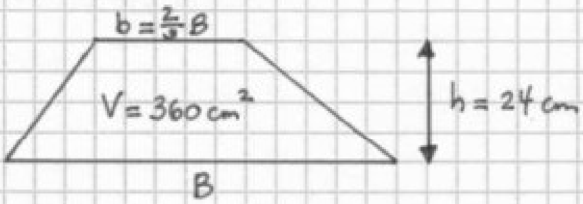
Exercice 38



La formule du calcul de l'aire d'un trapèze est $V = \dfrac{b+B}{2} \cdot h$.

Ici, on obtient :

$\dfrac{\frac{2}{3}B + B}{2} \cdot 24 = 360$	Simplification
$\left(\frac{2}{3}B + B\right) \cdot 12 = 360$	$: 12$
$\frac{2}{3}B + B = 30$	Calculs
$\frac{5}{3}B = 30$	$\cdot 3$
$5B = 90$	$: 5$
$\underline{\underline{B = 18\,cm.}}$	

Exercice 39

a) $\begin{cases} -4x+3y=4 & ① \\ x-\frac{3y}{4}=-1 & ②. \end{cases}$

En multipliant ② par 4, on obtient le système :

$\begin{cases} -4x+3y=4 & ③ \\ 4x-3y=-4 & ④. \end{cases}$

En additionnant ③ et ④, on obtient $0=0$.

Cela signifie que le système a une <u>infinité de solution</u> $(x;y)$ reliées par la relation $-4x+3y=4$.

b) $\begin{cases} y-\frac{13(x-2)}{2}=2x+1 & ① \\ 3x-\frac{2(y-5)}{3}=2y-4 & ② \end{cases}$

Commençons par transformer ① et ② en des équations de la forme $ax+by=c$.

①
$$\begin{array}{l|l} y-\frac{13(x-2)}{2}=2x+1 & \cdot 2 \\ 2y-13(x-2)=4x+2 & \text{distributivité} \\ 2y-13x+26=4x+2 & -4x \\ -17x+2y+26=2 & -26 \\ -17x+2y=-24 & \end{array}$$

②
$$\begin{array}{l|l} 3x-\frac{2(y-5)}{3}=2y-4 & \cdot 3 \\ 9x-2(y-5)=6y-12 & \text{distributivité} \\ 9x-2y+10=6y-12 & -6y \\ 9x-8y+10=-12 & -10 \\ 9x-8y=-22 & \end{array}$$

Le système d'équations ① et ② est donc équivalent aux systèmes :

$\begin{cases} -17x+2y=-24 & ③ \\ 9x-8y=-22 & ④ \end{cases}$

En multipliant l'équation ③ par 4, on obtient le système :

$\begin{cases} -68x+8y=-96 & ⑤ \\ 9x-8y=-22 & ⑥ \end{cases}$

En additionnant 5 et 6, on obtient :

$-59x = -118$, d'où $x = 2$ par division par -59.

Avec $x = 2$ dans l'équation 3, on trouve :

$$\begin{array}{rl|l} -34 + 2y &= -24 & +34 \\ 2y &= 10 & :2 \\ y &= 5 & \end{array}$$

La solution du système est donc $\underline{\underline{x = 2 \text{ et } y = 5}}$.

Exercice 40

1) $\begin{array}{l} 3x+5y = \text{----} \\ \text{----}-10y = 4 \end{array}$ $\quad \cdot(-2) \quad :(-2) \quad \Longrightarrow \begin{cases} 3x+5y=-2 \\ -6x-10y=4. \end{cases}$

2) $\begin{array}{l} -2x+3y=1 \\ x - \text{----} = \text{----} \end{array}$ $\quad :(-2) \quad \Longrightarrow \begin{cases} -2x+3y=1 \\ x-\frac{3}{2}y=0 \end{cases}$ par exemple.

Exercice 41

a) $\begin{cases} 2x - y + z = 8 & (1) \\ -x + 3y + 2z = 1 & (2) \\ 3x + y + 3z = 14 & (3) \end{cases}$

Eliminons x :

$$\begin{array}{ll} (1) & 2x - y + z = 8 \\ 2\cdot(2) & \underline{-2x + 6y + 4z = 2 \; +} \\ & 5y + 5z = 10 \implies y + z = 2 \text{ (par division par 5)} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 3\cdot(2) & -3x + 9y + 6z = 3 \\ (3) & \underline{3x + y + 3z = 14 \; +} \\ & 10y + 9z = 17 \end{array}$$

On obtient ainsi le système : $\begin{array}{ll} y + z = 2 & (4) \\ 10y + 9z = 17 & (5) \end{array}$

Eliminons z :

$$\begin{array}{ll} 9\cdot(4) & 9y + 9z = 18 \\ -1\cdot(5) & \underline{-10y - 9z = -17 \; +} \\ & -y = 1 \implies y = -1. \end{array}$$

Avec $y = -1$ dans (4), on obtient : $-1 + z = 2 \implies z = 3$.

Avec $y = -1$ et $z = 3$ dans (1), on obtient : $2x + 1 + 3 = 8 \implies 2x = 4$
$\implies x = 2$.

Ainsi la solution du système est $\underline{\underline{x = 2,\ y = -1,\ z = 3.}}$

b) $\begin{cases} -x + 7y + 2z = 2 & (1) \\ 9x - 5y - z = 4 & (2) \\ 8x + 3y = 2{,}5 & (3) \end{cases}$

Eliminons z :

$$\begin{array}{ll} (1) & -x + 7y + 2z = 2 \\ 2\cdot(2) & \underline{18x - 10y - 2z = 8 \; +} \\ & 17x - 3y = 10 \end{array}$$

Comme z n'apparaît pas dans (3), on obtient le système :

$\begin{cases} 8x + 3y = 2{,}5 & (3) \\ 17x - 3y = 10 & (4) \end{cases}$

En additionnant les 2 équations, on élimine y et on obtient :

$$25x = 12{,}5 \Rightarrow x = 0{,}5.$$

Avec $x = 0{,}5$ dans ③, on obtient : $8 \cdot 0{,}5 + 3y = 2{,}5$

$$\Rightarrow 4 + 3y = 2{,}5 \Rightarrow 3y = -1{,}5$$
$$\Rightarrow y = -0{,}5.$$

Avec $x = 0{,}5$ et $y = -0{,}5$ dans ①, on obtient : $2 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 + z = 8$

$$\Rightarrow 2 + 0{,}5 + z = 8 \Rightarrow z = 5{,}5.$$

Ainsi la solution du système est $\underline{\underline{x = 0{,}5,\ y = -0{,}5 \text{ et } z = 5{,}5}}$.

c) $\begin{cases} -x + 3y = 1 & ① \\ 5x - 2y - z = 0 & ② \\ 3x + 4y - z = 2 & ③ \end{cases}$

Eliminons z :

$$\begin{array}{rl} ② & 5x - 2y - z = 0 \\ -1 \cdot ③ & \underline{-3x - 4y + z = -2 \quad +} \\ & 2x - 6y = -2 \Rightarrow x - 3y = -1 \text{ (par division par 2).} \end{array}$$

Comme z n'apparaît pas dans ①, on obtient le système :

$\begin{cases} -x + 3y = 1 \\ x - 3y = -1, \end{cases}$ qui sont des équations équivalentes (en multipliant la 1ère par -1, on obtient la 2e).

Ainsi le système a une $\underline{\underline{\text{infinité de solutions.}}}$

Exercice 42

1) $x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow \underline{\underline{x = \sqrt{5} \text{ ou } -\sqrt{5}.}}$

2) $x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x+3) = 0 \Rightarrow$ soit $x = 0$, soit $x + 3 = 0$ (puisque, pour qu'un produit soit nul, il faut qu'au moins un des facteurs soit nul).
Les solutions sont donc $\underline{\underline{x = 0 \text{ et } x = -3}}$.

3) $(x-2)^2 - 3 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 3 \Rightarrow x - 2 = \pm\sqrt{3}$.

a) $x - 2 = \sqrt{3} \Rightarrow x = 2 + \sqrt{3}$.

b) $x - 2 = -\sqrt{3} \Rightarrow x = 2 - \sqrt{3}$.

Les solutions sont donc $\underline{\underline{x = 2 + \sqrt{3} \text{ et } x = 2 - \sqrt{3}}}$.

Exercice 43

1) $x^2+3x-4=0$: on a $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 = x^2+3x+\frac{9}{4}$;

ainsi $x^2+3x = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$;

donc $x^2+3x-4 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4 =$

$= \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$;

on doit donc résoudre $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 0$:

$\Rightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow x+\frac{3}{2} = \pm\frac{5}{2}$

$\nearrow x+\frac{3}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow \underline{x=1}$.

$\searrow x+\frac{3}{2} = -\frac{5}{2} \Rightarrow \underline{x=-4}$.

2) $x^2+3x+4=0$: on a $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 = x^2+3x+\frac{9}{4}$;

ainsi $x^2+3x = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$;

donc $x^2+3x+4 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 4 =$

$= \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$;

on doit donc résoudre $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = 0$:

$\Rightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{7}{4}$, ce qui est exclu (un nombre au carré est ≥ 0) ;

donc l'équation n'a <u>pas de solution</u>.

3) $x^2+4x+4=0$: on a $(x+2)^2 = x^2+4x+4$;

on doit donc résoudre $(x+2)^2=0$:

$\Rightarrow x+2=0 \Rightarrow \underline{x=-2}$.

4) $2x^2-5x+2=0$: on a $2x^2-5x+2 = 2\left(x^2-\frac{5}{2}x+1\right)$;

de plus $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 = x^2-\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}$;

donc $2\left(x^2-\frac{5}{2}x+1\right) = 2\left(\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}+1\right) =$

$= 2\left(\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right)$;

on doit donc résoudre $2\left(\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right) = 0$:

$\Rightarrow \left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} = 0 \Rightarrow \left(x-\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

$\Rightarrow x-\frac{5}{4} = \pm\frac{3}{4}$

$\nearrow x = \frac{3}{4}+\frac{5}{4} = 2$.

$\searrow x = -\frac{3}{4}+\frac{5}{4} = \frac{1}{2}$.

Les solutions sont donc $\underline{x=2 \text{ et } x=\frac{1}{2}}$.

5) $ax^2+bx+c=0$: on a $ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$;

de plus $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$;

ainsi $x^2+\frac{b}{a}x = \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}$;

donc $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} = \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}$

$= \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$;

on doit donc résoudre $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$:

$$\Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\Rightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Exercice 44

Les solutions de $ax^2+bx+c=0$ sont données par :

si $\Delta = b^2-4ac > 0$: $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$;

si $\Delta = b^2-4ac = 0$: $x = \dfrac{-b}{2a}$;

si $\Delta = b^2-4ac < 0$: pas de solution.

a. $25x^2+10x+2=1 \Rightarrow 25x^2+10x+1=0$: on a $a=25$, $b=10$ et $c=1$;

$\Delta = b^2-4ac = 10^2-4.25.1 = 100-100 = 0$;

donc $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-10}{2\cdot 25} = -\dfrac{10}{50} = \underline{\underline{-\dfrac{1}{5}}}$.

b. $2x^2+5x-3=0$: on a $a=2$, $b=5$ et $c=-3$.

$\Delta = b^2-4ac = 5^2-4.2.(-3) = 25+24 = 49$; $\sqrt{\Delta} = 7$;

donc $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5+7}{2\cdot 2} = \dfrac{2}{4} = \underline{\underline{\dfrac{1}{2}}}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5-7}{2\cdot 2} = \dfrac{-12}{4} = \underline{\underline{-3}}$.

c. $x^2+kx-k^2=0$: on a $a=1$, $b=k$ et $c=-k^2$;

$\Delta = b^2-4ac = k^2-4.1.(-k^2) = k^2+4k^2 = 5k^2$; $\sqrt{\Delta} = \sqrt{5k^2} = \sqrt{5}\cdot k$;

donc $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-k+\sqrt{5}k}{2\cdot 1} = \underline{\underline{\dfrac{(\sqrt{5}-1)k}{2}}}$ et

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-k-\sqrt{5}k}{2\cdot 1} = \underline{\underline{-\dfrac{(\sqrt{5}+1)k}{2}}}$.

d. $x^2-2\sqrt{3}x+1=0$: on a $a=1$, $b=-2\sqrt{3}$ et $c=1$;

$\Delta = b^2-4ac = (-2\sqrt{3})^2-4.1.1 = 4.3-4 = 12-4 = 8$; $\sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$;

donc $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{2\cdot 1} = \underline{\underline{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}$ et

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2\cdot 1} = \underline{\underline{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$.

e. $ax^2+(1-a^2)x-a=0$: on a $A=a$, $B=1-a^2$ et $C=-a$;

$\Delta = B^2-4AC = (1-a^2)^2-4.a.(-a) = 1-2a^2+a^4+4a^2 = a^4+2a^2+1 =$

$= (a^2)^2+2a^2+1 = (a^2+1)^2$; $\sqrt{\Delta} = a^2+1$;

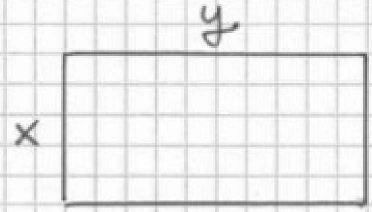
donc $x_1 = \dfrac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A} = \dfrac{a^2-1+a^2+1}{2a} = \dfrac{2a^2}{2a} = \underline{\underline{a}}$ et

$x_2 = \dfrac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A} = \dfrac{a^2-1-a^2-1}{2a} = \dfrac{-2}{2a} = \underline{\underline{-\dfrac{1}{a}}}$.

f : $x^4-16x^3=0$: $x^4-16x^3 = x^3(x-16)$; on doit donc résoudre $x^3(x-16)=0$; donc, soit $x^3=0$, soit $x-16=0$;

les solutions sont donc $\underline{\underline{x=0 \text{ et } x=16}}$.

Exercice 45



aire $= 567 m^2$

périmètre $= 96m$

On doit donc avoir : $\begin{cases} x \cdot y = 567 & (1) \\ 2x + 2y = 96 & (2) \end{cases}$

En divisant (2) par 2, on obtient $x + y = 48$, i.e. $y = 48 - x$.

Par substitution dans (1), on obtient $x(48 - x) = 567$

$\Rightarrow 48x - x^2 = 567 \Rightarrow x^2 - 48x + 567 = 0$,

ce qui est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -48$ et $c = 567$.

On a : $\Delta = b^2 - 4ac = (-48)^2 - 4 . 1 . 567 = 2304 - 2268 = 36$; $\sqrt{\Delta} = 6$.

Donc, on a : $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{48+6}{2 \cdot 1} = \dfrac{54}{2} = 27$ et

$x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{48-6}{2 \cdot 1} = \dfrac{42}{2} = 21$.

Avec $x_1 = 27$, on a $y_1 = 48 - x_1 = 48 - 27 = 21$.

Avec $x_2 = 21$, on a $y_2 = 48 - x_2 = 48 - 21 = 27$.

On obtient donc le couple <u>21 m, 27 m</u> pour les dimensions du jardin.

Exercice 46

Une équation de la forme $ax^2+bx+c=0$ n'a qu'une solution si $\Delta = b^2-4ac = 0$.

a) $3x^2+dx+d=0$: on a $a=3$, $b=d$ et $c=d$;

$\Delta = b^2-4ac = d^2-4.3.d = d^2-12d$;

$\Delta = 0 \Rightarrow d^2-12d=0 \Rightarrow d(d-12)=0$

$\Rightarrow d=0$ ou $d-12=0 \Rightarrow \underline{\underline{d=0 \text{ ou } d=12}}$.

b) $x^2+2x+d=3 \Rightarrow x^2+2x+d-3=0$: on a $a=1$, $b=2$ et $c=d-3$;

$\Delta = b^2-4ac = 2^2-4.1.(d-3) = 4-4(d-3) =$

$= 4-4d+12 = 16-4d$;

$\Delta = 0 \Rightarrow 16-4d=0 \Rightarrow 4d=16 \Rightarrow \underline{\underline{d=4}}$.

c) $2x^2+x+2=dx \Rightarrow 2x^2+x-dx+2=0 \Rightarrow 2x^2+(1-d)x+2=0$:

on a : $a=2$, $b=1-d$ et $c=2$;

$\Delta = b^2-4ac = (1-d)^2-4.2.2 = 1-2d+d^2-16 =$

$= d^2-2d-15$;

$\Delta = 0 \Rightarrow d^2-2d-15=0$: ici $a=1$, $b=-2$ et $c=-15$;

$\Delta' = b^2-4ac = (-2)^2-4.1.(-15) = 4+60 = 64$; $\sqrt{\Delta'} = 8$;

ainsi $d_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta'}}{2a} = \frac{2+8}{2.1} = \frac{10}{2} = \underline{\underline{5}}$ et

$d_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-8}{2.1} = \frac{-6}{2} = \underline{\underline{-3}}$.

d) $\frac{1}{4}(x+1)^2+2=dx \Rightarrow \frac{1}{4}(x^2+2x+1)+2=dx \Rightarrow x^2+2x+1+8=4dx$

$\Rightarrow x^2+2x-4dx+8=0 \Rightarrow x^2+(2-4d)x+8=0$:

on a $a=1$, $b=2-4d$ et $c=8$;

$\Delta = b^2-4ac = (2-4d)^2-4.1.8 = 4-16d+16d^2-32 =$

$= 16d^2-16d-28 = 4(4d^2-4d-7)$;

$\Delta = 0 \Rightarrow 4(4d^2-4d-7)=0 \Rightarrow 4d^2-4d-7=0$;

ici $a=4$, $b=-4$ et $c=-7$;

$\Delta' = b^2-4ac = (-4)^2-4.4.(-7) = 16+112 = 128$;

ainsi $d_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta'}}{2a} = \frac{4+\sqrt{128}}{2.4} = \frac{4+\sqrt{128}}{8} = \frac{4+\sqrt{64.2}}{8} =$

$= \frac{4+\sqrt{64}.\sqrt{2}}{8} = \frac{4+8\sqrt{2}}{8} = \underline{\underline{\frac{1+2\sqrt{2}}{2}}}$ et

$d_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta'}}{2a} = \frac{4-\sqrt{128}}{2.4} = \frac{4-8\sqrt{2}}{8} = \underline{\underline{\frac{1-2\sqrt{2}}{2}}}$.

Exercice 47

1. $4x^4 - x^2 - 60 = 0 \Rightarrow 4(x^2)^2 - x^2 - 60 = 0.$

Posons $y = x^2$. On obtient $4y^2 - y - 60 = 0$.

On a : $a = 4$, $b = -1$ et $c = -60$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4.4.(-60) = 1 + 960 = 961$; $\sqrt{\Delta} = 31$.

Donc $y_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1+31}{2.4} = \dfrac{32}{8} = 4$ et $y_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1-31}{2.4} = \dfrac{-30}{8} = -\dfrac{15}{4}$.

Avec $y_1 = 4$ et $y = x^2$, on obtient $x_1 = 2$ et $x_2 = -2$.

Avec $y_2 = -\dfrac{15}{4}$ et $y = x^2$, on ne trouve aucun x correspondant.

Les solutions sont donc $\underline{x = 2 \text{ et } x = -2}$.

2. $2x^4 - 5x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(2x^2 - 5x + 3) = 0.$

Donc, soit $x^2 = 0$, i.e. $x = 0$, soit $2x^2 - 5x + 3 = 0$.

On a : $a = 2$, $b = -5$ et $c = 3$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4.2.3 = 25 - 24 = 1$; $\sqrt{\Delta} = 1$.

On obtient $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5+1}{2.2} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5-1}{2.2} = \dfrac{4}{4} = 1$.

Les solutions sont donc $\underline{x = 0,\ x = \frac{3}{2} \text{ et } x = 1}$.

3. $x^6 + 4x^3 + 3 = 0 \Rightarrow (x^3)^2 + 4x^3 + 3 = 0.$

On pose $y = x^3$. On obtient $y^2 + 4y + 3 = 0$.

On a : $a = 1$, $b = 4$ et $c = 3$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4.1.3 = 16 - 12 = 4$; $\sqrt{\Delta} = 2$.

Donc $y_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4+2}{2.1} = \dfrac{-2}{2} = -1$ et $y_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4-2}{2.1} = \dfrac{-6}{2} = -3$.

Avec $y_1 = -1$ et $y = x^3$, on obtient $x_1 = \sqrt[3]{-1} = -1$.

Avec $y_2 = -3$ et $y = x^3$, on obtient $x_2 = \sqrt[3]{-3} = -\sqrt[3]{3}$.

Les solutions sont donc $\underline{x = -1 \text{ et } x = -\sqrt[3]{3}}$.

4. $x^5 + 2x^3 - 24x = 0 \Rightarrow x(x^4 + 2x^2 - 24) = 0.$

Donc, soit $x = 0$, soit $x^4 + 2x^2 - 24 = 0$, i.e. $(x^2)^2 + 2x^2 - 24 = 0$.

Posons $y = x^2$. On obtient $y^2 + 2y - 24 = 0$.

On a : $a = 1$, $b = 2$ et $c = -24$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4.1.(-24) = 4 + 96 = 100$; $\sqrt{\Delta} = 10$.

On obtient $y_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2+10}{2.1} = \dfrac{8}{2} = 4$ et $y_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2-10}{2.1} = \dfrac{-12}{2} = -6$.

Avec $y_1 = 4$ et $y = x^2$, on obtient $x_1 = 2$ et $x_2 = -2$.

Avec $y_2 = -6$ et $y = x^2$, on ne trouve aucun x correspondant.

Les solutions sont donc $\underline{x = 2 \text{ et } x = -2}$.

5. $x^3 - \frac{6^3}{x^3} = 19 \Rightarrow (x^3)^2 - 6^3 = 19x^3 \Rightarrow (x^3)^2 - 19x^3 - 216 = 0.$

On pose $y = x^3$. On obtient $y^2 - 19y - 216 = 0$.

On a : $a = 1$, $b = -19$ et $c = -216$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-19)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-216) = 361 + 864 = 1225$; $\sqrt{\Delta} = 35$.

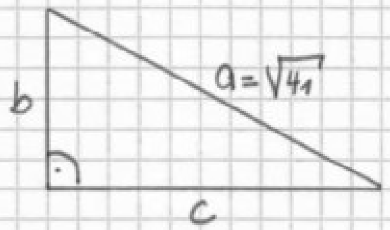
Donc $y_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{19+35}{2\cdot 1} = \frac{54}{2} = 27$ et $y_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{19-35}{2\cdot 1} = \frac{-16}{2} = -8$.

Avec $y_1 = 27$ et $y = x^3$, on obtient $x = \sqrt[3]{27} = 3$.

Avec $y_2 = -8$ et $y = x^3$, on obtient $x = \sqrt[3]{-8} = -2$.

Les solutions sont donc : $\underline{x = 3 \text{ et } x = -2}$.

Exercice 48



Par le théorème de Pythagore, on doit avoir : $a^2=b^2+c^2$, i.e. $41=b^2+c^2$.

L'aire du triangle vaut 10. On doit donc avoir $\frac{b\cdot c}{2}=10$, i.e. $b.c=20$, i.e. $c=\frac{20}{b}$.

Par substitution dans $b^2+c^2=41$, on trouve : $b^2+\left(\frac{20}{b}\right)^2=41$, d'où

$b^2+\frac{400}{b^2}=41$, d'où $(b^2)^2+400=41b^2$, d'où $(b^2)^2-41b^2+400=0$.

On pose $x=b^2$ et on obtient $x^2-41x+400=0$.

On a : $A=1$, $B=-41$ et $C=400$.

$\Delta=B^2-4AC=(-41)^2-4.1.400=1681-1600=81$; $\sqrt{\Delta}=9$.

Donc $x_1=\frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A}=\frac{41+9}{2.1}=\frac{50}{2}=25$ et $x_2=\frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}=\frac{41-9}{2.1}=\frac{32}{2}=16$.

Avec $x_1=25$ et $x=b^2$, on trouve $b_1=\sqrt{25}=5$ (on prendre la racine positive car on parle de longueur).

Avec $x_2=16$ et $x=b^2$, on trouve de même $b_2=\sqrt{16}=4$.

Avec $b_1=5$, on trouve $c_1=\frac{20}{b_1}=\frac{20}{5}=4$.

Avec $b_2=4$, on trouve $c_2=\frac{20}{b_2}=\frac{20}{4}=5$.

Par conséquent les longueurs de côtés de l'angle droit valent <u>4 et 5</u>.

Exercice 49

1) $\frac{5x}{x^2+9} = -1 \Rightarrow 5x = -(x^2+9) \Rightarrow 5x = -x^2-9 \Rightarrow x^2+5x+9=0.$

On a: $a=1$, $b=5$ et $c=9$.

$\Delta = b^2-4ac = 5^2-4.1\cdot 9 = 25-36 = -11 < 0.$

$\Rightarrow$ il n'y a pas de solution.

2) $\frac{2x-4}{x} - \frac{1-x}{2x-1} = 9 \Rightarrow \frac{(2x-4)(2x-1)-x(1-x)}{x(2x-1)} = 9$

$\Rightarrow (2x-4)(2x-1)-x(1-x) = 9x(2x-1)$

$\Rightarrow 4x^2-2x-8x+4-x+x^2 = 18x^2-9x$

$\Rightarrow 5x^2-11x+4 = 18x^2-9x$

$\Rightarrow 13x^2+2x-4=0.$

On a: $a=13$, $b=2$ et $c=-4$.

$\Delta = b^2-4ac = 2^2-4.13.(-4) = 4+208 = 212.$

Donc $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{212}}{2\cdot 13} = \frac{-2+\sqrt{212}}{26}$ $(\cong 0{,}483)$ et

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{212}}{2\cdot 13} = \frac{-2-\sqrt{212}}{26}$ $(\cong -0{,}637)$.

Avec $x_1 = \frac{-2+\sqrt{212}}{26}$, on a: $\frac{2x-4}{x} - \frac{1-x}{2x-1} = 9$.

Avec $x_2 = \frac{-2-\sqrt{212}}{26}$, on a: $\frac{2x-4}{x} - \frac{1-x}{2x-1} = 9$.

$\Rightarrow$ les solutions sont $x = \frac{-2+\sqrt{212}}{26}$ et $x = \frac{-2-\sqrt{212}}{26}$.

Comme $\sqrt{212} = \sqrt{4\cdot 53} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{53} = 2\sqrt{53}$, les solutions peuvent s'écrire:

$x = \frac{-2+2\sqrt{53}}{26} = \frac{-1+\sqrt{53}}{13}$ et $x = \frac{-2-2\sqrt{53}}{26} = \frac{-1-\sqrt{53}}{13}$

3) $\frac{5x}{x-3} + \frac{4}{x+3} = \frac{90}{x^2-9} \Rightarrow \frac{5x(x+3)+4(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{90}{x^2-9}$

$\Rightarrow \frac{5x^2+15x+4x-12}{x^2-9} = \frac{90}{x^2-9} \Rightarrow 5x^2+19x-12 = 90$

$\Rightarrow 5x^2+19x-102=0.$

On a: $a=5$, $b=19$ et $c=-102$.

$\Delta = b^2-4ac = 19^2-4\cdot 5\cdot(-102) = 361+2040 = 2401$; $\sqrt{\Delta} = 49$.

Donc $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-19+49}{2\cdot 5} = \frac{30}{10} = 3$ et

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-19-49}{2\cdot 5} = \frac{-68}{10} = -6{,}8.$

Avec $x = 3$, on ne peut pas calculer $\frac{5x}{x-3}$ ni $\frac{90}{x^2-9}$. C'est donc une "solution parasite".

Avec $x = -6,8$, on a : $\frac{5x}{x-3} + \frac{4}{x+3} = \frac{5.(-6,8)}{-6,8-3} + \frac{4}{-6,8+3} = \frac{2250}{931}$ et

$$\frac{90}{x^2-9} = \frac{90}{(-6,8)^2-9} = \frac{2250}{931}.$$

La solution est donc $\underline{\underline{x = -6,8.}}$

Exercice 50

$x^2+px-4=0$: on a $a=1$, $b=p$ et $c=-4$.

$\Delta = b^2-4ac = p^2-4.1.(-4) = p^2+16 > 0$ pour toute valeur de p.

Ainsi $x^2+px-4=0$ a toujours 2 solutions, quelle que soit la valeur de p.

Exercice 51

Si x_1 et x_2 sont les racines de $ax^2+bx+c=0$, en posant $\Delta = b^2-4ac$ (≥ 0), x_1 et x_2 s'écrivent : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

On a alors $x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$.

De plus $x_1 \cdot x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b+\sqrt{\Delta})(-b-\sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} =$

$= \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$.

Exercice 52

a) $x^2+(p-2)x-4=0$: on a $a=1$, $b=p-2$ et $c=-4$.

L'équation a une solution si $\Delta=b^2-4ac=0$.

On a $\Delta=b^2-4ac=(p-2)^2-4.1.(-4)=p^2-4p+4+16=p^2-4p+20$.

Pour avoir $\Delta=0$, on doit avoir $p^2-4p+20=0$.

On a : $A=1$, $B=-4$ et $C=20$.

$\Delta'=B^2-4AC=(-4)^2-4.1.20=16-80=-64<0$.

Ainsi $p^2-4p+20=0$ n'a aucune solution. Donc $\Delta\neq 0$ quelle que soit la valeur de p.

Donc $x^2+(p-2)x-4=0$ n'a <u>jamais une seule solution</u>.

b) $x^2+(p+2)x+\frac{9}{4}=0$: on a $a=1$, $b=p+2$ et $c=\frac{9}{4}$.

L'équation n'a aucune solution si $\Delta=b^2-4ac<0$.

On a $\Delta=b^2-4ac=(p+2)^2-\cancel{4}.1.\frac{9}{\cancel{4}}=p^2+4p+16-9=p^2+4p+7$.

Pour avoir $\Delta<0$, on doit avoir $p^2+4p+7<0$.

Résolvons $p^2+4p+7=0$.

On a : $A=1$, $B=4$ et $C=7$.

$\Delta'=B^2-4AC=4^2-4.1.7=16-28<0$.

Ainsi p^2+4p+7 n'est jamais égale à zéro.

Comme p^2+4p+7 est une parabole tournée vers le haut ($\cup$), on en déduit que $p^2+4p+7>0$ pour n'importe quelle valeur de p.

Ainsi $\Delta>0$ et, donc, $x^2+(p+2)x+\frac{9}{4}=0$ n'a <u>jamais zéro solution</u>.

Exercice 53

$x^2 + b = b(x-2)$ a $x=5$ pour solution.

On doit donc avoir : $5^2 + b = b(5-2) \Longrightarrow 25 + b = 3b \Longrightarrow 2b = 25$

$\Longrightarrow \underline{\underline{b = \frac{25}{2}}}.$

Exercice 54

Pour simplifier les fractions, on doit commencer par factoriser les numérateurs et les dénominateurs.

On a : $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les zéros de $ax^2+bx+c=0$ (s'ils existent).

a) $2x^2-x-3$: $2x^2-x-3=0$: $a=2$, $b=-1$ et $c=-3$;

$\Delta = b^2-4ac = (-1)^2-4.2.(-3) = 1+24 = 25$; $\sqrt{\Delta}=5$;

donc $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+5}{2.2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-5}{2.2} = \frac{-4}{4} = -1$;

ainsi $2x^2-x-3 = 2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+1) = (2x-3)(x+1)$.

$2x^2-7x+6$: $2x^2-7x+6=0$: $a=2$, $b=-7$ et $c=6$;

$\Delta = b^2-4ac$; $(-7)^2-4.2.6 = 49-48 = 1$; $\sqrt{\Delta}=1$;

donc $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+1}{2.2} = \frac{8}{4} = 2$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-1}{2.2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$;

ainsi $2x^2-7x+6 = 2(x-2)\left(x-\frac{3}{2}\right) = (x-2)(2x-3)$.

On a donc : $\frac{2x^2-x-3}{2x^2-7x+6} = \frac{(2x-3)(x+1)}{(x-2)(2x-3)} = \underline{\frac{x+1}{x-2}}$.

b) x^2+x-2 : $x^2+x-2=0$: $a=1$, $b=1$, et $c=-2$;

$\Delta = b^2-4ac = 1^2-4.1.(-2) = 1+8 = 9$; $\sqrt{\Delta}=3$.

donc $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+3}{2.1} = \frac{2}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-3}{2.1} = \frac{-4}{2} = -2$;

ainsi $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$.

x^2-x-2 : $x^2-x-2=0$: $a=1$, $b=-1$ et $c=-2$;

$\Delta = b^2-4ac = (-1)^2-4.1.(-2) = 1+8 = 9$; $\sqrt{\Delta}=3$.

donc $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+3}{2.1} = \frac{4}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-3}{2.1} = \frac{-2}{2} = -1$;

ainsi $x^2-x-2 = (x-2)(x+1)$.

On a donc : $\frac{x^2+x-2}{x^2-x-2} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-2)(x+1)}$ qui est <u>irréductible</u>.

Exercice 55

1. $2x+\sqrt{x(x+6)}=8 \Rightarrow \sqrt{x(x+6)}=8-2x \Rightarrow x(x+6)=(8-2x)^2$

$\Rightarrow x^2+6x=64-32x+4x^2 \Rightarrow 3x^2-38x+64=0.$

On a : $a=3$, $b=-38$ et $c=64$.

$\Delta=b^2-4ac=(-38)^2-4\cdot3\cdot64=1444-768=676$; $\sqrt{\Delta}=26$;

on obtient : $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{38+26}{2\cdot3}=\frac{64}{6}=\frac{32}{3}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{38-26}{2\cdot3}=\frac{12}{6}=2.$

Avec $x_1=\frac{32}{3}$, on a : $2x+\sqrt{x(x+6)}=34,\overline{6}\neq 8.$

Avec $x_2=2$, on a : $2x+\sqrt{x(x+6)}=8.$

Par conséquent, la solution est $\underline{x=2.}$

2. $\sqrt{2+x}+4=\sqrt{10-3x} \Rightarrow \left(\sqrt{2+x}+4\right)^2=10-3x$

$\Rightarrow 2+x+8\sqrt{2+x}+16=10-3x \Rightarrow 18+x+8\sqrt{2+x}=10-3x$

$\Rightarrow 8\sqrt{2+x}=-8-4x \Rightarrow \left(8\sqrt{2+x}\right)^2=(-8-4x)^2$

$\Rightarrow 64(2+x)=64+64x+16x^2 \Rightarrow 128+64x=64+64x+16x^2$

$\Rightarrow 128=64+16x^2 \Rightarrow 16x^2=64 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x_1=2$ et $x_2=-2.$

Avec $x_1=2$, on a : $\sqrt{2+x}+4=6$ et $\sqrt{10-3x}=2$ $(\neq)$.

Avec $x_2=-2$, on a : $\sqrt{2+x}+4=4$ et $\sqrt{10-3x}=4$ $(=)$.

Par conséquent la solution est $\underline{x=-2}$.

3. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}=5 \Rightarrow \left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}\right)^2=25$

$\Rightarrow x+3+2\sqrt{x+3}\sqrt{x+1}+x+1=25 \Rightarrow 2x+4+2\sqrt{(x+3)(x+1)}=25$

$\Rightarrow 2\sqrt{(x+3)(x+1)}=-2x+21 \Rightarrow \left(2\sqrt{(x+3)(x+1)}\right)^2=(-2x+21)^2$

$\Rightarrow 4(x+3)(x+1)=4x^2-84x+441$

$\Rightarrow 4(x^2+x+3x+3)=4x^2-84x+441$

$\Rightarrow 4x^2+16x+12=4x^2-84x+441 \Rightarrow 16x+12=-84x+441$

$\Rightarrow 100x=429 \Rightarrow x=\frac{429}{100}$

Avec $x=\frac{429}{100}$, on a $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}=5$.

Par conséquent, la solution est $\underline{x=\frac{429}{100}}$.

4. $\sqrt{x-3}-\sqrt{x+2}=\sqrt{x+18} \Rightarrow \left(\sqrt{x-3}-\sqrt{x+2}\right)^2=x+18$

$\Rightarrow x-3-2\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{x+2}+x+2=x+18$

$\Rightarrow 2x-1-2\sqrt{(x-3)(x+2)}=x-18$

$\Rightarrow -2\sqrt{(x-3)(x+2)}=-x-17 \Rightarrow \left(-2\sqrt{(x-3)(x+2)}\right)^2=(-x-17)^2$

$\Rightarrow 4(x-3)(x+2)=x^2+34x+289$

$\Rightarrow 4(x^2+2x-3x-6) = x^2+34x+289$

$\Rightarrow 4x^2+8x-12x-24 = x^2+34x+289$

$\Rightarrow 4x^2-4x-24 = x^2+34x+289$

$\Rightarrow 3x^2-38x-313 = 0.$

On a : $a=3$, $b=-38$ et $c=-313$.

$\Delta = b^2-4ac = (-38)^2-4\cdot 3\cdot(-313) = 1444+3756 = 5200$; $\sqrt{\Delta} = \sqrt{5200} = \sqrt{400\cdot 13} =$
$= \sqrt{400}\cdot\sqrt{13} = 20\sqrt{13}$.

Donc $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{38+20\sqrt{13}}{6} = \dfrac{19+10\sqrt{13}}{3}$ et

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{38-20\sqrt{13}}{6} = \dfrac{19-10\sqrt{13}}{3}$

Avec $x_1 = \dfrac{19+10\sqrt{13}}{3}$, on a : $\sqrt{x-3}-\sqrt{x+2} = -0{,}593$ et $\sqrt{x+18} = 6{,}029$ $(\neq)$.

Avec $x_2 = \dfrac{19-10\sqrt{13}}{3} \cong -5{,}685$, on a : $x-3<0$ et $\sqrt{x-3}$ n'existe pas

Par conséquence, l'équation n'a <u>aucune solution</u>.

Exercice 56

Par définition, $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$.

1) $|x-3| = 4$ donne 2 possibilités : ① soit $x-3=4$, i.e. $x=7$;
② soit $x-3=-4$, i.e. $x=-1$.

Les solutions sont donc $\underline{\underline{x=7 \text{ et } x=-1}}$.

2) $|2x-1| = |x+3|$ donne 2 possibilités :
① soit $2x-1$ et $x+3$ sont de même signe $\Rightarrow 2x-1 = x+3$;
② soit $2x-1$ et $x+3$ sont de signes opposés $\Rightarrow 2x-1 = -(x+3)$.
① $2x-1 = x+3 \Rightarrow x-1 = 3 \Rightarrow x=4$.
② $2x-1 = -x-3 \Rightarrow 3x-1 = -3 \Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$.
Les solutions sont donc $\underline{\underline{x=4 \text{ et } x=-\frac{2}{3}}}$.

3) $|x^2-4| = 21$ donne 2 possibilités : ① soit $x^2-4=21$, i.e. $x^2=25$, i.e. $x=\pm 5$;
② soit $x^2-4=-21$, i.e. $x^2=-17$, ce qui est exclut puisque $x^2 \geq 0$.

Les solutions sont donc $\underline{\underline{x=5 \text{ et } x=-5}}$.

4) $x^2 - |2x| = 3 \Rightarrow x^2 = 3 + |2x| \Rightarrow |2x| = x^2-3$: on a 2 possibilités :
① $2x = x^2-3$, i.e. $x^2-2x-3=0$;
② $2x = -(x^2-3)$, i.e. $2x = -x^2+3 \Rightarrow x^2+2x-3=0$.
① $x^2-2x-3=0$: on a $a=1$, $b=-2$ et $c=-3$;
$\Delta = b^2-4ac = (-2)^2 - 4\cdot1\cdot(-3) = 4+12 = 16$; $\sqrt{16} = 4$;
donc $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+4}{2\cdot1} = \frac{6}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-4}{2\cdot1} = \frac{-2}{2} = -1$.

② $x^2+2x-3=0$: on a $a=1$, $b=2$ et $c=-3$;
$\Delta = b^2-4ac = 2^2 - 4\cdot1\cdot(-3) = 4+12 = 16$; $\sqrt{16} = 4$;
donc $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+4}{2\cdot1} = \frac{2}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-4}{2\cdot1} = \frac{-6}{2} = -3$.

Les solutions sont donc : $\underline{\underline{x = -3 ; -1 ; 1 ; 3}}$.

Exercice 57

1) $\dfrac{8}{x+2} = 6 \Rightarrow 8 = 6(x+2) \Rightarrow 8 = 6x+12 \Rightarrow 6x = -4 \Rightarrow x = -\dfrac{4}{6} = -\dfrac{2}{3}$.

2) $\dfrac{8}{6-2x} = \dfrac{9}{4-3x} \Rightarrow 8(4-3x) = 9(6-2x) \Rightarrow 32-24x = 54-18x$
$\Rightarrow -6x = 22 \Rightarrow x = -\dfrac{22}{6} = -\dfrac{11}{3}$.

3) $\dfrac{3x-12}{x-4} = 2 \Rightarrow 3x-12 = 2(x-4) \Rightarrow 3x-12 = 2x-8 \Rightarrow x = 4$.

4) $\sqrt{x^2+7} = 4 \Rightarrow x^2+7 = 16 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$ ou -3.

5) $x+\sqrt{x+5} = 7 \Rightarrow \sqrt{x+5} = 7-x \Rightarrow x+5 = (7-x)^2 \Rightarrow x+5 = 49-14x+x^2$
$\Rightarrow x^2-15x+44 = 0$: on a $a=1$, $b=-15$ et $c=44$;
$\Delta = b^2-4ac = (-15)^2-4.1.44 = 225-176 = 49$; $\sqrt{\Delta} = 7$;
donc $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{15+7}{2.1} = \dfrac{22}{2} = 11$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{15-7}{2.1} = \dfrac{8}{2} = 4$;
avec $x_1 = 11$, $x+\sqrt{x+5} = 11+\sqrt{16} = 11+4 = 15 \neq 7$;
avec $x_2 = 4$, $x+\sqrt{x+5} = 4+\sqrt{9} = 4+3 = 7$.
La solution est donc $x = 4$.

6) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1} = 1 \Rightarrow \left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}\right)^2 = 1^2$
$\Rightarrow 2x+3-2\sqrt{2x+3}\sqrt{x+1}-(x+1) = 1$
$\Rightarrow x+2-2\sqrt{2x+3}\sqrt{x+1} = 1 \Rightarrow 2\sqrt{2x+3}\sqrt{x+1} = x+1$
$\Rightarrow \left(2\sqrt{2x+3}\sqrt{x+1}\right)^2 = (x+1)^2 \Rightarrow 4(2x+3)(x+1) = (x+1)^2$
$\Rightarrow (x+1)^2-4(2x+3)(x+1) = 0 \Rightarrow (x+1)\left(x+1-4(2x+3)\right) = 0$
$\Rightarrow (x+1)(x+1-8x-12) = 0 \Rightarrow (x+1)(-7x-11) = 0$
$\Rightarrow$ soit $x+1=0$, i.e. $x=-1$, soit $-7x-11=0$, i.e. $7x=-11$, i.e. $x = \dfrac{-11}{7}$.
Avec $x=-1$, $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1} = \sqrt{1}-\sqrt{0} = 1$.
Avec $x = -\dfrac{11}{7}$, $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1} = \sqrt{-\dfrac{22}{7}+3}-\sqrt{-\dfrac{11}{7}+3} = \sqrt{-\dfrac{1}{7}}+\sqrt{\dfrac{10}{7}}$ n'existe pas.
La solution est donc $x = -1$.

7) $|-x+5| = |2x+3| \Rightarrow$ on a 2 possibilités :
① $-x+5 = 2x+3 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$;
② $-x+5 = -(2x+3) \Rightarrow -x+5 = -2x-3 \Rightarrow x = -8$.
Les solutions sont donc $x = \dfrac{3}{2}$ et $x = -8$.

8) $\dfrac{2x-1}{x+1} = \dfrac{2x+1}{x-1} \Rightarrow (2x-1)(x-1) = (2x+1)(x+1)$
$\Rightarrow 2x^2-2x-x+1 = 2x^2+2x+x+1 \Rightarrow 2x^2-3x+1 = 2x^2+3x+1$
$\Rightarrow -3x = 3x \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$.

9) $\frac{x-5}{3x-15}=\frac{2}{x} \Longrightarrow \frac{x-5}{3(x-5)}=\frac{2}{x} \Longrightarrow \frac{1}{3}=\frac{2}{x} \Longrightarrow \frac{x}{3}=2 \Longrightarrow \underline{\underline{x=6.}}$

10) $\frac{2x-4}{x}-\frac{1-x}{2x-1}=9 \Longrightarrow \frac{(2x-4)(2x-1)-x(1-x)}{x(2x-1)}=9$

$\Longrightarrow (2x-4)(2x-1)-x(1-x)=9x(2x-1)$

$\Longrightarrow 4x^2-2x-8x+4-x+x^2=18x^2-9x$

$\Longrightarrow 5x^2-11x+4=18x^2-9x \Longrightarrow 13x^2+2x-4=0$;

on a $a=13$, $b=2$ et $c=-4$;

$\Delta=b^2-4ac=2^2-4.13.(-4)=4+208=212=4.53$; $\sqrt{\Delta}=\sqrt{4.53}=\sqrt{4}\sqrt{53}$

$=2\sqrt{53}$;

donc $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2+2\sqrt{53}}{2.13}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{53}-1}{13}}}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2-2\sqrt{53}}{2.13}=\underline{\underline{\frac{-1-\sqrt{53}}{13}}}$.

11) $x+\sqrt{6-x}=0 \Longrightarrow \sqrt{6-x}=-x \Longrightarrow 6-x=(-x)^2 \Longrightarrow 6-x=x^2$

$\Longrightarrow x^2+x-6=0$: on a $a=1$, $b=1$ et $c=-6$;

$\Delta=b^2-4ac=1^2-4.1.(-6)=1+24=25$; $\sqrt{\Delta}=5$;

donc $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+5}{2.1}=\frac{4}{2}=2$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-5}{2.1}=\frac{-6}{2}=-3$.

Avec $x_1=2$, $x+\sqrt{6-x}=2+\sqrt{6-2}=2+\sqrt{4}=2+2=4\neq 0$.

Avec $x_2=-3$, $x+\sqrt{6-x}=-3+\sqrt{6+3}=-3+\sqrt{9}=-3+3=0$.

La solution est donc $\underline{\underline{x=-3.}}$

12) $x+\sqrt{5x+10}=8 \Longrightarrow \sqrt{5x+10}=8-x \Longrightarrow 5x+10=(8-x)^2$

$\Longrightarrow 5x+10=64-16x+x^2 \Longrightarrow x^2-21x+54=0$;

on a : $a=1$, $b=-21$ et $c=54$;

$\Delta=b^2-4ac=(-21)^2-4.1.54=441-216=225$; $\sqrt{\Delta}=15$;

donc $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{21+15}{2.1}=\frac{36}{2}=18$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{21-15}{2.1}=\frac{6}{2}=3$.

Avec $x_1=18$, $x+\sqrt{5x+10}=18+\sqrt{5.18+10}=18+\sqrt{100}=18+10=28\neq 8$.

Avec $x_2=3$, $x+\sqrt{5x+10}=3+\sqrt{5.3+10}=3+\sqrt{25}=3+5=8$.

La solution est donc $\underline{\underline{x=3.}}$

13) $|x^2+3x-4|=|-x+5|$: on a 2 possibilités : ① $x^2+3x-4=-x+5$;

② $x^2+3x-4=-(-x+5)$.

① $x^2+3x-4=-x+5 \Longrightarrow x^2+4x-9=0$: on a : $a=1$, $b=4$ et $c=-9$;

$\Delta=b^2-4ac=4^2-4.1.(-9)=16+36=52$; $\sqrt{\Delta}=\sqrt{52}=\sqrt{4.13}=2\sqrt{13}$.

Donc $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4+2\sqrt{13}}{2.1}=\sqrt{13}-2$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4-2\sqrt{13}}{2.1}=-2-\sqrt{13}$.

② $x^2+3x-4=x-5 \Longrightarrow x^2+2x+1=0 \Longrightarrow (x+1)^2=0 \Longrightarrow x+1=0$

$\Longrightarrow x=-1$.

Les solutions sont donc : $\underline{\underline{x = \sqrt{13} - 2\ ,\ x = -2 - \sqrt{13} \text{ et } x = -1}}$

14) $-3 + 2 \cdot |4x - 6| = 11 \Rightarrow 2|4x-6| = 14 \Rightarrow |4x-6| = 7$

$\Rightarrow$ on a 2 possibilités : ① $4x - 6 = 7 \Rightarrow 4x = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{4}$;

② $4x - 6 = -7 \Rightarrow 4x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$.

Les solutions sont donc $\underline{\underline{x = \frac{13}{4} \text{ et } x = -\frac{1}{4}.}}$

Exercice 58

Une factorisation est complète si aucun des facteurs ne peut plus être factorisé.

$x+1 \to$ ok ;

$3x-5 \to$ ok ;

$2x+3 \to$ ok ;

x^2-3x+5 : $x^2-3x+5=0$: on a $a=1$, $b=-3$ et $c=5$;

$\Delta = b^2-4ac = (-3)^2-4\cdot1\cdot5 = 9-20 = -11 < 0$

$\Rightarrow x^2-3x+5$ n'est pas factorisable et n'est jamais nul ;

$2x^2+2x+1$: $2x^2+2x+1=0$: on a $a=2$, $b=2$ et $c=1$;

$\Delta = b^2-4ac = 2^2-4\cdot2\cdot1 = 4-8 = -4 < 0$

$\Rightarrow 2x^2+2x+1$ n'est pas factorisable et n'est jamais nul.

Donc la factorisation est complète.

Une racine est une valeur de x annulant le polynôme, autrement dit pour laquelle le polynôme vaut zéro.

Comme x^2-3x+5 et $2x^2+2x+1$ ne sont jamais nuls, les racines du polynôme sont : $x=-1$ ($\Rightarrow x+1=0$)

$x=\frac{5}{3}$ ($\Rightarrow 3x-5=0$)

et $x=-\frac{3}{2}$ ($\Rightarrow 2x+3=0$).

La multiplicité d'une racine est l'exposant du facteur pour lequel la racine le rend nul :

on a : $(x+1)^3 \Rightarrow x=-1$ est de multiplicité 3 ;

$(3x-5)^2 \Rightarrow x=\frac{5}{3}$ est de multiplicité 2 ;

$(2x+3) \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$ est de multiplicité 1.

Exercice 59

On va utiliser les 2 résultats suivants :

1. Si $p(x) \in \mathbb{Z}(x)$ est un polynôme à coefficients entiers, alors ses seules racines entières possibles sont les diviseurs de $p(0)$;
2. Les seules racines rationnelles (fractions) qui peuvent annuler un polynôme à coefficients entiers sont de la forme : $\dfrac{\text{diviseur du terme constant}}{\text{diviseur du coefficient dominant}}$.

$P_1(x) = 6x^3 - 19x^2 + x + 6$: on doit chercher les x tels que $6x^3 - 19x + x + 6 = 0$.

Cherchons les racines entières : on les cherche parmi les diviseurs de $P_1(0) = 6$.

Les diviseurs de 6 sont : $1 ; 2 ; 3 ; 6$.

On cherche donc les racines entières parmi $\pm 1 ; \pm 2 ; \pm 3 ; \pm 6$.

Avec $x = 1$, $P_1(x) = 6 \cdot 1^3 - 19 \cdot 1^2 + 1 + 6 = 6 - 19 + 1 + 6 = -6 \neq 0$.

Avec $x = -1$, $P_1(x) = 6 \cdot (-1)^3 - 19 \cdot (-1)^2 + (-1) + 6 = -6 - 19 - 1 + 6 = -20 \neq 0$.

Avec $x = 2$, $P_1(x) = 6 \cdot 2^3 - 19 \cdot 2^2 + 2 + 6 = 6 \cdot 8 - 19 \cdot 4 + 8 = 48 - 76 + 8 = -20 \neq 0$.

Avec $x = -2$, $P_1(x) = 6 \cdot (-2)^3 - 19 \cdot (-2)^2 + (-2) + 6 = -6 \cdot 8 - 19 \cdot 4 + 4 = -48 - 76 + 4 \neq 0$.

Avec $x = 3$, $P_1(x) = 6 \cdot 3^3 - 19 \cdot 3^2 + 3 + 6 = 6 \cdot 27 - 19 \cdot 9 + 9 = 162 - 171 + 9 = 0$.

Avec $x = -3$, $P_1(x) = 6 \cdot (-3)^3 - 19 \cdot (-3)^2 - 3 + 6 = -6 \cdot 27 - 19 \cdot 9 + 3 = -162 - 171 + 3 \neq 0$.

Avec $x = 6$, $P_1(x) = 6 \cdot 6^3 - 19 \cdot 6^2 + 6 + 6 = 6 \cdot 216 - 19 \cdot 36 + 12 = 1296 - 684 + 12 \neq 0$.

Avec $x = -6$, $P_1(x) = 6 \cdot (-6)^3 - 19 \cdot (-6)^2 - 6 + 6 = -6 \cdot 216 - 19 \cdot 36 \neq 0$.

Ainsi une des racines de $P_1(x)$ est $x = 3$.

On pourra alors écrire : $P_1(x) = (x - 3)(ax^2 + bx + c)$.

On a : $ax^2 + bx + c = P_1(x) : (x - 3)$:

$$
\begin{array}{r|l}
6x^3 - 19x^2 + x + 6 & x - 3 \\ \hline
-(6x^3 - 18x^2) & 6x^2 - x - 2 \\ \cline{1-1}
-x^2 + x + 6 & \\
-(-x^2 + 3x) & \\ \cline{1-1}
-2x + 6 & \\
-(-2x + 6) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Par conséquent : $P_1(x) = (x - 3)(6x^2 - x - 2)$.

Les autres racines de $P_1(x)$ seront les racines de $6x^2 - x - 2$, i.e. les solutions de $6x^2 - x - 2 = 0$.

On a : $a = 6$, $b = -1$ et $c = -2$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2) = 1 + 48 = 49 \; ; \; \sqrt{\Delta} = 7.$

On a donc $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1+7}{2 \cdot 6} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$ et

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1-7}{2 \cdot 6} = \dfrac{-6}{12} = -\dfrac{1}{2}.$

On a donc $6x^2 - x - 2 = 6\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 3\left(x - \frac{2}{3}\right) \cdot 2\left(x + \frac{1}{2}\right) =$
$= (3x-2)(2x+1).$

On obtient donc : $\underline{\underline{P_1(x) = (x-3)(3x-2)(2x+1).}}$

Ses racines sont : $x = 3$ (multiplicité 1)
$x = \frac{2}{3}$ (multiplicité 1)
$x = -\frac{1}{2}$ (multiplicité 1).

$P_2(x) = x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 16x - 8$:

Cherchons les racines entières : on les cherche parmi les diviseurs de $P_2(0) = -8$.

Les diviseurs de 8 sont : $1 ; 2 ; 4 ; 8$.

On cherche donc les racines entières parmi : $\pm 1 ; \pm 2 ; \pm 4 ; \pm 8$.

Avec $x = 1$, $P_2(x) = 1 - 5 - 4 + 16 - 8 = 0$.

Avec $x = -1$, $P_2(x) = 1 + 5 - 4 - 16 - 8 = -22 \neq 0$.

Avec $x = 2$, $P_2(x) = 16 - 40 - 16 + 32 - 8 = -16 \neq 0$.

Avec $x = -2$, $P_2(x) = 16 + 40 - 16 - 32 - 8 = 0$.

Avec $x = 4$, $P_2(x) = 256 - 320 - 64 + 64 - 8 \neq 0$.

Avec $x = -4$, $P_2(x) = 256 + 320 - 64 - 64 - 8 \neq 0$.

Avec $x = 8$, $P_2(x) = 4096 - 2560 - 256 + 128 - 8 \neq 0$.

Avec $x = -8$, $P_2(x) = 4096 + 2560 - 256 - 128 - 8 \neq 0$.

Ainsi 2 des racines de $P_2(x)$ sont $x = 1$ et $x = -2$.

On pourra alors écrire $P_2(x) = (x-1)(x+2)(ax^2 + bx + c)$.

Pour trouver $ax^2 + bx + c$, effectuons $\left(P_2(x) : (x-1)\right) : (x+2)$:

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 16x - 8 & x - 1 \\
\hline
-(x^4 - x^3) \qquad\qquad\qquad & x^3 - 4x^2 - 8x + 8 \\
-4x^3 - 4x^2 + 16x - 8 & \\
-(-4x^3 + 4x^2) \qquad\qquad & \\
-8x^2 + 16x - 8 & \\
-(-8x^2 + 8x) \qquad & \\
8x - 8 & \\
-(8x - 8) & \\
0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-4x^2-8x+8 & x+2 \\ \cline{2-2}
-(x^2+2x^2) & x^2-6x+4 \\ \cline{1-1}
-6x^2-8x+8 & \\
-(-6x^2-12x) & \\ \cline{1-1}
4x+8 & \\
-(4x+8) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Par conséquent : $P_2(x) = (x-1)(x+2)(x^2-6x+4)$.

Les autres racines de $P_2(x)$ seront les racines de x^2-6x+4, i.e. les solutions de $x^2-6x+4=0$.

On a : $a=1$, $b=-6$ et $c=4$.

$\Delta = b^2-4ac = (-6)^2-4.1.4 = 36-16 = 20$; $\sqrt{\Delta} = \sqrt{20} = \sqrt{4.5} = 2\sqrt{5}$.

On a donc $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6+2\sqrt{5}}{2.1} = 3+\sqrt{5}$ et

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6-2\sqrt{5}}{2.1} = 3-\sqrt{5}$.

D'où : $x^2-6x+4 = \left(x-(3+\sqrt{5})\right)\left(x-(3-\sqrt{5})\right) = (x-3-\sqrt{5})(x-3+\sqrt{5})$.

On obtient donc : $\underline{\underline{P_2(x) = (x-1)(x+2)(x-3-\sqrt{5})(x-3+\sqrt{5})}}$.

Ses racines sont : $x=1$ (multiplicité 1)
$x=-2$ (multiplicité 1)
$x=3+\sqrt{5}$ (multiplicité 1)
$x=3-\sqrt{5}$ (multiplicité 1).

$P_3(x) = x^4+2x^3-x^2+4x+12$.

Cherchons ses racines entières : on les cherche parmi les diviseurs de $P_3(0)=12$.

Les diviseurs de 12 sont : $1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12$.

On cherche donc les racines entières parmi : $\pm 1 ; \pm 2 ; \pm 3 ; \pm 4 ; \pm 6 ; \pm 12$.

Avec $x=1$, $P_3(x) = 1+2-1+4+12 \neq 0$.

Avec $x=-1$, $P_3(x) = 1-2-1-4+12 \neq 0$.

Avec $x=2$, $P_3(x) = 16+16-4+8+12 \neq 0$.

Avec $x=-2$, $P_3(x) = 16-16-4-8+12 = 0$.

Avec $x=3$, $P_3(x) = 81+54-9+12+12 \neq 0$.

Avec $x=-3$, $P_3(x) = 81-54-9-12+12 \neq 0$.

Avec $x=4$, $P_3(x) = 256+128-16+16+12 \neq 0$.

Avec $x=-4$, $P_3(x) = 256-128-16-16+12 \neq 0$.

Avec $x=6$, $P_3(x) = 1296+432-36+24+12 \neq 0$.

Avec $x=-6$, $P_3(x) = 1296-432-36-24+12 \neq 0$.

Avec $x=8$, $P_3(x) = 4096+1024-64+32+12 \neq 0$.

Avec $x=-8$, $P_3(x) = 4096-1024-64-32+12 \neq 0$.

Avec $x=12$, $P_3(x) = 20736+3456-144+48+12 \neq 0$.

Avec $x=-12$, $P_3(x) = 20736-3456-144-48+12 \neq 0$.

Ainsi 1 des racines de $P_3(x)$ est $x=-2$.

On pourra alors écrire : $P_3(x) = (x+2)(ax^3+bx^2+cx+d)$.

On a : $ax^3+bx^2+cx+d = P_3(x) : (x+2)$:

$$
\begin{array}{r|l}
x^4+2x^3-x^2+4x+12 & x+2 \\
\hline
-(x^4+2x^3) & x^3-x+6 \\
0-x^2+4x+12 & \\
-(-x^2-2x) & \\
6x+12 & \\
-(6x+12) & \\
0 &
\end{array}
$$

Par conséquent : $P_3(x) = (x+2)(x^3-x+6)$.

Les autres racines de $P_3(x)$ seront les racines de $P_4(x) = x^3-x+6$.

Cherchons les racines entières de $P_4(x)$: on les cherche parmi les diviseurs de $P_4(0)=6$.

Les diviseurs de 6 sont : $1; 2; 3; 6$.

On cherche donc les racines entières de $P_4(x)$ parmi : $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$.

Avec $x=1$, $P_4(x) = 1-1+6 \neq 0$.

Avec $x=-1$, $P_4(x) = -1+1+6 \neq 0$.

Avec $x=2$, $P_4(x) = 8-2+6 \neq 0$.

Avec $x=-2$, $P_4(x) = -8+2+6 = 0$.

Avec $x=3$, $P_4(x) = 27-3+6 \neq 0$.

Avec $x=-3$, $P_4(x) = -27+3+6 \neq 0$.

Avec $x=6$, $P_4(x) = 216-6+6 \neq 0$.

Avec $x=-6$, $P_4(x) = -216+6+6 \neq 0$.

Ainsi une des racines de $P_4(x)$ est $x=-2$.

On pourra alors écrire : $P_4(x) = (x+2)(ax^2+bx+c)$.

On a : $ax^2+bx+c = P_4(x) : (x+2)$:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 \quad -x+6 & x+2 \\
\hline
\underline{-(x^3+2x^2)} & x^2-2x+3 \\
-2x^2-x+6 & \\
\underline{-(-2x^2-4x)} & \\
3x+6 & \\
\underline{-(\ 3x+6)} & \\
0 &
\end{array}
$$

Par conséquent : $P_4(x) = (x+2)(x^2-2x+3)$

et $P_3(x) = (x+2)\cdot P_4(x) = (x+2)(x+2)(x^2-2x+3)$

$= (x+2)^2(x^2-2x+3)$.

Les autres racines de $P_3(x)$ seront les racines de x^2-2x+3, i.e. les solutions de $x^2-2x+3=0$.

On a : $a=1$, $b=-2$ et $c=3$.

$\Delta = b^2-4ac = (-2)^2-4\cdot1\cdot3 = 4-12 = -8 < 0$.

Ainsi $x^2-2x+3=0$ n'a pas de solution et, donc, x^2-2x+3 n'est pas factorisable.

On obtient donc : $\underline{\underline{P_4(x) = (x+2)^2(x^2-2x+3)}}$.

Sa racine est $\underline{\underline{x=-2 \quad (\text{multiplicité } 2)}}$.

Exercice 60

a) $x = 1 : \quad 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 2 - 5 - 4 + 3 \neq 0$

$x = -1 : \quad 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = -2 - 5 + 4 + 3 = 0$

$\Rightarrow$ une solution est $x = -1$.

b) Puisque $x = -1$ est une solution de $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$, on a:

$2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = (x+1)(ax^2 + bx + c)$.

On a alors $ax^2 + bx + c = (2x^3 - 5x^2 - 4x + 3) : (x+1)$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 & x+1 \\ \hline -(2x^3 + 2x^2) & 2x^2 - 7x + 3 \\ -7x^2 - 4x + 3 & \\ -(-7x^2 - 7x) & \\ 3x + 3 & \\ -(3x + 3) & \\ 0 & \end{array}$$

Par conséquent: $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = (x+1)(2x^2 - 7x + 3)$.

Les autres solutions de $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$ seront donc les solutions de $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

On a: $a = 2$, $b = -7$ et $c = 3$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49 - 24 = 25$; $\sqrt{\Delta} = 5$.

Ainsi $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{7+5}{2 \cdot 2} = \dfrac{12}{4} = 3$ et

$x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{7-5}{2 \cdot 2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Les autres solutions sont donc $x = 3$ et $x = \frac{1}{2}$.

c) Comme les racines de $P(x)$ (i.e. les zéros de $P(x)$, i.e. les solutions de $P(x) = 0$) sont $x = -1$, $x = 3$ et $x = \frac{1}{2}$, on peut écrire:

$P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 2(x+1)(x-3)(x - \frac{1}{2}) = (x+1)(x-3) \cdot 2(x - \frac{1}{2}) =$

$= (x+1)(x-3)(2x-1)$.

Exercice 61

1. $3x < -x + 4 \quad | +x$

$4x < 4 \quad | :4$

$x < 1$

$\Rightarrow \underline{\underline{x \in]-\infty; 1[}}.$

2. $x - 1 \leq 3x - 1 \quad | -x$

$-1 \leq 2x - 1 \quad | +1$

$0 \leq 2x \quad | :2$

$0 \leq x$

$\Rightarrow \underline{\underline{x \in [0; +\infty[}}.$

3. $-2x + 2 < x - 5 \quad | +2x$

$2 < 3x - 5 \quad | +5$

$7 < 3x \quad | :3$

$\frac{7}{3} < x$

$\Rightarrow \underline{\underline{x \in]\frac{7}{3}; +\infty[}}$

4. $x - 5 \geqslant 4x + 9 \quad | -x$

$-5 \geqslant 3x + 9 \quad | -9$

$-14 \geqslant 3x \quad | :3$

$-\frac{14}{3} \geqslant x$

$\Rightarrow \underline{\underline{]-\infty; -\frac{14}{3}]}}$

5. $-3x + 4 < x^2 \quad | +3x$

$4 < x^2 + 3x \quad | -4$

$0 < x^2 + 3x - 4$

i.e. $x^2 + 3x - 4 > 0$

Résolvons $x^2 + 3x - 4 = 0$.

On a $a = 1$, $b = 3$ et $c = -4$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$; $\sqrt{\Delta} = 5$.

Ainsi $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 5}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 5}{2 \cdot 1} = \frac{-8}{2} = -4$.

Comme $x^2 + 3x - 4$ est une parabole tournée vers le haut $(\cup)$, on en

déduit que $x^2+3x-4>0$ si $x<-4$ ou si $x>1$.
Les solutions de l'inéquation sont donc $x\in\,]-\infty;-4[\,\cup\,]1;+\infty[$.

6. $-x^2+4x \geqslant -5 \quad | +x^2$
$4x \geqslant x^2-5 \quad | -4x$
$0 \geqslant x^2-4x-5$

i.e. $x^2-4x-5 \leqslant 0$.

Résolvons $x^2-4x-5=0$.

On a $a=1$, $b=-4$ et $c=-5$.

$\Delta = b^2-4ac = (-4)^2-4.1.(-5) = 16+20 = 36$; $\sqrt{\Delta}=6$.

Ainsi $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4+6}{2\cdot 1} = \dfrac{10}{2} = 5$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4-6}{2\cdot 1} = \dfrac{-2}{2} = -1$.

Comme x^2-4x-5 est une parabole tournée vers le haut ($\cup$), on en déduit que $x^2-4x-5 \leq 0$ si $-1 \leq x \leq 5$.
Les solutions de l'inéquation sont donc $x \in [-1;5]$.

Exercice 62

Une équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ n'admet aucune solution si son discriminant $\Delta = b^2-4ac < 0$.

a) $3x^2+dx+d=0$: on a : $a=3$, $b=d$ et $c=d$;

$\Delta = b^2-4ac = d^2-4\cdot 3\cdot d = d^2-12d$;

$\Delta < 0 \Rightarrow d^2-12d<0 \Rightarrow d(d-12)<0$;

on a alors 2 possibilités :

① $d>0$ et $d-12<0$;

② $d<0$ et $d-12>0$;

① $d-12<0 \Rightarrow d<12$

avec $d>0$, on obtient $d \in \left]0;12\right[$;

② $d-12>0 \Rightarrow d>12$, ce qui est incompatible avec $d<0$.

Par conséquent : $\underline{\underline{d \in \left]0;12\right[}}$.

b) $x^2+2x+d=3 \Rightarrow x^2+2x+d-3=0$: on a : $a=1$, $b=2$, $c=d-3$;

$\Delta = b^2-4ac = 2^2-4\cdot 1\cdot (d-3) = 4-4(d-3) =$

$= 4-4d+12 = 16-4d$;

$\Delta<0 \Rightarrow 16-4d<0 \Rightarrow 16<4d \Rightarrow 4<d$.

Par conséquent : $\underline{\underline{d \in \left]4;+\infty\right[}}$.

c) $2x^2+x+2=dx \Rightarrow 2x^2+x-dx+2=0 \Rightarrow 2x^2+(1-d)x+2=0$:

on a : $a=2$, $b=1-d$ et $c=2$;

$\Delta = b^2-4ac = (1-d)^2-4\cdot 2\cdot 2 = 1-2d+d^2-16 =$

$= d^2-2d-15$;

$\Delta<0 \Rightarrow d^2-2d-15<0$;

résolvons $d^2-2d-15=0$: on a $A=1$, $B=-2$, $C=-15$;

$\Delta' = B^2-4AC = (-2)^2-4\cdot 1\cdot(-15) = 4+60 = 64$; $\sqrt{\Delta'} = 8$;

ainsi $d_1 = \dfrac{-B+\sqrt{\Delta'}}{2A} = \dfrac{2+8}{2\cdot 1} = \dfrac{10}{2} = 5$ et

$d_2 = \dfrac{-B-\sqrt{\Delta'}}{2A} = \dfrac{2-8}{2\cdot 1} = \dfrac{-6}{2} = -3$;

Comme $d^2-2d-15$ est une parabole ouverte vers le haut (U), on aura $d^2-2d-15<0$ si $-3<d<5$.

Par conséquent : $\underline{\underline{d \in \left]-3;5\right[}}$.

d) $\frac{1}{4}(x+1)^2+2=dx \Rightarrow (x+1)^2+8=4dx \Rightarrow x^2+2x+1+8=4dx$

$\Rightarrow x^2+2x+9=4dx \Rightarrow x^2+2x-2dx+9=0 \Rightarrow x^2+(2-2d)x+9=0$:

on a : $a=1$, $b=2-2d$ et $c=9$;

$\Delta=b^2-4ac=(2-2d)^2-4\cdot1\cdot9=4-8d+4d^2-36=4d^2-8d-32$;

$\Delta<0 \Rightarrow 4d^2-8d-32<0 \Rightarrow d^2-2d-8<0$;

résolvons $d^2-2d-8=0$: on a $A=1, B=-2$ et $C=-8$;

$\Delta'=B^2-4AC=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-8)=4+32=36$; $\sqrt{\Delta'}=6$;

ainsi $d_1=\frac{-B+\sqrt{\Delta'}}{2A}=\frac{2+6}{2\cdot1}=\frac{8}{2}=4$ et $d_2=\frac{-B-\sqrt{\Delta'}}{2A}=\frac{2-6}{2\cdot1}=\frac{-4}{2}=-2$;

Comme d^2-2d-8 est une parabole ouverte vers le haut ($\cup$), on aura

$d^2-2d-8<0$ si $-2<d<6$.

Par conséquent : $\underline{d\in\,]-2;6[}$.

Exercice 63

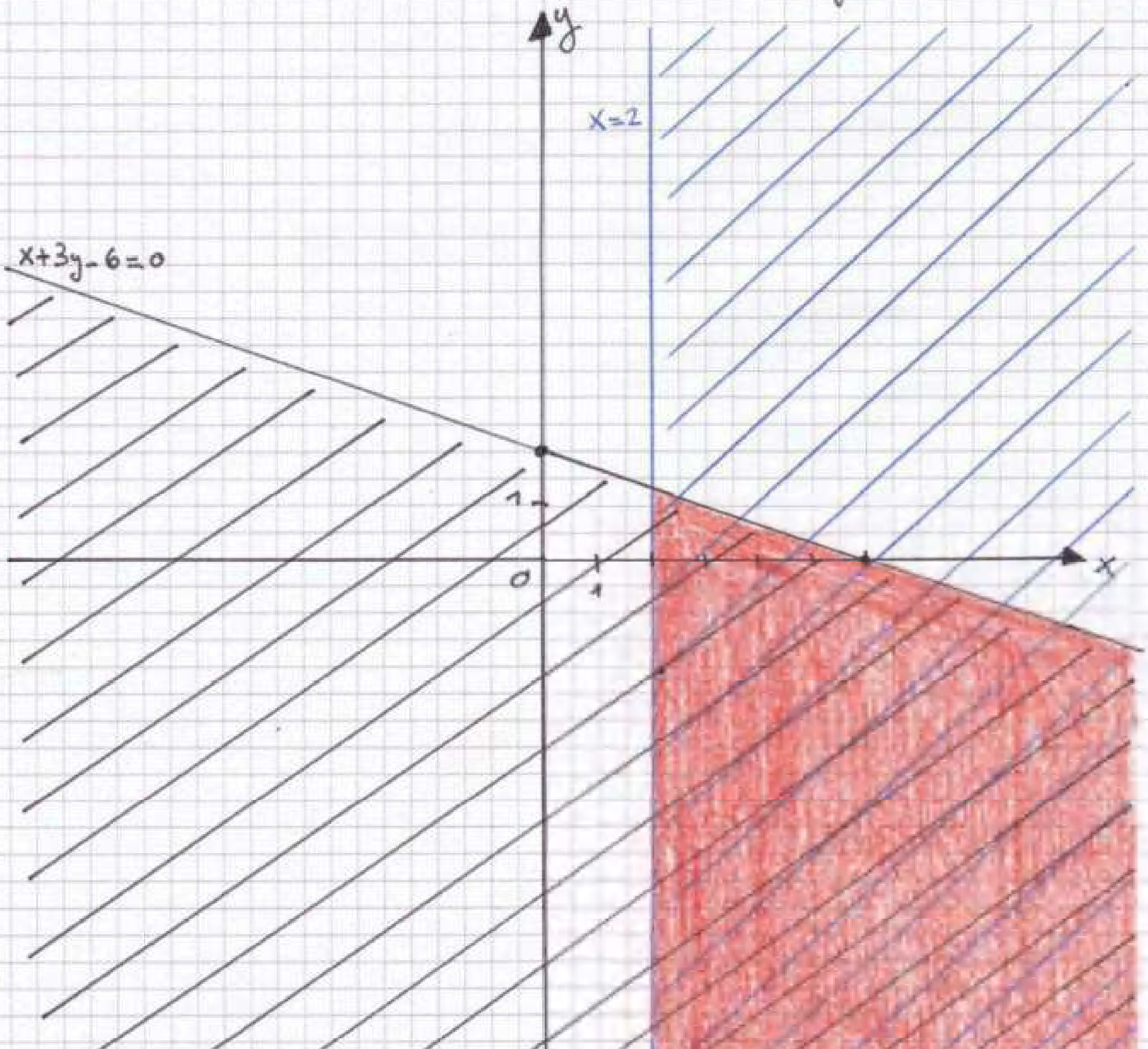
1) $\begin{cases} x+3y-6<0 \\ x>2 \end{cases}$

On commence par dessiner $x+3y-6=0$ (par cela, on trouve 2 points : avec $x=0$, on trouve $y=2$, et, donc le point $(0;2)$; avec $y=0$, on trouve $x=6$, et, donc, le point $(6;0)$).

Comme le point $(0;0)$ satisfait à $x+3y-6<0$, on peut alors hachurer la zone du plan correspondant à $x+3y-6=0$.

On dessine maintenant $x=2$ et on hachure tout ce qui est à droite de cette droite.

La partie du plan satisfaisant au système d'équations est la partie qui a été hachurée les 2 fois (sans les bords puisqu'on a des inégalités strictes).



sans les frontières.

2) $\begin{cases} -2x+y+5>0 \\ 4x+3y-12<0 \end{cases}$

$-2x+y+5=0$: $x=0 \Rightarrow y=-5 \Rightarrow (0;-5)$

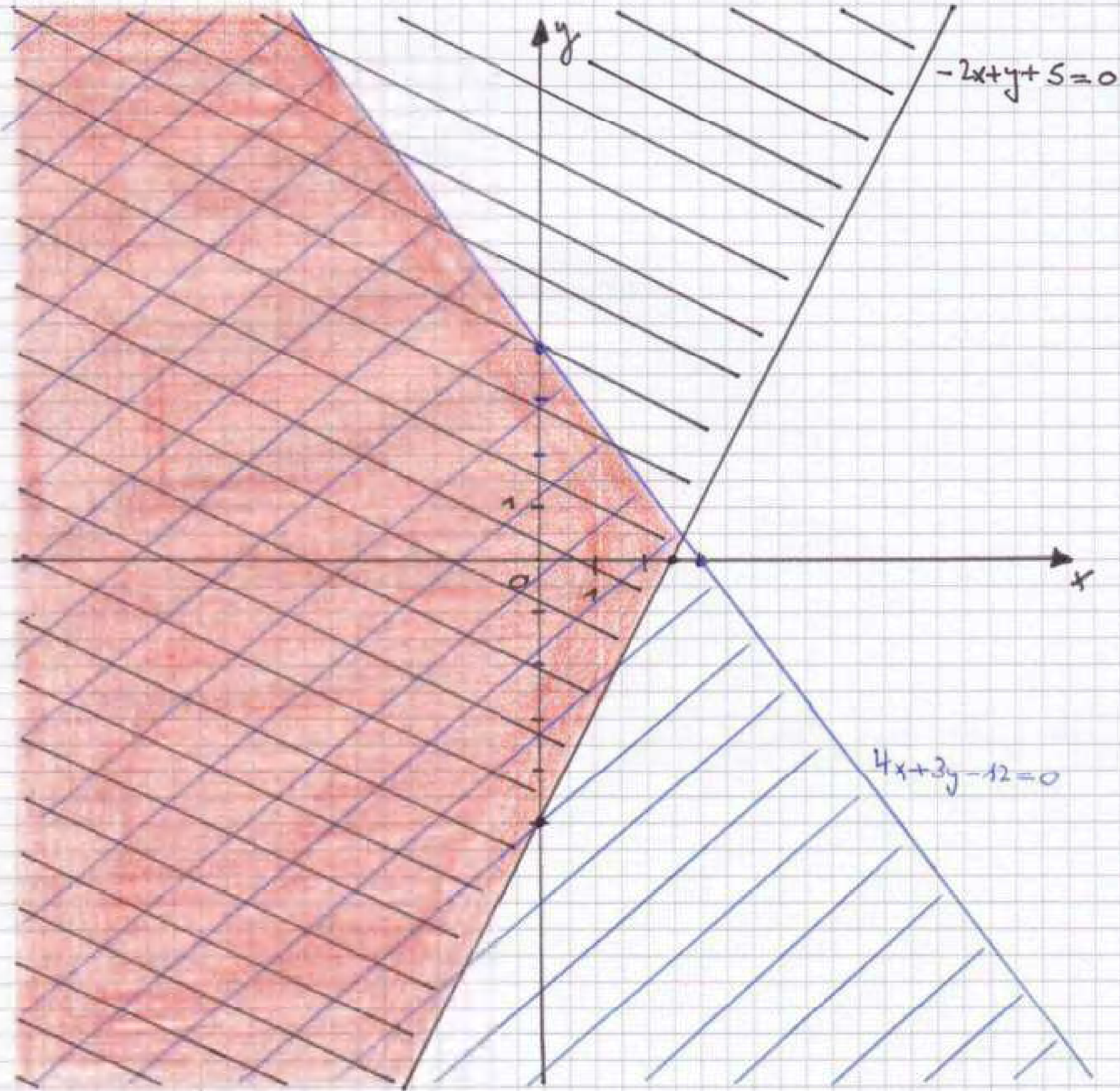
$y=0 \Rightarrow 2x=5 \Rightarrow x=2{,}5 \Rightarrow (2{,}5;0)$

$(0;0) \Rightarrow -2x+y+5=5>0.$

$4x+3y-12=0$: $x=0 \Rightarrow y=4 \Rightarrow (0;4)$

$y=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow (3;0)$

$(0;0) \Rightarrow 4x+3y-12=-12<0.$



sans les frontières

3) $\begin{cases} x+3y \geqslant 0 \\ 2x+y > 5 \end{cases}$

$x+3y=0$: $x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow (0;0)$

$y=1 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow (-3;1)$

$(1;1) \Rightarrow x+3y \geqslant 0.$

$2x+y=5$: $x=0 \Rightarrow y=5 \Rightarrow (0;5)$

$y=0 \Rightarrow x=2,5 \Rightarrow (2,5;0)$

$(0;0) \Rightarrow 2x+y=0<5.$