Lycée Denis-de-Rougemont
Neuchâtel et Fleurier

Exercices de révision
Mathématiques niveau 2

ANALYSE

Exercice 1

a) Soit la fonction $f: x \mapsto x^2 - \ln(1+x^2)$.
A l'aide de $f(0)$ et du signe de f', expliquer pourquoi $f(x) \geq 0$ pour tout x.

b) Soit la fonction $g: x \mapsto \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x^2)$, $x \neq 0$.

1) Sachant que $x^2 - \ln(1+x^2) \geq 0$, montrer que, pour tout $x > 0$, $0 \leq g(x) \leq x$, puis que $\lim\limits_{x \to 0}(g(x)) = 0$.

2) Calculer la pente de la tangente au graphe de g aux points d'abscisse $x = 1$ et $x = 3$. En déduire l'existence d'un point $P_0(x_0; y_0)$ à tangente horizontale tel que $1 < x_0 < 3$.
Trouver un intervalle de longueur ½ contenant x_0.

c) Soit la fonction $h: x \to \frac{1}{x^2} \cdot \ln(1+x^2)$, $x \neq 0$.

1) Trouver une primitive de h.

2) Calculer, si elle existe, l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} \cdot \ln(1+x^2)\ dx$

Exercice 2

Étude de la fonction

$$f: x \mapsto y = f(x) = (2x^2 + 2x - 1)e^{-2x}$$

On ne calculera pas la dérivée seconde.

Déduire du graphe de f celui de la fonction

$$g: x \mapsto y = g(x) = \sqrt{2x^2 + 2x - 1} \cdot e^{-2x}$$

sans procéder à une étude de g.

Exercice 3

a) Esquisser les graphes de $g : x \mapsto x^2 - 1$
$h : x \mapsto \ln(x)$

Justifier le fait que l'équation $x^2 - 1 - \ln(x) = 0$ admet deux solutions réelles. Calculer la solution non entière par approximation à 10^{-2} près.

b) Étudier la fonction $f : x \mapsto y = \dfrac{x^2 + 2 + \ln(x)}{x}$
en soignant particulièrement le graphe sur l'intervalle [0 , 2] (utiliser la deuxième dérivée).

c) Résoudre l'équation différentielle $xy' + y = 2x + \dfrac{1}{x}$
Comparer l'expression de la solution générale avec f.

Exercice 4

Pour un nombre réel k, on considère la fonction $f : x \mapsto y = x(\ln(x))^k$

a) Vérifier que pour $k > 1$, le graphe de f admet deux points à tangente horizontale dont un indépendant de k.
Qu'en est-il pour $k = 1$?

b) Esquisser le graphe de f pour $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$ (3 dessins)

Lors de l'étude de f, on soignera l'analyse au voisinage de zéro, mais on renoncera à la dérivée seconde.

c) Calculer $I_1 = \int_0^1 x \cdot \ln(x) dx$

On pose $I_k = \int_0^1 x \cdot [\ln(x)]^k dx$; montrer que $I_k = (-\frac{k}{2}) \cdot I_{k-1}$

Déduire des calculs précédents une formule pour I_k.

Exercice 5

Soit la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x + \sqrt{4x^2 - 1} & \text{si} \quad x > \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x < -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x + \sqrt{1 - 4x^2} & \text{si} \quad -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \end{cases}$

a) Examiner la continuité de *f* en $x_0 = \frac{1}{2}$ et $x_1 = -\frac{1}{2}$.

b) Examiner le comportement asymptotique en justifiant les résultats proposés.

c) Calculer la dérivée, le(s) point(s) à tangente horizontale.

d) Représenter le graphe de *f* pour x compris entre -2 et 2.

e) Écrire *f*(x) à l'aide d'une expression fonctionnelle unique.

Exercice 6

a) Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$(x+1)y' + y = 4x + 3,$$

puis la solution particulière telle que $y'(0) = 12$.

b) Étudier la fonction

$$f : x \mapsto y = \frac{2x^2 + 3x - 9}{x + 1}$$

La deuxième dérivée n'est pas demandée.

c) Soit *A* l'intersection du graphe de *f* avec la partie positive de l'axe des *x* et *B* l'intersection du graphe de *f* avec l'axe des *y*.
Soit T le triangle curviligne *0AB*, où le côté *AB* est remplacé par le graphe de *f*.
Déterminer le volume que T engendre dans sa rotation autour de l'axe des *x*.

d) Trouver une fonction rationnelle dont le graphe

1) admet $y = x + 4$ comme asymptote oblique.

2) admet $x = 1$ comme asymptote verticale.

3) passe par un extremum relatif d'abscisse 4.

Exercice 7

a) Trouver les solutions u_1 et u_2 de l'équation $u^2 - 6u + 1 = 0$.

b) En déduire les solutions x_1 et x_2 de l'équation $e^{4x} - 6e^{2x} + 1 = 0$.
Vérifier les égalités $u_1 \cdot u_2 = 1$ et $x_1 + x_2 = 0$.

On considère la fonction

$$f : x \mapsto 4\frac{e^x}{e^{2x}+1}$$

c) Étudier complètement cette fonction. On demande : parité, comportement asymptotique, point à tangente horizontale, intervalles de (dé)croissance, points d'inflexion et graphe (unité = 2cm).

On appelle g la fonction donnée par

$$g(x) = (f(x))^2 = 16\frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

Par changement de variable, trouver une primitive G de g.

d) Le graphe de f délimite avec les axes de coordonnées une surface dans le premier quadrant. Calculer le volume du corps qu'elle engendre en tournant autour de l'axe des x.

Exercice 8

On envisage la fonction $f_a : x \mapsto y = \dfrac{a}{x^2 + a^2}$ où $a \neq 0$.

a) Déterminer en fonction de a les coordonnées du point à tangente horizontale et des points d'inflexion.
Esquisser le graphe de $f_1 : x \mapsto y = \dfrac{1}{x^2+1}$

b) Pour $a > 0$, calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{a}{x^2+a^2}dx$

Calculer x_1 de sorte que $J = \displaystyle\int_0^{x_1} \frac{a}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{3}I$

c) Déterminer k et m de façon que la fonction $P(x)=\dfrac{kx}{x^2+1}+m\arctan(x)$

soit une primitive de la fonction $(f_1(x))^2=\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$

En déduire le volume obtenu en faisant tourner le graphe de f_1 autour de l'axe des x entre les abscisses -1 et +1.

d) Pour quelle valeur de a, la fonction $y=f_a(x)$ est-elle une solution particulière de l'équation différentielle $(x^2+4)y'-2xy=\dfrac{8x}{x^2+4}$

Trouver la solution générale de cette équation différentielle.

Exercice 9

On considère la fonction f donnée par l'expression $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

a) Procéder à une étude complète de la fonction f.
Relativement à un repère métrique dont l'unité mesure 2 cm, tracer le graphe de f en tenant compte de la pente au point d'inflexion.

b) Sans recourir à une nouvelle étude, esquisser dans le même repère, mais avec des couleurs différentes le graphe de chacune des fonctions

$$f_1 : x \mapsto \frac{1}{f(x)} \quad \text{et} \quad f_2 : x \mapsto \ln(f(x))$$

c) La fonction f définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle ouvert. Déterminer l'expression de la bijection réciproque. En particulier, donner la valeur de x pour laquelle $f(x)=0{,}9$.

d) En posant $u=e^x$ et en intégrant par changement de variable, calculer une primitive de la fonction f.

e) Dans le premier quadrant, on considère la surface située entre le graphe de f et son asymptote. Calculer, si elle existe, l'aire de cette surface illimitée à droite.
A défaut d'avoir trouvé une primitive de f, vérifier que

$$G(x)=-2\ln(1+e^{-x})$$

est une primitive de $g(x)=1-f(x)$, puis utiliser G pour le calcul d'aire.

Exercice 10

a) Étudier la fonction réelle f donnée par

$$f(x) = \cos(2x) + \cos(x)$$

(domaine de définition, périodicité, parité, zéros, dérivée, variations, dérivée seconde, points d'inflexion, représentation du graphe).

b) Calculer l'aire du domaine limité par le graphe de f et les parties positives des axes de coordonnées.

Exercice 11

On considère un rectangle inscrit dans un demi-cercle de rayon r.

a) Quelle est la plus grande aire possible d'un tel rectangle ?

b) On fait tourner le rectangle autour du diamètre du demi-cercle. Quel est le plus grand volume possible du cylindre ainsi engendré ?

c) Même question si l'on fait tourner le rectangle autour de l'axe de symétrie du demi-cercle.

Exercice 12

Un adepte de la course d'orientation doit se rendre d'un poste A, situé au bord d'un chemin rectiligne, à un poste B situé à 6,5 km de A et à 2,5 km du chemin. Sa vitesse le long du chemin est 15 km/h, alors qu'elle n'est que de 10 km/h à travers champs.

Combien de temps lui faudra-t-il, au minimum ?