Mathématiques 1

Problème 1 Une action a une valeur initiale de 88,50 CHF à son entrée en Bourse. Pendant 6 mois, cette action perd mensuellement 7% de sa valeur. Les 6 mois suivants, sa valeur augmente de 7% mensuellement.

a) Que vaut ce titre après 4 mois, 8 mois, 12 mois ?

b) En admettant que cette action continue de croître à un taux mensuel de 7%, à quel moment vaudra-t-elle 120 CHF ?

c) Quel est le taux mensuel de croissance ou de décroissance de cette action sur les 12 mois de cotation ?

d) Cette action ayant dévalué de 7% durant les six premiers mois, quel aurait dû être le taux mensuel de croissance durant les six mois suivants de sorte que la valeur de cette action soit la même au début qu'à la fin de l'année de cotation ?

Problème 2 Le tableau ci-dessous fait état de la population totale et de la population étrangère résidant en Suisse au 31 décembre des années 2000 et 2012. Les données sont exprimées en millions d'habitants pour les années 2000 et 2012.

	2000	2012
Population totale	7,164	8,039
Population étrangère	1,321	1,870

a) Quels ont été les taux annuels de croissance de ces deux populations entre 2000 et 2012 ?

b) Si l'évolution démographique suit la même tendance, quels seront les effectifs de ces populations en 2020 ?

c) En quelle année la population étrangère représentera-t-elle le tiers de la population résidente ?

Problème 3 L'Organisation mondiale de la santé (OMS) donne mandat à une organisation non gouvernementale de vacciner contre la fièvre jaune toute la population d'une région africaine. Selon les prévisions logistiques de cette ONG, le nombre $V(t)$ d'individus vaccinés sera décrit par la fonction

$$V(t) = \frac{25}{1 + 9 \cdot 2{,}45^{-0{,}23t}}$$

dans laquelle t est exprimé en mois et $V(t)$ en millions.

a) Combien d'individus sont déjà vaccinés au début de la campagne de vaccination ?

b) Combien d'individus seront vaccinés après une année ?

c) À quel moment pourra-t-on considérer que 18 millions d'individus ont été vaccinés ?

d) Combien d'habitants cette région compte-t-elle ?

Problème 4 Le tableau ci-dessous donne le prix (en CHF) facturé à un ménage pour sa consommation électrique mensuelle (en kWh) dans une commune de Suisse.

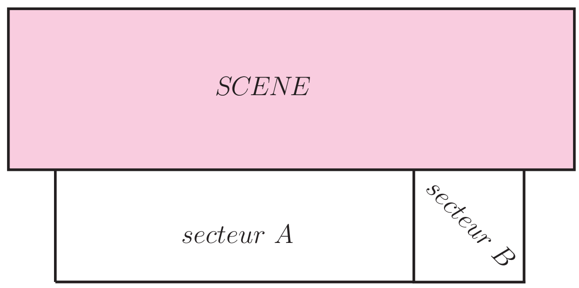
Consommation x en kWh	300	450
Montant facturé y en CHF	91	127

a) Déterminer le prix du kWh et le montant de la taxe de base.

b) Quel montant est facturé pour une consommation de 200 kWh ?

c) Un ménage se voit facturer un montant de 146,20 CHF. Quelle a été sa consommation ?

Problème 5 Au pied d'une scène sur laquelle se déroulera un concert de musique, on délimite à l'aide de barrières Vauban deux secteurs : A et B. Comme le montre le schéma ci-dessous, le secteur A doit être rectangulaire et le secteur B de forme carrée. On dispose au total de 120 mètres de barrières. Aucune barrière n'est posée contre la scène. Quelles dimensions faut-il donner à ces deux secteurs de telle sorte qu'elles offrent une surface totale d'aire maximale ? Quelle est alors la surface à disposition ainsi définie ?



Corrigé

Problème 1

a) Posons $V(n)$ la valeur de l'action après n mois de cotation. Il est clair que

$$V(4) = 0{,}93^4 \cdot 88{,}5 \cong \boxed{66{,}20} \qquad V(8) = 1{,}07^2 \cdot 0{,}93^6 \cdot 88{,}5 \cong \boxed{65{,}55}$$

$$V(12) = 1{,}07^6 \cdot 0{,}93^6 \cdot 88{,}5 \cong \boxed{85{,}90}$$

b) Il s'agit de résoudre

$$0{,}96^6 \cdot 88{,}5 \cdot 1{,}07^n = 120$$

Équation de laquelle on tire $1{,}07^n = 2{,}096$ et donc

$$n = \frac{\log(2{,}096)}{\log(1{,}07)} \cong 10{,}93 \cong \boxed{11}$$

Cette valeur sera donc atteinte le 17^e mois.

c) Le taux inconnu t est tel que

$$(1+t)^{12} \cdot 88{,}5 = 0{,}93^6 \cdot 1{,}07^6 \cdot 88{,}5$$

Il s'agit d'un taux de décroissance puisque

$$t = \sqrt[12]{0{,}93^6 \cdot 1{,}07^6} - 1 = -0{,}00245 = \boxed{0{,}245\%}$$

d) On cherche cette fois t tel que

$$0{,}93^6 \cdot (1+t)^6 \cdot 88{,}5 = 88{,}5$$

d'où

$$1 + t = \frac{1}{0{,}93} \cong 1{,}07527$$

On en conclut que $\boxed{t = 7{,}527\%}$.

Problème 2 Notons $N(t)$, respectivement $E(t)$, la population totale, respectivement la population étrangère, en l'année $2000 + t$.

a) Sous l'hypothèse d'une croissance exponentielle, on a $N(t) = 7{,}164 \cdot a^t$. Comme $N(12) = 8{,}039$, il suit que $7{,}164 \cdot a^{12} = 8{,}039$, et donc, que

$$a = \sqrt[12]{\frac{8{,}039}{7{,}164}} = 1{,}00965$$

Le taux annuel de croissance de la population totale a donc été de $\boxed{0{,}965\%}$.

Pour la population étrangère, on a $1{,}321 \cdot b^{12} = 1{,}870$, d'où

$$b = \sqrt[12]{\frac{1{,}870}{1{,}321}} = 1{,}0294$$

Le taux annuel de croissance de la population étrangère a donc été de $\boxed{2{,}94\%}$.

b) Avec, ce modèle, en 2020, les effectifs de ces deux populations seront

$$N(20) = 7{,}164 \cdot 1{,}00965^{20} = \boxed{8{,}681} \qquad E(20) = 1{,}321 \cdot 1{,}0294^{20} = \boxed{2{,}358}$$

c) Il s'agit de résoudre l'équation

$$\begin{aligned}
\frac{E(t)}{N(t)} &= \frac{1}{3} \\
\frac{1{,}321 \cdot 1{,}0294^t}{7{,}164 \cdot 1{,}00965^t} &= \frac{1}{3} \\
\left(\frac{1{,}0294}{1{,}00965}\right)^t &= \frac{1}{3} \cdot \frac{7{,}164}{1{,}321} \\
1{,}01956^t &= 1{,}8077 \\
t \cdot \log(1{,}01956) &= \log(1{,}8077)
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$t = \frac{\log(1{,}8077)}{\log(1{,}01956)} \cong 30{,}56 \cong \boxed{31}$$

Cela se produira donc en 2031.

Problème 3

a) On a $V(0) = \frac{25}{1+9} = \boxed{2{,}5}$.

b) Après 12 mois, on aura $V(12) = \boxed{14{,}21}$.

c) Il s'agit de résoudre

$$\begin{aligned}
\frac{25}{1 + 9 \cdot 2{,}45^{-0{,}23t}} &= 18 \\
\frac{25}{18} &= 1 + 9 \cdot 2{,}45^{-0{,}23t} \\
\frac{7}{18} &= 9 \cdot 2{,}45^{-0{,}23t} \\
\frac{7}{162} &= 2{,}45^{-0{,}23t} \\
\log(7) - \log(162) &= -0{,}23t \cdot \log(2{,}45)
\end{aligned}$$

Il s'ensuit donc que

$$t = \frac{\log(7) - \log(162)}{-0{,}23 \cdot \log(2{,}45)} \cong 15{,}24 \cong \boxed{16}$$

Cela se produira donc après 16 mois.

d) À long terme $t \to \infty$, tout le monde, ou presque, devrait être vacciné. La population de cette région est donc donnée par

$$\lim_{t\to\infty} V(t) = \boxed{25}$$

Problème 4

a) On cherche ainsi une relation linéaire affine $y = p \cdot x + h$. Le prix effectif du kWh est donné par la pente

$$p = \frac{127 - 91}{450 - 300} = \boxed{0{,}24}$$

Quant à la taxe de base, il s'agit de l'ordonnée à l'origine

$$h = 91 - 0{,}24 \cdot 300 = \boxed{19}$$

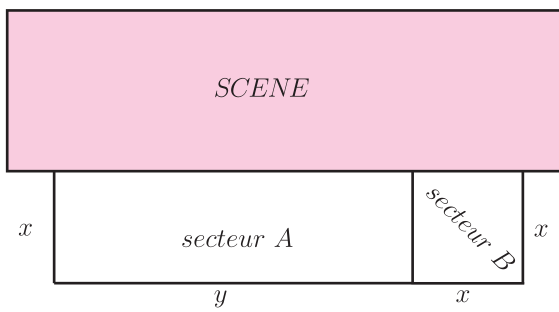
La fonction tarifaire est donc donnée par la formule

$$y = 0{,}24 \cdot x + 19$$

b) Pour une consommation $x = 200$, on paiera donc $y = \boxed{67}$

c) Si $y = 146{,}20 = 0,24x + 19$, alors $x = \boxed{530}$

Problème 5 Posons x et y pour les grandeurs figurant sur le schéma. Elles sont liées par la contrainte : $y + 4x = 120$. Autrement dit, $y = 120 - 4x$.



L'aire de la surface totale est donnée par

$$A(x) = x \cdot (y + x) = x \cdot (120 - 3x)$$

Comme elle est évidemment nulle pour $x = 0$ et $x = 40$, elle sera maximale pour $x = 20$. Les dimensions optimales sont donc les suivantes : secteur A $\boxed{20 \times 20}$, A : $\boxed{40 \times 20}$. La surface totale à disposition est alors égale à $20^2 + 40 \cdot 20 = \boxed{1200}$