Exercice 37

1. $\begin{cases} x+2y=8 \xrightarrow{\cdot 1} x+2y=8 \\ 3x+y=-1 \xrightarrow{\cdot(-2)} -6x-2y=2 \end{cases} \xrightarrow{+} -5x=10 \Rightarrow x=-2.$

Avec $x=-2$, on a $-2+2y=8 \Rightarrow 2y=10 \Rightarrow y=5.$

La solution est $\underline{\underline{(-2;5)}}.$

2. $\begin{cases} x-2y=10 \\ 4x+2y=-4 \end{cases} \xrightarrow{+} 5x=6 \Rightarrow x=\frac{6}{5}.$

Avec $x=\frac{6}{5}$, on a $\frac{6}{5}-2y=10 \Rightarrow -2y=10-\frac{6}{5} \Rightarrow -2y=\frac{44}{5} \Rightarrow y=-\frac{22}{5}.$

La solution est $\underline{\underline{\left(\frac{6}{5};-\frac{22}{5}\right)}}.$

3. $\begin{cases} x+4y=10 \xrightarrow{\cdot 5} 5x+20y=50 \\ 3x+5y=9 \xrightarrow{\cdot(-4)} -12x-20y=-36 \end{cases} \xrightarrow{+} -7x=14 \Rightarrow x=-2.$

Avec $x=-2$, on a $-2+4y=10 \Rightarrow 4y=12 \Rightarrow y=3.$

La solution est $\underline{\underline{(-2;3)}}.$

4. $\begin{cases} x+3y=2 \xrightarrow{\cdot 1} x-3y=2 \\ 3x-y=-24 \xrightarrow{\cdot 3} 9x+3y=-72 \end{cases} \xrightarrow{+} 10x=-70 \Rightarrow x=-7.$

Avec $x=-7$, on a $-7+3y=2 \Rightarrow 3y=9 \Rightarrow y=3.$

La solution est $\underline{\underline{(-7;3)}}.$

5. $\begin{cases} 2x+y=29 \xrightarrow{\cdot 5} 10x+5y=145 \\ 3x-5y=11 \xrightarrow{\cdot 1} 3x-5y=11 \end{cases} \xrightarrow{+} 13x=156 \Rightarrow x=12.$

Avec $x=12$, on a $2\cdot 12+y=29 \Rightarrow 24+y=29 \Rightarrow y=5.$

La solution est $\underline{\underline{(12;5)}}.$

6. $\begin{cases} 3x-y=-1 \xrightarrow{\cdot(-3)} -9x+3y=3 \\ 5x-3y=1 \xrightarrow{\cdot 1} 5x-3y=1 \end{cases} \xrightarrow{+} -4x=4 \Rightarrow x=-1.$

Avec $x=-1$, on a $-3-y=-1 \Rightarrow -y=2 \Rightarrow y=-2.$

La solution est $\underline{\underline{(-1;-2)}}.$

7. $\begin{cases} x+2y=-4 \xrightarrow{\cdot 1} x+2y=-4 \\ 2x-y=23 \xrightarrow{\cdot 2} 4x-2y=46 \end{cases} \xrightarrow{+} 5x=42 \Rightarrow x=\frac{42}{5}.$

Avec $x=\frac{42}{5}$, on a $\frac{42}{5}+2y=-4 \Rightarrow 2y=-4-\frac{42}{5} \Rightarrow 2y=-\frac{62}{5} \Rightarrow y=-\frac{31}{5}.$

La solution est $\underline{\underline{\left(\frac{42}{5};-\frac{31}{5}\right)}}.$

8. $\begin{cases} 8x-y=15 \xrightarrow{\cdot 2} 16x-2y=30 \\ x+2y=21 \xrightarrow{\cdot 1} x+2y=21 \end{cases} \xrightarrow{+} 17x=51 \Rightarrow x=3.$

Avec $x=3$, on a $8\cdot 3-y=15 \Rightarrow 24-y=15 \Rightarrow -y=-9 \Rightarrow y=9.$

La solution est $\underline{(3;9)}$.

Exercice 38

a. $\begin{cases} 12x+11y=6 \xrightarrow{\cdot 1} 12x+11y=6 \\ -2x+3y=28 \xrightarrow{\cdot 6} -12x+18y=168 \end{cases} \xrightarrow{+} 29y=174 \Rightarrow y=6.$

Avec $y=6$, on a $12x+11\cdot 6=6 \Rightarrow 12x+66=6 \Rightarrow 12x=-60 \Rightarrow x=-5.$

La solution est $(-5;6)$.

b. $\begin{cases} 4x-3y=10 \xrightarrow{\cdot 4} 16x-12y=40 \\ 7x-4y=22 \xrightarrow{\cdot(-3)} -21x+12y=-66 \end{cases} \xrightarrow{+} -5x=-26 \Rightarrow x=\frac{26}{5}.$

Avec $x=\frac{26}{5}$, on a $4\cdot\frac{26}{5}-3y=10 \Rightarrow \frac{104}{5}-3y=10 \Rightarrow -3y=10-\frac{104}{5}$

$\Rightarrow -3y=-\frac{54}{5} \Rightarrow y=\frac{18}{5}.$

La solution est $\left(\frac{26}{5};\frac{18}{5}\right)$.

c. $\begin{cases} \frac{1}{3}x+y=19 \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{5}y=7 \end{cases} \xrightarrow{-} \frac{4}{5}y=12 \Rightarrow 4y=60 \Rightarrow y=15.$

Avec $y=15$, on a $\frac{1}{3}x+15=19 \Rightarrow \frac{1}{3}x=4 \Rightarrow x=12.$

La solution est $(12;15)$.

d. $\begin{cases} 5x+4y=-3 \xrightarrow{\cdot 1} 5x+4y=-3 \\ x+2y=15 \xrightarrow{\cdot(-2)} -2x-4y=-30 \end{cases} \xrightarrow{+} 3x=-33 \Rightarrow x=-11.$

Avec $x=-11$, on a $-11+2y=15 \Rightarrow 2y=26 \Rightarrow y=13.$

La solution est $(-11;13)$.

Exercice 39

On résout

$$\begin{aligned}
3y &= 2(1-3y)+y-8 && \text{Distributivité}\\
3y &= 2-6y+y-8 && \text{Réduction}\\
3y &= 2-5y-8 && \text{Réduction}\\
3y &= -5y-6 && +5y\\
8y &= -6 && :8\\
y &= -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Avec $y=-\frac{3}{4}$, on a $x = 1-3y = 1-3\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) = 1+\frac{9}{4} = \frac{13}{4}$.

La solution est bien $\left(\frac{13}{4}\,;-\frac{3}{4}\right)$.

Exercice 40

a) $\begin{cases} -x+3=2y \\ 10y-8=2x \end{cases} \xrightarrow{:2} 5y-4=x$

$-(5y-4)+3=2y$	Distributivité
$-5y+4+3=2y$	Réduction
$-5y+7=2y$	$+5y$
$7=7y$	$:7$
$1=y.$	

Avec $y=1$, on a $x=5y-4=5\cdot1-4=5-4=1$.

La solution est donc $\underline{\underline{(1;1)}}$.

b) $\begin{cases} 5y-6=7x \\ \frac{x}{3}-2=y \end{cases}$

$5\left(\frac{x}{3}-2\right)-6=7x$	Distributivité
$\frac{5x}{3}-10-6=7x$	Réduction
$\frac{5x}{3}-16=7x$	$\cdot 3$
$5x-48=21x$	$-5x$
$-48=16x$	$:16$
$-3=x.$	

Avec $x=-3$, on a $y=\frac{x}{3}-2=\frac{-3}{3}-2=-1-2=-3$.

La solution est donc $\underline{\underline{(-3;-3)}}$.

c) $\begin{cases} 3y-4x=-10 \\ y=\frac{22-7x}{4} \end{cases}$

$3\cdot\frac{22-7x}{4}-4x=-10$	Calculs
$\frac{66-21x}{4}-4x=-10$	$\cdot 4$
$66-21x-16x=-40$	Réduction
$66-37x=-40$	-66
$-37x=-106$	$:(-37)$
$x=\frac{106}{37}.$	

Avec $x=\frac{106}{37}$, on a $y=\frac{22-7x}{4}=\frac{1}{4}(22-7x)=\frac{1}{4}\left(22-7\cdot\frac{106}{37}\right)=\frac{1}{4}\left(22-\frac{742}{37}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{72}{37}=\frac{18}{37}$.

La solution est donc $\underline{\underline{\left(\frac{106}{37};\frac{18}{37}\right)}}$.

Exercice 41

1. $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ -3x+y=5 \end{cases} \xrightarrow{+} 3y=12 \Rightarrow y=4.$

Avec $y=4$, on a $3x+2y=7 \Rightarrow 3x+8=7 \Rightarrow 3x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$.

La solution est donc $\left(-\frac{1}{3};4\right)$.

2. $\begin{cases} x-3y=-6 \xrightarrow{\cdot 5} 5x-15y=-30 \\ 4x+5y=27 \xrightarrow{\cdot 3} 12x-15y=81 \end{cases} \xrightarrow{+} 17x=51 \Rightarrow x=3.$

Avec $x=3$, on a $x-3y=-6 \Rightarrow 3-3y=-6 \Rightarrow -3y=-9 \Rightarrow y=3$.

La solution est donc $(3;3)$.

3. $\begin{cases} 3(x-y)=2(x-3)-(y+2) \\ 5x=y+1 \rightarrow x=\frac{y}{5}+\frac{1}{5} \end{cases}$

$3\left(\frac{y}{5}+\frac{1}{5}-y\right)=2\left(\frac{y}{5}+\frac{1}{5}-3\right)-(y+2)$	Réduction
$3\left(\frac{1}{5}-\frac{4y}{5}\right)=2\left(\frac{y}{5}-\frac{14}{5}\right)-(y+2)$	Distributivité
$\frac{3}{5}-\frac{12y}{5}=\frac{2y}{5}-\frac{28}{5}-y-2$	$\cdot 5$
$3-12y=2y-28-5y-10$	Réduction
$3-12y=-3y-38$	$+3y$
$3-9y=-38$	-3
$-9y=-41$	$:(-9)$
$y=\frac{41}{9}$	

Avec $y=\frac{41}{9}$, on a $x=\frac{y}{5}+\frac{1}{5}=\frac{41}{45}+\frac{1}{5}=\frac{41}{45}+\frac{9}{45}=\frac{50}{45}=\frac{10}{9}$.

La solution est donc $\left(\frac{10}{9};\frac{41}{9}\right)$.

4. $\begin{cases} \frac{2x-1}{3}-\frac{4x+10}{10}=0 \xrightarrow{\cdot 30} 10(2x-1)-3(4x+10)=0 \Rightarrow 20x-10-12x-30=0 \Rightarrow 8x-40=0 \\ \qquad \Rightarrow 8x=40 \Rightarrow x=5 \\ \frac{4x-2}{6}+\frac{2y+1}{5}=6 \end{cases}$

$\frac{20-2}{6}+\frac{2y+1}{5}=6$	Calculs
$3+\frac{2y+1}{5}=6$	$\cdot 5$
$15+2y+1=30$	Réduction
$2y+16=30$	-16
$2y=14$	$:2$
$y=7$	

La solution est donc $(5;7)$.

5. $\begin{cases} \frac{x+y}{8}=5-\frac{x-y}{6} \xrightarrow{\cdot 24} 3(x+y)=120-4(x-y) \Rightarrow 3x+3y=120-4x+4y \Rightarrow 7x-y=120 \\ \frac{x+y}{8}=10+\frac{x-y}{3} \xrightarrow{\cdot 24} 3(x+y)=240+8(x-y) \Rightarrow 3x+3y=240+8x-8y \Rightarrow -5x+11y=240. \end{cases}$

On obtient donc le système:

$$\begin{cases} 7x-y=120 \Longrightarrow 7x=y+120 \Longrightarrow y=7x-120 \\ -5x+11y=240 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|l} -5x+11(7x-120)=240 & \text{Distributivité} \\ -5x+77x-1320=240 & \text{Réduction} \\ 72x-1320=240 & +1320 \\ 72x=1560 & :72 \\ x=\frac{65}{3} & \end{array}$$

Avec $x=\frac{65}{3}$, on a $y=7x-120=7\cdot\frac{65}{3}-120=\frac{455}{3}-120=\frac{95}{3}$.

La solution est donc $\underline{\underline{\left(\frac{65}{3};\frac{95}{3}\right)}}$.

Exercice 42

1. $\left\{\begin{array}{l} x+y=25 \\ x-y=15 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 2x=40 \Rightarrow \underline{\underline{x=20}} \Rightarrow 20+y=25 \Rightarrow \underline{\underline{y=5}}.$

2. $\left\{\begin{array}{l} 3x+2y=3 \xrightarrow{\cdot 3} 9x+6y=9 \\ 4x-3y=-13 \xrightarrow{\cdot 2} 8x-6y=-26 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 17x=-17 \Rightarrow \underline{\underline{x=-1}} \Rightarrow -3+2y=3 \Rightarrow 2y=6 \Rightarrow \underline{\underline{y=3}}.$

3. $\left\{\begin{array}{l} 3(x-y)=2(x-3)-(y+2) \\ 5x=y+1 \Rightarrow y=5x-1 \end{array}\right.$

$3\left(x-(5x-1)\right)=2(x-3)-(5x-1+2)$	Distributivité
$3(x-5x+1)=2x-6-5x+1-2$	Distributivité
$3x-15x+3=2x-6-5x+1-2$	Réduction
$-12x+3=-3x-7$	$+3x$
$-9x+3=-7$	-3
$-9x=-10$	$:9$
$\underline{\underline{x=\frac{10}{9}}}$	

$\Rightarrow y=5x-1=5\cdot\frac{10}{9}-1=\frac{50}{9}-1=\underline{\underline{\frac{41}{9}}}.$

4. $\left\{\begin{array}{l} \frac{x+y}{4}+\frac{x-y}{3}=3 \xrightarrow{\cdot 12} 3(x+y)+4(x-y)=36 \Rightarrow 3x+3y+4x-4y=36 \Rightarrow 7x-y=36 \\ \frac{12x-7y}{13}=3 \xrightarrow{\cdot 13} 12x-7y=39 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 7x-y=36 \xrightarrow{\cdot 7} 49x-7y=252 \\ 12x-7y=39 \xrightarrow{\cdot(-1)} -12x+7y=-39 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 37x=213 \Rightarrow \underline{\underline{x=\frac{213}{37}}}$

$\Rightarrow 7\cdot\frac{213}{37}-y=36 \Rightarrow \frac{1491}{37}-y=36 \Rightarrow -y=36-\frac{1491}{37}=-\frac{159}{37} \Rightarrow \underline{\underline{y=\frac{159}{37}}}.$

5. $\left\{\begin{array}{l} \frac{2x-1}{3}-\frac{4y+2}{10}=0 \xrightarrow{\cdot 30} 10(2x-1)-3(4y+2)=0 \Rightarrow 20x-10-12y-6=0 \Rightarrow 20x-12y-16=0 \\ \qquad \Rightarrow 20x-12y=16 \Rightarrow 5x-3y=4 \\ \frac{4x-2}{6}+\frac{2y+1}{5}=6 \xrightarrow{\cdot 30} 5(4x-2)+6(2y+1)=180 \Rightarrow 20x-10+12y+6=180 \Rightarrow 20x+12y-4=180 \\ \qquad \Rightarrow 20x+12y=184 \Rightarrow 5x+3y=46 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 5x-3y=4 \\ 5x+3y=46 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 10x=50 \Rightarrow \underline{\underline{x=5}} \Rightarrow 5\cdot5+3y=46 \Rightarrow 3y=21 \Rightarrow \underline{\underline{y=7}}.$

6. $\left\{\begin{array}{l} x+4y=7 \longrightarrow x=7-4y \\ \frac{x+1}{2}-(2y+3)=-3 \end{array}\right.$

$\frac{7-4y+1}{2}-(2y+3)=-3$	Réduction
$\frac{8-4y}{2}-(2y+3)=-3$	Simplification
$4-2y-(2y+3)=-3$	Distributivité
$4-2y-2y-3=-3$	Réduction
$-4y+1=-3$	-1

$$-4y = -4 \quad \Big| \; :(-4)$$

$$\underline{\underline{y = 1}}$$

$\Rightarrow \; x = 7 - 4y = 7 - 4 = \underline{\underline{3.}}$

Exercice 43

1. $\begin{cases} \frac{x+2y}{2}=\frac{y-1}{4} \xrightarrow{\cdot 4} 2(x+2y)=y-1 \Rightarrow 2x+4y=y-1 \Rightarrow 2x+3y=-1 \\ \frac{7x+13y}{12}-y=\frac{x}{2} \xrightarrow{\cdot 12} 7x+13y-12y=6x \Rightarrow 7x+y=6x \Rightarrow y=-x \end{cases}$

$\rightarrow 2x-3x=-1 \Rightarrow -x=-1 \Rightarrow \underline{\underline{x=1 \text{ et } y=-1.}}$

2. $\begin{cases} \frac{x}{12}-\frac{1-2y}{4}=-\frac{5}{6} \xrightarrow{\cdot 12} x-3(1-2y)=-10 \Rightarrow x-3+6y=-10 \Rightarrow x+6y=-7 \\ \frac{29}{10}-2+x=\frac{y}{10} \xrightarrow{\cdot 10} 29-20+10x=y \Rightarrow y=10x+9 \end{cases}$

$\rightarrow x+6(10x+9)=-7 \Rightarrow x+60x+54=-7 \Rightarrow 61x+54=-7 \Rightarrow 61x=-61 \Rightarrow \underline{\underline{x=-1}}$

$\rightarrow y=10x+9=-10+9=\underline{\underline{-1.}}$

3. $\begin{cases} \frac{5}{4}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}=0 \xrightarrow{\cdot 4} 5x-2y+1=0 \\ -x-\frac{7-3y}{2}=0 \xrightarrow{\cdot 2} -2x-(7-3y)=0 \Rightarrow -2x-7+3y=0 \Rightarrow -2x+3y-7=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \left.\begin{cases} 5x-2y+1=0 \xrightarrow{\cdot 3} 15x-6y+3=0 \\ -2x+3y-7=0 \xrightarrow{\cdot 2} -4x+6y-14=0 \end{cases}\right] \xrightarrow{+} 11x-11=0 \Rightarrow 11x=11 \Rightarrow \underline{\underline{x=1}}$

$\rightarrow 5-2y+1=0 \Rightarrow -2y+6=0 \Rightarrow -2y=-6 \Rightarrow \underline{\underline{y=3.}}$

4. $\begin{cases} \frac{x}{2}=\frac{y}{3} \\ x+\frac{1}{3}y=30 \end{cases} \rightarrow x+\frac{x}{2}=30 \Rightarrow 2x+x=60 \Rightarrow 3x=60 \Rightarrow \underline{\underline{x=20}}$

$\rightarrow \frac{x}{2}=\frac{y}{3} \Rightarrow \frac{y}{3}=\frac{20}{2}=10 \Rightarrow \underline{\underline{y=30.}}$

5. $\begin{cases} \frac{2x+5}{3}+\frac{3y-1}{5}=\frac{11}{15} \xrightarrow{\cdot 15} 5(2x+5)+3(3y-1)=11 \Rightarrow 10x+25+9y-3=11 \Rightarrow 10x+9y=-11 \\ \frac{3x-2}{5}+\frac{y+4}{2}=\frac{9}{10} \xrightarrow{\cdot 10} 2(3x-2)+5(y+4)=9 \Rightarrow 6x-4+5y+20=9 \Rightarrow 6x+5y=-7 \end{cases}$

$\Rightarrow \left.\begin{cases} 10x+9y=-11 \xrightarrow{\cdot 5} 50x+45y=-55 \\ 6x+5y=-7 \xrightarrow{\cdot(-9)} -54x-45y=63 \end{cases}\right] \xrightarrow{+} -4x=8 \Rightarrow \underline{\underline{x=-2}}$

$\rightarrow 6\cdot(-2)+5y=-7 \Rightarrow -12+5y=-7 \Rightarrow 5y=5 \Rightarrow \underline{\underline{y=1.}}$

6. $\begin{cases} \frac{x}{9}=\frac{2y}{3}-4 \xrightarrow{\cdot 9} x=6y-36 \\ \frac{x}{3}+\frac{5y}{21}=\frac{1}{3} \xrightarrow{\cdot 21} 7x+5y=7 \end{cases}$

$7(6y-36)+5y=7$	Distributivité
$42y-252+5y=7$	Réduction
$47y-252=7$	$+252$
$47y=259$	$:47$
$\underline{\underline{y=\frac{259}{47}}}$	

$x=6y-36=6\cdot\frac{259}{47}-36=\frac{1554}{47}-36=\underline{\underline{-\frac{138}{47}.}}$

7. $\begin{cases} \frac{x+1}{9}+\frac{7}{18}=-\frac{3y+1}{18} \xrightarrow{\cdot 18} 2(x+1)+7=-(3y+1) \Rightarrow 2x+2+7=-3y-1 \Rightarrow 2x+3y=-10 \\ \frac{x}{15}+\frac{y}{3}=\frac{y+9}{15} \xrightarrow{\cdot 15} x+5y=y+9 \Rightarrow x+4y=9 \end{cases}$

$\Rightarrow \left.\begin{cases} 2x+3y=-10 \xrightarrow{\cdot 4} 8x+12y=-40 \\ x+4y=9 \xrightarrow{\cdot(-3)} -3x-12y=-27 \end{cases}\right\} \xrightarrow{+} 5x=-67 \Rightarrow \underline{\underline{x=-\frac{67}{5}}}$

$\Rightarrow -\frac{67}{5}+4y=9 \Rightarrow 4y=9+\frac{67}{5}=\frac{112}{5} \Rightarrow \underline{\underline{y=\frac{28}{5}}}.$

8. $\begin{cases} \frac{x-3}{7}-\frac{2y+2}{3}=\frac{y-6}{7}+1 \xrightarrow{\cdot 21} 3(x-3)-7(2y+2)=3(y-6)+21 \Rightarrow 3x-9-14y-14=3y-18+21 \\ \Rightarrow 3x-14y-23=3y+3 \Rightarrow 3x-17y=26 \\ y-\frac{5x+1}{3}=19-3x \xrightarrow{\cdot 3} 3y-(5x+1)=57-9x \Rightarrow 3y-5x-1=57-9x \Rightarrow 4x+3y=58 \end{cases}$

$\Rightarrow \left.\begin{cases} 3x-17y=26 \xrightarrow{\cdot 4} 12x-68y=104 \\ 4x+3y=58 \xrightarrow{\cdot(-3)} -12x-9y=-174 \end{cases}\right\} \xrightarrow{+} -77y=-70 \Rightarrow y=\frac{70}{77}=\underline{\underline{\frac{10}{11}}}$

$\rightarrow 4x+3\cdot\frac{10}{11}=58 \Rightarrow 4x+\frac{30}{11}=58 \Rightarrow 4x=58-\frac{30}{11}=\frac{608}{11} \Rightarrow \underline{\underline{x=\frac{152}{11}}}.$

Exercice 44

x = nombre d'adultes

y = nombre d'enfants

125 participants: $x+y=125$

15 billets par adulte: au total: $15x$

10 billets par enfant: au total: $10y$

1650 billets au total: $15x + 10y = 1650 \longrightarrow 3x+2y=330$

$$\Longrightarrow \left.\begin{cases} x+y=125 \xrightarrow{\cdot 2} 2x+2y=250 \\ 3x+2y=330 \xrightarrow{\cdot(-1)} -3x-2y=-330 \end{cases}\right\} \xrightarrow{+} -x=-80 \Longrightarrow x=80$$

$$\longrightarrow 80+y=125 \Longrightarrow y=45.$$

Donc il y avait <u>80 adultes et 45 enfants.</u>

Exercice 45

x = prix de la glace
y = prix du sandwich

3 glaces + 2 sandwiches = 39 frs $\Rightarrow$ $3x+2y=39 \xrightarrow{\cdot 3} 9x+6y=117$
1 glace + 3 sandwiches = 34 frs $\Rightarrow$ $x+3y=34 \xrightarrow{\cdot(-2)} -2x-6y=-68$

$\left.\begin{array}{l} 9x+6y=117 \\ -2x-6y=-68 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 7x=49 \Rightarrow x=7$

$\rightarrow 3\cdot 7+2y=39 \Rightarrow 21+2y=39 \Rightarrow 2y=18 \Rightarrow y=9.$

Donc la glace coûte 7.– et le sandwich 9.–.

Exercice 46

$x =$ prix d'un t-shirt

$y =$ prix d'un pull

Avec 200.–, achat de 4 t-shirts et 4 pulls $\Rightarrow 4x + 4y = 200 \Rightarrow x + y = 50$

Avec 200.–, achat de 1 t-shirts et 6 pulls $\Rightarrow x + 6y = 200$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=50 \\ x+6y=200 \end{array}\right\} \xrightarrow{-} -5y = -150 \Rightarrow y = 30$$

$$\Rightarrow x + 30 = 50 \Rightarrow x = 20.$$

Donc le prix du t-shirt est de 20.– et celui du pull de 30.–.

Exercice 47

x = longueur du rectangle
y = largeur du rectangle
La longueur surpasse la largeur de 7cm : $x = y+7$
Le périmètre vaut 138 cm : $2x + 2y = 138 \Rightarrow x+y = 69$ $\rightarrow$ $y+7+y = 69 \Rightarrow 2y+7 = 69$
$\Rightarrow 2y = 62 \Rightarrow y = 31$

$\Rightarrow x = y+7 = 31+7 = 38.$

Donc les dimensions du rectangle sont 38cm sur 31cm.

Exercice 48

$x = 1^{er}$ nombre
$y = 2^{e}$ nombre → On va choisir $x \geqslant y$.

Quotient des 2 nombres = 13 $\Longrightarrow \frac{x}{y} = 13 \Longrightarrow x = 13y$

Différence des 2 nombres = 132 $\Longrightarrow x - y = 132$ → $13y - y = 132 \Longrightarrow 12y = 132 \Longrightarrow y = 11$

$\Longrightarrow x = 13y = 13 \cdot 11 = 143.$

Ainsi les nombres sont 143 et 11.

Exercice 49

On doit résoudre le système $\begin{cases} y = 3x+5 \\ y = \frac{3}{4}x+2. \end{cases}$

Comme les membres de gauche sont identiques, les membres de droite doivent être égaux :

$$3x+5 = \frac{3}{4}x+2 \qquad \cdot 4$$

$$12x+20 = 3x+8 \qquad -3x$$

$$9x+20 = 8 \qquad -20$$

$$9x = -12 \qquad :9$$

$$x = -\frac{12}{9} = -\frac{4}{3}.$$

Avec $x = -\frac{4}{3}$, on a $y = 3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)+5 = -4+5 = 1.$

Ainsi le point d'intersection est $\left(-\frac{4}{3};1\right)$.

Exercice 50

$x = 1^{er}$ nombre
$y = 2^e$ nombre $\Big\} \rightarrow$ On va choisir $x > y$.

Un nombre vaut le quart de l'autre $\Rightarrow y = \frac{1}{4}x \Rightarrow x = 4y$.

On enlève 25 au plus petit : $y - 25$

On enlève 70 au plus grand : $x - 70$

Les résultats sont égaux : $y - 25 = x - 70$ $\longrightarrow$ $y - 25 = 4y - 70 \Rightarrow -3y - 25 = -70$

$\Rightarrow -3y = -45 \Rightarrow y = 15$

$\Rightarrow x = 4y = 4 \cdot 15 = 60.$

Ainsi les nombres sont 60 et 15.

Exercice 51

$\frac{x}{y}$ = la fraction cherchée

Si on diminue de 1 son numérateur, elle devient égale à $\frac{2}{3}$: $\frac{x-1}{y} = \frac{2}{3}$.
Si on ajoute 7 à son dénominateur, elle devient égale à $\frac{1}{2}$: $\frac{x}{y+7} = \frac{1}{2}$.

On doit donc résoudre le système : $\begin{cases} \frac{x-1}{y} = \frac{2}{3} \\ \frac{x}{y+7} = \frac{1}{2}. \end{cases}$

$\frac{x-1}{y} = \frac{2}{3} \Longrightarrow 3(x-1) = 2y \Longrightarrow 3x - 3 = 2y \Longrightarrow 3x - 2y = 3.$
$\frac{x}{y+7} = \frac{1}{2} \Longrightarrow 2x = y+7 \Longrightarrow 2x - y = 7.$

On obtient ainsi le système : $\left.\begin{cases} 3x-2y=3 \xrightarrow{\cdot(-1)} -3x+2y=-3 \\ 2x-y=7 \xrightarrow{\cdot 2} 4x-2y=14 \end{cases}\right\} \xrightarrow{+} x = 11.$

Avec $x = 11$, on a $2 \cdot 11 - y = 7 \Longrightarrow 22 - y = 7 \Longrightarrow -y = -15 \Longrightarrow y = 15.$

La fraction est donc $\frac{11}{15}$.

Exercice 52

x = longueur du rectangle
y = largeur du rectangle
La longueur représente 3x sa largeur plus 5m : $x = 3y + 5$
Le périmètre mesure 106 m : $2x + 2y = 106 \Rightarrow x + y = 53$

	Réduction
$3y + 5 + y = 53$	
$4y + 5 = 53$	-5
$4y = 48$	$:4$
$y = 12$	

Avec $y = 12$, on a $x = 3y + 5 = 3.12 + 5 = 36 + 5 = 41$.

Les mesures des côtés du rectangle sont donc 12m et 41 m.

Exercice 53

x = prix d'un rouleau de papier imprimé
y = prix d'un rouleau de papier uni
Au total 9 rouleaux.

600.- pour 3 rouleaux de papier imprimé et 6 rouleaux de papier uni : $3x+6y=600$.

632.- pour 4 rouleaux de papier imprimé et 5 rouleaux de papier uni : $4x+5y=632$.

On doit résoudre le système : $\begin{cases} 3x+6y=600 \xrightarrow{:3} x+2y=200 \xrightarrow{\cdot 5} 5x+10y=100 \\ 4x+5y=632 \longrightarrow 4x+5y=632 \xrightarrow{\cdot(-2)} -8x-10y=-1264 \end{cases} \xrightarrow{+}$

$-3x=-264 \Rightarrow x=88$.

Avec $x=88$, on a $88+2y=200 \Rightarrow 2y=112 \Rightarrow y=56$.

Le prix d'un rouleau de papier imprimé est donc de 88.- et celui d'un rouleau de papier uni de 56.-.

Exercice 54

x = nb de billets de 100.-

y = nb de billets de 50.-

Au total, 37 billets : $x+y=37$

Somme totale, 2850.- : $100x+50y=2850 \Rightarrow 2x+y=57$.

On doit résoudre le système $\begin{cases} x+y=37 \\ 2x+y=57 \end{cases} \overset{-}{\Rightarrow} -x=-20 \Rightarrow x=20$.

Avec $x=20$, on a $20+y=37 \Rightarrow y=17$.

Donc, il y a 20 billets de 100.- et 17 billets de 50.-.

Exercice 55

x = 1^er^ nombre
y = 2^e^ nombre
→ On va choisir $x \geq y$.

Leur somme est 355 ⟹ $x+y=355$.

Le plus grand divisé par le plus petit donne 19 pour reste et 11 pour quotient :

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 19 & 11 \end{array}$$

preuve : $11y+19=x$.

On doit résoudre le système $\begin{cases} x+y=355 \\ x=11y+19 \end{cases}$

	Réduction
$11y+19+y=355$	
$12y+19=355$	-19
$12y=336$	$:12$
$y=28$	

Avec $y=28$, on a $x+28=355$ ⟹ $x=327$.

Les nombres sont donc 327 et 28.

Exercice 56

x = nombre de rhinocéros

y = nombre d'antilopes

z = nombre de serpents

13 têtes au total : $x+y+z=13$

14 cornes au total : $x+2y=14$ (les serpents n'ont pas de cornes !)

32 pattes au total : $4x+4y=32$ (les serpents n'ont pas de pattes !).

Commençons par résoudre le système constitué des 2 dernières équations :

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y=14 \longrightarrow x+2y=14 \\ 4x+4y=32 \xrightarrow{:4} x+y=8 \end{array}\right\} \xrightarrow{-} y=6.$$

Avec $y=6$, on a $x+2\cdot y=14 \Rightarrow x+2\cdot 6=14 \Rightarrow x+12=14 \Rightarrow x=2.$

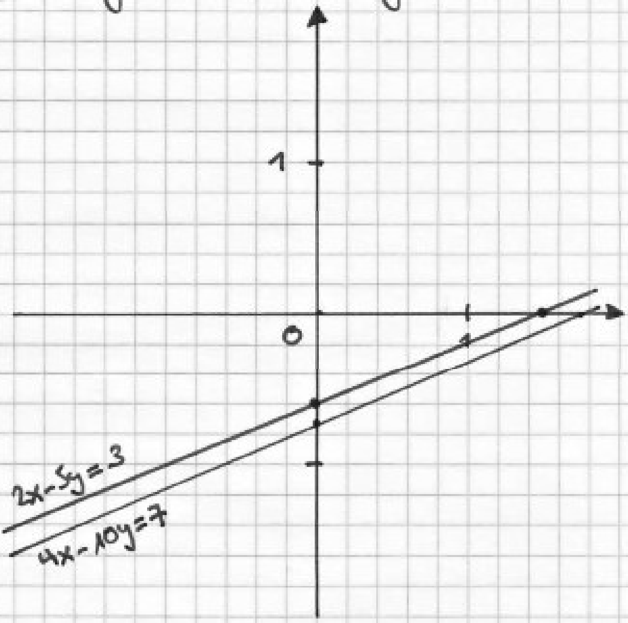
Avec $x=2$ et $y=6$ dans $x+y+z=13$ (1ère des équations), on a :

$$2+6+z=13 \Rightarrow 8+z=13 \Rightarrow z=5.$$

Ainsi <u>il a rencontré 2 rhinocéros, 6 antilopes et 5 serpents.</u>

Exercice 57

a. $\begin{cases} 2x-5y=3 \xrightarrow{\cdot 2} 4x-10y=6 \\ 4x-10y=7 \xrightarrow{\cdot(-1)} -4x+10y=-7 \end{cases} \xrightarrow{+} 0=-1$, ce qui est impossible.



$2x-5y=3$: $x=0 \Rightarrow -5y=3 \Rightarrow y=-\frac{3}{5}$

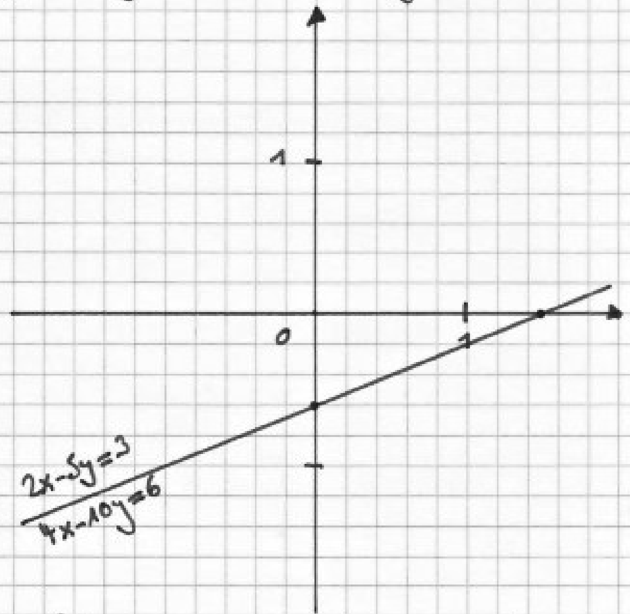
$y=0 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow y=\frac{3}{2}$

$4x-10y=7$: $x=0 \Rightarrow -10y=7 \Rightarrow y=-\frac{7}{10}$

$y=0 \Rightarrow 4x=7 \Rightarrow y=\frac{7}{4}$

Les droites sont parallèles.
Il n'y a donc pas de point d'intersection.
Le système d'équations n'a alors aucune solution.

b. $\begin{cases} 2x-5y=3 \xrightarrow{\cdot 2} 4x-10y=6 \\ 4x-10y=6 \xrightarrow{\cdot(-1)} -4x+10y=-6 \end{cases} \xrightarrow{+} 0=0.$



Les droites sont confondues.
Il existe donc une infinité de "points d'intersection".
Le système d'équations possèdent donc une infinité de solutions données par $2x-5y=3$.
On dit que le système est indéterminé.

c. i. $\begin{cases} 4x-y=10 \longrightarrow 4x-y=10 \\ 2x-0{,}5y=20 \xrightarrow{\cdot(-2)} -4x+y=-40 \end{cases} \xrightarrow{+} 0=-30 \Rightarrow$ <u>impossible.</u>

ii. $\begin{cases} 5x+15y=10 \longrightarrow 5x+15y=10 \\ -x-5y=-2 \xrightarrow{\cdot 5} -5x-25y=-10 \end{cases} \xrightarrow{+} -10y=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow 5x=10 \Rightarrow x=2$

$\Rightarrow$ <u>le système a une solution donnée par $(2;0)$.</u>

iii. $\begin{cases} 25x+15y=50 \longrightarrow 25x+15y=50 \\ 5x+3y=10 \xrightarrow{\cdot(-5)} -25x-15y=-50 \end{cases} \xrightarrow{+} 0=0 \Rightarrow$ <u>indéterminé.</u>

iv. $\left\{\begin{array}{l} -6x-2y=4 \xrightarrow{:2} -3x-y=2 \\ 9x+3y=6 \xrightarrow{:3} 3x+y=2 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 0=4 \Rightarrow$ impossible.

v. $\left\{\begin{array}{l} 35x+56y=0 \xrightarrow{:7} 5x+8y=0 \\ 5x+8y=4 \longrightarrow 5x+8y=4 \end{array}\right\} \xrightarrow{-} 0=-4 \Rightarrow$ impossible.

vi. $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}x-2y=6 \xrightarrow{\cdot 2} x-4y=12 \\ 2x-8y=24 \xrightarrow{:2} x-4y=12 \end{array}\right\} \xrightarrow{-} 0=0 \Rightarrow$ indéterminé.

Exercice 61

x = nb de bloc-notes de la 1e sorte

y = nb de bloc-notes de la 2e sorte

Commande de 500 bloc-notes au total: $x+y=500$

Chèque de 572.- : $1 \cdot x + 1{,}4 \cdot y = 572 \Rightarrow x + 1{,}4y = 572$.

On a donc le système: $\left\{\begin{array}{l} x+y=500 \\ x+1{,}4y=572 \end{array}\right\} \Rightarrow -0{,}4y = -72 \Rightarrow y = 180.$

Avec $y = 180$, on a $x + 180 = 500 \Rightarrow x = 320$.

La commande comprenait donc 320 bloc-notes de la 1e sorte (1.- la pièce) et 180 bloc-notes de la 2e sorte (1.40 frs la pièce).

Exercice 62

x = nb d'élèves de moins de 16 ans

y = nb d'élèves de plus de 16 ans

Disneyland : total = 1440 €

moins de 16 ans = $40x$

plus de 16 ans = $50y$

$$\left.\begin{array}{l}\text{total} = 1440\text{ €}\\ \text{moins de 16 ans} = 40x\\ \text{plus de 16 ans} = 50y\end{array}\right\} \Rightarrow 40x+50y = 1440 \Rightarrow 4x+5y = 144.$$

Port Aventura : total = 1110 €

moins de 16 ans = $30x$

plus de 16 ans = $40y$

$$\left.\begin{array}{l}\text{total} = 1110\text{ €}\\ \text{moins de 16 ans} = 30x\\ \text{plus de 16 ans} = 40y\end{array}\right\} \Rightarrow 30x+40y = 1110 \Rightarrow 3x+4y = 110.$$

On obtient donc le système :

$$\left\{\begin{array}{l} 4x+5y=144 \xrightarrow{\cdot 4} 16x+20y=576 \\ 3x+4y=110 \xrightarrow{\cdot(-5)} -15x-20y=-550 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} x = 26.$$

Avec $x = 26$, on a $4 \cdot 26 + 5y = 144 \Rightarrow 104 + 5y = 144 \Rightarrow 5y = 40 \Rightarrow y = 8$.

Finalement le nombre d'élèves de la classe est $x+y = 26+8 = \underline{\underline{34}}$.

Exercice 63

x = nb de caisses rouges

y = nb de caisses bleues

Il y a 20 caisses au total: $x+y=20$

Poids : total = 416 kg

caisses rouges = $28x$

caisses bleues = $16y$

$$\left.\begin{array}{l} \text{total} = 416 \text{ kg} \\ \text{caisses rouges} = 28x \\ \text{caisses bleues} = 16y \end{array}\right\} \Rightarrow 28x+16y=416 \Rightarrow 7x+4y=104.$$

On obtient donc le système:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=20 \xrightarrow{\cdot 4} 4x+4y=80 \\ 7x+4y=104 \xrightarrow{\cdot(-1)} -7x-4y=-104 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} -3x=-24 \Rightarrow x=8.$$

Avec $x=8$, on a $8+y=20 \Rightarrow y=12$.

Il y a donc 8 caisses rouges et 12 caisses bleues.

Exercice 64

x = nb de convives

y = prix à payer par chacun

Il faut donner 21.- chacun : $21x$

Il manquera 10,50 frs sur le total : $21x + 10{,}50 = \text{total}$

Total : $x \cdot y$

$\Big\} \rightarrow 21x + 10{,}5 = xy$

Il faut donner 25.- chacun : $25x$

Il y aura 17,50 frs en trop sur le total : $25x - 17{,}50 = \text{total}$

Total : $x \cdot y$

$\Big\} \rightarrow 25x - 17{,}5 = xy.$

On doit donc résoudre le système : $\begin{cases} 21x + 10{,}5 = xy \\ 25x - 17{,}5 = xy. \end{cases}$

Comme les membres de droite des 2 équations sont identiques, les membres de gauche doivent être égaux :

$$
\begin{array}{l|l}
21x + 10{,}5 = 25x - 17{,}5 & -25x \\
-4x + 10{,}5 = -17{,}5 & -10{,}5 \\
-4x = -28 & :(-4) \\
x = 7 &
\end{array}
$$

Avec $x = 7$ dans l'équation $21x + 10{,}5 = xy$, on obtient :

$21 \cdot 7 + 10{,}5 = 7y \Rightarrow 7y = 147 + 10{,}5 \Rightarrow 7y = 157{,}5 \Rightarrow y = 22{,}50.$

Ainsi il y a 7 convives et chacun doit payer 22,50.

Exercice 65

x = nb d'élèves de la classe
y = prix par élève
z = prix de location du car
} $\longrightarrow$ $xy = z$

Si il y a 9 élèves de plus : $x+9$
Chacun paierait 4.– de moins : $y-4$
Prix total : z
} $\longrightarrow$ $(x+9)(y-4) = z$

Si il y a 3 élèves de moins : $x-3$
Chacun paierait 2.– de plus : $y+2$
Prix total : z
} $\longrightarrow$ $(x-3)(y+2) = z$

On obtient le système suivant de 3 équations à 3 inconnues : $\begin{cases} xy = z & (1) \\ (x+9)(y-4) = z & (2) \\ (x-3)(y+2) = z & (3) \end{cases}$

Comme les membres de droite de ces 3 équations sont identiques, les membres de gauche des équations (1) et (2) doivent être égaux : $(x+9)(y-4) = xy$ (4), et les membres de gauche des équations (1) et (3) doivent être égaux : $(x-3)(y+2) = xy$ (5).

On obtient ainsi le système de 2 équations à 2 inconnues : $\begin{cases} (x+9)(y-4) = xy & (4) \\ (x-3)(y+2) = xy & (5) \end{cases}$

(4) $(x+9)(y-4) = xy \Rightarrow xy - 4x + 9y - 36 = xy \Rightarrow -4x + 9y - 36 = 0 \Rightarrow -4x + 9y = 36$ (6)
(5) $(x-3)(y+2) = xy \Rightarrow xy + 2x - 3y - 6 = xy \Rightarrow 2x - 3y - 6 = 0 \Rightarrow 2x - 3y = 6$ (7)

On résoud le système formé par (6) et (7) :

$$\left\{ \begin{array}{lll} (6) & -4x+9y = 36 \xrightarrow{\cdot 1} & -4x+9y = 36 \\ (7) & 2x-3y = 6 \xrightarrow{\cdot 2} & 4x-6y = 12 \end{array} \right\} \xrightarrow{+} 3y = 48 \Rightarrow y = 16.$$

Avec $y = 16$ dans (7), on obtient $2x - 48 = 6 \Rightarrow 2x = 54 \Rightarrow x = 27$.

Avec $x = 27$ et $y = 16$ dans (1), on obtient $z = 27 \cdot 16 = 432$.

Ainsi il y a 27 élèves, ils paient chacun 16.– et le prix de location du car est de 432.–.

Exercice 66

x = largeur du rectangle
y = longueur du rectangle

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si on augmente la largeur de 3cm: } x+3 \\ \text{Et qu'on diminue la longueur de 2cm: } y-2 \\ \text{Son aire reste inchangée : } xy\end{array}\right\} \to (x+3)(y-2)=xy.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si on diminue la largeur de 2cm: } x-2 \\ \text{Et qu'on augmente la longueur de 3cm: } y+3 \\ \text{Son aire reste inchangée: } xy\end{array}\right\} \to (x-2)(y+3)=xy.$$

On doit donc résoudre le système:

$$\left\{\begin{array}{l}(x+3)(y-2)=xy \Rightarrow xy-2x+3y-6=xy \Rightarrow -2x+3y-6=0 \xrightarrow{\cdot 2} -4x+6y-12=0 \\ (x-2)(y+3)=xy \Rightarrow xy+3x-2y-6=xy \Rightarrow 3x-2y-6=0 \xrightarrow{\cdot 3} 9x-6y-18=0\end{array}\right\} \xrightarrow{+} 5x-30=0$$

$$\Rightarrow 5x=30$$
$$\Rightarrow x=6.$$

Avec $x=6$ dans $(x+3)(y-2)=xy$, on obtient:

	Calculs
$(6+3)(y-2)=6y$	
$9(y-2)=6y$	Distributivité
$9y-18=6y$	$-6y$
$3y-18=0$	$+18$
$3y=18$	$:3$
$y=6$	

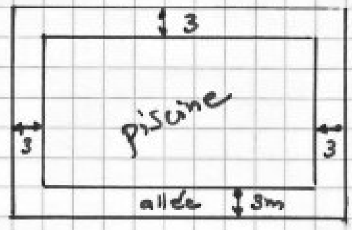
Ainsi <u>le rectangle est un carré de 6 cm de côté.</u>

Exercice 67

x = longueur de la piscine

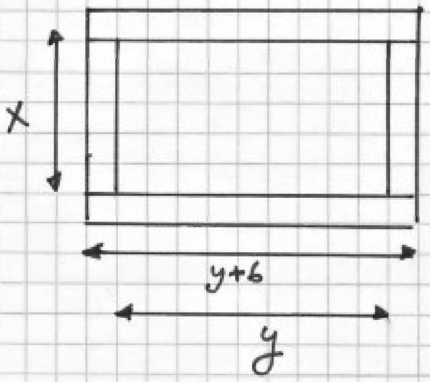
y = largeur de la piscine

La largeur de la piscine est égale aux $\frac{3}{4}$ de sa longueur : $x = \frac{3}{4}y$.



L'aire de l'allée vaut $246\,m^2$.

D'après le schéma ci-contre, l'aire de l'allée vaut : $2 \cdot 3x + 2 \cdot 3(y+6)$.



On doit avoir ainsi $6x + 6(y+6) = 246$

$\Rightarrow x + y + 6 = 41 \Rightarrow x + y = 35$.

On doit donc résoudre le système :

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4}y \\ x + y = 35 \end{cases} \longrightarrow \frac{3}{4}y + y = 35 \Rightarrow 3y + 4y = 140 \Rightarrow 7y = 140 \Rightarrow y = 20.$$

Avec $y = 20$, on a $x = \frac{3}{4} \cdot 20 = 15$.

Les dimensions de la piscine sont donc <u>15m sur 20m.</u>

Exercice 68

On doit tout d'abord avoir $x+y=8$.

Calculons maintenant le volume du crayon en fonction de x et y.

Le crayon est formé d'un cylindre de 1cm de diamètre (donc de 0,5cm de rayon) et x de hauteur, et d'un cône de 0,5cm de rayon et y de hauteur.

Le volume du crayon est donc $\pi \cdot 0{,}5^2 \cdot x + \frac{\pi \cdot 0{,}5^2 \cdot y}{3} = 0{,}25\pi x + \frac{0{,}25\pi y}{3} =$

$$= 0{,}25\pi\left(x+\frac{y}{3}\right).$$

Or ce volume vaut $5\,cm^3$. On a ainsi $0{,}25\pi\left(x+\frac{y}{3}\right)=5 \Rightarrow \pi\left(x+\frac{y}{3}\right)=20$

$$\Rightarrow x+\frac{y}{3}=\frac{20}{\pi}.$$

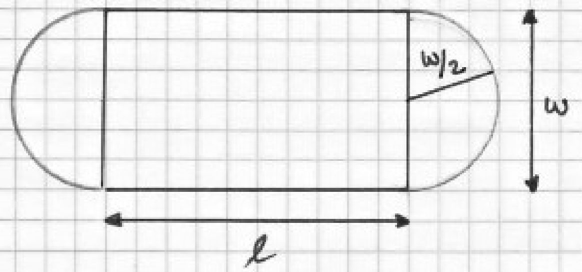
On a ainsi le système : $\begin{cases} x+y=8 \\ x+\frac{y}{3}=\frac{20}{\pi} \end{cases} \Rightarrow \frac{2y}{3}=8-\frac{20}{\pi} \Rightarrow \frac{2y}{3}=\frac{8\pi-20}{\pi}$

$$\Rightarrow 2y=\frac{24\pi-60}{\pi} \Rightarrow y=\frac{12\pi-30}{\pi} \cong 2{,}45\,cm.$$

Avec $y=\frac{12\pi-30}{\pi}$, on a $x+\frac{12\pi-30}{\pi}=8 \Rightarrow x=8-\frac{12\pi-30}{\pi}=\frac{8\pi-12\pi+30}{\pi}=\frac{30-4\pi}{\pi}\cong 5{,}55\,cm.$

Ainsi $\underline{x=\frac{30-4\pi}{\pi}\cong 5{,}55\,cm \text{ et } y=\frac{12\pi-30}{\pi}\cong 2{,}45\,cm.}$

Exercice 69



Périmètre de la table = $2l +$ périmètre du cercle $= 2l + \pi w$.

Périmètre de la table = 12m $\Rightarrow 2l + \pi w = 12$

Aire de la partie rectangulaire $= lw$

Aire des deux demi-cercles $= \pi\left(\frac{w}{2}\right)^2 = \frac{\pi w^2}{2}$

Aire partie rectangulaire $= 2 \cdot$ aire des deux demi-cercles $\Rightarrow lw = \frac{\pi w^2}{2} \cdot 2 \Rightarrow lw = \pi w^2$.

$lw = \pi w^2 \Rightarrow \pi w^2 - lw = 0 \Rightarrow w(\pi w - l) = 0$.

Un produit est nul si un de ses facteurs est nul $\Rightarrow$ soit $w = 0$, soit $\pi w - l$.

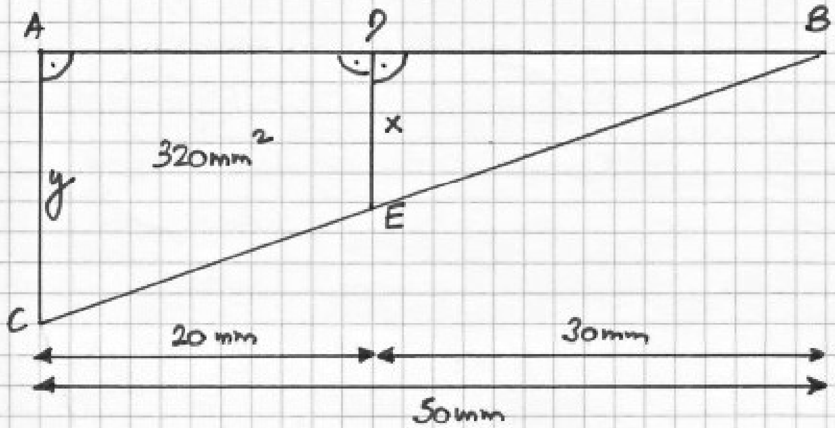
Comme $w = 0$ est exclu, on a $\pi w - l = 0 \Rightarrow l = \pi w$.

On a donc le système : $\begin{cases} 2l + \pi w = 12 \\ l = \pi w \end{cases}$ $\rightarrow 2\pi w + \pi w = 12 \Rightarrow 3\pi w = 12 \Rightarrow w = \frac{12}{3\pi} = \frac{4}{\pi}$.

Avec $w = \frac{4}{\pi}$, on a $l = \pi w = \pi \cdot \frac{4}{\pi} = 4$.

Ainsi $l = 4m$ et $w = \frac{4}{\pi} \simeq 1{,}27m$.

Exercice 70



$$\left.\begin{array}{l}\text{Aire du trapèze } ADEC = \dfrac{x+y}{2}\cdot 20 = 10(x+y) \\ \text{Aire du trapèze } ADEC = 320\,mm^2\end{array}\right\} \Rightarrow 10(x+y) = 320 \Rightarrow x+y = 32.$$

Les triangles BDE et BAC sont semblables (ils ont des angles isométriques).

Le rapport de similitude (ou d'homothétie) de BDE à BAC est $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{50}{30} = \dfrac{5}{3}$.

Ainsi on a $y = \dfrac{5}{3}x$ $\quad \left(AC = DE \cdot \dfrac{5}{3}\right)$.

On a donc le système $\begin{cases} x+y = 32 \\ y = \dfrac{5}{3}x \end{cases}$ $\quad x + \dfrac{5}{3}x = 32 \Rightarrow 3x + 5x = 96 \Rightarrow 8x = 96 \Rightarrow x = 12.$

Avec $x = 12$, on a $y = \dfrac{5}{3}x = \dfrac{5}{3}\cdot 12 = 20$.

Ainsi les bases du trapèze sont $\underline{x = DE = 12\,mm \text{ et } y = AC = 20\,mm.}$

Exercice 71

1. x = premier nombre

y = deuxième nombre

Si on ajoute au premier nombre 3 fois le second, on obtient 90 : $x+3y=90$.

Si on ajoute au second 3 fois le premier, on trouve 70 : $3x+y=70$.

On a le système : $\left\{\begin{array}{l} x+3y=90 \longrightarrow x+3y=90 \\ 3x+y=70 \xrightarrow{\cdot(-3)} -9x-3y=-210 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} -8x=-120 \Rightarrow x=15.$

Avec $x=15$, on a $3\cdot 15+y=70 \Rightarrow 45+y=70 \Rightarrow y=25$.

Les nombres sont donc $\underline{\underline{15 \text{ et } 25.}}$

2. x = premier nombre

y = deuxième nombre

En retranchant au premier nombre le double du second, on obtient 21 : $x-2y=21$.

En ajoutant au second nombre le tiers du premier, on trouve 27 : $\frac{1}{3}x+y=27 \Rightarrow x+3y=81$.

On a le système : $\left\{\begin{array}{l} x-2y=21 \\ x+3y=81 \end{array}\right\} \xrightarrow{-} -5y=-60 \Rightarrow y=12.$

Avec $y=12$, on a $x+3\cdot 12=81 \Rightarrow x+36=81 \Rightarrow x=45$.

Les nombres sont donc $\underline{\underline{45 \text{ et } 12.}}$

3. x = premier nombre

y = deuxième nombre

Si on ajoute au premier les $\frac{3}{4}$ du second, on obtient 14 : $x+\frac{3}{4}y=14 \Rightarrow 4x+3y=56$.

Si on retranche au triple du second les $\frac{3}{10}$ du premier, on obtient $\frac{69}{2}$: $3y-\frac{3}{10}x=\frac{69}{2}$

$\Rightarrow 30y-3x=345 \Rightarrow -3x+30y=345.$

On a donc le système : $\left\{\begin{array}{l} 4x+3y=56 \xrightarrow{\cdot 3} 12x+9y=168 \\ -3x+30y=345 \xrightarrow{\cdot 4} -12x+120y=1380 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 129y=1548$

$\Rightarrow y=12.$

Avec $y=12$, on a $4x+3\cdot 12=56 \Rightarrow 4x+36=56 \Rightarrow 4x=20 \Rightarrow x=5$.

Les nombres sont donc $\underline{\underline{5 \text{ et } 12.}}$

Exercice 72

$x=$ prix acheté du premier scooter
$y=$ prix acheté du deuxième scooter $\Bigg\} \Rightarrow$ prix d'achat total $= x+y$.

10% de bénéfice sur le premier scooter : 10% de $x = 0{,}1x$.

Prix de vente du premier scooter : $x + 0{,}1x = 1{,}1x$.

10% de perte sur le deuxième scooter : -10% de $y = -0{,}1y$.

Prix de vente du deuxième scooter : $y - 0{,}1y = 0{,}9y$.

Prix de vente total : 2100.– $\Rightarrow 1{,}1x + 0{,}9y = 2100 \Rightarrow 11x + 9y = 21000$.

Bénéfice de 5% sur le prix d'achat total : 5% de $(x+y) = 0{,}05(x+y)$.

Prix de vente total : 2100.– $\Rightarrow x+y+0{,}05(x+y) = 2100 \Rightarrow 20x+20y+x+y = 42000$

$$\Rightarrow 21x+21y = 42000 \Rightarrow x+y = 2000.$$

On doit résoudre le système $\begin{cases} 11x+9y = 21000 \longrightarrow 11x+9y = 21000 \\ x+y = 2000 \xrightarrow{\cdot(-9)} -9x-9y = 18000 \end{cases} \xrightarrow{+} 2x = 3000$
$\Rightarrow x = 1500$.

Avec $x = 1500$, on a $1500 + y = 2000 \Rightarrow y = 500$.

Ainsi, <u>le premier scooter a été acheté 1500.– et le deuxième 500.–</u>.

Exercice 73

$x =$ quantité d'alliage à 35% d'argent
$y =$ quantité d'alliage à 60% d'argent
Total de 100g d'alliage : $x+y=100$.
35% d'argent sur x grammes : $0{,}35x$
60% d'argent sur y grammes : $0{,}6y$
50% d'argent sur 100 grammes : $50g$

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}35x \\ 0{,}6y \\ 50g \end{array}\right\} \Rightarrow 0{,}35x+0{,}6y=50.$$

On a donc le système
$$\left\{\begin{array}{l} x+y=100 \xrightarrow{\cdot 0{,}6} 0{,}6x+0{,}6y=60 \\ 0{,}35x+0{,}6y=50 \xrightarrow{\cdot(-1)} -0{,}35x-0{,}6y=-50 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 0{,}25x=10 \Rightarrow x=40.$$

Avec $x=40$, on a $40+y=100 \Rightarrow y=60$.

Il faut donc 40g d'alliage à 35% d'argent et 60g d'alliage à 60% d'argent.

Exercice 74

d = longueur du trajet en km.

On ajoute 2 autres inconnues : V = vitesse de base du train en km/h ;

t = temps en heures mis par le train pour effectuer la distance d à la vitesse V.

On a tout d'abord : $V = \frac{d}{t}$

Si on augmente la vitesse de 10 km/h : $V+10$
On gagne 40min $= \frac{2}{3}h$
$\Rightarrow V+10 = \frac{d}{t-\frac{2}{3}} \Rightarrow V = \frac{d}{t-\frac{2}{3}} - 10$.

Si on diminue la vitesse de 10 km/h : $V-10$
On perd 1h : $t+1$
$\Rightarrow V-10 = \frac{d}{t+1} \Rightarrow V = \frac{d}{t+1} + 10$.

On a donc un système de 3 équations à 3 inconnues :
$$\begin{cases} V = \frac{d}{t} & (1) \\ V = \frac{d}{t-\frac{2}{3}} - 10 & (2) \\ V = \frac{d}{t+1} + 10 & (3). \end{cases}$$

Comme les membres de gauche de ces 3 équations sont identiques, les membres de droite sont égaux et on peut écrire des égalités avec, d'une part, les membres de droite des équations (1) et (2) et, d'autre part, les membres de droite des équations (1) et (3) :

$$\frac{d}{t} = \frac{d}{t-\frac{2}{3}} - 10 \quad (4) \qquad \text{et} \qquad \frac{d}{t} = \frac{d}{t+1} + 10 \quad (5).$$

On a :

(4) $\frac{d}{t} = \frac{d}{t-\frac{2}{3}} - 10 \Rightarrow \frac{d(t-\frac{2}{3})}{t} = d - 10(t-\frac{2}{3}) \Rightarrow d(t-\frac{2}{3}) = dt - 10t(t-\frac{2}{3})$

$\Rightarrow dt - \frac{2}{3}d = dt - 10t^2 + \frac{20}{3}t \Rightarrow -\frac{2}{3}d = -10t^2 + \frac{20}{3}t$

$\Rightarrow -2d = -30t^2 + 20t \Rightarrow d = 15t^2 - 10t$ (6) ;

(5) $\frac{d}{t} = \frac{d}{t+1} + 10 \Rightarrow \frac{d(t+1)}{t} = d + 10(t+1) \Rightarrow d(t+1) = dt + 10t(t+1)$

$\Rightarrow dt + d = dt + 10t^2 + 10t \Rightarrow d = 10t^2 + 10t$ (7).

On obtient ainsi un système de 2 équations à 2 inconnues :
$$\begin{cases} (6) & d = 15t^2 - 10t \\ (7) & d = 10t^2 + 10t. \end{cases}$$

Comme les membres de gauche sont identiques, les membres de droite sont égaux :

$15t^2 - 10t = 10t^2 + 10t \Rightarrow 5t^2 - 10t = 10t \Rightarrow 5t^2 - 20t = 0 \Rightarrow 5t(t-4) = 0$

$\Rightarrow$ soit $5t = 0$, d'où $t = 0$; soit $t - 4 = 0$, d'où $t = 4$.

Comme le cas $t = 0$ est exclu, on conclut que $t = 4$.

Avec $t = 4$, on a $d = 15t^2 - 10t = 15 \cdot 4^2 - 10 \cdot 4 = 15 \cdot 16 - 40 = 240 - 40 = 200$.

Ainsi <u>la longueur du trajet est de 200 km.</u>

Exercice 79

On a $T(°C) = a.T(F) + b$ et il faut trouver a et b.

D'après la figure, si $T(F) = 212$, alors $T(°C) = 100$.

On doit donc avoir $100 = a \cdot 212 + b \Rightarrow 212a + b = 100$ (1).

D'après la figure, si $T(F) = -459$, alors $T(°C) = -273$.

On doit donc avoir $-273 = a\cdot(-459) + b \Rightarrow -459a + b = -273$ (2).

On a ainsi le système: $\left\{\begin{array}{l} (1)\ 212a + b = 100 \\ (2)\ -459a + b = -273 \end{array}\right\} \Rightarrow 671a = 373 \Rightarrow a = \frac{373}{671}$.

Avec $a = \frac{373}{671}$, on a $212 \cdot \frac{373}{671} + b = 100 \Rightarrow \frac{79076}{671} + b = 100 \Rightarrow b = 100 - \frac{79076}{671} = \frac{-11976}{671}$.

Ainsi $a = \frac{373}{671}$ et $b = \frac{-11976}{671}$ et on a $T(°C) = \frac{373}{671} \cdot T(F) - \frac{11976}{671}$.

Exercice 76

On a $s(t) = -16t^2 + V_0 t + S_0$

On a $s(1) = 84$: autrement dit, si $t=1$, alors $s(t) = 84$

$\Rightarrow 84 = -16 \cdot 1^2 + V_0 \cdot 1 + S_0 \Rightarrow 84 = -16 + V_0 + S_0$

$\Rightarrow V_0 + S_0 = 100$ (1).

On a $s(2) = 116$: autrement dit, si $t = 2$, alors $s(t) = 116$

$\Rightarrow 116 = -16 \cdot 2^2 + V_0 \cdot 2 + S_0 \Rightarrow 116 = -64 + 2V_0 + S_0$

$\Rightarrow 2V_0 + S_0 = 180$ (2).

On a ainsi le système $\left\{ \begin{array}{ll} (1) & V_0 + S_0 = 100 \\ (2) & 2V_0 + S_0 = 180 \end{array} \right\} \xrightarrow{-} -V_0 = -80 \Rightarrow V_0 = 80.$

Avec $V_0 = 80$, on a $80 + S_0 = 100 \Rightarrow S_0 = 20.$

Ainsi $\underline{\underline{V_0 = 80 \, m/s \text{ et } S_0 = 20 \, m.}}$

Exercice 77

On a $v(t) = v_0 + at$.

Si $v(2) = 16$, cela signifie que, pour $t=2$, $v(t) = 16 \Rightarrow 16 = v_0 + a \cdot 2 \Rightarrow 2a + v_0 = 16$.

Si $v(5) = 25$, cela signifie que, pour $t = 5$, $v(t) = 25 \Rightarrow 25 = v_0 + a \cdot 5 \Rightarrow 5a + v_0 = 25$.

On a ainsi le système : $\begin{cases} 2a + v_0 = 16 \\ 5a + v_0 = 25 \end{cases} \xrightarrow{-} -3a = -9 \Rightarrow a = 3$.

Avec $a = 3$, on a $6 + v_0 = 16 \Rightarrow v_0 = 10$.

Ainsi $\underline{\underline{v_0 = 10\,m/s \quad \text{et} \quad a = 3\,m/s^2.}}$