2+5} = \frac{-4-54}{5+5} < 0$,

pour $x=1$, $f(x) = \frac{4\cdot 1^3+54\cdot 1}{5\cdot 1^2+5} > 0$.

Ainsi $f<0$ sur $]-\infty;0[$ et $f>0$ sur $]0;+\infty[$

(6) Dérivée: On a $f(x) = \dfrac{4x^3+54x}{5x^2+5} = \dfrac{u}{v}$ avec $u = 4x^3+54x$ et $v = 5x^2+5$.

On a $u' = 12x^2+54$ et $v' = 10x$.

Ainsi $f'(x) = \dfrac{u'v-uv'}{v^2} = \dfrac{(12x^2+54)(5x^2+5)-(4x^3+54x)\cdot 10x}{(5x^2+5)^2} =$

$= \dfrac{60x^4+60x^2+270x^2+270-(40x^4+540x^2)}{(5x^2+5)^2} =$

$= \dfrac{60x^4+330x^2+270-40x^4-540x^2}{(5x^2+5)^2} = \dfrac{20x^4-210x^2+270}{(5x^2+5)^2}$.

(7) Points à tangente horizontale: On doit résoudre $f'(x)=0$, i.e.

$$\frac{20x^4-210x^2+270}{(5x^2+5)^2} = 0 \quad \Big| \cdot (5x^2+5)^2$$
$$20x^4-210x^2+270 = 0 \quad \Big| : 10$$
$$2x^4-21x^2+27 = 0$$

Posons $y = x^2$. Comme $y^2 = (x^2)^2 = x^4$, on obtient l'équation $2y^2-21y+27=0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $ay^2+by+c=0$ avec $a=2$, $b=-21$ et $c=27$.

Le discriminant Δ vaut $\Delta = b^2-4ac = (-21)^2-4\cdot 2\cdot 27 =$
$= 441-216 = 225$.

Ainsi les solutions de $2y^2-21y+27=0$ sont

$$y = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{21\pm\sqrt{225}}{2\cdot 2} = \frac{21\pm 15}{4} = \begin{cases} \dfrac{21+15}{4} = \dfrac{36}{4} = 9 \\ \dfrac{21-15}{4} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Comme $x^2 = y$, on a:

Si $y = 9$, i.e. $x^2 = 9$, on obtient $x=-3$ et $x=3$;

Si $y = \frac{3}{2}$, i.e. $x^2 = \frac{3}{2}$, on obtient $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ et $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Ainsi les zéros de f' sont $x=-3$, $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$ ($\cong -1{,}22$), $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ ($\cong 1{,}22$) et $x=3$.

(8) Tableau de croissance: Les zéros de f' sont $x=-3$, $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ et $x=3$. Il n'y a pas d'exclu.

Le tableau de croissance se présente de la manière suivante:

x		-3		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

pour $x=-4$, $f'(x)=\dfrac{20\cdot(-4)^4-210\cdot(-4)^2+270}{(5\cdot(-4)^2+5)^2}>0$,

pour $x=-2$, $f'(x)=\dfrac{20\cdot(-2)^4-210\cdot(-2)^2+270}{(5\cdot(-2)^2+5)^2}<0$,

pour $x=-1$, $f'(x)=\dfrac{20\cdot(-1)^4-210\cdot(-1)^2+270}{(5\cdot(-1)^2+5)^2}>0$,

pour $x=2$, $f'(x)=\dfrac{20\cdot2^4-210\cdot2^2+270}{(5\cdot2^2+5)^2}<0$,

pour $x=4$, $f'(x)=\dfrac{20\cdot4^4-210\cdot4^2+270}{(5\cdot4^2+5)^2}>0$.

On a $f(-3)=\dfrac{4\cdot(-3)^3+54\cdot(-3)}{5\cdot(-3)^2+5}=\dfrac{-108-162}{45+5}=-\dfrac{270}{50}=-\dfrac{27}{5}$,

$f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\dfrac{4\cdot\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3+54\cdot\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}{5\cdot\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2+5}=-5{,}879$,

$f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\dfrac{4\cdot\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3+54\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}}{5\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2+5}=5{,}879$

$f(3)=\dfrac{4\cdot3^3+54\cdot3}{5\cdot3^2+5}=\dfrac{108+162}{45+5}=\dfrac{270}{50}=\dfrac{27}{5}$.

Ainsi f est croissante sur $]-\infty;-3[$, sur $]-\sqrt{\frac{3}{2}};\sqrt{\frac{3}{2}}[$ et sur $]3;+\infty[$, décroissante sur $]-3;-\sqrt{\frac{3}{2}}[$ et sur $]\sqrt{\frac{3}{2}};3[$, a des maximums en $\left(-3;-\frac{27}{5}\right)$ et $\left(\sqrt{\frac{3}{2}};5{,}879\right)$ et des minimums en $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}};-5{,}879\right)$ et $\left(3;\frac{27}{5}\right)$.

---

⑨ Graphe: En résumé, on a:

① $D=\mathbb{R}$.

② f est impaire, mais pas périodique.

③ f n'a pas d'asymptote verticale.
f a une asymptote oblique en $y=\frac{4}{5}x$ et le graphe de f est au-dessus de cet asymptote à $+\infty$ et au-dessous de cet asymptote à $-\infty$.

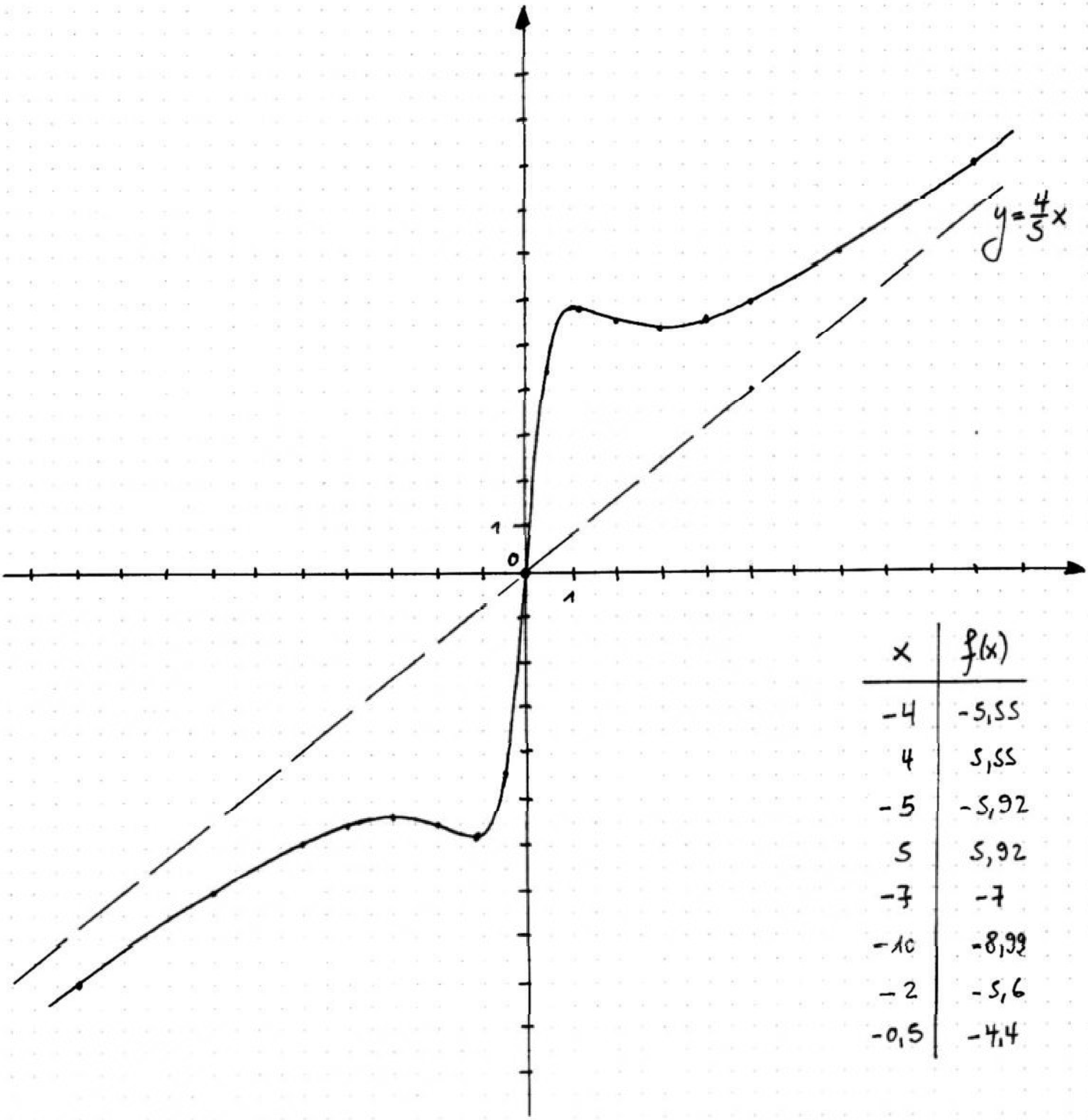
④ Le seul zéro de f est $x=0$.
Le graphe de f coupe l'axe y en $y=0$.

⑤ $f<0$ sur $]-\infty;0[$ et $f>0$ sur $]0;+\infty[$.

⑦ Les zéros de f' sont $x=-3$, $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ et $x=3$.

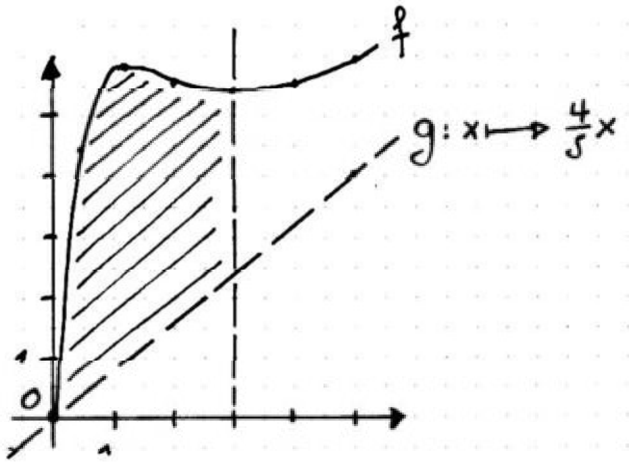
⑧ f est croissante sur $]-\infty;-3[$, sur $]-\sqrt{\frac{3}{2}};\sqrt{\frac{3}{2}}[$ et sur $]3;+\infty[$, décroissante sur $]-3;-\sqrt{\frac{3}{2}}[$ et sur $]\sqrt{\frac{3}{2}};3[$, a des maximums en $\left(-3 ; -\frac{27}{5}\right)$ et $\left(\sqrt{\frac{3}{2}} ; 5,879\right)$ et des minimums en $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}} ; -5,879\right)$ et $\left(3 ; \frac{27}{5}\right)$.

Le graphe de f se présente comme suit :



x	$f(x)$
-4	$-5,55$
4	$5,55$
-5	$-5,92$
5	$5,92$
-7	-7
-10	$-8,99$
-2	$-5,6$
$-0,5$	$-4,4$

c)



On a $f > g$ ($g(x) = \frac{4}{5}x$ asymptote oblique), sur l'intervalle $]0;3[$.

Ainsi : aire hachurée $= \int_0^3 (f(x) - g(x))\,dx$.

Comme, d'après a), $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = \frac{4}{5}x + \frac{10x}{x^2+1}$, on a :

$f(x) - g(x) = \frac{4}{5}x + \frac{10x}{x^2+1} - \frac{4}{5}x = \frac{10x}{x^2+1}$.

Il s'agit donc de trouver une primitive F de $f(x) - g(x)$ et on aura alors : aire hachurée $= F(3) - F(0)$.

Cherchons une primitive F de $f(x) - g(x) = \frac{10x}{x^2+1}$.

La dérivée de $\ln(x)$ est $\frac{1}{x}$.

La dérivée de $\ln(x^2+1)$ est :

$$x \longmapsto z = x^2+1 \longmapsto y = \ln(z)$$

$$\downarrow \text{dérivée} \qquad \downarrow \text{dérivée}$$

$$z' = 2x \qquad y' = \frac{1}{z} = \frac{1}{x^2+1}$$

$\Rightarrow$ la dérivée de $\ln(x^2+1)$ est $z' \cdot y' = 2x \cdot \frac{1}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}$.

On en déduit que la dérivée de $5\ln(x^2+1)$ est $5 \cdot \frac{2x}{x^2+1} = \frac{10x}{x^2+1}$

et, donc, qu'une primitive de $\frac{10x}{x^2+1}$ est $F(x) = 5\ln(x^2+1)$.

On a : $F(3) = 5\ln(3^2+1) = 5\ln(10)$ et

$F(0) = 5\ln(1) = 0$.

On en conclut que l'aire hachurée est $\underline{5\ln(10)}$ ($\cong 11{,}51$).

d) On doit chercher l'équation de la tangente au graphe de f en $x_0 = 0$.

On sait qu'elle sera de la forme $y = mx + h$, où $m = f'(x_0)$.

On sait, d'après l'étude ci-dessous, que $f'(x) = \frac{20x^4 - 210x^2 + 270}{(5x^2+5)^2}$.

Ainsi $f'(x_0) = f(0) = \frac{270}{5^2} = \frac{270}{25} = \frac{54}{5}$.

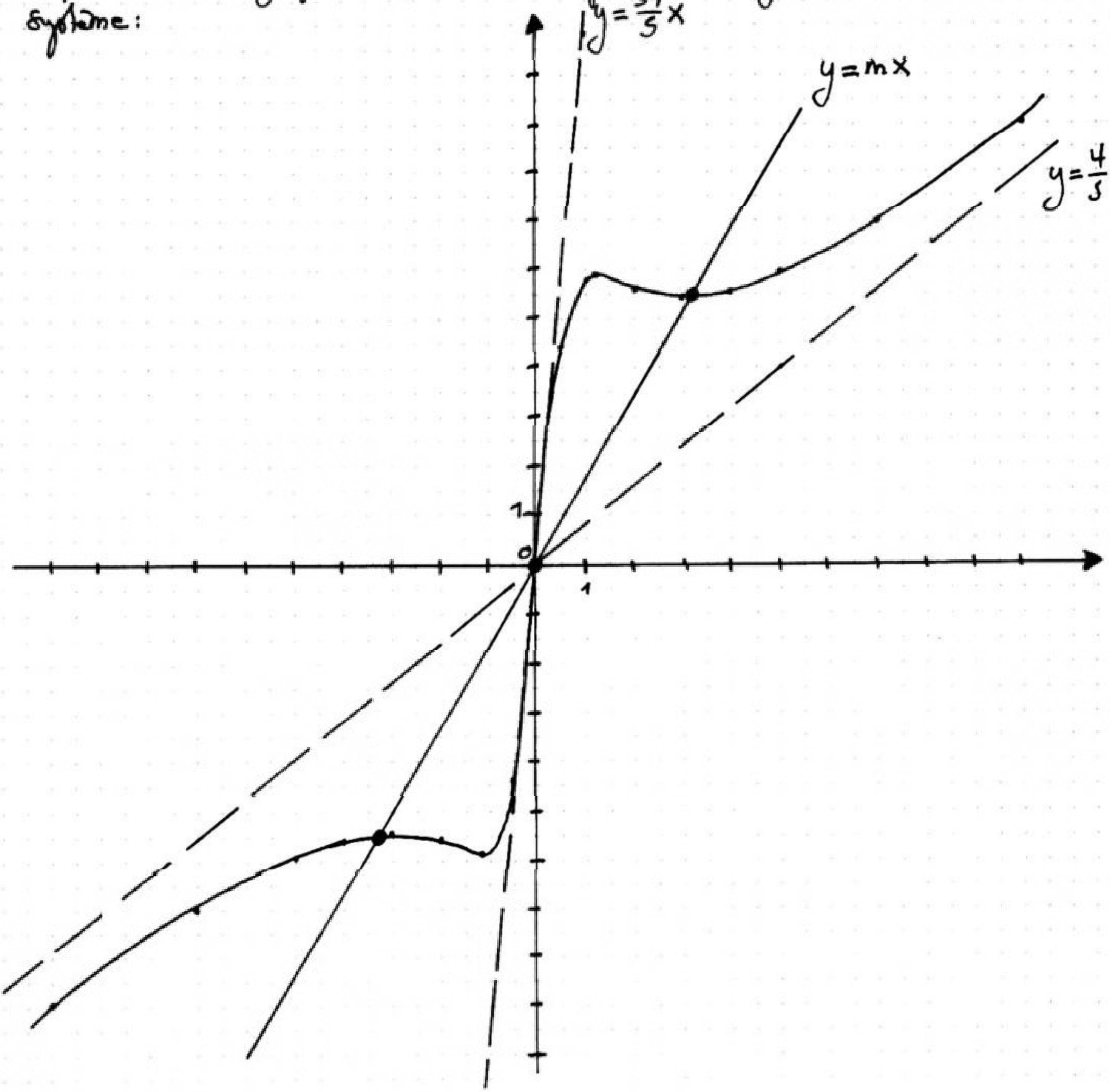
Donc $m = \frac{54}{5}$ et l'équation de la tangente s'écrit $y = \frac{54}{5}x + h$.

Le point $(0; f(x_0))$ est un point de la tangente.
Comme $f(x_0) = f(0) = 0$, c'est le point $(0;0)$.

Par substitution dans $y = \frac{54}{5}x + h$, on obtient $0 = \frac{54}{5} \cdot 0 + h$, et, donc, $h = 0$.

Ainsi l'équation de la tangente au graphe de f à l'origine est $y = \frac{54}{5}x$.

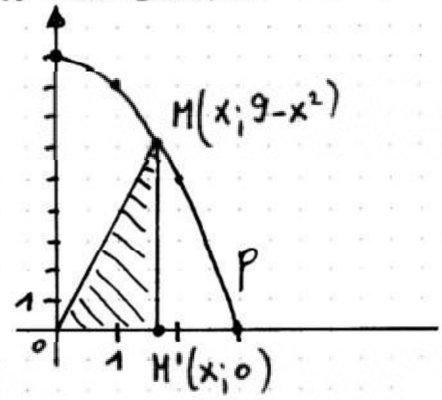
e) Représentons le graphe de f et sa tangente à l'origine dans le même système:



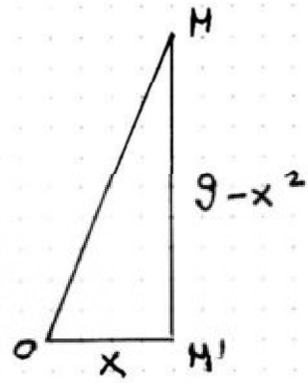
Pour que $y = mx$ (où m est sa pente) coupe en 3 points le graphe de f, il faut que le graphe de $y = mx$ soit compris entre celui de $y = \frac{4}{5}x$ et celui de $y = \frac{54}{5}x$, i.e. que sa pente soit entre $\frac{4}{5}$ et $\frac{54}{5}$.
Autrement dit, il faut que $\frac{4}{5} < m < \frac{54}{5}$.

Exercice 12

a) On a la parabole $p : y = 9 - x^2$.
M est un point de p situé dans le premier quadrant : la première coordonnée de M est $x > 0$ et sa seconde coordonnée est $y = 9 - x^2$ avec $y > 0$: $M(x ; 9 - x^2)$, avec $x > 0$ et $9 - x^2 > 0$.
La projection orthogonale de M sur l'axe des x est $M'(x ; 0)$ $(x > 0)$.
Géométriquement cela donne :



On considère l'aire du triangle hachuré :



On a aire triangle $OM'M = \frac{1}{2} x (9 - x^2)$.
Il faut trouver x telle que cette aire soit maximum.

En posant $f(x) = \frac{1}{2} x (9 - x^2)$, on doit trouver le maximum de f sur l'intervalle $[0 ; 3]$.

Commençons par calculer $f'(x)$:
on a $f(x) = \frac{1}{2} x (9 - x^2) = \frac{9}{2} x - \frac{1}{2} x^3$;
Ainsi $f'(x) = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} x^2$.

Résolvons $f'(x) = 0$:

$$\begin{array}{rl|l} \frac{9}{2} - \frac{3}{2} x^2 &= 0 & \cdot 2 \\ 9 - 3x^2 &= 0 & + 3x^2 \\ 3x^2 &= 9 & : 3 \\ x^2 &= 3 & \sqrt{} \\ x &= \pm\sqrt{3} & \end{array}$$

Comme on veut $x > 0$, on obtient $x = \sqrt{3}$.
Vérifions que $x = \sqrt{3}$ est bien la valeur qui rend l'aire du triangle OMM' (donc $f(x)$) maximum.

Pour cela, on fait un tableau de croissance sur l'intervalle $[0;3]$:

x	0		$\sqrt{3}$		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	

Si $x=1$, $f'(x)=\frac{9}{2}-\frac{3}{2}\cdot 1^2=\frac{9}{2}-\frac{3}{2}=\frac{6}{2}=3>0$,

si $x=2$, $f'(x)=\frac{9}{2}-\frac{3}{2}\cdot 2^2=\frac{9}{2}-\frac{3}{2}\cdot 4=\frac{9}{2}-\frac{12}{2}=-\frac{3}{2}<0$.

f est donc bien maximum en $x=\sqrt{3}$.

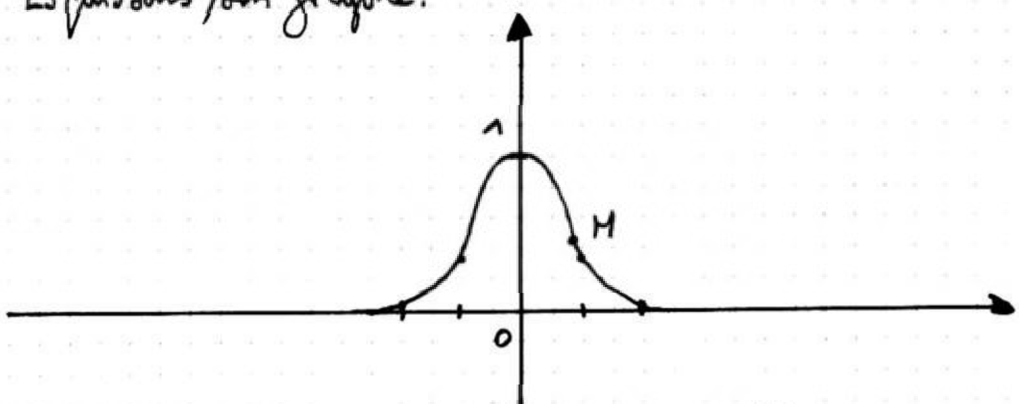
Les coordonnées du point M sont donc $(\sqrt{3};9-(\sqrt{3})^2)=$

$=(\sqrt{3};9-3)=\underline{\underline{(\sqrt{3};6)}}$.

L'aire vaudra alors : $\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 6=\underline{\underline{3\sqrt{3}}}$.

b) On a la fonction $f(x)=e^{-x^2}$ (qui signifie $e^{(-x^2)}$ et non $(e^{-x})^2$).

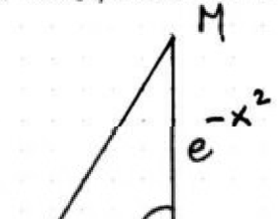
Esquissons son graphe:



x	$f(x)$
0	1
1	0,36
2	0,02
-1	0,36
-2	0,02

Soit un point M du graphe: $M(x;e^{-x^2})$.

La distance de l'origine à M se calcule comme suit:



par Pythagore, on a $OM^2=x^2+(e^{-x^2})^2$

$=x^2+e^{-2x^2}$.

Ainsi $OM=\sqrt{x^2+e^{-2x^2}}$

Trouver où OM est la plus petite correspond à trouver le minimum de $f(x)=\sqrt{x^2+e^{-2x^2}}$.

Pour cela, on calcule f':

On a: $x \longmapsto z=x^2+e^{-2x^2} \longmapsto y=\sqrt{z}$

z ↓ dérivée : $z'=2x-4xe^{-2x^2}$

y ↓ dérivée : $y'=\frac{1}{2\sqrt{z}}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+e^{-2x^2}}}$

On obtient donc: $f'(x) = z' \cdot y' = \left(2x - 4xe^{-2x^2}\right) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+e^{-2x^2}}} =$

$$= \frac{2x - 4xe^{-2x^2}}{2\sqrt{x^2+e^{-2x^2}}} = \frac{x - 2xe^{-2x^2}}{\sqrt{x^2+e^{-2x^2}}}.$$

On résoud $f'(x) = 0$, i.e.:

$$\frac{x - 2xe^{-2x^2}}{\sqrt{x^2+e^{-2x^2}}} = 0 \quad \Big| \cdot \sqrt{x^2+e^{-2x^2}}$$

$$x - 2xe^{-2x^2} = 0 \quad \Big| \text{ mise en évidence}$$

$$x\left(1 - 2e^{-2x^2}\right) = 0$$

Le produit étant nul, un des 2 facteurs doit être nul:

soit $x = 0$,

soit $1 - 2e^{-2x^2} = 0$.

Résolvons cette dernière équation:

$$\begin{aligned} 1 - 2e^{-2x^2} &= 0 && \Big| + 2e^{-2x^2} \\ 2e^{-2x^2} &= 1 && \Big| : 2 \\ e^{-2x^2} &= \tfrac{1}{2} && \Big| \ln(\ ) \\ -2x^2 &= \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) && \Big| \text{prop. de ln} \\ -2x^2 &= -\ln(2) && \Big| : (-2) \\ x^2 &= \frac{\ln(2)}{2} && \Big| \sqrt{\ } \\ x &= \pm\sqrt{\frac{\ln(2)}{2}} \end{aligned}$$

(on a $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$; ainsi $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \underbrace{\ln(1)}_{=0} - \ln(2) = -\ln(2)$)

Ainsi $f'(x) = 0$ nous donne 3 solutions: $x = -\sqrt{\frac{\ln(2)}{2}}$, $x = 0$ et $x = \sqrt{\frac{\ln(2)}{2}}$.

Pour déterminer où la distance est minimum, i.e. où f atteint un minimum, on fait un tableau de croissance:

x		$-\sqrt{\frac{\ln(2)}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{\ln(2)}{2}}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

pour $x = -1$, $f'(x) = \dfrac{-1 - 2\cdot(-1)e^{-2\cdot(-1)^2}}{\sqrt{(-1)^2 + e^{-2(-1)^2}}} < 0$,

pour $x = -0{,}4$, $f'(x) = \dfrac{-0{,}4 - 2\cdot(-0{,}4)e^{-2\cdot(-0{,}4)^2}}{\sqrt{(-0{,}4)^2 + e^{-2(-0{,}4)^2}}} > 0$,

pour $x = 0{,}4$, $f'(x) < 0$ (car f est paire), et,

pour $x = 1$, $f'(x) > 0$ (car f est paire).

Ainsi les minimums pour $f(x)$ sont en $x = -\sqrt{\frac{\ln(2)}{2}}$ et $x = \sqrt{\frac{\ln(2)}{2}}$.

La plus courte distance entre l'origine et le graphe de f est donc

$$f\left(-\sqrt{\frac{\ln(2)}{2}}\right) = f\left(\sqrt{\frac{\ln(2)}{2}}\right) = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\ln(2)}{2}}\right)^2 + e^{-2\left(\sqrt{\frac{\ln(2)}{2}}\right)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\ln(2)}{2} + e^{-2\frac{\ln(2)}{2}}} = \sqrt{\frac{\ln(2)}{2} + e^{-\ln(2)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{e^{\ln(2)}}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{2}} \cong 0{,}92.}}$$