C I N E M A T I Q U E

1. Introduction - Trajectoire

Dans le mot cinématique on reconnait bien sûr *cinéma*: des images qui bougent. Tout ce qui bouge, ou presque, peut faire l'objet de la cinématique car elle est la branche de la physique qui étudie le *mouvement* des choses matérielles.

Remarque : la cinématique ne s'occupe ni de l'objet en mouvement (sa masse, sa forme, sa couleur, sa température...) ni des *causes* de son mouvement. Ce dernier aspect - les causes du mouvement que sont les forces - est le sujet de la *dynamique*, branche de la mécanique faisant naturellement suite à la cinématique.

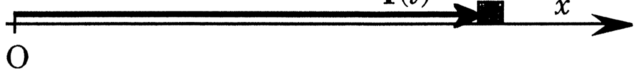
Dans ce cours on va donc étudier les méthodes de la cinématique qui permettent de décrire complètement le mouvement d'un corps quelconque (un cycliste, un caillou lancé, la planète Mars, etc). Mais que signifie ***décrire complètement le mouvement*** d'un corps ?
Cela veut dire exactement savoir ***à tout instant où*** il se trouve, quelle ***vitesse*** il a et quelle ***accélération*** il a.
Pour savoir ***où*** se trouve le *mobile* (substantif consacré désignant l'objet en mouvement), le plus efficace est de se donner un repère avec une origine O et des axes orthogonaux Ox et Oy gradués, de préférence en mètres. Ainsi la position du mobile sera soit les coordonnées du point P qu'il occupe, soit les composantes du vecteur allant de O à P.
On peut admettre que le terme de *position* est peu adéquat puisque le mobile bouge, il n'est donc pas posé! L'usage veut pourtant qu'on garde ce terme et on le gardera en disant que le mouvement est justement le changement de position au cours du temps.

Le vecteur $\overrightarrow{OP}$ est noté $\vec{r}$ ou plutôt $\mathbf{r}$ car :

Notation : Une convention typographique largement utilisée est de noter un vecteur, non pas avec une flèche sur son symbole comme ci-dessus mais en caractère drois gras, ainsi, $\mathbf{r}$ pour le vecteur-position par exemple, ou $\mathbf{v}$ pour le vecteur-vitesse, etc. Une grandeur non-vectorielle (masse, température, coordonnée ou norme d'un vecteur, etc,) sera notée par un symbole en *italique maigre*, ainsi m, T, x, r, etc. Il va de soi qu'en écriture *manuscrite*, on n'utilisera jamais cette convention: on continuera à mettre une flèche sur une grandeur vectorielle et à ne pas en mettre si elle n'est pas vectorielle.

Dans ce cours seront étudiés les mouvements à deux dimensions, dans un plan (Fig. 2), mais aussi et d'abord les mouvements à une dimension (Fig. 1), tel un véhicule sur une route rectiligne. Par contre les mouvements dans l'espace à trois dimensions ne seront pas étudiés.

Fig. 1



Trajectoire rectiligne: on y pose l'axe Ox.

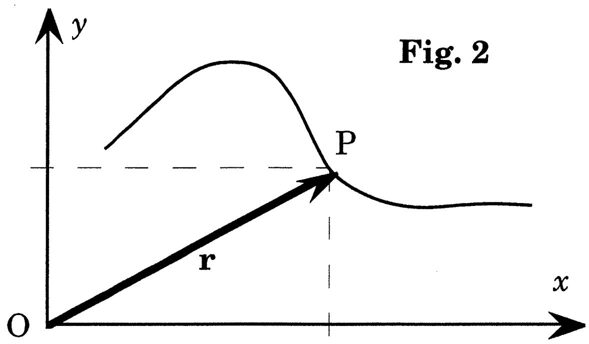


Fig. 2

Trajectoire d'un mobile: chaque point P est désigné par le vecteur **r** avec ses deux composantes dans le plan Oxy.

On peut admettre que pour les mouvements rectilignes, le vecteur-position **r** n'est plus très utile puisqu'il n'a plus qu'une composante. En effet mais cette composante possède un signe: $x(t)$ sera négatif si le mobile est à gauche de l'origine!

La donnée du graphe de la trajectoire, rectiligne ou non, est la courbe (ou la droite) indiquant l'ensemble des lieux possibles du mobile. Le dessin d'une route sur une carte est la trajectoire que suivent les véhicules, rien de plus. Elle ne donne aucune information sur les temps de passage ou les vitesses des véhicules.

2. Position en fonction du temps

Pour tout connaître du mouvement il faut faire naturellement intervenir la **notion de temps**, et c'est en cela que la cinématique se distingue de la géométrie analytique. On peut dire que la cinématique est de la géométrie analytique à laquelle on ajoute la notion de temps. Autrement dit, la variable temps t ajoute une dimension aux variables d'espace x, y, (z). Ainsi pour examiner graphiquement un mouvement à une dimension, donc rectiligne, on aura besoin d'un graphe à deux dimensions: l'un pour le temps t et l'autre pour la position x (Fig. 3 a). Le mouvement sera donc décrit complètement par le graphe de la position x en fonction du temps t: $x = \mathrm{f}(t)$, volontiers noté $x = x(t)$.

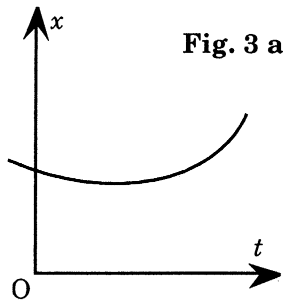


Fig. 3 a

Exemple de mouvement à une dimension: selon l'axe Ox.

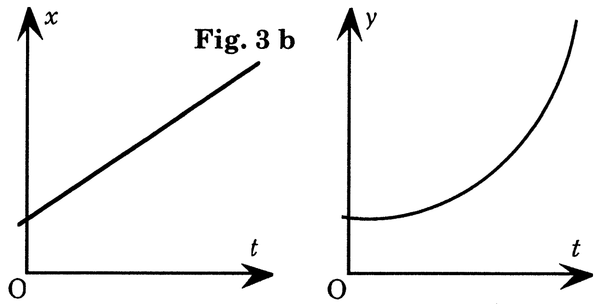


Fig. 3 b

Exemple de mouvement à deux dimensions: dans le plan Oxy.

Pour un mouvement non rectiligne mais plan, chaque composante du vecteur-position **r** dépend du temps:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Pour décrire complètement graphiquement un tel mouvement il faudra donc deux graphes : $x = x(t)$ et $y = y(t)$, (Fig. 3 b).

Il faut à tout prix **ne pas confondre** le graphe de la **trajectoire** $y = \mathrm{f}(x)$ (Fig. 2) avec le ou les graphes des coordonnées en **fonction du temps** (Figs. 3). Ainsi pour la Fig. 3 a, le mouvement est rectiligne puisque c'est un mouvement à une dimension, alors que manifestement le graphe $x = x(t)$ est une courbe. On examinera sous peu comment interpréter ces graphes et utiliser les informations qu'ils contiennent.

N.B. En physique, lorsqu'une grandeur dépend du temps, l'axe t est **toujours horizontal**: en abcisse. Il ne faudra plus l'oublier et ne pas parler "d'axe x" pour l'axe horizontal s'il s'agit du temps t.

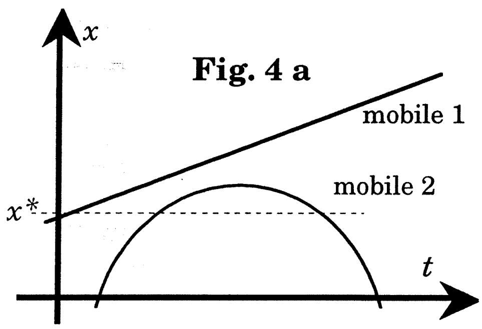
Deux mobiles: rencontre, collision - Distance entre eux.

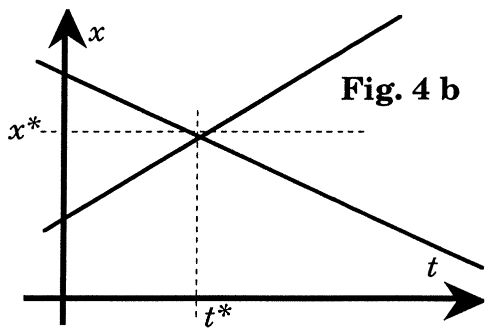
Se rencontrer c'est être au même endroit en même temps.

A une dimension, les deux mobiles se déplacent sur la même droite: l'axe Ox.

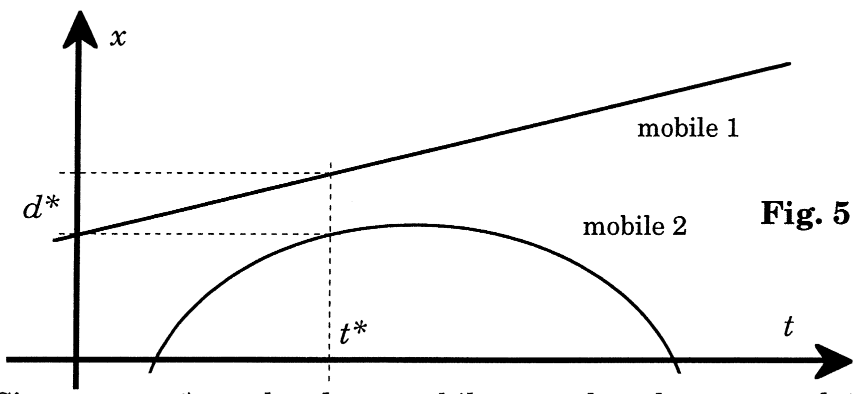
Sur la Fig. 4 a, les deux mobiles se trouve au même point x^*, - le 2ième y est même deux fois - mais pas en même temps: il n'y a alors pas de rencontre.

Sur la Fig. 4 b, il y a rencontre, croisement, car un point d'intersection existe en (t^*,x^*). Question: peut-on être sûr qu'il ne s'agit pas d'une collision? Pourquoi?





S'il n'y a pas rencontre entre les deux mobiles, il peut par contre y avoir une distance minimale d^* entre eux à un instant t^* :



C'est en $t = t^*$ que les deux mobiles sont les plus rapprochés

3. Vitesse - Mise en équation

Soit un mobile ayant un mouvement décrit par le graphe ci-contre :

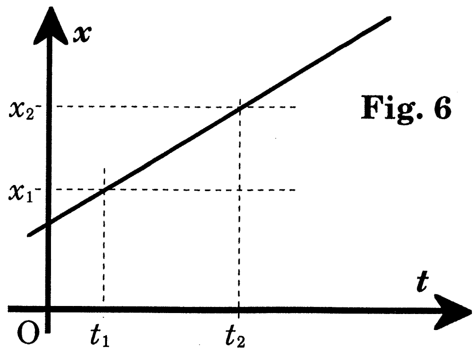


Fig. 6

C'est une droite d'équation :

$x = At + B$ ...

... où A et B sont des constantes alors que t et x sont les variables.
On sait bien que A est la pente de la droite et B son ordonnée à l'origine, mais que représentent ***physiquement*** ces constantes?

Par définition d'une pente : $A = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = v$ c'est la vitesse !

D'autre part, x vaut B lorsque $t = 0$; on note alors $B = x_0$ (prononcer *iks zéro*). L'équation de la droite s'écrit dorénavant:

$$x = vt + x_0$$

C'est notre première **équation du mouvement**, celle du MRU, autrement dit du **<u>m</u>ouvement <u>r</u>ectiligne <u>u</u>niforme**.

Dans toute la Mécanique on aura affaire à des *équations du mouvement*. Il faut donc bien savoir ce que cela signifie:
On appelle *équation du mouvement* une relation mathématique donnant la position, ici x, en fonction du temps t, ce sont les deux *variables*. L'équation comporte le plus souvent des *constantes*, ici v et x_0, qui précisent, spécifient le mouvement.

Et si la pente de la droite est négative, comme ci-dessous?

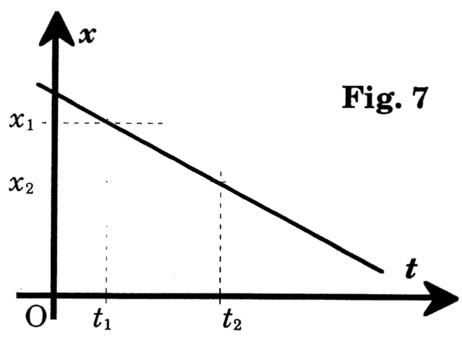
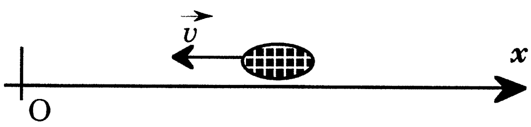


Fig. 7



C'est que l'objet se rapproche de l'origine. Il évident que $t_2 > t_1$, en effet, les aiguilles des horloges tournent *toujours* dans le même sens. Par contre il se peut, par exemple par le choix des axes, que $x_2 < x_1$; la pente de la droite, donc la vitesse du mobile est négative, sa coordonnée diminue à mesure que le temps s'écoule, c-à-d augmente.

Remarque : lorsqu'il n'y a qu'*un mobile* en cause, on peut souvent se passer du x_0: en effet, on a la liberté de placer les axes comme cela nous arrange, le phénomène n'en est pas modifié.
On aurait alors pour un MRU simplement: $x = vt$.

Exemple de calcul:

Une voiture roule à 72 km/h et une moto roule dans le même sens à 108 km/h. On enclenche le chronomètre (t = 0) lorsque la moto passe à l'origine des coordonnées. A ce moment, la voiture se trouve déjà en $x = x_0 = 120$ m. La moto va donc dépasser la voiture.

Quand et où ? Solution a) par calcul et b) graphiquement.

Solution: a) 72 km/h = 20 m/s, 108 km/h = 30 m/s.
Moto : $x_m = v_m t = 30t$
Voiture : $x_v = v_v t + x_0 = 20t + 120$.
Le dépassement a lieu lorsque $x_m = x_v$, c-à-d:
$30t^* = 20t^* + 120$ => $\underline{t^* = 12 \text{ s}}$.
Où? $\underline{x_m^* = 30t^* = 360 \text{ m}}$. Contrôle: $x_v^* = 20 \cdot 12 + 120 = 360$ m.

b)

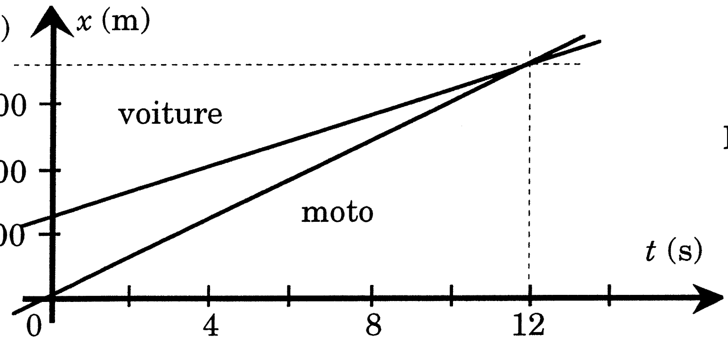
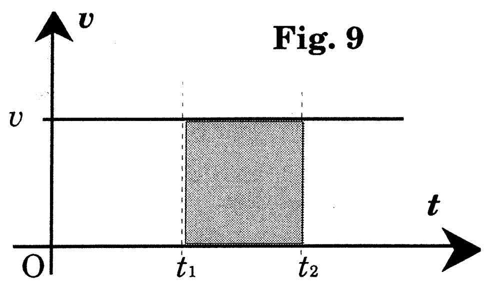


Fig. 8

Graphes de la vitesse en fonction du temps: $v = v(t)$.

Commençons par le cas le plus simple: le MRU:

Fig. 9



La vitesse est constante, le graphe est donc une droite horizontale.

On affirme que ce graphe comporte aussi la distance Δx parcourue pendant l'intervalle de temps Δt .

En effet, par définition, $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ => $\Delta x = v\,\Delta t$

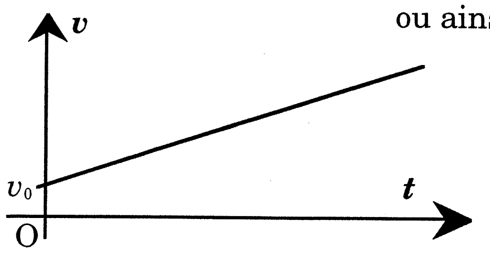
Ainsi la distance parcourue pendant l'intervalle de temps Δt est le produit de v par Δt. Cela se voit sur le graphe ci-dessus puisque c'est l'***aire du rectangle*** en grisé.

Ce résultat n'est pas du tout anodin, il va nous servir pour la suite. La suite qui est:

4. L'accélération

Le but de ce § est d'établir l'équation du mouvement $x = x(t)$ pour un <u>m</u>ouvement <u>r</u>ectiligne dont l'accélération est constante. Il est abrégé MRUA, avec UA pour <u>u</u>niformément <u>a</u>ccéléré.

Désormais la vitesse n'est plus constante, le graphe $v = v(t)$ se présente ainsi:



ou ainsi :

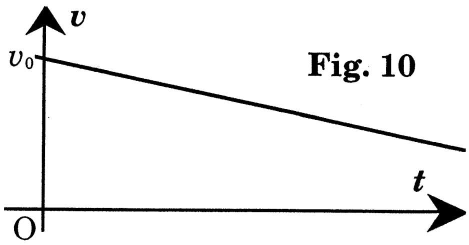
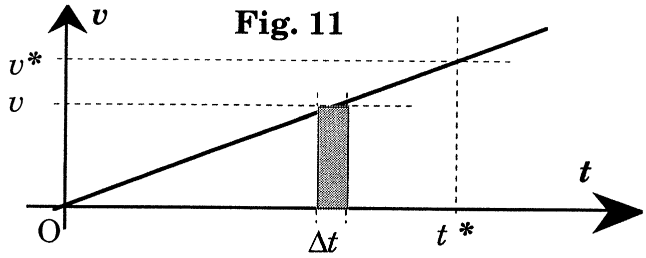


Fig. 10

Choisissons d'abord la situation la plus simple : la droite passe par l'origine, autrement dit, en $t = 0$, $v = 0$, la vitesse initiale v_0 est nulle:

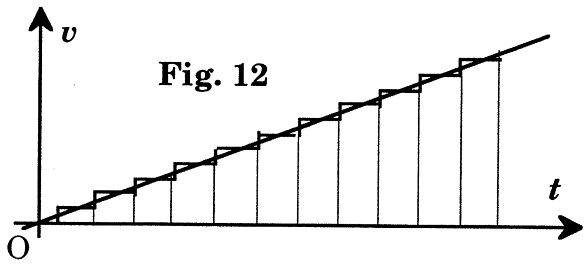
Fig. 11



Si l'intervalle Δt est assez petit, la vitesse v varie très peu, on peut alors la considérer comme constante pendant ce bref instant.

On peut imaginer des marches d'escalier aussi étroites qu'on veut et donc en nombre aussi grand qu'on veut, à tel point que l'escalier paraîtrait lisse !

Fig. 12



Ci-contre, pour la lisibilité du dessin, les marches sont exagérément larges.

Calcul de la distance x^* parcourue de $t = 0$ à $t = t^*$.

Pendant Δt, le mobile parcourt $\Delta x = v\Delta t$, qui est représenté par l'aire de l'étroit rectangle de base Δt et de hauteur v (Fig. 11). Le parcours total sera donc la *somme des aires* de ces nombreux rectangles, c'est-à-dire l'aire du *triangle* de base t^* et de hauteur v^*:
$x^* = (1/2)\, v^*\, t^*$, ou, pour x et t quelconques:

$$x = \frac{1}{2} v t \qquad (*)$$

Mais ce n'est pas tout car $v \neq const$. En effet mais elle évolue de façon très simple : $v = Ct$, où C est une constante, pente de la droite (Fig. 11 et 12). Regardons de plus près cette constante:

$$\text{Pente : } C = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\text{variation de vitesse}}{\text{intervalle de temps}} = \text{accélération} = a$$

Nous avons là LA définition de l'accélération pour un *mouvement rectiligne*. Répétons-la:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

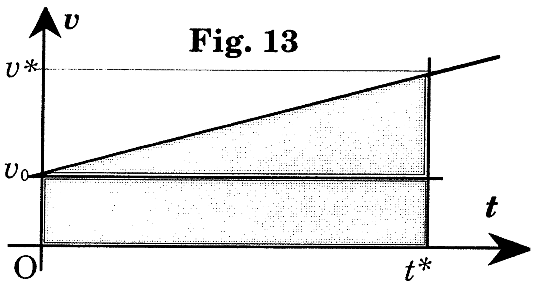
L'équation pour $v = v(t)$ s'écrit donc ici : $v = a\,t$. Remplaçons ceci dans la relation (*) ci-dessus; cela donne :

$$x = \frac{1}{2}vt = \frac{1}{2}att = \frac{1}{2}at^2 \quad \text{équation du MRUA le plus simple}$$

Unité de l'accélération:

$[a] = [\Delta v/\Delta t]$ = m/s/s = m/s^2; c'est en quelque sorte la vitesse de la vitesse.

Généralisons maintenant en considérant qu'en $t = 0$, la vitesse n'est pas nulle : il y a une vitesse initiale $v_0 \neq 0$, la droite $v = v(t)$ ne passe plus par l'origine (Fig. 10 et 13):



La distance parcourue x^* de $t = 0$ à $t = t^*$ est l'aire sous la droite , c-à-d celle du trapèze = triangle + rectangle :

$$x^* = \frac{1}{2}(v^* - v_0)t^* + v_0 t^*.$$

Pour x et t quelconques : $x = \frac{1}{2}(v - v_0)t + v_0 t$. On remplace v par $at + v_0$ (c'est l'équation de la droite) et on obtient:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \quad \text{c'est l'équation du MRUA}$$

Cette fois elle est complète: elle contient une vitesse initiale v_0 possible. On a même ajouté une éventuelle position initiale x_0 qui n'apparaît pas dans le calcul ci-dessus. On rappelle encore l'équation pour la vitesse dans un MRUA : $v = at + v_0$ où $a = const.$

Discutons quelque peu cette accélération. Sa définition est donc $a = \Delta v/\Delta t$. Il faut voir cela comme toute variation de la valeur de la vitesse pendant l'intervalle de temps Δt. Comme Δt ne peut être que positif (t_2 est toujours plus tard que t_1) il s'ensuit que a peut être positive, négative (ou nulle, bien sûr) selon que la vitesse augmente: $v_2 > v_1$, diminue : $v_2 < v_1$, (ou reste constante). Dans le langage courant, le mot "accélération" veut dire augmentation de la vitesse, mais il n'en est pas ainsi en cinématique: une diminution de vitesse, qu'on nomme volontiers "ralentissement" ou "décélération" dans le langage courant, sera une *accélération négative* en cinématique (si l'axe de coordonnée est dans le sens du déplacement). On garde ainsi le symbole unique a pour *toute variation de vitesse*.

Graphes $x = x(t)$:

Pour le MRUA, la position x du mobile dépend, comme on vient de le voir, du temps *au carré*; les graphes $x = x(t)$ sont donc des *paraboles*.

Deux exemples:

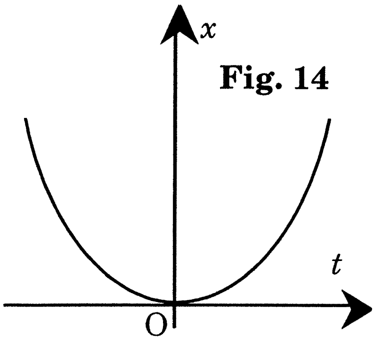


Fig. 14

Cas le plus simple : $x(t)=\frac{1}{2}a\,t^2$

Avec $a > 0$: la parabole est ouverte vers le haut;
$v_0 = 0$: en $t = 0$, la tangente à la courbe est horizontale;
$x_0 = 0$: la courbe passe par l'origine.

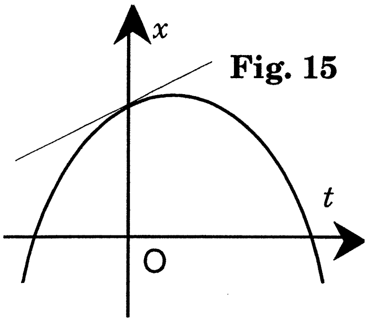


Fig. 15

Cas le plus général : $x(t)=\frac{1}{2}a\,t^2+v_0t+x_0$

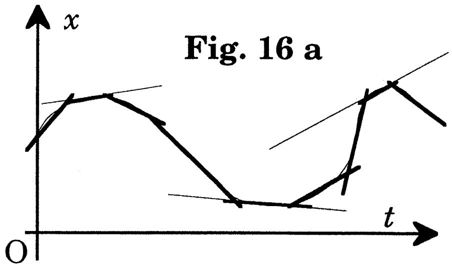
Avec $a < 0$: la parabole est ouverte vers le bas;
$v_0 > 0$: en $t = 0$, la pente de la tangente à la courbe est positive;
$x_0 > 0$: la courbe passe au dessus de l'origine.

Vitesse sur de tels graphes:

On a montré que la distance parcourue Δx apparaît sur les graphes $v = v(t)$ (Figs. 9 à 13). Montrons la réciproque, à savoir que la vitesse apparaît sur les graphes $x = x(t)$. Rien de vraiment nouveau puisqu'on a vu que pour un MRU, la vitesse n'est autre que la pente de la droite du graphe $x = x(t)$. Mais si la vitesse n'est plus constante, $x = x(t)$ n'est plus une droite (c'est une parabole pour un MRUA) et on a de la peine, à priori, à voir une pente de droite pour figurer cette vitesse variable.

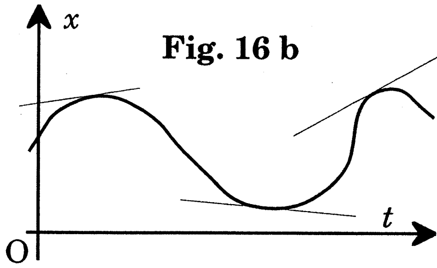
Pourtant, si le graphe est une courbe, on a le loisir de la considérer comme formée d'un grand nombre (à la limite, une infinité) de tout petits segments rectilignes (à la limite, infiniment petits) pour que cela donne l'illusion d'une courbe. La vitesse sur chaque segment sera la pente de la droite-support du segment et à la limite, cette droite paraîtra *tangente* à la courbe. La vitesse varierait par toute petites saccades, mais si faibles que les passagers d'un véhicule se déplaçant ainsi ne sentiraient rien du tout.

Fig. 16 a



Segments bien visibles

Fig. 16 b



Segments archi-petits, pas visibles

A retenir: La vitesse *instantanée* dans un mouvement rectiligne quelconque est donnée à tout instant par la *pente de la tangente* au graphe $x = x(t)$.

Mouvement rectiligne, les graphes $v = v(t)$**:**

On se souvient (pages 6 et 7) que l'accélération dans un MRUA est la pente de la droite du graphe $v = v(t)$. L'accélération est en quelque sorte la vitesse de la vitesse, elle indique comment varie la vitesse au cours du temps, tout comme la vitesse indique comment varie la position au cours du temps. On s'attend alors à ce que, pour un mouvement ayant une vitesse variant de façon quelconque, la pente de la tangente à la courbe $v = v(t)$ soit l'accélération, tout comme la vitesse est la pente de la tangente à la courbe $x = x(t)$, ainsi qu'on vient de le voir.

En résumé et conclusion de ces mouvements à une dimension, on affirme que le graphe $v = v(t)$ contient toute (ou presque (*)) l'information sur le mouvement. En effet, la position $x(t)$, ou plutôt la distance parcourue Δx est figurée par l'aire sous la courbe $v = v(t)$ pour l'intervalle Δt et l'accélération est figurée à tout instant par la pente de la tangente à cette même courbe, tout cela en plus de la vitesse $v(t)$ elle-même, bien entendu.

(*) Pourquoi "ou presque" ?
Parce que l'éventuel x_0 ne peut pas apparaître sur un tel graphe.

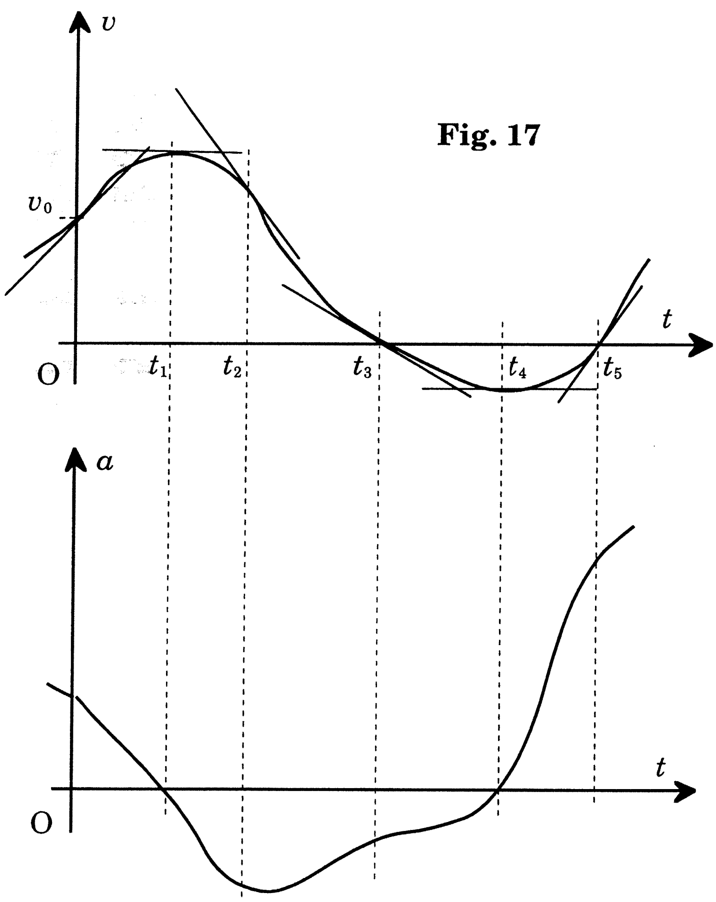


Fig. 17

Un exemple :

La vitesse varie de façon irrégulière, elle est même négative pendant un laps de temps. On a indiqué en six instants l'accélération par la tangente à la courbe, puis, sur le graphe exactement au dessous, on a reporté la valeur de la pente de ces tangentes. On a ainsi, en reliant les six points de façon lisse, l'évolution temporelle de l'accélération sur le graphe $a = a(t)$.
On doit bien remarquer, par exemple, que là où la tangente est horizontale, l'accélération est nulle.

5. Mouvements à deux dimensions

C'est maintenant que l'aspect **vectoriel** devient indispensable.

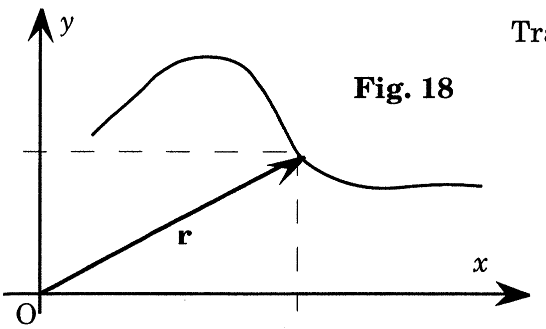


Fig. 18

Trajectoire dans le plan Oxy.

La position du mobile est repérée par le vecteur **r** :

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On l'a dit et on le répète : la trajectoire indique *où* peut se trouver le mobile mais pas *quand* il s'y trouve. Pour avoir l'information complète, il faut dorénavant deux graphes : un pour chaque composante du vecteur-position **r**:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

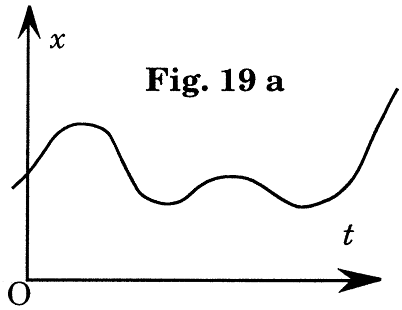


Fig. 19 a

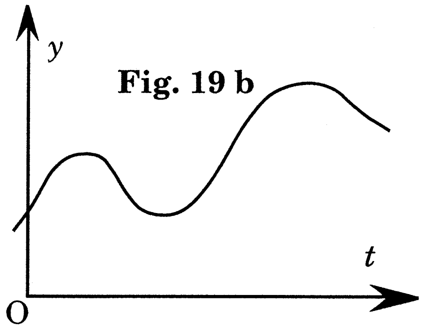


Fig. 19 b

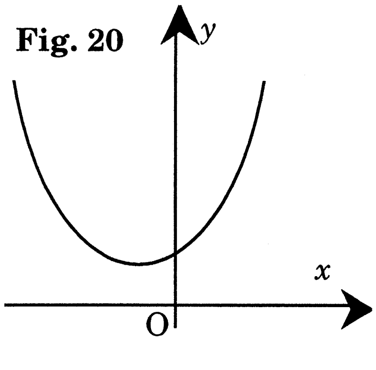
Exemple:

Le mouvement d'un mobile est donné par : $x(t) = t/2 - 1$
$y(t) = t^2 - t + 2$

Ce sont les équations *paramétriques* de la trajectoire, le paramètre est t. Pour obtenir l'équation *cartésienne* $y = \mathrm{f}(x)$ de la trajectoire, il faut évidemment éliminer t entre les deux équations (ce n'est pas toujours algébriquement possible). Eliminer t, rappelons-le, revient à perdre l'information temporelle. Faisons-le pourtant:

On tire t de $x(t)$: $x = t/2 - 1 \Rightarrow t = 2(x + 1)$ qu'on introduit dans y : $y = [2(x + 1)]^2 - 2(x + 1) + 2 = 4x^2 + 6x + 4$, la trajectoire est donc une parabole:

Fig. 20



Question :

A quel(s) instant(s) le mobile a-t-il une coordonnée y de 3 m ? (m pour mètre).

Réponse :

On résoud l'équation pour $y(t)$: $3 = t^2 - t + 2$, ce qui donne les deux solutions :

$t_1 = -0{,}62$ s et $t_2 = 1{,}62$ s.

Le vecteur-vitesse

Dans le plan Oxy, le déplacement du mobile est repérée par le vecteur-position $\mathbf{r}$. Montrons d'abord que la vitesse est aussi un vecteur, on verra ensuite qu'il en est de même pour l'accélération.

Une voiture se déplace dans une certaine direction, dans un certain sens et avec une certaine valeur de la vitesse. On reconnait là les trois caractéristiques d'un vecteur dont la norme serait précisément la valeur de la vitesse. Cette voiture est dans un virage, le plan dans lequel se trouve l'une des roues avant figure exactement la direction du vecteur-vitesse : il est tangent à la courbe que fait le virage. Donc, en tout point de la trajectoire, le vecteur-vitesse lui est tangent.

Regardons cela sur des graphes en examinant, au moyen de la définition de la vitesse moyenne, comment évolue le vecteur-vitesse moyenne $\mathbf{v}_m$ si l'intervalle est de plus en plus petit:

Soient deux positions désignées par les vecteurs $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$, alors :

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \text{ et, par définition : } \mathbf{v}_m = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

Il doit aller de soit que $\mathbf{v}_m$ est parallèle et de même sens que $\Delta\mathbf{r}$ puisque Δt est toujours positif:

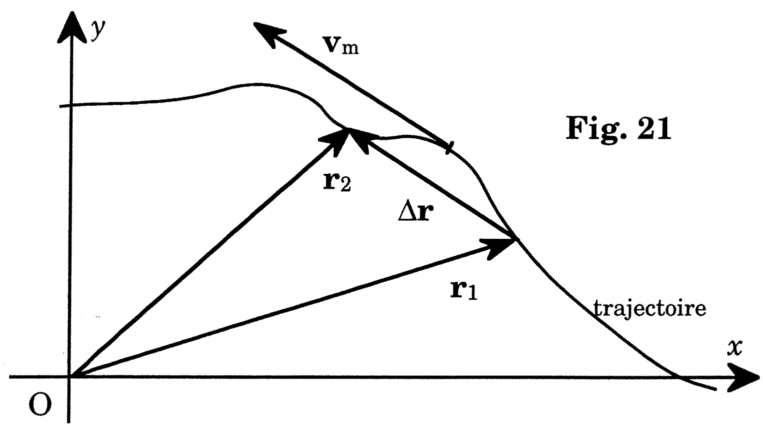


Fig. 21

L'intervalle de temps Δt diminuant, le vecteur $\Delta\mathbf{r}$ est de plus en plus court:

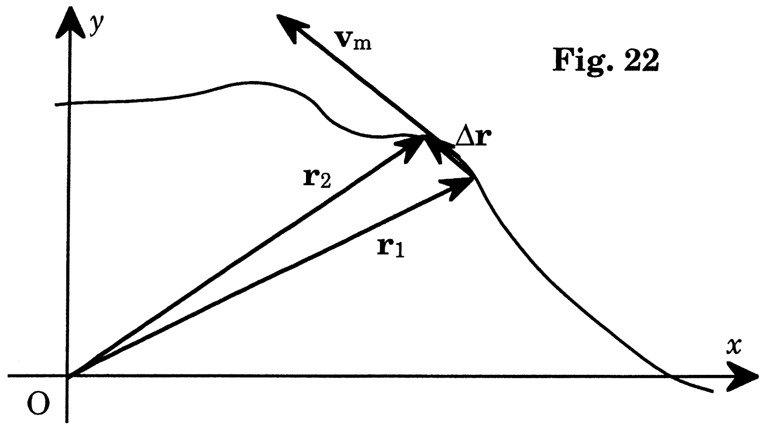


Fig. 22

A la limite où Δt devient aussi petit qu'on veut, $\Delta\mathbf{r}$ devient aussi infiniment court, mais le rapport $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ reste fini; ce n'est plus une vitesse moyenne $\mathbf{v}_m$ mais une vitesse *instantanée* $\mathbf{v}$. Les vecteurs $\mathbf{v}_m$ étaient parallèles aux sécantes, $\mathbf{v}$ devient maintenant *tangent*:

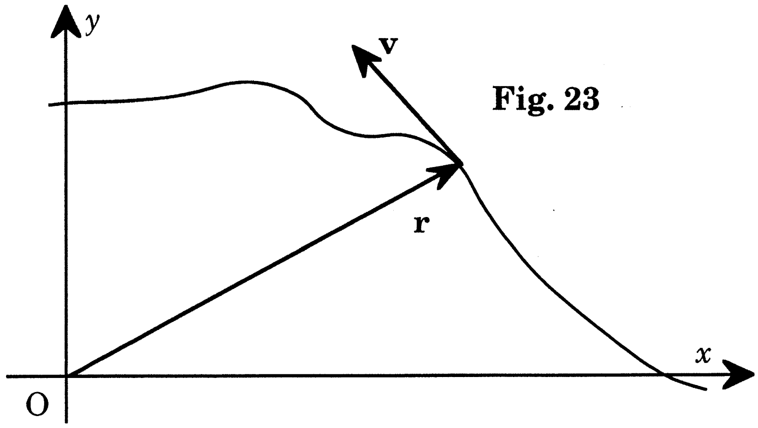


Fig. 23

A retenir : *La vitesse est un vecteur tangent à la trajectoire en tout point. La norme du vecteur n'est autre que la valeur de la vitesse.*

Passons sans plus attendre à l'accélération:

Le vecteur-accélération

On a déjà donné une définition précise de l'accélération, mais c'était pour les mouvements rectilignes. En tant qu'accélération moyenne on l'avait définie comme toute variation Δv de la vitesse pendant l'intervalle Δt : $a_m = \Delta v / \Delta t$. Pour des mouvements maintenant curvilignes, il n'y a aucune bonne raison de changer de définition, sauf qu'il faut dorénavant faire apparaître le caractère vectoriel. On va donc écrire:

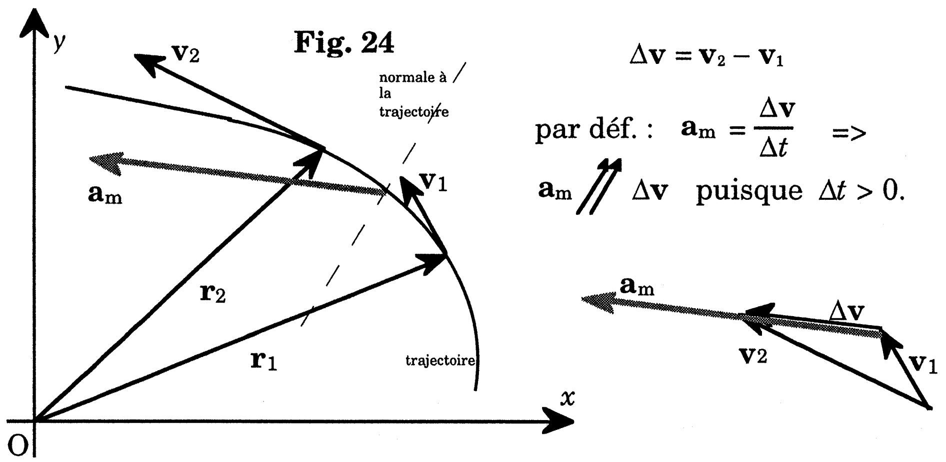
$$\mathbf{a}_m = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

On a pour l'instant un vecteur-accélération moyenne $\mathbf{a}_m$, à moins que l'intervalle de temps Δt soit extrèmement petit (à la limite, infiniment petit), auquel cas on aurait l'accélération instantanée **a**.

L'expression ci-dessus signifie qu'il existe une accélération dès qu'il se produit une variation $\Delta \mathbf{v}$, quelle qu'elle soit, du vecteur-vitesse. Examinons cela graphiquement et soyons très attentif au paradoxe qui va surgir à la Fig. 26.

1^er^ cas : La valeur de la vitesse augmente : $v_2 > v_1$:

Fig. 24



$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$

par déf. : $\mathbf{a}_m = \dfrac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$ => $\mathbf{a}_m \nearrow\!\!\nearrow \Delta \mathbf{v}$ puisque $\Delta t > 0$.

———> Explications pour la construction du vecteur $\mathbf{a}_m$:

- en deux points de la trajectoire désignés par les vecteurs $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$, on dessine les vecteurs-vitesse, tangents, en faisant en sorte que $v_2 > v_1$: la vitesse augmente (sous-entendu: la norme du vecteur $\mathbf{v}$);
- on translate soigneusement ces deux vecteurs en faisant coincider leur origine, ce qui permet le dessin du vecteur $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$;
- le vecteur $\mathbf{a}_m$ est alors dessiné parallèle et de même sens que $\Delta\mathbf{v}$ puisque Δt est > 0;
- ce vecteur $\mathbf{a}_m$ est finalement translaté soigneusement dans l'autre sens, plaçant son origine vers le milieu entre les deux points choisis de la trajectoire.

2ème cas: la valeur de la vitesse diminue : $v_2 < v_1$:

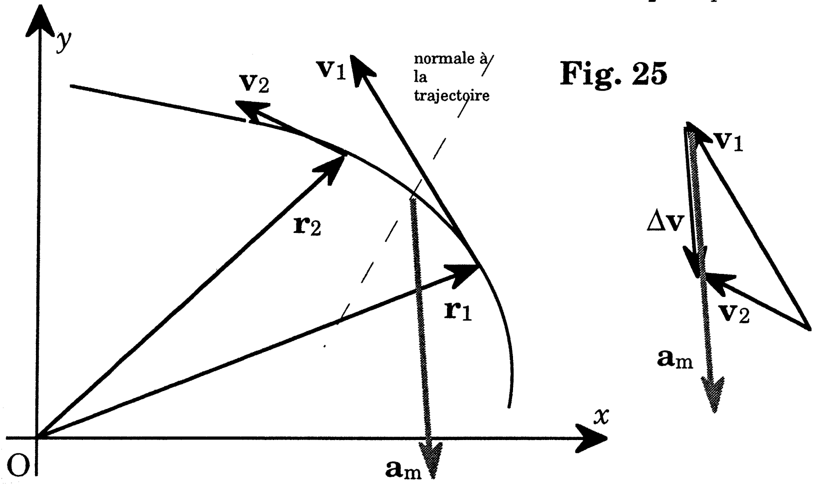


Fig. 25

Dans ces deux cas, le vecteur $\mathbf{a}_m$ est dirigé vers *l'intérieur* de la courbe, vers l'avant si la vitesse augmente et vers l'arrière si elle diminue.

3ème cas: la valeur de la vitesse ne change pas : $v_2 = v_1$:

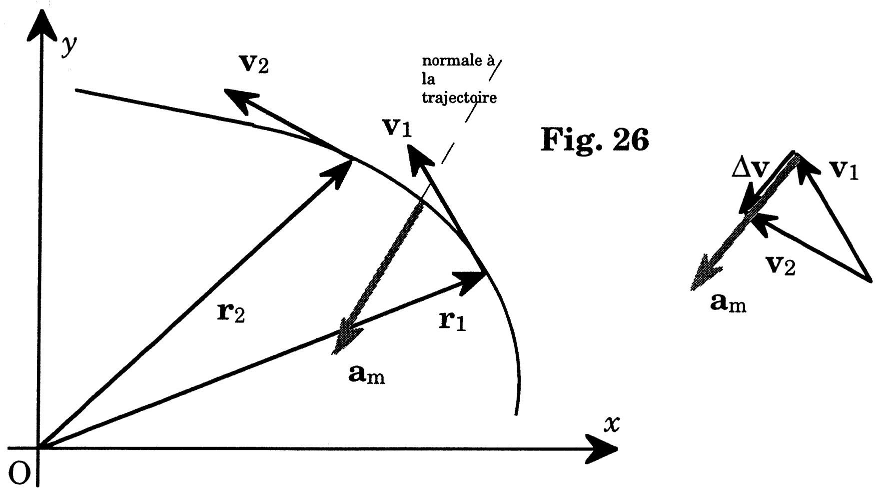


Fig. 26

C'est le paradoxe annoncé! La valeur de la vitesse ne change pas, mais pourtant l'accélération n'est pas nulle !!

Cela choque le bon sens, qu'on médite alors une parole de Paul Langevin, physicien du début du 20ème siècle :

"La science commence là où le bon sens finit".

Une première conclusion résultant du paradoxe serait qu'il est impératif de ne pas confondre un vecteur avec sa norme.

Ainsi, une voiture roulant à *vitesse constante* dans un virage - l'aiguille du tachymètre ne bouge pas - subit une accélération puisque le **vecteur-vitesse** change, non pas en norme, mais en direction.

Ce n'est pas si étrange d'ailleurs, car ce qui produit un effet sur les passagers d'un véhicule, ce n'est pas la vitesse, on y est insensible(*), c'est la variation, quelle qu'elle soit, du vecteur-vitesse. Dans le chapitre "***dynamique***", on verra qu'à toute accélération est associée une ***force***, cause de l'effet ressenti.

Les passagers debout dans un bus doivent bien se tenir lorsque le bus accélère, freine ou *prend un virage.*

(*) Etre dans un Airbus volant à 900 km/h par temps calme ou assis dans le hall de l'aéroport, quelle différence ?

6. Le mouvement circulaire uniforme (MCU)

C'est le plus simple des mouvements à deux dimensions.

La trajectoire est donc un cercle ou éventuellement seulement un arc de cercle. La norme vecteur-vitesse ne change pas, d'où le qualificatif "uniforme"; la valeur de la vitesse ne change donc pas.

Mais, comme on vient de le montrer (Fig. 26), il y a néanmoins une accélération. On peut déjà affirmer, puisque seule la direction du vecteur-vitesse change, que le vecteur-accélération est perpendiculaire à la trajectoire et est donc dirigé vers le centre du cercle. C'est une accélération baptisée **centripète** ou **normale**.

Le but est maintenant de trouver une expression, *une formule* pour cette accélération. On s'attend à ce qu'elle soit d'autant plus importante que la vitesse est élevée et d'autant plus faible que le rayon du cercle est grand. Pensons à une voiture dans un virage très serré ou sur une route quasi-rectiligne.

Auparavant, définissons :

1°) **La période** T

Rien de vraiment nouveau, le MCU est un mouvement périodique et la période est naturellement le temps nécessaire à faire un tour, c'est-à-dire pour parcourir une circonférence de longueur $2\pi r$ si le cercle est de rayon r. Si la vitesse est v, on a, par la définition élémentaire de la vitesse:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad \Longleftrightarrow \quad T = \frac{2\pi r}{v}$$

2°) **La vitesse angulaire** ω

(Il s'agit de la lettre grecque oméga minuscule et non pas, *svp*, du double-vé latin w. On connait peut-être mieux oméga majuscule Ω).

Cette fois c'est certes nouveau; une définition possible est:

$$\omega = \frac{v}{r}$$

mais comme pour toute ***définition***, il n'y a rien a comprendre, il faut l'apprendre, sachant que si une telle grandeur a été définie, ce n'est pas pour enquiquiner les élèves des lycées, mais au contraire, pour simplifier la compréhension des phénomènes.

Si malaise ou mystère il y a, il devrait se dissiper si on se souvient de la définition d'un angle exprimé dans son unité naturelle, le radian:

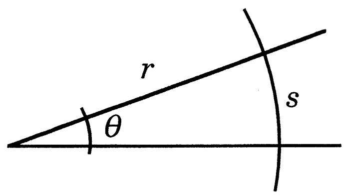


Fig. 27 $\theta = \dfrac{s}{r}$

Soit un mobile mettant un temps t pour parcourir cet arc s, sa vitesse est donc:

$$v = \frac{s}{t}$$

et faisons un petit calcul: $\dfrac{\theta}{t} = \dfrac{s}{r}\dfrac{1}{t} = \dfrac{s}{t}\dfrac{1}{r} = \dfrac{v}{r} = \omega$, voilà!

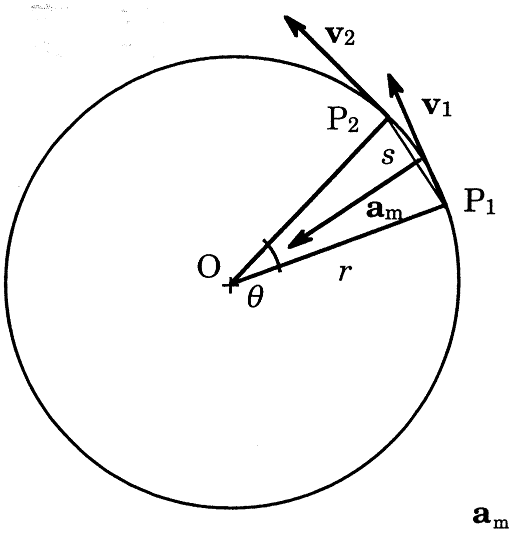
La vitesse v est en m/s et la vitesse angulaire ω est en rad/s.

Exemple : Un disque (vinyl ou CD) tourne (sur un pick-up ou dans un lecteur). ***Tous*** les points du disque ont la même vitesse angulaire ω alors que ce n'est évidemment pas le cas pour la vitesse v: plus le point est éloigné du centre, plus sa vitesse est élevée.

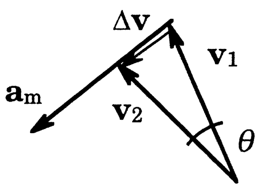
C'en est tout pour les définitions, venons-en à notre but: l'accélération centripète.

Soit un mobile tournant à $v = const.$ sur un cercle de rayon r. Prenons deux points de la trajectoire, P_1 et P_2, assez proches l'un de l'autre.

Pour un MCU on a toujours: $v_1 = v_2 = v$, mais $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$!!



On translate $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ pour construire $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$:



On obtient ainsi le vecteur-accélération moyenne $\mathbf{a}_m$ pendant l'intervalle $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\mathbf{a}_m = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}, \quad \mathbf{a}_m \upuparrows \Delta\mathbf{v} \text{ puisque } \Delta t > 0$$

Encore rien de vraiment nouveau mais examinons les triangles P_1OP_2 et $(\mathbf{v}_1,\Delta\mathbf{v},\mathbf{v}_2)$. Ils sont tous deux isocèles et leur angle au sommet est le même car le vecteur-vitesse $\mathbf{v}_1$ a tourné du même angle θ que le rayon OP_1; ils sont donc semblables, leus côtés sont proportionnels:

$$\text{l'angle en rad :} \quad \theta = \frac{P_1P_2}{OP_1} = \frac{P_1P_2}{OP_2} = \frac{s}{r} = \frac{\|\Delta\mathbf{v}\|}{v} \qquad (*)$$

Une approximation est faite là : l'arc $s = P_1P_2$ est confondu avec la corde P_1P_2. Ceci d'autant mieux permis que l'angle θ est petit. C'est uniquement la lisibilité du dessin qui impose un angle θ non archi-petit; l'approximation est justifiée sans arrière pensée.

L'arc s est parcouru pendant l'intervalle de temps Δt. On peut alors écrire, en vertu de la relation (*) ci-dessus:

$$\frac{\theta}{\Delta t} = \frac{\|\Delta \mathbf{v}\|}{v}\frac{1}{\Delta t}. \text{ Par déf. de } \omega: \frac{\theta}{\Delta t} = \omega = \frac{v}{r} \quad (**)$$

$$(*) \text{ et } (**) \Rightarrow \frac{\|\Delta \mathbf{v}\|}{\Delta t}\frac{1}{v} = \frac{v}{r} \Rightarrow \frac{\|\Delta \mathbf{v}\|}{\Delta t} = \frac{v^2}{r} = a$$

c'est l'accélération cherchée. On va lui mettre un indice "c" pour préciser qu'elle est "centripète". On a donc trouvé l'orientation du vecteur (Fig. 28) et maintenant on a trouvé sa valeur, sa norme. Comme c'est important, réécrivons:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \qquad \text{puisque } v = \omega r$$

Exemple: Une voiture prend à la vitesse v_1 un virage ayant un rayon de courbure r. Tout se passe bien. Le lendemain, la météo est la même (route sèche) et la même voiture prend le même virage mais à la vitesse $v_2 = 2v_1$. Aïe! L'accélération centripète est cette fois quatre fois plus élevée ($4 = 2^2$!) et il n'est pas certain que l'adhérence des pneus sur l'asphalte soit suffisante...

7. Le mouvement circulaire quelconque

La trajectoire est toujours un cercle ou un arc de cercle mais la valeur de la vitesse (= la norme du vecteur) n'est plus constante. Comme on l'a vu aux Figs. 24 à 26, le vecteur-accélération est dans tous les cas dirigé vers l'intérieur de la trajectoire, vers l'avant si la vitesse augmente et vers l'arrière si elle diminue. Examinons sans grands détails le cas d'une vitesse croissante dans un mouvement circulaire quelconque. Sur la figure ci-dessous, on n'a pas représenté les vecteurs-vitesse pour ne pas alourdir le dessin mais le mobile tourne dans le sens positif (= sens contraire des aiguilles des horloges):

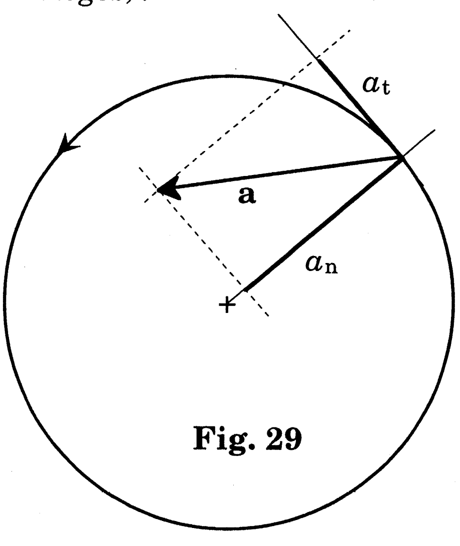


Fig. 29

Il est utile de décomposer le vecteur **a** en le projetant d'une part sur un axe *radial* (c-à-d selon un rayon) ou *normal* (sous-entendu à la trajectoire), ce qui donne l'accélération *normale* a_n qui n'est autre que l'accélération centripète du MCU; et d'autre part sur un axe tangent, ce qui donne l'accélération *tangentielle* a_t.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_t \end{pmatrix}$$

Par Pythagore, on a bien sûr que $a^2 = a_n^2 + a_t^2$.

L'accélération normale a_n n'est pas autre chose que l'accélération centripète $a_c = v^2/r$; on sera pourtant attentif au fait qu'ici elle ne peut pas être constante comme dans le MCU puisque v varie.

Pour un MC quelconque, la vitesse angulaire ω n'est pas constante, il y a une *accélération angulaire* α qu'on obtient par:

$$\alpha = \frac{a_t}{r}, \text{ de la même façon que } \omega = \frac{v}{r}$$

Il faudra donc parfois éviter d'utiliser la lettre α pour désigner un angle, il y a bien d'autres lettres pour cela, les plus utilisées étant par exemple ϕ et θ.

Un exemple de tel mouvement serait le démarrage d'un carrousel ou le freinage d'une roue de voiture sur un banc d'essai (pas de translation). Un autre exemple, qu'on examinera dans un chapitre ultérieur, est l'oscillation d'un pendule: la trajectoire de la masse pendue au fil est en effet un arc de cercle mais la vitesse n'est en aucun cas constante.

Remarque: si $a_t = const.$ c'est un MCUA: mouvement circulaire uniformément accéléré, comme on aura pu le deviner.

A retenir: *L'accélération n'est* ***jamais*** *nulle si la trajectoire est courbe. Le vecteur-accélération est* ***toujours*** *dirigé vers l'intérieur de la courbe.*

8. Le MUA

Il s'agit du *mouvement uniformément accéléré*, c'est-à-dire celui dont le **vecteur-accélération est constant**. Il ne faudrait surtout pas en conclure que le mouvement est alors rectiligne. Il ne l'est généralement pas, comme on va le montrer.

Soient a_x et a_y les deux composantes du vecteur-accélération, elles sont constantes. On peut écrire les deux composantes x et y du vecteur-position $\mathbf{r}$: c'est un MRUA sur chacun des axes:

$$x = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0,x}t + x_0 \quad \text{et}$$

$$y = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{0,y}t + y_0$$

a_x, a_y, $v_{0,x}$, v_{0y}, x_0 et y_0 ayant les signes correspondant à l'orientation choisie pour les axes. Pour trouver l'équation cartésienne de la trajectoire, il faut comme d'habitude, éliminer t entre ces deux équations. Ce n'est pas vraiment facile ici puisque t apparaît au 2ème degré dans les deux équations, on va donc se simplifier la vie en particularisant quelque peu: on va supposer que le vecteur-accélération est orienté verticalement, ce qui veut dire que sa composante horizontale est nulle: $a_x = 0$; il reste:

$$x = v_{0,x}t + x_0 \quad \text{et}$$

$$y = \frac{1}{2}at^2 + v_{0,y}t + y_0$$

l'indice y de a_y devient inutile, de même que l'indice 0 de $v_{0,x}$.

Eliminer t revient à l'extraire de la 1ère équation:

$$t = \frac{x - x_0}{v_x} \Rightarrow t^2 = \left(\frac{x - x_0}{v_x}\right)^2$$

et à l'introduire dans la $2^{ème}$. Cela donne:

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{x - x_0}{v_x}\right)^2 + v_{0y}\frac{x - x_0}{v_x} + y_0$$

On vérifiera qu'en développant et en regroupant les termes de même degré en x, on obtient une équation de la forme:

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

qui est l'équation d'une parabole. C'est en effet la trajectoire suivie de façon très générale par un mobile ayant une accélération vectoriellement constante. La trajectoire ne sera rectiligne que dans les cas particuliers où la vitesse initiale est soit nulle, soit parallèle, de même sens ou non, à l'accélération. Dans ces cas-là, le MUA devient un MRUA.

L'application la plus évidente des MRUA et MUA est traitée au chapitre qui suit:

9. Chute libre et balistique

Historique

Le problème de la chute des corps fût dès l'Antiquité une préoccupation majeure des philosophes-physiciens. Aristote (IVe s. avant J-C) posait déjà le problème, mais ses réponses étaient fausses. Ses théories furent pourtant enseignées jusqu'au $XVII^{ème}$ siècle comme étant les seules vraies. Ce n'est qu'au début de ce $XVII^{ème}$ siècle que Galilée apporta la bonne solution. Son génie fût le paradoxe de pouvoir faire abstraction de la réalité pour rendre compte de celle-ci. En particulier, il proposa d'étudier la chute des corps en l'absence de tous frottements dûs à l'air, ce qui est irréalisable en pratique, mais cette approximation est le seul chemin possible vers la compréhension des phénomènes physiques. Sa théorie constitue en quelque sorte l'acte de naissance de la physique moderne.

Ce qui est présenté ici est conforme à la théorie de Galilée mais adapté au langage mathématique de la cinématique actuelle et étudiée dans les chapitres précédents.

9.1. Chute libre verticale

Pour l'établissement de toute théorie physique, des hypothèses restrictives préalables sont nécessaires. Elles délimitent le domaine de validité de la théorie. En d'autres termes, il est indispensable de vérifier si elles sont remplies lors de l'application de la théorie à un problème particulier. Pour la chute libre, ces hypothèses sont au nombre de deux:

1°) Les frottements dûs à l'air (ou à un autre fluide) doivent pouvoir être négligés (raison du qualificatif "libre"). Cela suppose que les corps tombant sont assez massifs, des billes métalliques pleines par exemple.

2°) La chute doit avoir lieu à une faible altitude au dessus de la surface de la Terre. De façon plus générale, la hauteur de chute doit pouvoir être négligée vis-à-vis du rayon terrestre $R_t = 6370$ km.

Remarque:

Il est bien évident que ces hypothèses, surtout la première, ne sont jamais réalisées parfaitement. On ne sait traiter que des situations idéales. La théorie ne sera donc finalement qu'approximative, mais perfectible (en ajoutant une correction pour tenir compte par exemple des frottements de l'air). Le degré d'approximation est conditionné par la précision numérique désirée des résultats cherchés, puis par conséquent, par la précision des instruments de mesure nécessaires à l'expérimentation.

Si les hypothèses ci-dessus sont suffisamment remplies, on peut énoncer les deux lois de la chute libre (verticale ou non):

Première loi: la vitesse de chute ne dépend pas de la nature du corps qui tombe.

Deuxième loi: L'accélération du corps qui tombe est un **vecteur constant** vertical orienté vers le bas. La première loi permet d'ajouter que ce vecteur est le même pour tous les corps.

La démonstration de ces deux lois se fait expérimentalement:

Démonstration de la première loi:

D'une hauteur h au dessus d'un niveau de référence, on lâche simultanément deux ou plusieurs billes de grosseurs différentes (par exemple en acier, métal lourd).

On observe que la durée de la chute est la même pour toutes.

Remarque: La physique d'Aristote, qui est une élaboration très structurée de la physique du "bon sens", est en opposition complète avec un tel résultat et la première loi pour la simple raison que personne avant Galilée n'avait fait une telle expérience. Il y eut des flots d'encre et des querelles à ce sujet pendant une vingtaine de siècles et ne prirent fin, après un paroxysme seulement vers la fin du XVII$^{\text{ème}}$ siècle. Cela s'explique dans l'histoire de la pensée scientifique par le fait qu'il a été pendant très longtemps jugé inutile d'expérimenter, l'idée même n'existait pas. On faisait bien des observations, Aristote en fit beaucoup, mais on ne faisait pas d'expérimentations. On raisonnait souvent juste, mais sur des présupposés faux, ceux du sens commun, très souvent en défaut. Aristote n'aurait jamais dit:

"*La science commence où le bon sens finit*".

Démonstration de la deuxième loi:

Si la démonstration de la première loi est qualitative, celle de la deuxième est quantitative; elle va permettre de montrer que l'accélération de chute libre est constante puis d'en déterminer la valeur, **la même pour tous les corps.**

Le matériel consiste en une bille d'acier, un double-mètre et un bon chronomètre. Il s'agit de mesurer le temps de chute de la bille pour des hauteurs de chute différentes.

Pour exploiter au mieux les mesures, on considère un axe de coordonnées vertical Oy dirigé vers le bas et dont l'origine est au point de départ de la bille ($y_0 = 0$), laquelle est lâchée sans vitesse initiale ($v_0 = 0$).

Dans un premier temps, on reporte graphiquement la distance y parcourue par la bille en fonction du temps de chute t. On obtient une courbe qui peut ressembler à une parabole (mais à priori, rien ne permet encore de l'affirmer). On fait alors l'hypothèse qu'il s'agit d'une parabole, c'est-à-dire que le mouvement est uniformément accéléré (MRUA), donc peut s'écrire:

$$y = \frac{1}{2}at^2 \quad (v_0 = 0)$$

Pour vérifier cette hypothèse, on reporte graphiquement la hauteur de chute y en fonction du temps au carré.

Si l'hypothèse est correcte, on doit obtenir une droite dont la pente permet de calculer l'accélération: *pente* = $a/2$.

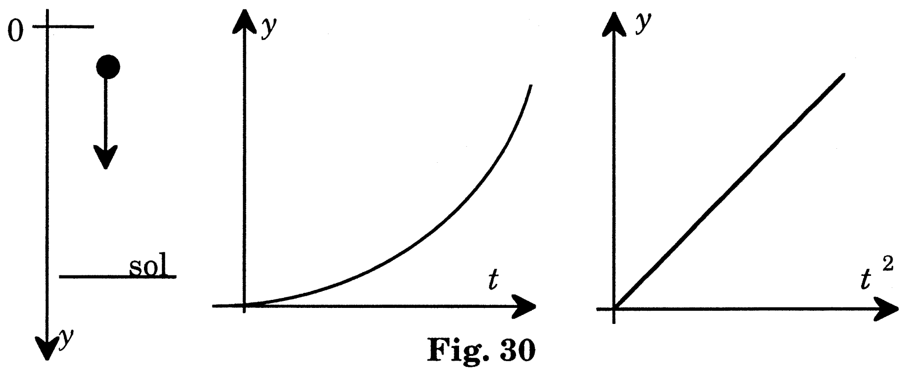


Fig. 30

A cette accélération bien particulière on attribue un symbole particulier: g. Il s'agit en fait d'un vecteur, alors **g**. La valeur de g sur la surface de la Terre est d'environ 9,8 m/s^2. En Europe centrale, elle est de 9,806 m/s^2. On se contentera de g = 9,8 m/s^2, et même parfois de 10 m/s^2 pour des estimations rapides.

Ainsi un corps en chute libre verrait sa vitesse augmenter de près de 10 m/s chaque seconde. C'est la relation bien connue du MRUA pour la vitesse: $v = gt + v_0$.

Pourquoi le conditionnel "verrait"? Parce que sur Terre, à cause des frottements de l'air, une chute de plusieurs secondes ne peut plus être "libre"; en effet, lorsque la vitesse croit, les frottements aérodynamiques crois-sent très vite, ce qui diminue l'accélération à tel point que le corps finit par atteindre une vitesse constante limite. Un parachutiste qui n'a pas encore ouvert son parachute atteint difficilement une vitesse supérieure à 280 km/h.

En résumé, la chute libre verticale n'est autre qu'un MRUA. Les équations générales en sont donc:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0 \qquad \text{et} \qquad v = gt + v_0$$

MAIS! Les signes de g, v_0 et y_0 dans ces deux formules dépendent de l'orientation choisie pour l'axe Oy. Mettons *par exemple* Oy vers le haut; comme **g** est toujours vers le bas, ce sera – 9,8 qu'il faudra mettre pour g dans l'équation. Pour l'éventuelle vitesse initiale v_0, on tiendra compte du sens de son vecteur relativement au sens de l'axe.

9.2. Balistique

La seule nuance par rapport à la chute libre verticale est que la vitesse initiale n'est ni nulle ni verticale. C'est donc une généralisation: le vecteur v_0 fait un angle $0 < \alpha < 90°$ avec l'horizontale. Les hypothèses restrictives énoncées pour la chute libre verticale restent valables:

Les frottements dûs à l'air doivent pouvoir être négligés. Si le lancer balistique se passe sur Terre, la vitesse devra être faible, les frottements aérodynamiques augmentant fortement avec la vitesse. Cela limite la portée du jet à seulement quelques mètres. Le problème de missiles intercontinentaux ou même d'artillerie "locale" est complètement hors sujet.

Sur un astre dépourvu d'atmosphère, tel la Lune, la situation serait bien plus simple; cependant l'altitude et la portée doivent rester faible vis-à-vis du rayon de l'astre pour qu'il ne soit pas nécessaire de tenir compte des variations du vecteur **g** de l'astre. Dans un chapitre ultérieur (Gravitation) on examinera comment traiter le problème en tenant compte de l'inhomogénéité de **g**. Cela nous fera voir par exemple comment décrire le mouvement des satellites. Il faut admettre qu'il est nettement plus difficile de tenir compte des frottements aérodynamiques que des variations de **g** autour d'un astre.

Soit un projectile propulsé avec la vitesse initiale $\mathbf{v}_0$(vecteur). Il retombe à la même altitude que son point de départ.

On va chercher les équations du mouvement et l'équation de la trajectoire. Pour cela, on place un système d'axes orthonormés Oxy avec l'origine O au point de départ du projectile, l'axe Ox étant horizontal, l'axe Oy étant vertical:

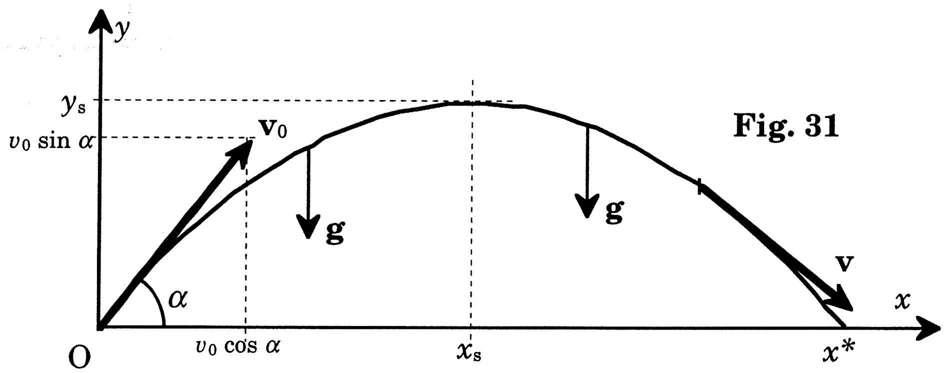


Fig. 31

Il faut bien se rendre compte que dès que le projectile a quitté le propulseur, il n'est plus que soumis à l'attraction terrestre, autrement dit son accélération est **g**, vecteur vertical vers le bas. Si la trajectoire du projectile n'est pas aussi verticale vers le bas, c'est parce qu'il y a une vitesse initiale non verticale. On doit se souvenir de ce qui avait été étudié à propos du MUA: si l'accélération est un vecteur constant, alors, de façon générale, la trajectoire est une parabole. C'est exactement la situation de la balistique.

Ecrivons les équations du mouvement:

$$x = v_{0,x}t \;\; ; \;\; y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0,y}t$$

On réécrit ces équations en faisant apparaître l'angle α que fait

$\mathbf{v}_0$ avec l'horizontale: $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$; $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$; ainsi:

$$x = v_0 t \cos\alpha ; \quad y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\alpha$$

ce sont les équations *paramétriques* de la trajectoire, donnant toutes les informations sur le mouvement. Les équations pour les composantes du vecteur-vitesse $\mathbf{v}(t)$ sont:

$$v_x = v_0 \cos\alpha ; \quad v_y = -gt + v_0 \sin\alpha$$

Il faut noter que g et v_0 sont ici tous deux positifs, étant donné le choix des axes.

Cherchons l'équation *cartésienne* de la trajectoire; pour l'obtenir, il faut éliminer t; on extrait alors t de l'équation $x(t)$ et on l'introduit dans $y(t)$. C'est un calcul banal (à vos crayons!), on obtient:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + x \tan\alpha$$

c'est en effet l'équation d'une parabole de la forme $y = Ax^2 + Bx$. Elle passe par l'origine, comme il se doit.

Examinons quelques particularités de la trajectoire:

Admettons que le point de chute est au même niveau ($y = 0$) que le point de départ et calculons la portée du jet x^* pour un angle α quelconque; il y a deux solutions si $y = 0$, l'une est $x = 0$ et l'autre:

$$0 = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^* + \tan\alpha \Rightarrow x^* = \frac{2 v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g}$$

(vous avez toujours votre crayon à la main !). Ainsi x^* dépend du *carré* de la vitesse initiale et de l'angle α d'une façon apparemment compliquée. Ce n'est qu'une apparence car parmi l'abondance de formules de trigonométrie il y en a une qui nous aide ici:

$$2 \sin\alpha \cos\alpha = \sin 2\alpha, \text{ ce qui implique:}$$

$$x^* = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Ceci permet de trouver facilement sous quel angle α^* il faut lancer, étant donné v_0, pour que x^* soit maximum, noté alors $x^*_{\max}$: en effet, la valeur maximum d'un sinus est de 1, et cela pour un angle de 90°, donc: $\sin 2\alpha^* = 1 \Rightarrow 2\alpha^* = 90°$

$\Rightarrow \alpha^* = 45°$, résultat qui ne doit pas beaucoup surprendre.

Exemple de calcul:

Sous quel(s) angle(s) faut-il lancer un projectile pour que la portée soit la moitié de la portée maximum?

Sol:

$$x^* = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad \text{et} \quad x^*_{\max} = \frac{v_0^2}{g} = 2x^*$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_1 = 15° \quad \text{et} \quad \alpha_2 = 75°$$

En effet :

tout autre angle $\alpha \neq 45°$ donnera une portée inférieure à x^*_{max}. Il doit y avoir deux angles différents donnant la même portée, l'un : $\alpha_1 < 45°$, l'autre : $\alpha_2 > 45°$; le double de ces angles ayant le même sinus : $\sin 2\alpha_1 = \sin 2\alpha_2$, la portée sera donc la même pour ces deux angles.

La Fig. ci-contre montre un cercle de rayon 1 avec deux doubles angles dont les sinus sont égaux.

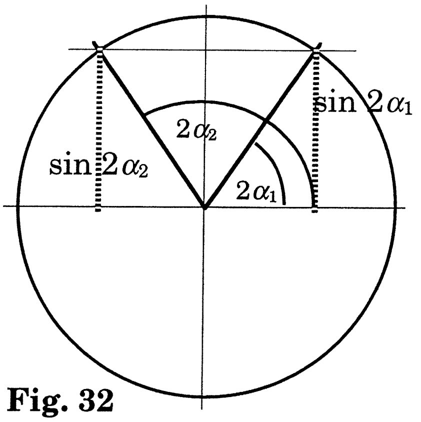


Fig. 32

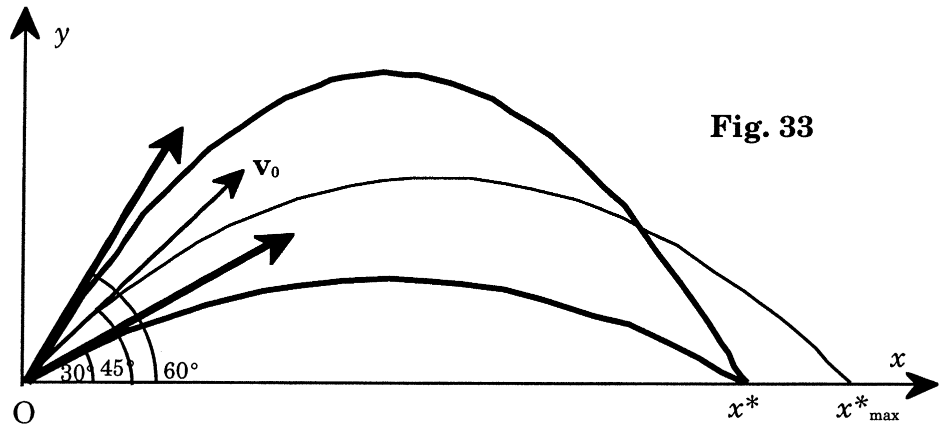


Fig. 33

La figure ci-dessus montre un lancer dans trois situations : les normes des vitesses initiales sont les mêmes, seuls les angles sont différents : à 45°, le projectile atteint la portée maximum x^*_{max}; à 30° et 60°, le projectile atteint le même point x^*; l'un est le tir *tendu*, l'autre le tir *indirect*. On remarque que les deux angles donnant la même portée sont symétriques de part et d'autre de 45°.

Problème typique de balistique:

Etant donnée une cible au point P de coordonnées (x_1, y_1), étant donné la valeur de la vitesse initiale du projectile partant de l'origine O(0,0), quel doit être l'angle α entre $\mathbf{v}_0$ et l'axe horizontal pour que le projectile atteigne la cible?

Solution :

Le point P doit satisfaire l'équation générale de la parabole :

$$y_1 = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x_1^2 + x_1\tan\alpha \quad (*)$$

La seule inconnue est maintenant α qu'il faut sortir de là. On utilise l'une des innombrables formules de trigonométrie qu'on trouve en feuilletant le F&T :

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$$

qu'on introduit dans l'équation (*), ce qui donne :

$$y_1 = -\frac{g\,x_1^2}{2\,v_0^2}(1+\tan^2\alpha)+x_1\tan\alpha$$

C'est une équation du 2ème degré pour $\tan\alpha$, on l'écrit donc (à vos crayons !):

$$\tan^2\alpha - \frac{2v_0^2}{g\,x_1}\tan\alpha + \frac{2v_0^2 y_1}{g\,x_1^2} + 1 = 0$$

Il y aura deux, une seule ou aucune solution pour $\tan\alpha$, selon que le discriminant sera respectivement positif, négatif ou nul. Cela ne doit pas surprendre, en effet, il pourra y avoir deux angles possibles pour atteindre la cible: le tir tendu et le tir indirect; il n'y aura qu'une solution dans le cas limite, qui donnerait $\alpha = 45°$ si la cible était au même niveau que le point de départ et si x_1 valait x^*_{max}; et finalement, pas de solution si la v_0 du projectile est insuffisante pour qu'il puisse atteindre la cible, quel que soit l'angle de départ.

Résolvons cette équation du 2ème degré:

$$\tan\alpha = \frac{v_0^2}{g x_1} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g x_1}\right)^2 - \left(1+\frac{2v_0^2 y_1}{g x_1^2}\right)}$$

Voilà le résultat ! Admettons que tel quel, il n'est pas bien utile si on n'a pas à y introduire des valeurs numériques. Une belle idiotie serait de se mettre à apprendre une telle formule !

Comme exercice, on conseille pourtant d'y introduire $y_1 = 0$ et $x_1 = x^*_{max}$, pour voir qu'on obtient bien ce qu'on doit obtenir.

Regardons encore :

le vecteur-vitesse :

Le mouvement balistique se compose :
d'un MRU horizontal ($a_x = 0$) : $v_x = v_0\cos\alpha$ et
d'un MRUA vertical ($a_y = -g$) : $v_y = -gt + v_0\sin\alpha$.

Comme v_0 et α sont fixes, v_x est constant. Par contre, v_y peut s'annuler au sommet de la parabole, en $t = t_s$. On écrit donc :

$0 = -gt_s + v_0\sin\alpha \Rightarrow t_s = (v_0\sin\alpha)/g$.

Voyons *où* se produit naturellement cette situation:
en $x = x_s = v_0 t_s\cos\alpha$. Y remplaçant t_s , on obtient:

$$x_s = \frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{1}{2}x^*$$

comme il se doit pour toute bonne parabole.

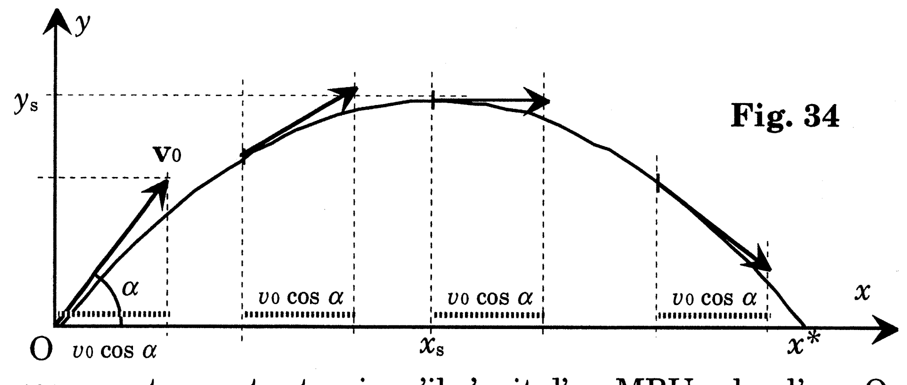
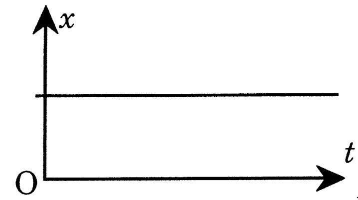


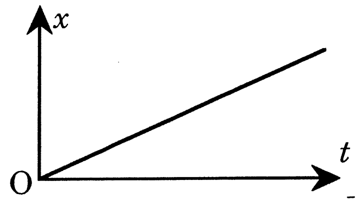
Fig. 34

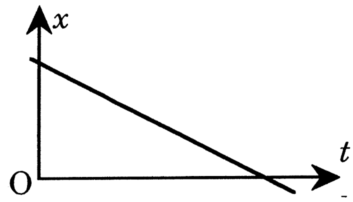
$v_0\cos\alpha$ reste constant puisqu'il s'agit d'un MRU selon l'axe Ox.

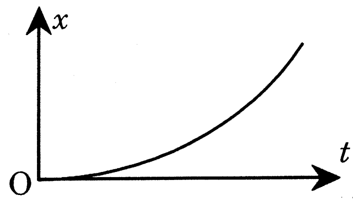
Exercices de **CINEMATIQUE** **mouv. rect.**

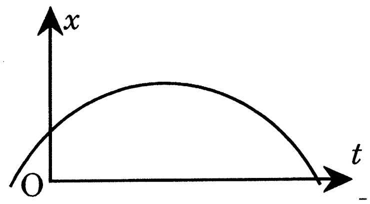
Décrire le mouvement **rectiligne** du mobile se déplaçant sur l'axe Ox : que fait ce mobile ?

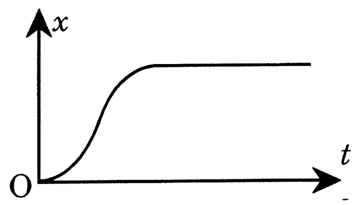
a) 

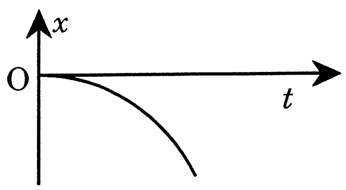
b) 

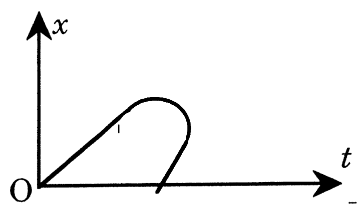
c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

h) 

1. Un mobile parcourt une distance d_1 = 36 km en 1/2 h puis ensuite une distance d_2 = 18 km en 10 minutes. Quelle fut la vitesse moyenne ? (en m/s).

Rép. 22,5 m/s.

2. Un mobile parcourt une distance *d*. La 1ère moitié l'est à la vitesse v_1 = 10 m/s et la 2ème à v_2 = 20 m/s. Calculer la vitesse moyenne.

Rép. 13,3 m/s.

3. Deux véhicules roulent à la rencontre l'un de l'autre sur une route rectiligne. Le 1er a une vitesse de 30 m/s et le 2ème une vitesse de 20 m/s. En t = 0 la distance qui les sépare est de 800 m. L'origine x = 0 est à l'endroit où se trouve le 1er en t = 0.
a) A quel instant et où le croisement aura-t-il lieu ?
b) Examiner le problème graphiquement.

Rép. a) 16 s, 480 m.

4. Un véhicule roule à 54 km/h. Feu rouge: freinage et arrêt après 5 s. Calculer quelle fut l'accélération moyenne.

Rép. – 3 m/s^2.

5. Route rectiligne. Un véhicule roule à vitesse constante puis freine régulièrement (a = const.) pendant 5 s jusqu'à l'arrêt qui a lieu après 80 m.
a) Calculer l'accélération et la vitesse avant le début du freinage;
b) représenter graphiquement schématiquement $x(t)$, $v(t)$ et $a(t)$.

Rép. a) – 6,4 m/s^2, 32 m/s.

6. Route rectiligne. Un véhicule démarre en t = 0 et a une accélération constante a = 2 m/s^2. Calculer sa vitesse lorsqu'il a parcouru 900 m.

Rép. 216 km/h.

7. **a)** Un mobile peut-il avoir une vitesse qui augmente et une accélération qui diminue?
b) Un mobile peut-il avoir une vitesse nulle à un certain instant t et une accélération non-nulle à ce même instant?
c) Un mobile peut-il avoir simultanément une vitesse constante et une accélération constante?
d) Un mobile qui ne se déplace pas en ligne droite peut-il avoir une accélération nulle?

Rép. a), b) : oui; c) : cela dépend, faut préciser; d) : non.

1. La position d'un mobile en fonction du temps est décrite par le vecteur:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 3t + 2 \\ -3t^2 + 9t + 4 \end{pmatrix}$$

a) Représenter graphiquement les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$;
b) calculer l'éq. $y = f(x)$ de la trajectoire et la représenter graphiquement;
c) trouver le point extrême de la trajectoire et l'instant où il est atteint;
d) sur le graphe $y = f(x)$, représenter le vecteur $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$ où P est le point atteint en $t = 3$ s.
e) essayer de s'imaginer le mouvement du mobile sur sa trajectoire.

Rép. b) $y = -3x + 10$; c) $P^*(-0{,}25;\ 10{,}75)$ en $t^* = 1{,}5$ s; d) P(2;4).

2. La position de deux mobiles en fonction du temps est donnée par:

$$\mathbf{r}_1(t) = \begin{pmatrix} t + 3 \\ t^2 - 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{r}_2(t) = \begin{pmatrix} -t - 1 \\ t + 4 \end{pmatrix}$$

a) Calculer les éq. $y = f(x)$ des trajectoires et les représenter sur le même graphe;
b) calculer les points P_1 et P_2 d'intersection des trajectoires;
c) calculer l'instant t^* de la rencontre des deux mobiles si elle a lieu;
d) calculer l'intervalle de temps qui sépare les deux mobiles au croisement des trajectoires.

Rép. b) $P_1(1;2)$, $P_2(4;-1)$; c) $t^* = -2$ s; d) 6 s.

3. La position de deux mobiles en fonction du temps est donnée par:

$$\mathbf{r}_1(t) = \begin{pmatrix} t + 2 \\ t + 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{r}_2(t) = \begin{pmatrix} -t - 2 \\ t + 7 \end{pmatrix}$$

a) Calculer les éq. $y = f(x)$ des trajectoires et les représenter sur le même graphe;
b) calculer la distance qui les sépare en fonction du temps: $D(t) = ?$
c) calculer à quel instant t^* cette distance est minimum et ce qu'elle vaut;
d) y a-t-il croisement des mobiles? Si oui, quand?
e) calculer la distance qui les sépare lorsque le premier mobile passe au croisement des trajectoires.

Rép. b) $2(t^2 + 4t + 13)^{1/2}$; c) $t^* = -2$ s , $D^* = 6$ m ; e) env. 8,5 m.

4. La position et la vitesse d'un mobile en fonction du temps sont:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t + 4 \\ t^2 - 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2t \end{pmatrix}$$

a) Calcul de $y = f(x)$ et représentation graphique de la trajectoire;
b) calcul de l'instant où le vecteur-vitesse du mobile fait 45° avec l'axe Ox; calcul des coordonnées du point P correspondant;
c) calcul de la valeur de la vitesse (= norme du vecteur) en $t = 0$ s et $t = 2$ s;
d) calcul de l'instant et des coordonnées du point où le vecteur-vitesse fait un angle de -60° avec l'axe Ox;
e) dessin correct de ces vecteurs-vitesse sur la trajectoire.

Rép. a) $y = x^2/4 - 2x - 2$; b) $t = 1$ s; P(6;-5); c) 2 m/s; 4,47 m/s; d) -1,73 s.

5. Le mouvement d'un mobile est donné par son vecteur-position:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ t^3 - 8t \end{pmatrix}$$

Il est possible de calculer les vecteurs $\mathbf{v}(t)$ et $\mathbf{a}(t)$ à partir de $\mathbf{r}(t)$, cela nécessite le calcul différentiel. On les donne pourtant:

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} 4t \\ 3t^2 - 8 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6t \end{pmatrix}$$

Avec un peu de perspicacité, on doit pouvoir voir comment passer de $\mathbf{r}(t)$ à $\mathbf{v}(t)$ puis à $\mathbf{a}(t)$, en regardant bien..., mais la question n'est pas là pour le moment.

a) L'équation cartésienne de la trajectoire n'est pas demandée car l'élimination de t est un peu difficile et il est donc plus simple de garder la trajectoire sous forme paramétrique: $x(t)$ et $y(t)$. Dessiner alors la trajectoire dans le plan Oxy en utilisant les vecteurs-vitesse: pour chaque seconde entre $t = -3$ s et $t = 3$ s (donc 7 valeurs) calculer composantes des vecteurs **r**, **v** et **a** (faire un tableau de valeurs). Dessiner les vecteurs **v** et **a** dans le plan Oxy en chaque point de la trajectoire correspondant à ces instants.
Echelle proposée: 1 m : 2 carreaux; 1 m/s : 1/2 carreau; 1 m/s^2 : 1/2 carreau. Utiliser 1/2 page A4 et des couleurs différentes pour chaque type de vecteur.
b) Calculer à quel(s) instant(s) la vitesse est parallèle à l'axe Ox.

Rép. b) ± 1,63 s.

Exercices de **CINEMATIQUE** **MCU**

1. Deux voitures sur une autoroute. Elles roulent toutes deux à la même vitesse (lue au compteur). Expliquer comment il est possible que l'une puisse dépasser l'autre.

2. a) Sous quel angle (en deg.) voit-on une personne de 1,80 m à 20 m ?
b) Le pouvoir de résolution de l'oeil sain et dans de bonnes conditions d'éclairage est d'environ 1' (= 1 minute d'arc = 1/60 deg). A quelle distance maximum distingue-t-on encore les *deux* phares d'une voiture séparés par 1,40 m ? (voiture de face et de nuit)
c) Sous quel angle voit-on le Soleil; même quest. pour la Lune ? (Consulter le F & T)

Rép. a) 5,16 ° ; b) env. 4800 m; c) 1/2 deg. env. pour tous les deux.

3. La Terre tourne sur elle-même, c'est connu. Calculer alors la vitesse et l'accélération de notre Lycée et de ceux qui s'y trouvent, à 47° de latitude nord.

Rép. 316 m/s; 0,023 m/s^2.

4. Un vieux disque vinyl 33 tours 30 cm tourne normalement sur un pick-up.
a) Calculer la fréquence, la période et la vitesse angulaire;
b) Calculer la vitesse d'un point du bord et d'un point à 7,5 cm du centre;
c) l'accélération de ces deux points.
d) Combien y a-t-il de sillons par face ?

Rép. a) 0,56 Hz; 1,82 s; 3,46 rad/s; b) 51,8 et 25,9 cm/s; c) 1,79 m/s^2 et ?

5. Vélo: un tour de pédale par seconde.
Diamètre du plateau du pédalier: 21 cm;
diamètre d'un pignon arrière: 5,2 cm.
Calculer la vitesse d'un point du pneu si le diamètre de la roue arrière est de 68 cm.

Rép. env 31 km/h.

6. Sur un cercle de rayon R = 2 m, un mobile a un MCU de période T = 54 s. Calculer la variation de vitesse $\Delta\mathbf{v}$ pour Δt = 18 s. Dessin indispensable !

Rép. 0,40 m/s. N.B. ici $a_c \neq \Delta\mathbf{v} / \Delta t$ car Δt n'est pas << T.

7. Sur un circuit, une voiture aborde un virage à angle droit à la vitesse constante de 144 km/h. L'adhérence des pneus sur la route est telle que la voiture peut se permettre une accélération centripète max. de 5 m/s^2 sans déraper.
Calculer le rayon de courbure minimum de la trajectoire, le temps mis pour effectuer le virage et la vitesse angulaire.

Rép. 320 m; 12,6 s; 0,125 rad/s.

CINEMATIQUE

1. Pour mesurer la profondeur d'un puits, on lâche un caillou de sa margelle. Le temps de chute est de 1,44 s. Calculer:
a) la profondeur du puits et la vitesse d'arrivée du caillou;
b) combien de temps après l'impact on entend le "plouf" (vitesse du son v_s : 340 m/s).

Rép. a) 10,2 m; 14,1 m/s; b) 0,03 s.

2. Autre puits. De la margelle on enclenche un chrono et on lâche un caillou simultanément. Du même endroit on entend le "plouf" en $t^* = 1{,}86$ s. Calculer la profondeur h de ce puits.

Rép. 16,1 m.

3. Pour un objet tombant librement l'accélération est donc g. Par contre, s'il glisse sans frottement le long d'un plan incliné d'un angle α avec l'horizontale, l'accélération est plus faible. Montrer qu'elle vaut $a = g \sin\alpha$.

Indication: projeter le vecteur $\mathbf{g}$ sur la direction du plan.

4. Un projectile est lancé à la vitesse initiale horizontale de 3 m/s du bord d'une table de 80 cm de haut. Où se trouve le point de chute sur le sol et quelle est la vitesse d'arrivée ?

Rép. 5 m/s (env.).

5. Deux objets partent d'un point à une hauteur h au dessus du sol. Le 1^{er} est lâché sans vitesse initiale et le $2^{ème}$ est lancé avec une vitesse horizontale. Lequel arrive le premier au sol ?

6. Lors d'une promenade, des touristes découvrent une voiture tombée récemment au bas d'une falaise verticale de 20 m de hauteur. Le point de chute se trouve à 10 m du pied de la falaise. L'enquête de police révèle que les traces de freinage (perpendiculaires au bord) commencent à 7,5 m du bord (horizontal) et que la décélération, constante, fut de 5 m/s^2. Le brigadier-chef conclut à un accident et rentre chez lui pour arroser ses géraniums.
Calculer la vitesse de la voiture avant le début du freinage et la durée de l'angoisse (freinage + chute). On prendra $g = 10$ m/s^2.

Rép. 36 km/h, 3 s.