ANALYSE

Corrigé des exercices de révision

(1)

Exercice 1

a). On a $f(x) = x^2 - \ln(1+x^2)$.

De plus: $f(0) = 0^2 - \ln(1+0^2) = -\ln(1) = 0$;

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{1+x^2}\, 2x = 2x - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2x(1+x^2)-2x}{1+x^2} = \frac{2x+2x^3-2x}{1+x^2} = \frac{2x^3}{1+x^2};$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^3}{1+x^2} = 0 \Rightarrow 2x^3 = 0 \Rightarrow x = 3;$$

tableau de croissance:

x		0	
signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
croissance ou décroissance de $f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

ainsi, pour toute valeur de x, on a $f(x) \geqslant f(0)$;

Comme $f(0) = 0$, on en conclut que $f(x) \geqslant 0$ pour tout x.

b) 1) On a $g(x) = \frac{1}{x}\cdot \ln(1+x^2)$, $x \neq 0$.

Avec $x > 0$, on a $g(x) = \frac{1}{x}\cdot \ln(1+x^2) \geqslant \frac{1}{x}\ln(1) = \frac{1}{x}\cdot 0 = 0$, car, comme $\ln(x)$ est une fonction croissante, si $a \leq b$, alors $\ln(a) \leq \ln(b)$.

En outre, comme $x^2 - \ln(1+x^2) \geqslant 0$, on a $\ln(1+x^2) \leqslant x^2$, et, avec $x>0$, $\frac{1}{x}\ln(1+x^2) \leqslant x$, d'où $0 \leqslant g(x) \leqslant x$ si $x > 0$.

On a de plus, $\lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$. Comme $0 \leqslant g(x) \leqslant x$ pour toute $x>0$, on a $\lim\limits_{x\to 0} 0 \leqslant \lim\limits_{x\to 0} g(x) \leqslant \lim\limits_{x\to 0} x$, d'où $0 \leqslant \lim\limits_{x\to 0} g(x) \leqslant 0$ et, donc, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

2) La pente de la tangente au graphe de g en $x = x_0$ est $g'(x_0)$.

Avec $g(x) = \frac{1}{x}\cdot\ln(1+x^2) = u\cdot v$ où $u = \frac{1}{x}$ et $v = \ln(1+x^2)$, on a $u' = -\frac{1}{x^2}$ et $v' = \frac{1}{1+x^2}\cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}$, d'où $g'(x) = u'v + uv' = -\frac{1}{x^2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{x}\cdot\frac{2x}{1+x^2} = -\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} + \frac{2x}{x(1+x^2)}$.

Avec $x_0 = 1$, on a $g'(1) = -\frac{\ln(1+1^2)}{1^2} + \frac{2\cdot 1}{1(1+1^2)} = -\ln(2) + \frac{2}{2} = 1 - \ln(2) \cong 0{,}307$.

Avec $x_0 = 3$, on a $g'(3) = -\frac{\ln(1+3^2)}{3^2} + \frac{2.3}{3(1+3^2)} = -\frac{\ln(10)}{9} + \frac{6}{30} = \frac{1}{5} - \frac{\ln(10)}{9} \cong -0{,}056$

Ainsi la pente de la tangente en $x=1$ est $1-\ln(2) \cong 0{,}307$ (>0) et celle en $x=3$ est $\frac{1}{5} - \frac{\ln(10)}{9} \cong -0{,}056$ (<0).

Par le théorème de la valeur intermédiaire, comme $g'(x) = -\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} + \frac{2x}{1+x^2}$ est

continue sur $[1;3]$, il existe alors un $x_0 \in]1;3[$ tel que $g'(x_0)=0$.
Autrement dit, il existe un $x_0 \in]1;3[$ tel que le point $P(x_0; g(x_0))$ est un point à tangente horizontale.

On a $g'(1) \cong 0,307$ et $g'(3) \cong -0,056$.
De plus, $g'(2) = -\frac{\ln(1+2^2)}{2^2} + \frac{2\cdot 2}{2(1+2^2)} = -\frac{\ln(5)}{4} + \frac{4}{2\cdot 5} = -\frac{\ln(5)}{4} + \frac{2}{5} \cong -0,0024$ et

$g'(1,5) = -\frac{\ln(1+1,5^2)}{1,5^2} + \frac{2\cdot 1,5}{1,5(1+1,5^2)} = -\frac{\ln(3,25)}{2,25} + \frac{2}{3,25} \cong 0,092$.

Ainsi $x_0 \in [1,5;2]$ (intervalle de longueur $\frac{1}{2}$).

c) On a $h(x) = \frac{1}{x^2}\ln(1+x^2)$, $x \neq 0$.

1) On va chercher une primitive de h en utilisant la formule d'intégration par parties:
$\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$.
On pose ici $u' = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ et $v = \ln(1+x^2)$. On a $u = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$ et $v' = \frac{1}{1+x^2}\cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}$.
Ainsi $\int \frac{1}{x^2}\ln(1+x^2)\,dx = -\frac{1}{x}\ln(1+x^2) - \int\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{2x}{1+x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\ln(1+x^2) + 2\int\frac{1}{1+x^2}\,dx$.

D'après Formulaires et Tables p.78, une primitive de $\frac{1}{1+x^2}$ est $\arctan(x)$.

On a donc $\int \frac{1}{x^2}\ln(1+x^2)\,dx = -\frac{1}{x}\ln(1+x^2) + 2\arctan(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

2) On a $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2}\ln(1+x^2)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{1}{x^2}\ln(1+x^2)\,dx = \lim_{a\to 0}\lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{1}{x^2}\ln(1+x^2)\,dx =$
$\lim_{a\to 0}\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\ln(1+x^2) + 2\arctan(x)\right]_a^b =$
$= \lim_{a\to 0}\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{b}\ln(1+b^2) + 2\arctan(b) - \left(-\frac{1}{a}\ln(1+a^2) + 2\arctan(a)\right)\right] =$
$= \lim_{a\to 0}\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{\ln(1+b^2)}{b} + 2\arctan(b) + \frac{\ln(1+a^2)}{a} - 2\arctan(a)\right]$

D'après b) 1), on a $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln(1+x^2)\right) = 0$. Ainsi $\lim_{a\to 0}\frac{\ln(1+a^2)}{a} = 0$.

De plus $\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{\ln(1+b^2)}{b}\right) = 0$ car $\ln(1+b^2)$ perd vis-à-vis de b,

$\lim_{b\to+\infty} 2\arctan(b) = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$ et $\lim_{a\to 0} 2\arctan(a) = 0$.

Par conséquent $\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2}\ln(1+x^2)\,dx$ existe et on a $\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2}\ln(1+x^2)\,dx =$
$= 0 + \pi + 0 - 0 = \pi$.

Exercice 2

On a $f(x) = (2x^2+2x-1)e^{-2x}$.

a) Domaine de définition: $D_f = \mathbb{R}$.

b) Parité: $f(-x) = (2(-x)^2+2(-x)-1)e^{-2(-x)} = (2x^2-2x-1)e^{2x} \neq \pm f(x) \Rightarrow f$ n'est ni paire ni impaire.

c) Périodicité: Comme f ne contient pas de fonctions périodiques, elle n'est pas périodique.

d) Zéros: $f(x)=0 \Rightarrow (2x^2+2x-1)e^{-2x}=0 \Rightarrow 2x^2+2x-1=0$ ($e^{-2x}>0$), ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=2, b=2$ et $c=-1$, on a $\Delta = b^2-4ac = 2^2-4\cdot2\cdot(-1) = 4+8=12 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$; les solutions sont $x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+2\sqrt{3}}{2\cdot2} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \cong 0,366$ et $x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-2\sqrt{3}}{2\cdot2} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \cong -1,366$.

Les zéros sont donc $x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \cong 0,366$ et $x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \cong -1,366$.

e) Intersection avec Oy: $x=0 \Rightarrow f(x) = -1e^{-0} = -1$.

f) Tableau de signes:

x		$-1,366$		$0,366$	
Signes de $f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

g) Asymptotes verticales, sauts, trous: Aucun puisque $D_f = \mathbb{R}$.

h) Comportement asymptotique: /

i) Asymptotes non verticales: On a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(2x^2+2x-1)e^{-2x} = "+\infty\cdot+\infty" = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(2x^2+2x-1)e^{-2x} = "+\infty\cdot 0_+" = 0$ car e^{-2x} gagne sur $2x^2+2x-1$.

Ainsi $y=0$ est une asymptote horizontale lorsque $x\to+\infty$.

j) Comportement asymptotique: D'après i), on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = "+\infty\cdot 0_+" = 0_+$.

k) Intersections avec les asymptotes non verticales: $f(x)=0 \Rightarrow x \cong 0,366$ et $x \cong -1,366$ (voir d).

l) Première dérivée: On a $f(x) = u\cdot v$ avec $u = 2x^2+2x-1$ et $v = e^{-2x}$. Ainsi $u' = 4x+2$ et $v' = -2e^{-2x}$, d'où $f'(x) = u'\cdot v + u\cdot v' =$
$= (4x+2)e^{-2x} + (2x^2+2x-1)(-2e^{-2x}) = (4x+2-4x^2-4x+2)e^{-2x} =$
$= (-4x^2+4)e^{-2x}$. Son domaine est $D_{f'} = \mathbb{R}$.

m) Points à tangente horizontale: $f'(x)=0 \Rightarrow (-4x^2+4)e^{-2x}=0 \Rightarrow -4x^2+4=0$ ($e^{-2x}>0$) $\Rightarrow 4x^2=4 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm1$.

Avec $x=1$, $f(x) = (2\cdot1^2+2\cdot1-1)e^{-2\cdot1} = 3e^{-2} \cong 0,406$.

Avec $x=-1$, $f(x) = (2\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)-1)e^{-2\cdot(-1)} = -1e^2 = -e^2 \cong -7,389$.

Ainsi les points à tangente horizontale sont $(1; 0,406)$ et $(-1; -7,389)$.

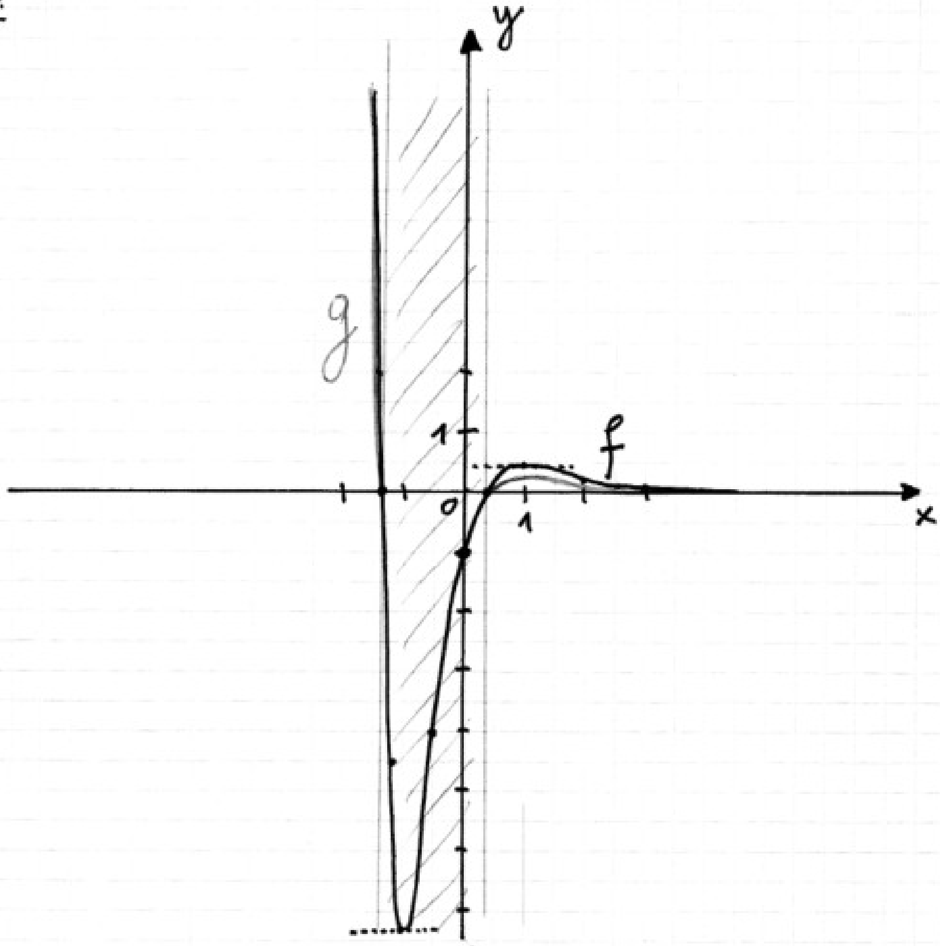
n) Pentes des tangentes aux points critiques de f': f' n'a pas de points critiques.

o) Tableau de variations:

x		-1		1	
signes de $f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
croissance ou décroissance de $f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

p) Nature des points à tangente horizontale : D'après o), $(-1; -7{,}389)$ est un minimum et $(1; 0{,}406)$ est un maximum.

q) Graphique:

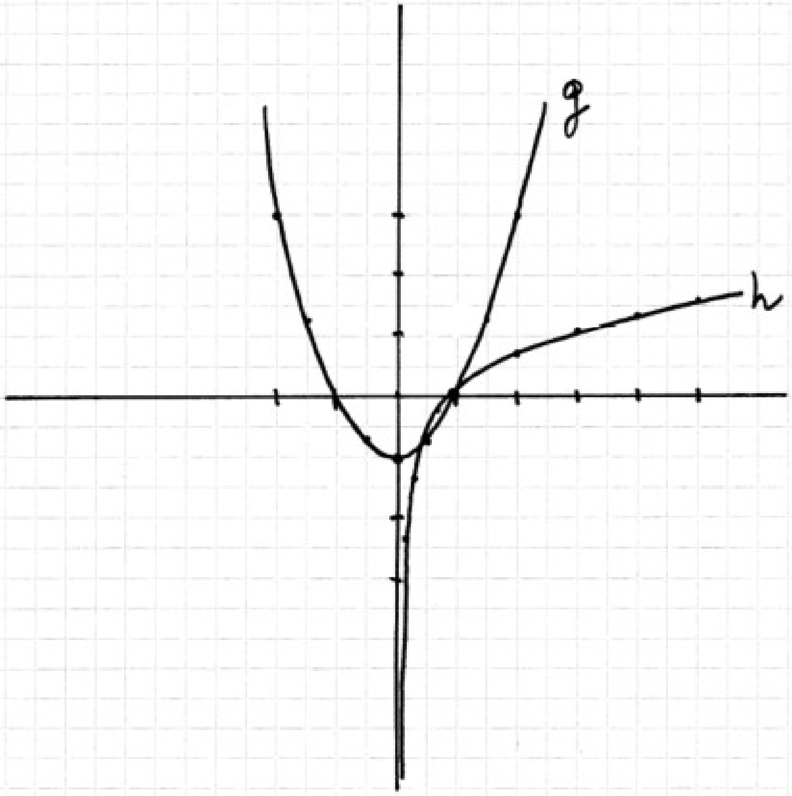


On a $g(x) = \sqrt{2x^2+2x-1} \cdot e^{-2x}$. Pour que g soit définie, il faut que $2x^2+2x-1 \geqslant 0$ et, donc, $f(x) = (2x^2+2x-1)e^{-2x} \geqslant 0$ (puisque $e^{-2x} > 0$).

On peut alors déduire du graphe de f celui de g (en bleu ci-dessous).

Exercice 3

a)



Graphiquement, on voit que $g(x)=h(x)$, c'est-à-dire $x^2-1=\ln(x)$, c'est-à-dire $x^2-1-\ln(x)=0$ admet deux solutions réelles.

En $x=2$, on a $x^2-1-\ln(x)=2^2-1-\ln(2)=3-\ln(2)\cong 2{,}307$.

En $x=0{,}75$, on a $x^2-1-\ln(x)=0{,}75^2-1-\ln(0{,}75)=-0{,}4375-\ln(0{,}75)\cong -0{,}15$.

En $x=0{,}25$, on a $x^2-1-\ln(x)=0{,}25^2-1-\ln(0{,}25)=-0{,}9375-\ln(0{,}25)\cong 0{,}449$.

Par le théorème de la valeur intermédiaire, il existe donc un $x_1\in\,]0{,}25\,;0{,}75[$ tel que $x_1^2-1-\ln(x_1)=0$ et un $x_2\in\,]0{,}75\,;2[$ tel que $x_2^2-1-\ln(x_2)=0$.

Comme, en $x=1$, on a $1^2-1-\ln(1)=1-1-0=0$, on a $x_2=1$.

On cherche une approximation de x_1 à 10^{-2} près.

On a : en $x=0{,}25$, $x^2-1-\ln(x)\cong 0{,}449$,

en $x=0{,}75$, $x^2-1-\ln(x)\cong -0{,}15$,

en $x=0{,}5$, $x^2-1-\ln(x)=0{,}5^2-1-\ln(0{,}5)\cong -0{,}057$,

en $x=0{,}4$, $x^2-1-\ln(x)=0{,}4^2-1-\ln(0{,}4)\cong 0{,}076$,

en $x=0{,}45$, $x^2-1-\ln(x)=0{,}45^2-1-\ln(0{,}45)\cong 0{,}001$,

en $x=0{,}47$, $x^2-1-\ln(x)=0{,}47^2-1-\ln(0{,}47)\cong -0{,}024$,

en $x=0{,}46$, $x^2-1-\ln(x)=0{,}46^2-1-\ln(0{,}46)\cong -0{,}012$,

en $x=0{,}455$, $x^2-1-\ln(x)=0{,}455^2-1-\ln(0{,}455)\cong -0{,}0055$.

On en déduit que $x=0{,}45$ est une approximation à 10^{-2} près de x_1, c'est-à-dire de la solution non entière de $x^2-1-\ln(x)=0$.

b) On a $f(x) = \dfrac{x^2+2+\ln(x)}{x}$.

a) <u>Domaine de définition:</u> On doit avoir $x \neq 0$ (sinon on divise par 0) et $x > 0$ (ln est défini pour $x > 0$). Ainsi $D_f = \mathbb{R}_+^* =]0\,;+\infty[$.

b) <u>Parité:</u> Comme $D_f = \mathbb{R}_+^*$, f n'est ni paire, ni impaire.

c) <u>Périodicité:</u> Comme $D_f = \mathbb{R}_+^*$, f n'est pas périodique.

d) <u>Zéros:</u> $f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2+2+\ln(x)}{x} = 0 \Rightarrow x^2+2+\ln(x) = 0$, $x > 0$.

Soit la fonction $g(x) = x^2+2+\ln(x)$. On a $g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$. Or $g'(x) > 0$ si $x > 0$.
Ainsi g est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Comme $g(0{,}1) = -0{,}293$ et $g(0{,}5) = 1{,}557$, il existe $x \in]0{,}1\,;0{,}5[$ tel que $g(x) = 0$ (autrement dit tel que $x^2+2+\ln(x) = 0$).

On a $g(0{,}3) = 0{,}886$, $g(0{,}2) = 0{,}431$, $g(0{,}15) = 0{,}125$, $g(0{,}13) = -0{,}023$, $g(0{,}135) = 0{,}0157$, $g(0{,}133) = 0{,}00028$.

On en déduit que le zéro (unique) de $f(x)$ est $x \cong 0{,}133$.

e) <u>Intersection avec Oy:</u> Comme $D_f = \mathbb{R}_+^* =]0\,;+\infty[$, il n'y a pas d'intersection avec Oy.

f) <u>Tableau de signes:</u>

x		0		0,133	
signe de $f(x)$			$-$	0	$+$

g) <u>Asymptotes verticales, sauts, trous:</u> On a $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \dfrac{x^2+2+\ln(x)}{x} = \dfrac{\text{"}-\infty\text{"}}{0_+} = -\infty$.

Ainsi $x = 0$ est une asymptote verticale ($x \underset{>}{\to} 0$).

h) <u>Comportement asymptotique:</u> D'après g), on a $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = -\infty$.

i) <u>Asymptotes non verticales:</u> Une asymptote non verticale est, si elle existe, de la forme $y = mx + h$, où $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ (on ne considère pas $x \to -\infty$ car $D_f = \mathbb{R}_+^*$) et, si m existe, $h = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{x^2+2+\ln(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+2+\ln(x)}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{\ln(x)}{x^2}\right) =$

$= 1 + 0 + 0 = 1$ (car $\ln(x)$ perd vis-à-vis de x^2). Ainsi $m = 1$.

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2+2+\ln(x)}{x} - x\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+2+\ln(x)-x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2+\ln(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{\ln(x)}{x}\right) = 0 + 0 = 0$

(car $\ln(x)$ perd vis-à-vis de x). Ainsi $h = 0$.

Par conséquent l'asymptote oblique lorsque $x \to +\infty$ est $y = x$.

j) <u>Comportement asymptotique:</u> Similairement à i), on a $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) =$
$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{\ln(x)}{x}\right) = 0_+ + 0_+ = 0_+$. Ainsi f s'approche de $y = x$ par

au-dessous.

k) Intersections avec les asymptotes non verticales: $f(x)=x \Rightarrow \dfrac{x^2+2+\ln(x)}{x}=x$
$\Rightarrow x^2+2+\ln(x)=x^2 \Rightarrow 2+\ln(x)=0 \Rightarrow \ln(x)=-2 \Rightarrow x=e^{-2}=\dfrac{1}{e^2}$.
Avec $x=e^{-2}$, on a $f(x)=x=e^{-2}$.
Ainsi f coupe son asymptote oblique $y=x$ en $(e^{-2};e^{-2})=\left(\dfrac{1}{e^2};\dfrac{1}{e^2}\right)$.

l) Première dérivée: On a $f(x)=\dfrac{u}{v}$ avec $u=x^2+2+\ln(x)$ et $v=x$. Ainsi $u'=2x+\dfrac{1}{x}$ et $v'=1$, d'où:

$$f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{(2x+\frac{1}{x})\cdot x-(x^2+2+\ln(x))\cdot 1}{x^2}=\frac{2x^2+1-x^2-2-\ln(x)}{x^2}=$$
$$=\frac{x^2-1-\ln(x)}{x^2}.$$ Son domaine est $D_{f'}=\mathbb{R}_+^*=]0;+\infty[$.

m) Points à tangente horizontale: $f'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{x^2-1-\ln(x)}{x^2}=0 \Rightarrow x^2-1-\ln(x)=0$.
D'après a), les solutions de cette équation sont $x=0{,}45$ et $x=1$.
Avec $x=0{,}45$, on a $f(x)=\dfrac{0{,}45^2+2+\ln(0{,}45)}{0{,}45}=3{,}12$.
Avec $x=1$, on a $f(x)=\dfrac{1^2+2+\ln(1)}{1}=1+2=3$.
Les points à tangente horizontale sont $(0{,}45;3{,}12)$ et $(1;3)$.

n) Pentes des tangentes aux points critiques de f': Le point critique de f' est $x=0$.
On a $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f'(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{x^2-1-\ln(x)}{x^2}=\frac{"+\infty"}{0_+}=+\infty$.

o) Tableau de variation:

x	0		0,45		1	
Signe de $f'(x)$	‖	+	0	−	0	+
Croissance ou décroissance de $f(x)$	‖	↗	max	↘	min	↗

p) Nature des points à tangente horizontale: D'après o), $(0{,}45;3{,}12)$ est un maximum et $(1;3)$ est un minimum.

q) Deuxième dérivée: $f'(x)=\dfrac{x^2-1-\ln(x)}{x^2}=\dfrac{u}{v}$ avec $u=x^2-1-\ln(x)$ et $v=x^2$.
Ainsi $u'=2x-\dfrac{1}{x}$ et $v'=2x$, d'où $f''(x)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}=\dfrac{(2x-\frac{1}{x})x^2-(x^2-1-\ln(x))2x}{(x^2)^2}=$
$$=\frac{\left((2x-\frac{1}{x})x-2(x^2-1-\ln(x))\right)x}{x^4}=\frac{(2x-\frac{1}{x})x-2(x^2-1-\ln(x))}{x^3}=$$
$$=\frac{2x^2-1-2x^2+2+2\ln(x)}{x^3}=\frac{1+2\ln(x)}{x^3}.$$ Son domaine est $D_{f''}=\mathbb{R}_+^*=]0;+\infty[$.

r) Points d'inflexion: $f''(x)=0 \Rightarrow \dfrac{1+2\ln(x)}{x^3}=0 \Rightarrow 1+2\ln(x)=0 \Rightarrow 2\ln(x)=-1$
$\Rightarrow \ln(x)=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=e^{-1/2}=\dfrac{1}{e^{1/2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}\cong 0{,}6065$

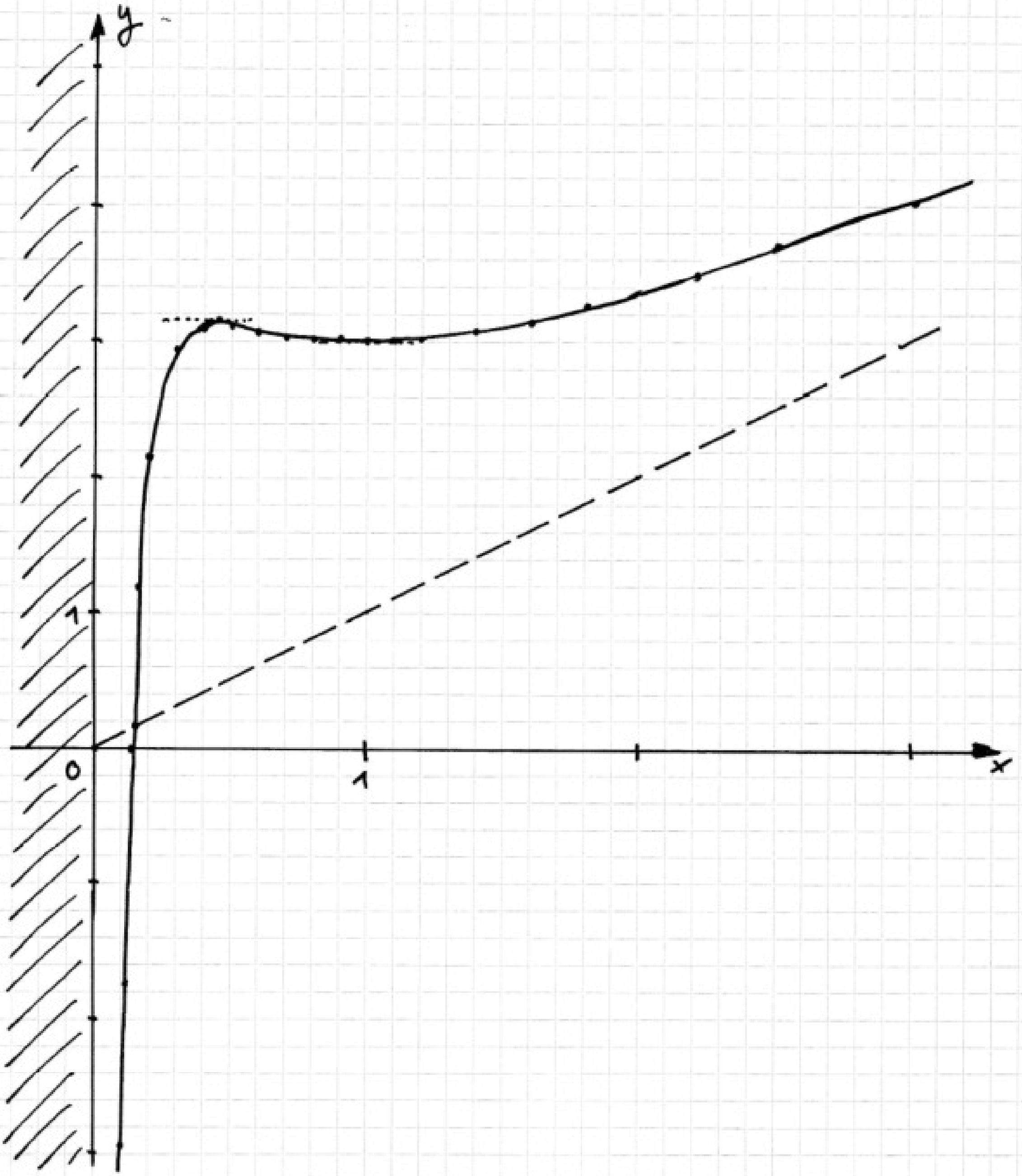
Avec $x=e^{-1/2}$, $f(x)=\dfrac{(e^{-1/2})^2+2+\ln(e^{-1/2})}{e^{-1/2}}=\dfrac{e^{-1}+2-\frac{1}{2}}{e^{-1/2}}=\sqrt{e}\left(\dfrac{1}{e}+\dfrac{3}{2}\right)\cong 3{,}08$

et $f'(x)=\dfrac{(e^{-1/2})^2-1-\ln(e^{-1/2})}{(e^{-1/2})^2}=\dfrac{e^{-1}-1-(-1/2)}{e^{-1}}=e\left(\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{2}\right)=1-\dfrac{e}{2}\cong -0{,}359$.

s) Tableau de convexité:

x	0		0,6065	
signes de $f''(x)$		$-$	0	$+$
Convexité ou concavité de $f(x)$		concave	P.I.	convexe

t) Graphique:



c) A résoudre: $xy' + y = 2x + \frac{1}{x}$. On va considérer $x \neq 0$.

Par division par x, on obtient $y' + \frac{1}{x}y = 2 + \frac{1}{x^2}$.

C'est une équation linéaire et on va la résoudre selon Formulaires et Tables, p. 84.
On commence par chercher une solution particulière y de l'équation. On pose
$y(x) = c(x)e^{-F(x)}$, où $F(x)$ est une primitive de $f = \frac{1}{x}$. On a clairement
$F(x) = \ln|x|$. Ainsi $y(x) = c(x)e^{-\ln|x|} = c(x)e^{\ln(|x|^{-1})} = c(x)\cdot|x|^{-1}$
$= c(x)\cdot\frac{1}{|x|} = \frac{c(x)}{|x|}$.

Avec $y(x)=\frac{c(x)}{|x|}=\frac{u}{v}$, où $u=c(x)$ et $v=|x|$, on a $y'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

On a $u'=c'(x)$ et, comme $v=|x|=\begin{cases} x & \text{si } x>0 \\ -x & \text{si } x<0 \end{cases}$, $v'=\begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \\ -1 & \text{si } x<0 \end{cases}=\operatorname{sgn}(x)$

($\operatorname{sgn}(x)$ signifie signe de x).

Ainsi $y'(x)=\frac{c'(x)\cdot|x|-c(x)\cdot\operatorname{sgn}(x)}{(|x|)^2}=\frac{c'(x)\cdot|x|-c(x)\operatorname{sgn}(x)}{x^2}$

Par substitution dans $y'+\frac{1}{x}y=2+\frac{1}{x^2}$, on obtient :

$$\frac{c'(x)\cdot|x|-c(x)\operatorname{sgn}(x)}{x^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{c(x)}{|x|}=2+\frac{1}{x^2}.$$

Comme $\frac{1}{x}\cdot\frac{c(x)}{|x|}=\begin{cases} \frac{1}{x}\cdot\frac{c(x)}{x} & \text{si } x>0 \\ \frac{1}{x}\cdot\frac{c(x)}{-x} & \text{si } x<0 \end{cases}=\begin{cases} \frac{c(x)}{x^2} & \text{si } x>0 \\ -\frac{c(x)}{x^2} & \text{si } x<0 \end{cases}=\frac{c(x)}{x^2}\operatorname{sgn}(x)$, on

obtient : $\frac{c'(x)\cdot|x|-c(x)\operatorname{sgn}(x)}{x^2}+\frac{c(x)}{x^2}\operatorname{sgn}(x)=2+\frac{1}{x^2}$

$$\Rightarrow \frac{c'(x)\cdot|x|-c(x)\operatorname{sgn}(x)+c(x)\operatorname{sgn}(x)}{x^2}=2+\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{c'(x)\cdot|x|}{x^2}=2+\frac{1}{x^2} \Rightarrow c'(x)\cdot|x|=2x^2+1$$

$$\Rightarrow c'(x)=\frac{2x^2+1}{|x|}=\begin{cases} \frac{2x^2+1}{x} & \text{si } x>0 \\ \frac{2x^2+1}{-x} & \text{si } x<0 \end{cases}=\begin{cases} 2x+\frac{1}{x} & \text{si } x>0 \\ -2x-\frac{1}{x} & \text{si } x<0 \end{cases}.$$

On obtient $c(x)=\begin{cases} x^2+\ln(x) & \text{si } x>0 \\ -x^2-\ln(-x) & \text{si } x<0 \end{cases}$ $\left((\ln(-x))'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}\right)$.

Ainsi $c(x)=\begin{cases} x^2+\ln(x) & \text{si } x>0 \\ -(x^2+\ln(-x)) & \text{si } x<0 \end{cases}=\operatorname{sgn}(x)\cdot(x^2+\ln|x|)$.

Comme $|x|=\begin{cases} x & \text{si } x>0 \\ -x & \text{si } x<0 \end{cases}=\operatorname{sgn}(x)\cdot x$, une solution particulière de

$y'+\frac{1}{x}y=2+\frac{1}{x^2}$ est $y(x)=\frac{c(x)}{|x|}=\frac{\operatorname{sgn}(x)\cdot(x^2+\ln|x|)}{\operatorname{sgn}(x)\cdot x}=\frac{x^2+\ln|x|}{x}$.

Cherchons maintenant la solution générale de l'équation sans second membre : $y'+\frac{1}{x}y=0$. Elle est de la forme $y=ce^{-F(x)}$ où F est une primitive de $f(x)=\frac{1}{x}$ et c une constante.

On a $F(x)=\ln|x|$ (voir ci-dessus).

Ainsi la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y=ce^{-\ln|x|}=ce^{\ln(|x|^{-1})}=c|x|^{-1}=\frac{c}{|x|}.$$

Finalement, la solution générale de $y'+\frac{1}{x}y=2+\frac{1}{x^2}$ est la somme de la solution particulière et de la solution générale sans second membre :

$$y=\frac{x^2+\ln|x|}{x}+\frac{c}{|x|}.$$

Comme $|x| = \mathrm{sgn}(x) \cdot x$ (voir ci-dessus), on obtient

$$y = \frac{x^2 + \ln|x|}{x} + \frac{c}{\mathrm{sgn}(x) \cdot x} = \frac{x^2 + \ln|x|}{x} + \frac{c \cdot \mathrm{sgn}(x)}{x} = \frac{x^2 + c \cdot \mathrm{sgn}(x) + \ln|x|}{x}.$$

Avec $x > 0$ et $c = 2$, cette solution s'écrit $y = \dfrac{x^2 + 2 + \ln(x)}{x}$, ce qui est exactement f.

Exercice 4

On considère $f(x) = x(\ln(x))^k$, $k \in \mathbb{R}$. On a $D_f = \mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$ si $k \geq 0$ et $D_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} =]0;1[\cup]1;+\infty[$ si $k < 0$ (car si $x = 1$, on a $\ln(1) = 0$ et on divise par 0).

a) On a $f(x) = u \cdot v$ avec $u = x$ et $v = (\ln(x))^k$. Ainsi $u' = 1$ et $v' = k(\ln(x))^{k-1} \cdot \frac{1}{x}$, d'où $f'(x) = u'v + uv' = 1 \cdot (\ln(x))^k + x \cdot k(\ln(x))^{k-1} \cdot \frac{1}{x}$
$= (\ln(x))^k + k(\ln(x))^{k-1} = (\ln(x))^{k-1}(\ln(x) + k)$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow (\ln(x))^{k-1}(\ln(x) + k) = 0$.

Comme $k > 1$, on a alors soit $(\ln(x))^{k-1} = 0 \Rightarrow \ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1$,
soit $\ln(x) + k = 0 \Rightarrow \ln(x) = -k \Rightarrow x = e^{-k}$.

Ainsi, si $k > 1$, f admet 2 points à tangente horizontale, dont un indépendant de k : $x = 1$ et $x = e^{-k}$.

Si $k = 1$, on a $f'(x) = \ln(x) + 1$ et $f'(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Ainsi, si $k = 1$, f admet 1 unique point à tangente horizontale : $x = \frac{1}{e}$.

b) Pour pouvoir esquisser le graphe de f pour $k = 1$, $k = 2$ et $k = 3$, on va étudier f pour ces valeurs de k.

a) Domaine de définition : $D_f = \mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$ (car $k > 0$).

b) Parité : Comme $D_f = \mathbb{R}_+^*$, f n'est ni paire ni impaire.

c) Périodicité : Comme $D_f = \mathbb{R}_+^*$, f n'est pas périodique.

d) Zéros : $f(x) = 0 \Rightarrow x(\ln(x))^k = 0 \Rightarrow (\ln(x))^k = 0$ $(x > 0) \Rightarrow \ln(x) = 0$ $(k > 0) \Rightarrow x = 1$.

e) Intersection avec Oy : Comme $x = 0 \notin D_f$, f ne coupe pas Oy.

f) Tableau de signes :

x		0		1	
Signes de $f(x)$	//////		$\pm^{(*)}$	0	+

(*) + si $k = 2$
− si $k = 1$ ou 3

g) Asymptotes verticales : On doit étudier ce qu'il se passe pour f lorsque $x \underset{>}{\to} 0$.

On a $\lim_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \underset{>}{\to} 0} x(\ln(x))^k =$ "$0_+ \cdot (-\infty)^k$", ce qui est une indéterminée.

On pose $y = \frac{1}{x}$ (ou $x = \frac{1}{y}$). Lorsque $x \underset{>}{\to} 0$, on a $y \to +\infty$ (et vice versa).

Ainsi $\lim_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{y}\left(\ln\left(\frac{1}{y}\right)\right)^k$.

Or $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln(1) - \ln(y) = -\ln(y)$.

Ainsi $\lim_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{y}(-\ln(y))^k = \lim_{y \to +\infty} \frac{(-\ln(y))^k}{y} = 0$, car $(-\ln(y))^k$ perd vis-à-vis de y.

Par conséquent, f n'a pas d'asymptote verticale.

Cependant, on a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 0$.

Si $k=1$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{y \to +\infty} \frac{-\ln(y)}{y} = \text{"}\frac{-\infty}{+\infty}\text{"} = 0_-$.

Si $k=2$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{y \to +\infty} \frac{(-\ln(y))^2}{y} = \text{"}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"} = 0_+$.

Si $k=3$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{y \to +\infty} \frac{(-\ln(y))^3}{y} = \text{"}\frac{-\infty}{+\infty}\text{"} = 0_-$.

h) Comportement asymptotique: /

i) Asymptotes non verticales: Une asymptote non verticale, si elle existe, est de la forme $y = mx + h$, où $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ (on ne considère pas $x \to -\infty$ puisque $D_f = \mathbb{R}_+^*$), et, si m existe, $h = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x(\ln(x))^k}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(x))^k = +\infty$ (puisque $k > 0$).

Ainsi il n'y a pas d'asymptote non verticale.

j) Comportement asymptotique: /

k) Intersections avec les asymptotes non verticales: /

l) Première dérivée: D'après a), on a $f'(x) = (\ln(x))^{k-1}(\ln(x)+k)$ ($k = 1, 2$ ou 3).

Son domaine est $D_{f'} = \mathbb{R}_+^*$.

m) Points à tangente horizontale: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ et $x = e^{-k}$ si $k = 2$ ou 3 et $x = \frac{1}{e}$ si $k = 1$ (voir a)).

Si $x = 1$ ($k = 2$ ou 3), on a $f(x) = 1(\ln(1))^k = 1 \cdot 0^k = 0$.

Si $x = e^{-k}$ ($k = 2$ ou 3), on a $f(x) = e^{-k}(\ln(e^{-k}))^k = e^{-k}(-k)^k$:

$k=2$: $e^{-k} = e^{-2} = 0{,}135$ et $e^{-k}(-k)^k = e^{-2}(-2)^2 = 4e^{-2} = 0{,}541$;

$k=3$: $e^{-k} = e^{-3} = 0{,}050$ et $e^{-k}(-k)^k = e^{-3}(-3)^3 = -27e^{-3} = -1{,}344$.

n) Pentes des tangentes aux points critiques de f': Le point critique de f' est $x = 0$.

Si $k=1$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (\ln(x)+1) = -\infty$.

Si $k=2$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln(x)(\ln(x)+2) = \text{"}-\infty \cdot (-\infty)\text{"} = +\infty$.

Si $k=3$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (\ln(x))^2(\ln(x)+2) = \text{"}+\infty \cdot (-\infty)\text{"} = -\infty$.

o) Tableau de variations:

$k=1$, $f(x) = x\ln(x)$, $f'(x) = \ln(x) + 1$:

x	0		$\frac{1}{e} = 0{,}368$	
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$
croissance ou décroissance de $f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$

$k=2$, $f(x)=x(\ln(x))^2$, $f'(x)=\ln(x)(\ln(x)+2)$:

x	0		0,135		1	
Signes de $f'(x)$		+	0	−	0	+
Croissance ou décroissance de $f(x)$		↗	max	↘	min	↗

$k=3$, $f(x)=x(\ln(x))^3$, $f'(x)=(\ln(x))^2(\ln(x)+3)$:

x	0		0,050		1	
Signes de $f'(x)$		−	0	+	0	+
Croissance ou décroissance de $f(x)$		↘	min	↗	P.I.	↗

p) <u>Nature des points à tangente horizontale:</u>

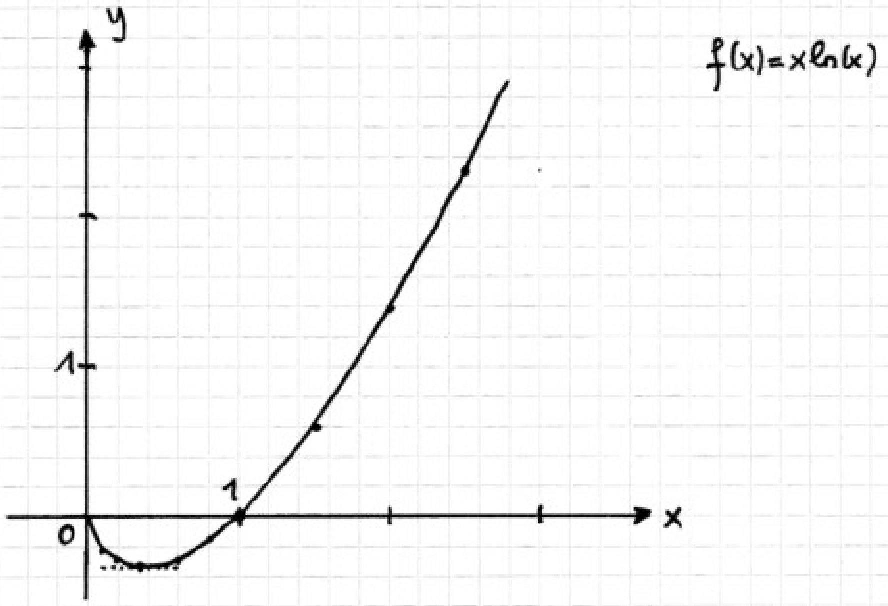
Si $k=1$, $(0{,}368; -0{,}368)$ est un minimum.

Si $k=2$, $(0{,}135; 0{,}541)$ est un maximum et $(1;0)$ est un minimum.

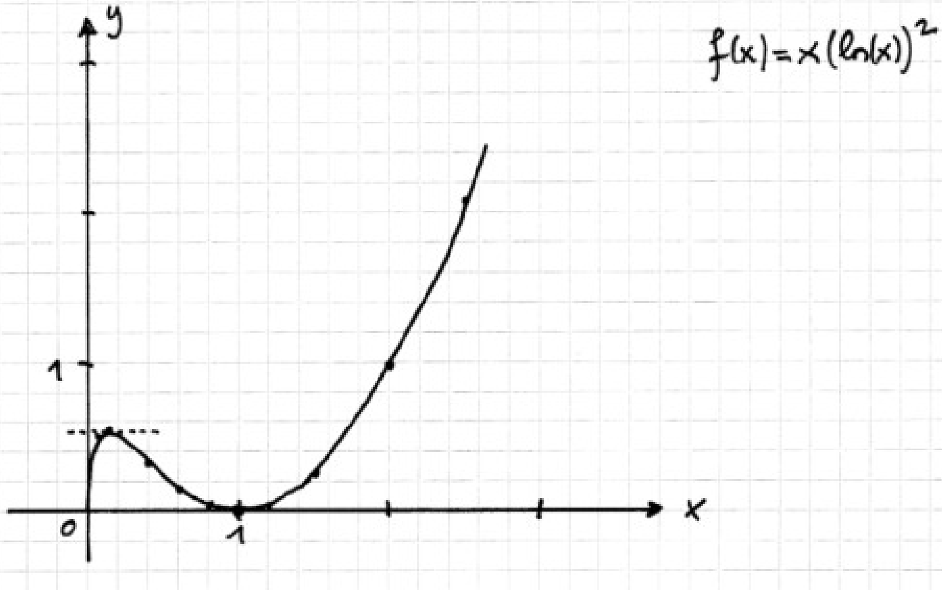
Si $k=3$, $(0{,}050; -1{,}344)$ est un minimum et $(1;0)$ est un point d'inflexion (palier).

q) <u>Graphique:</u>

$k=1$:

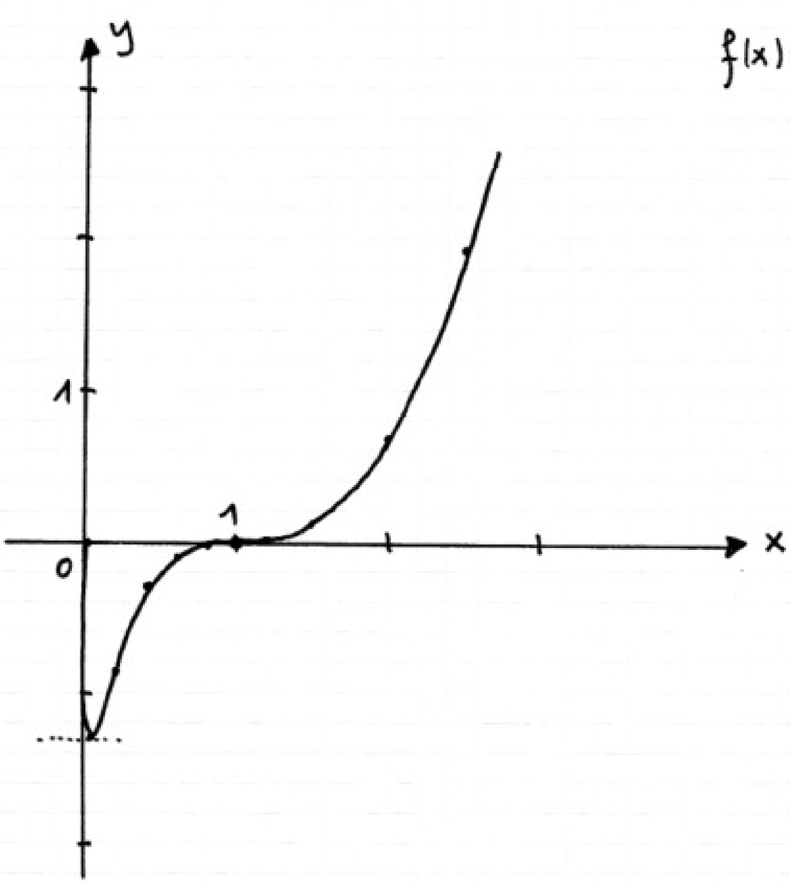


$k=2$:



$k=3$:

$f(x) = x(\ln(x))^3$



c) On doit calculer $I_1 = \int_0^1 x \cdot \ln(x)\,dx$

Commençons par chercher une primitive de $x \cdot \ln(x)$.

On va utiliser la formule d'intégration par parties : $\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$.

On pose $u' = x$ et $v = \ln(x)$. On a alors $u = \frac{x^2}{2}$ et $v' = \frac{1}{x}$.

Une primitive de $x \cdot \ln(x)$ est alors donnée par

$$\int x \cdot \ln(x)\,dx = \int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\int x\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right).$$

On a alors $\int_0^1 x \cdot \ln(x)\,dx = \lim_{\substack{a \to 0 \\ >}} \int_a^1 x \cdot \ln(x)\,dx = \lim_{\substack{a \to 0 \\ >}} \left[\frac{x^2}{2}\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right)\right]_{x=a}^{x=1} =$

$$= \lim_{\substack{a \to 0 \\ >}} \left(\frac{1^2}{2}\left(\ln(1) - \frac{1}{2}\right) - \frac{a^2}{2}\left(\ln(a) - \frac{1}{2}\right)\right) = \lim_{\substack{a \to 0 \\ >}} \left(\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{a^2}{2}\ln(a) + \frac{a^2}{4}\right) =$$

$b = \frac{1}{a}$

$$= \lim_{\substack{a \to 0 \\ >}} \left(-\frac{1}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\ln(a)\right) = -\frac{1}{4} + \frac{0^2}{2} - \frac{1}{2}\lim_{\substack{a \to 0 \\ >}} a^2\ln(a) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lim_{\substack{a \to 0 \\ >}} a^2\ln(a) =$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lim_{b \to +\infty}\left(\frac{1}{b}\right)^2\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lim_{b \to +\infty}\frac{1}{b^2}\left(\ln(1) - \ln(b)\right) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lim_{b \to +\infty}\frac{1}{b^2}\left(-\ln(b)\right) =$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\lim_{b \to +\infty}\frac{\ln(b)}{b^2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0 = -\frac{1}{4}$$ (puisque $\ln(b)$ perd vis-à-vis de b^2).

Ainsi $\int_0^1 x \cdot \ln(x)\,dx = -\frac{1}{4}$ (comme $\ln(x) < 0$ si $x \in]0;1[$, c'est normal qu'on obtienne un nombre négatif).

On a maintenant $I_k = \int_0^1 x \cdot (\ln(x))^k\,dx$, avec $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$.

Cherchons une primitive de $x\cdot(\ln(x))^k$.

On va utiliser la formule d'intégration par parties: $\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$.

On pose $u' = x$ et $v = (\ln(x))^k$. On a alors $u = \frac{x^2}{2}$ et $v' = k(\ln(x))^{k-1}\cdot\frac{1}{x}$.

Une primitive de $x\cdot(\ln(x))^k$ est alors donnée par

$$\int x\cdot(\ln(x))^k dx = \int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx = \frac{x^2}{2}(\ln(x))^k - \int \frac{x^2}{2}\cdot k(\ln(x))^{k-1}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$
$$= \frac{x^2}{2}(\ln(x))^k - \frac{k}{2}\int x(\ln(x))^{k-1}dx.$$

On a alors $\int_0^1 x\cdot(\ln(x))^k dx = \lim_{\substack{a\to 0\\ >}} \int_a^1 x\cdot(\ln(x))^k dx =$

$$= \lim_{\substack{a\to 0\\ >}} \left[\frac{x^2}{2}(\ln(x))^k - \frac{k}{2}\int x(\ln(x))^{k-1}dx\right]_{x=a}^{x=1} =$$
$$= \lim_{\substack{a\to 0\\ >}} \left[\frac{1^2}{2}(\ln(1))^k - \frac{a^2}{2}(\ln(a))^k - \frac{k}{2}\int_a^1 x(\ln(x))^{k-1}dx\right] =$$
$$= \lim_{\substack{a\to 0\\ >}} \left[\frac{1}{2}\cdot 0^k - \frac{a^2}{2}(\ln(a))^k - \frac{k}{2}\int_a^1 x(\ln(x))^{k-1}dx\right] =$$
$$= \lim_{\substack{a\to 0\\ >}} \left[-\frac{a^2}{2}(\ln(a))^k\right] - \lim_{\substack{a\to 0\\ >}}\left[\frac{k}{2}\int_a^1 x(\ln(x))^{k-1}dx\right] =$$
$$= -\frac{1}{2}\lim_{\substack{a\to 0\\ >}} a^2(\ln(a))^k - \frac{k}{2}\int_0^1 x(\ln(x))^{k-1}dx.$$

Or, on a $\lim_{\substack{a\to 0\\ >}} a^2(\ln(a))^k \underset{b=\frac{1}{a}}{=} \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b}\right)^2\left(\ln\left(\frac{1}{b}\right)\right)^k = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{b^2}(\ln(1)-\ln(b))^k =$

$= \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{b^2}(-\ln(b))^k = (-1)^k\lim_{b\to+\infty}\frac{(\ln(b))^k}{b^2} = 0$ car $(\ln(b))^k$ perd vis-à-vis de b^2.

On obtient ainsi $\int_0^1 x\cdot(\ln(x))^k dx = -\frac{k}{2}\int_0^1 x(\ln(x))^{k-1}dx$, ce qui signifie

$$I_k = -\frac{k}{2}\cdot I_{k-1}.$$

Comme $I_1 = \int_0^1 x\cdot\ln(x)\,dx = -\frac{1}{4}$ (voir ci-dessous), on a $I_2 = -\frac{2}{2}I_1 = -\frac{2}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$,
$I_3 = -\frac{3}{2}\cdot I_2 = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4} = -\frac{3}{8}$, $I_4 = -\frac{4}{2}\cdot I_3 = -\frac{4}{2}\cdot\left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{3}{4}$, etc.

Ainsi $I_k = -\frac{k}{2}I_{k-1} = -\frac{k}{2}\cdot\left(-\frac{k-1}{2}\right)I_{k-2} = -\frac{k}{2}\cdot\left(-\frac{k-1}{2}\right)\left(-\frac{k-2}{2}\right)I_{k-3} = \ldots =$
$$= -\frac{k}{2}\left(-\frac{k-1}{2}\right)\left(-\frac{k-2}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{2}{2}\right)I_1 = -\frac{k}{2}\cdot\left(-\frac{k-1}{2}\right)\left(-\frac{k-2}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{2}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) =$$
$$= (-1)^k\frac{k!}{2^{k-1}\cdot 4} = (-1)^k\cdot\frac{k!}{2^{k+1}}.$$

Montrons cette formule par induction (récurrence).

Pour $k=1$, on a $I_1 = (-1)^1\cdot\frac{1!}{2^{1+1}} = -\frac{1}{4} \longrightarrow$ OK.

Supposons la relation vraie pour k et montrons-la pour $k+1$.

On a $I_{k+1} = -\frac{k+1}{2}I_k$. Par hypothèse de récurrence, on a $I_k = (-1)^k\cdot\frac{k!}{2^{k+1}}$. Ainsi
$I_{k+1} = -\frac{k+1}{2}(-1)^k\cdot\frac{k!}{2^{k+1}} = -(-1)^k\frac{(k+1)k!}{2\cdot 2^{k+1}} = (-1)^{k+1}\frac{(k+1)!}{2^{(k+1)+1}} \longrightarrow$ OK.

On a donc bien $I_k = (-1)^k\cdot\frac{k!}{2^{k+1}}$.

Exercice 5

On a $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x+\sqrt{4x^2-1} & \text{si } x>\frac{1}{2} \text{ ou } x<-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x+\sqrt{1-4x^2} & \text{si } -\frac{1}{2}\leq x\leq \frac{1}{2}. \end{cases}$

a) On a $\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{1}{2}\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{1}{2}\\ <}}\left(\frac{1}{2}x+\sqrt{4x^2-1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1}=-\frac{1}{4}+\sqrt{4\cdot\frac{1}{4}-1}=$

$=-\frac{1}{4}+\sqrt{1-1}=-\frac{1}{4}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{1}{2}\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{1}{2}\\ >}}\left(\frac{1}{2}x+\sqrt{1-4x^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{1-4\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=$

$=-\frac{1}{4}+\sqrt{1-4\cdot\frac{1}{4}}=-\frac{1}{4}+\sqrt{1-1}=-\frac{1}{4}.$

De plus $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{1}{2}\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to \frac{1}{2}\\ <}}\left(\frac{1}{2}x+\sqrt{1-4x^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{1-4\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{4}+\sqrt{1-4\cdot\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}+\sqrt{1-1}=\frac{1}{4}$

et $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{1}{2}\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to \frac{1}{2}\\ >}}\left(\frac{1}{2}x+\sqrt{4x^2-1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{4\left(\frac{1}{2}\right)^2-1}=\frac{1}{4}+\sqrt{4\cdot\frac{1}{4}-1}=\frac{1}{4}+\sqrt{1-1}=\frac{1}{4}.$

Ainsi f est continue en $x_0=\frac{1}{2}$ et $x_1=-\frac{1}{2}$ et on a $f(x_0)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$ et $f(x_1)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}.$

b) Comme le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$ ($4x^2-1>0$ si $x>\frac{1}{2}$ ou $x<-\frac{1}{2}$ et $1-4x^2>0$ si $-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}$), f n'a pas d'asymptote verticale.

Cherchons maintenant si f a une ou des asymptotes non verticales.

Lorsque $x\to\pm\infty$, on a $f(x)=\frac{1}{2}x+\sqrt{4x^2-1}$.

Une asymptote non verticale est de la forme $y=mx+h$ où $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ et, là où m existe, $h=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)$.

On a $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{2}x+\sqrt{4x^2-1}}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{4x^2-1}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{4x^2-1}}{\mathrm{sgn}(x)\cdot|x|}\right)$, où $\mathrm{sgn}(x)$ est le signe de x ($\mathrm{sgn}(x)=+1$ si $x>0$ et $\mathrm{sgn}(x)=-1$ si $x<0$).

Ainsi $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2}+\mathrm{sgn}(x)\cdot\frac{\sqrt{4x^2-1}}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2}+\mathrm{sgn}(x)\sqrt{\frac{4x^2-1}{x^2}}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2}+\mathrm{sgn}(x)\cdot\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}\right)$. On sépare $x\to+\infty$ et $x\to-\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\mathrm{sgn}(x)\cdot\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{4}=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}+\mathrm{sgn}(x)\cdot\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}-\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}\right)=\frac{1}{2}-\sqrt{4}=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}.$

Ainsi, si $x\to+\infty$, on a $m=\frac{5}{2}$ et, si $x\to-\infty$, on a $m=-\frac{3}{2}$.

Si $x\to+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x+\sqrt{4x^2-1}-\frac{5}{2}x\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-1}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{4x^2-1}-2x)(\sqrt{4x^2-1}+2x)}{\sqrt{4x^2-1}+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{4x^2-1})^2-(2x)^2}{\sqrt{4x^2-1}+2x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2-1-4x^2}{\sqrt{4x^2-1}+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{4x^2-1}+2x}=\frac{"-1"}{+\infty}=0_-.$

Si $x \to -\infty$, on a $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}x + \sqrt{4x^2-1} + \frac{3}{2}x\right) =$

$= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-1}+2x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{4x^2-1}+2x)(\sqrt{4x^2-1}-2x)}{\sqrt{4x^2-1}-2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{4x^2-1})^2-(2x)^2}{\sqrt{4x^2-1}-2x} =$

$= \lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-1-4x^2}{\sqrt{4x^2-1}-2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{4x^2-1}-2x} = \text{"}\frac{-1}{+\infty}\text{"} = 0_-$.

Ainsi, si $x\to+\infty$, on a $m=\frac{5}{2}$ et $h=0$ et, si $x\to-\infty$, on a $m=-\frac{3}{2}$ et $h=0$.

Les asymptotes non verticales de f sont donc les asymptotes obliques suivantes:
si $x\to+\infty$, $y=\frac{5}{2}x$, et, si $x\to-\infty$, $y=-\frac{3}{2}x$.

Comme $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{5}{2}x\right)=0_-$ et $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+\frac{3}{2}x\right)=0_-$ (voir ci-dessus), on en conclut que f s'approche de ses 2 asymptotes obliques par en-dessous.

c) Si $x>\frac{1}{2}$ ou $x<-\frac{1}{2}$, $f(x)=\frac{1}{2}x+\sqrt{4x^2-1} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{4x^2-1}}\cdot 8x =$
$= \frac{1}{2}+\frac{4x}{\sqrt{4x^2-1}}$.

Si $-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}$, $f(x)=\frac{1}{2}x+\sqrt{1-4x^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{1-4x^2}}\cdot(-8x) =$
$= \frac{1}{2}-\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$.

$f'(x)$ n'est pas définie si $1-4x^2=0$, c'est-à-dire pour $x=\pm\frac{1}{2}$.
Son domaine est donc $D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$.
On a donc:

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}+\frac{4x}{\sqrt{4x^2-1}} & \text{si } x>\frac{1}{2} \text{ ou } x<-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}-\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}} & \text{si } -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Les points à tangente horizontale sont donc les $x\in D_{f'}$ tels que $f'(x)=0$.

Si $x>\frac{1}{2}$ ou $x<-\frac{1}{2}$, $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{4x}{\sqrt{4x^2-1}}=0 \Rightarrow \frac{4x}{\sqrt{4x^2-1}}=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \left(\frac{4x}{\sqrt{4x^2-1}}\right)^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{16x^2}{4x^2-1}=\frac{1}{4} \Rightarrow 16x^2=\frac{1}{4}(4x^2-1) \Rightarrow 16x^2=x^2-\frac{1}{4}$

$\Rightarrow 15x^2=-\frac{1}{4}$, ce qui est impossible car $15x^2\geqslant 0$ pour tout x.

Si $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$, $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{2}-\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}=0 \Rightarrow \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}=\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

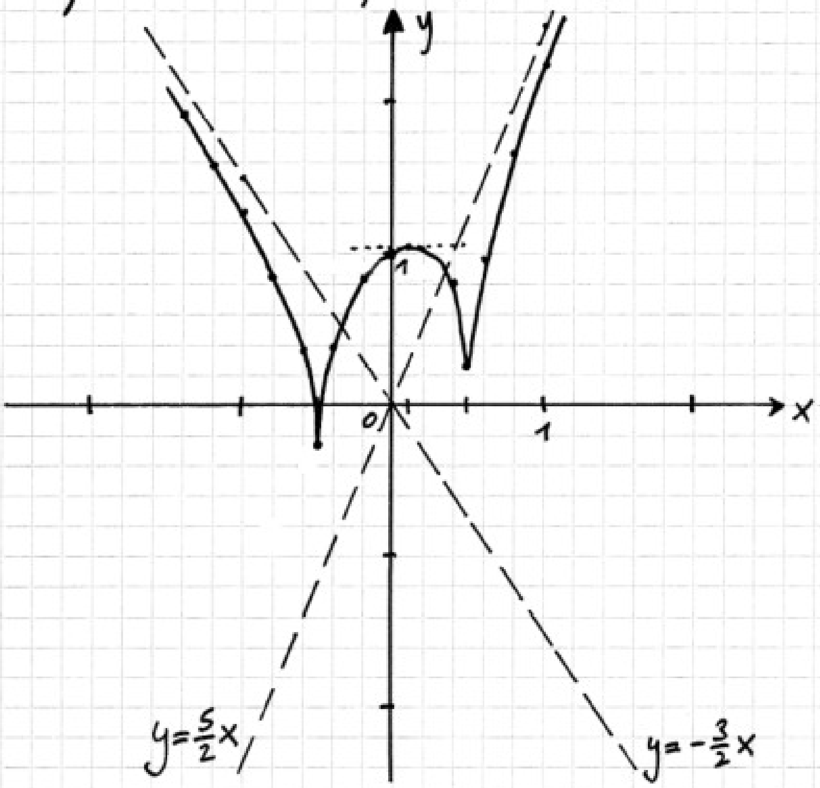
$\Rightarrow \frac{16x^2}{1-4x^2}=\frac{1}{4} \Rightarrow 16x^2=\frac{1}{4}(1-4x^2) \Rightarrow 16x^2=\frac{1}{4}-x^2 \Rightarrow 17x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x^2=\frac{1}{68} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{68}}$

$\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{68}}=\pm\frac{1}{2\sqrt{17}}=\pm\frac{\sqrt{17}}{2\cdot 17}=\pm\frac{\sqrt{17}}{34}$.

On doit vérifier la validité de ces solutions:
avec $x=\frac{\sqrt{17}}{34}$, $\frac{1}{2}-\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}=0$; avec $x=-\frac{\sqrt{17}}{34}$, $\frac{1}{2}-\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}=1$;
en outre, on a $-\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{17}}{34}<\frac{1}{2}$.
Ainsi l'unique solution de $f'(x)=0$ est $x=\frac{\sqrt{17}}{34}\cong 0{,}12$
Avec $x=\frac{\sqrt{17}}{34}$, on a $f(x)=\frac{1}{2}x+\sqrt{1-4x^2}\cong 1{,}03$

L'unique point à tangente horizontale de f est $(0{,}12\,;\,1{,}03)$.

d)



e) On peut écrire $f(x)=\frac{1}{2}\times\sqrt{|4x^2-1|}$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 6

a) On doit résoudre $(x+1)y'+y=4x+3$.

Par division par $(x+1)$, on obtient $y'+\frac{1}{x+1}y=\frac{4x+3}{x+1}$, ce qui est une équation linéaire.

On va la résoudre en utilisant la technique de Formulaires et Tables, p. 84.

On commence par rechercher la solution générale de l'équation sans second membre:

$y'+\frac{1}{x+1}y=0$.

On a $y'+\frac{1}{x+1}y=0 \Rightarrow y'=-\frac{1}{x+1}y \Rightarrow \frac{y'}{y}=-\frac{1}{x+1} \Rightarrow \int\frac{1}{y}dy=\int\left(-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$\Rightarrow \ln|y|=-\ln|x+1|+c \Rightarrow \ln|y|=\ln\frac{1}{|x+1|}+\ln k$ avec $c=\ln k$

$\Rightarrow \ln|y|=\ln\frac{k}{|x+1|} \Rightarrow |y|=\frac{k}{|x+1|}$, $k\in\mathbb{R}$.

Comme k peut prendre des valeurs positives ou négatives, on peut écrire que la solution générale de l'équation sans second membre est $y=\frac{k}{x+1}$, $k\in\mathbb{R}$.

Cherchons maintenant une solution particulière de l'équation $y'+\frac{1}{x+1}y=\frac{4x+3}{x+1}$.

On pose $y=c(x)e^{-F(x)}$, où F est une primitive de $f(x)=\frac{1}{x+1}$.

On a $F(x)=\ln|x+1|$. Ainsi on peut écrire $y=c(x)e^{-\ln|x+1|}=c(x)e^{\ln\frac{1}{|x+1|}}$

$=c(x)\frac{1}{|x+1|}$. Comme $c(x)$ est une fonction à déterminer, on peut écrire plus simplement $y=\frac{c(x)}{x+1}$.

On a $y=\frac{u}{v}$ avec $u=c(x)$ et $v=x+1$. Ainsi $u'=c'(x)$ et $v'=1$, d'où,

$$y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{c'(x)\cdot(x+1)-c(x)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{c'(x)(x+1)-c(x)}{(x+1)^2}.$$

Par substitution dans $y'+\frac{1}{x+1}y=\frac{4x+3}{x+1}$, on obtient:

$$\frac{c'(x)(x+1)-c(x)}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}\cdot\frac{c(x)}{x+1}=\frac{4x+3}{x+1} \Rightarrow \frac{c'(x)(x+1)-c(x)+c(x)}{(x+1)^2}=\frac{4x+3}{x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{c'(x)(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{4x+3}{x+1} \Rightarrow \frac{c'(x)}{x+1}=\frac{4x+3}{x+1} \Rightarrow c'(x)=4x+3 \Rightarrow c(x)=2x^2+3x$$

(on ne met pas de constante puisqu'on cherche une solution particulière).

La solution particulière que l'on trouve est donc $y=\frac{2x^2+3x}{x+1}$.

La solution générale de l'équation $(x+1)y'+y=4x+3$ est donc $y=\frac{k}{x+1}+\frac{2x^2+3x}{x+1}=$

$=\frac{2x^2+3x+k}{x+1}$, $k\in\mathbb{R}$.

On va déterminer k pour que $y'(0)=12$.

On a $y=\frac{u}{v}$ avec $u=2x^2+3x+k$ et $v=x+1$. Ainsi $u'=4x+3$ et $v'=1$, d'où

$$y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{(4x+3)(x+1)-(2x^2+3x+k)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{4x^2+4x+3x+3-2x^2-3x-k}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{2x^2+4x+3-k}{(x+1)^2}.$$

Ainsi $y'(0)=12 \Rightarrow \frac{3-k}{1^3}=12 \Rightarrow 3-k=12 \Rightarrow -k=9 \Rightarrow k=-9$

La solution particulière avec $y'(0)=12$ est donc $y=\frac{2x^2+3x-9}{x+1}$.

b) On a $f(x)=\frac{2x^2+3x-9}{x+1}$.

a) Domaine de définition: On doit avoir $x+1\neq 0 \Rightarrow x\neq -1$. Ainsi $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

b) Parité: $f(-x)=\frac{2(-x)^2+3(-x)-9}{-x+1}=\frac{2x^2-3x-9}{-x+1}\neq \pm f(x) \Rightarrow f$ n'est ni paire, ni impaire.

c) Périodicité: f ne contient pas de fonctions périodiques, donc elle n'est pas périodique.

d) Zéros: $f(x)=0 \Rightarrow \frac{2x^2+3x-9}{x-1}=0 \Rightarrow 2x^2+3x-9=0$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=2$, $b=3$ et $c=-9$; on a $\Delta=b^2-4ac=$ $=3^2-4.2.(-9)=9+72=81$ et $\sqrt{\Delta}=9$; les solutions sont $x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3+9}{2.2}=\frac{6}{3}=\frac{3}{2}$ et $x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3-9}{2.2}=\frac{-12}{4}=-3$.

e) Intersection avec Oy: $x=0 \Rightarrow f(x)=\frac{-9}{1}=-9$.

f) Tableau de signes:

x		-3		-1		$3/2$	
Signe de $f(x)$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$

g) Asymptote verticale: $x=-1$ est une asymptote verticale.

h) Comportement asymptotique: On a $\lim_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to -1\\ <}}\frac{2x^2+3x-9}{x+1}=\text{"}\frac{-10}{0_-}\text{"}=+\infty$ et $\lim_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to -1\\ >}}\frac{2x^2+3x-9}{x+1}=\text{"}\frac{-10}{0_+}\text{"}=-\infty$.

i) Asymptotes non verticales: Comme f est une fonction rationnelle $\left(=\frac{\text{polynôme}}{\text{polynôme}}\right)$, on effectue la division euclidienne:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2+3x-9 & x+1 \\ \hline -(2x^2+2x) & 2x+1 \\ x-9 & \\ -(x+1) & \\ -10 & \end{array}$$

Ainsi $y=2x+1$ est l'asymptote oblique de f et on a $f(x)=2x+1+\frac{-10}{x+1}$.

j) Comportement asymptotique: On a $\lim_{x\to-\infty}\frac{-10}{x+1}=0_+$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{-10}{x+1}=0_-$. Ainsi f s'approche de $y=2x+1$ par au-dessus à $-\infty$ et par au-dessous à $+\infty$.

k) Intersections avec l'asymptote non verticale: $f(x)=2x+1 \Rightarrow \frac{2x^2+3x-9}{x+1}=2x+1$ $\Rightarrow 2x^2+3x-9=(2x+1)(x+1) \Rightarrow 2x^2+3x-9=2x^2+3x+1 \Rightarrow -9=1$ impossible $\Rightarrow$ pas d'intersection.

l) Première dérivée: On a $f(x)=\frac{u}{v}$ avec $u=2x^2+3x-9$ et $v=x+1$. Ainsi $u'=4x+3$ et $v'=1$, d'où $f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{(4x+3)(x+1)-(2x^2+3x-9).1}{(x+1)^2}=$ $=\frac{4x^2+4x+3x+1-2x^2-3x+9}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+4x+10}{(x+1)^2}$. Son domaine est $D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

m) Points à tangente horizontale: $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{2x^2+4x+10}{(x+1)^2}=0 \Rightarrow 2x^2+4x+10=0$ $\Rightarrow x^2+2x+5=0$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=2$ et $c=5$; on a $\Delta=b^2-4ac=2^2-4.1.5=4-20=-16<0$; ainsi il n'y a pas de solution et, donc, aucun point à tangente horizontale.

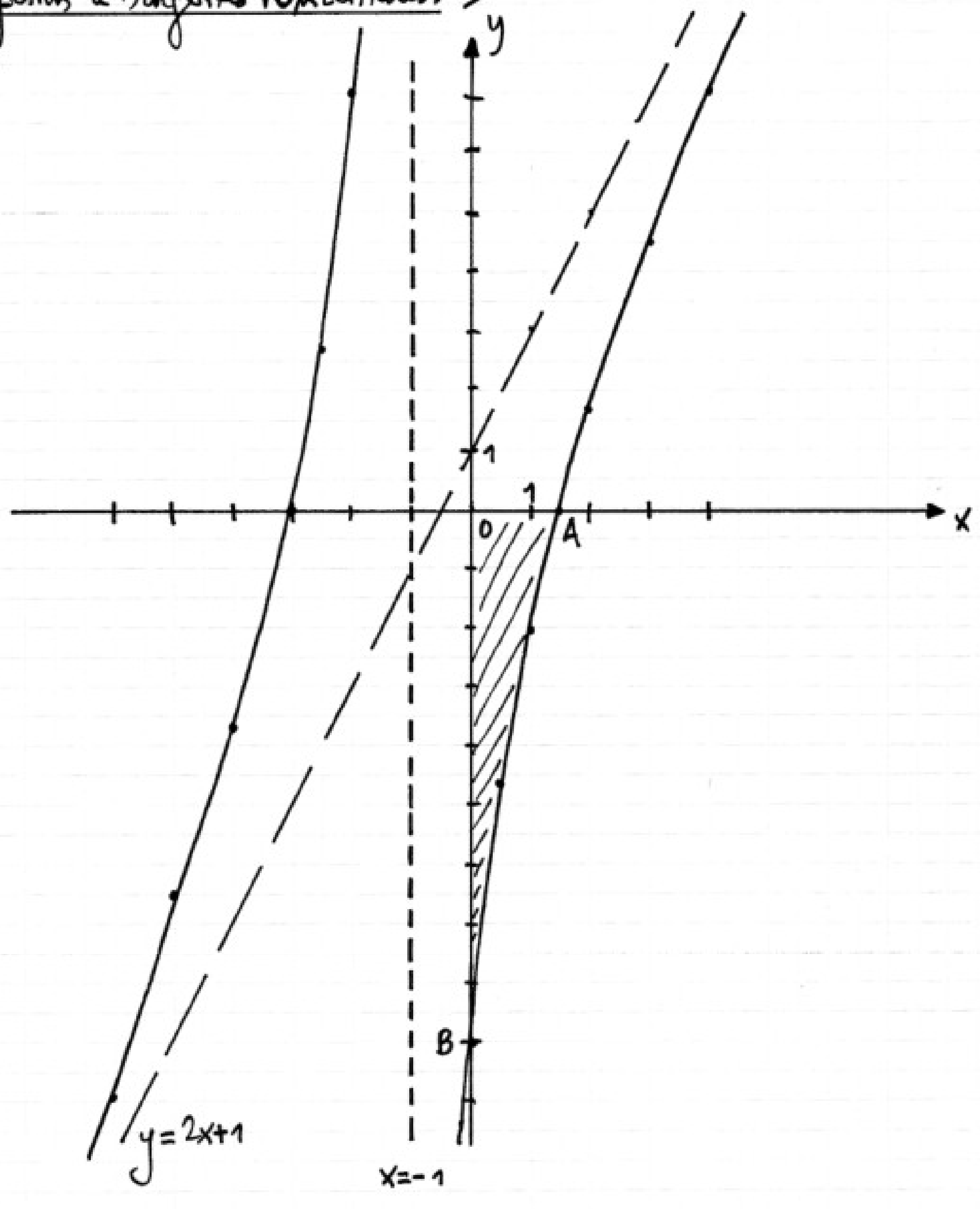
n) Pentes des tangentes aux points critiques de f' : On a $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \dfrac{2x^2+4x+10}{(x+1)^2} =$
$= \dfrac{"4+8"}{0+} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{2x^2+4x+10}{(x+1)^2} = \dfrac{"4+8"}{0+} = +\infty$.

o) Tableau de variations :

x		-1	
signes de $f'(x)$	$+$	////	$+$
croissance ou décroissance de $f(x)$	$\nearrow$	////	$\nearrow$

p) Nature des points à tangentes horizontales : /

q) Graphique :



c) Voir ci-dessous pour le positionnement de A et B. On a $A\left(\frac{3}{2} ; 0\right)$ et $B(0 ; -9)$.
Selon Formulaire et Tables p.82, le volume engendré est donné par $\pi \int_0^{3/2} (f(x))^2 \, dx$.

On a $(f(x))^2 = \left(\dfrac{2x^2+3x-9}{x+1}\right)^2 = \dfrac{(2x^2+3x-9)^2}{(x+1)^2} = \dfrac{4x^4+9x^2+81+12x^3-36x^2-54x}{x^2+2x+1} =$
$= \dfrac{4x^4+12x^3-27x^2-54x+81}{x^2+2x+1}$. Effectuons la division euclidienne :

$$
\begin{array}{r|l}
4x^4+12x^3-27x^2-54x+81 & x^2+2x+1 \\ \hline
-(4x^4+8x^3+4x^2) & 4x^2+4x-39 \\ \hline
4x^3-31x^2-54x+81 & \\
-(4x^3+8x^2+4x) & \\ \hline
-39x^2-58x+81 & \\
-(-39x^2-78x-39) & \\ \hline
20x+120 &
\end{array}
$$

On obtient ainsi $(f(x))^2 = 4x^2+4x-39+\dfrac{20x+120}{x^2+2x+1} = 4x^2+4x-39+20\cdot\dfrac{x+6}{(x+1)^2}$.

On va chercher A et B tels que $\dfrac{x+6}{(x+1)^2} = \dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}$.

On a $\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2} = \dfrac{A(x+1)+B}{(x+1)^2} = \dfrac{Ax+A+B}{(x+1)^2}$. On doit donc avoir $\dfrac{x+6}{(x+1)^2} = \dfrac{Ax+A+B}{(x+1)^2}$.

Par identification des termes, on obtient $A=1$ et $A+B=6$, d'où $A=5$.

Ainsi $\dfrac{x+6}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{5}{(x+1)2}$.

On obtient donc $(f(x))^2 = 4x^2+4x-39+20\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{5}{(x+1)^2}\right) = 4x^2+4x-39+\dfrac{20}{x+1}+\dfrac{100}{(x+1)^2}$.

Une primitive F de $(f(x))^2$ est $\dfrac{4x^3}{3}+2x^2-39x+20\ln|x+1|-100\cdot\dfrac{1}{x+1}$.

On a $F\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3+2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2-39\cdot\frac{3}{2}+20\ln\left|\frac{3}{2}+1\right|-\dfrac{100}{\frac{3}{2}+1} =$

$= \frac{4}{3}\cdot\frac{27}{8}+2\cdot\frac{9}{4}-\frac{117}{2}+20\ln\left(\frac{5}{2}\right)-100\cdot\frac{2}{5} = \frac{9}{2}+\frac{9}{2}-\frac{117}{2}+20\ln\left(\frac{5}{2}\right)-40 = 20\ln\left(\frac{5}{2}\right)-\frac{179}{2}$

et $F(0) = \dfrac{4.0^3}{3}+2\cdot 0^2-39.0+20\ln|0+1|-100\cdot\dfrac{1}{0+1} = -100$.

Par conséquent $\displaystyle\int_0^{3/2}(f(x))^2dx = F\left(\tfrac{3}{2}\right)-F(0) = 20\ln\left(\tfrac{5}{2}\right)-\tfrac{179}{2}-(-100) = 20\ln\left(\tfrac{5}{2}\right)-\tfrac{179}{2}+200 =$

$= 20\ln\left(\frac{5}{2}\right)+\frac{21}{2} \cong 28{,}826$.

Ainsi le volume engendré vaut $\pi\left(20\ln\left(\frac{5}{2}\right)+\frac{21}{2}\right) \cong 90{,}559$.

d) Comme $x=1$ doit être une asymptote verticale, le dénominateur de la fonction rationnelle doit être $x-1$ (degré 1).

Comme $y=x+4$ doit être une asymptote oblique, le numérateur doit être du 2^e degré.
Ainsi f doit être de la forme $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{x-1}$ et le quotient de la division euclidienne de ax^2+bx+c par $x-1$ doit être $x+4$ (asymptote oblique).
On a:

$$
\begin{array}{l|l}
ax^2+bx+c & x-1 \\ \cline{2-2}
-(ax^2-ax) & ax+a+b \\ \cline{1-1}
(a+b)x+c & \\
-((a+b)x-(a+b)) & \\ \cline{1-1}
a+b+c &
\end{array}
$$

Ainsi, on doit avoir $ax+a+b = x+4$, d'où $a=1$ et $a+b=4$, c'est-à-dire $b=3$.

Par conséquent, on a $f(x) = \frac{x^2+3x+c}{x-1}$.

Pour trouver c, on va utiliser le fait que f a un extremum (minimum ou maximum) en $x=4$.

On doit donc avoir $f'(4)=0$.

Comme $f(x) = \frac{u}{v}$ avec $u = x^2+3x+c$ et $v = x-1$, on a $u' = 2x+3$ et $v=1$, d'où

$$f'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{(2x+3)(x-1)-(x^2+3x+c)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x+3x-3-x^2-3x-c}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3-c}{(x-1)^2}.$$

$$f'(4)=0 \Rightarrow \frac{4^2-2\cdot 4-3-c}{(4-1)^2}=0 \Rightarrow 16-8-3-c=0 \Rightarrow 5-c=0 \Rightarrow c=5.$$

Par conséquent, une fonction f satisfaisant aux 3 conditions est $f(x) = \frac{x^2+3x+5}{x-1}$.

Exercice 7

a) L'équation $u^2-6u+1=0$ est une équation du 2e degré de la forme $au^2+bu+c=0$ avec $a=1$, $b=-6$ et $c=1$; on a $\Delta = b^2-4ac = (-6)^2-4.1.1 = 36-4 = 32$ et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$; les solutions sont $u_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6+4\sqrt{2}}{2} = 3+2\sqrt{2}$ et $u_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6-4\sqrt{2}}{2} = 3-2\sqrt{2}$.

b) L'équation $e^{4x}-6e^{2x}+1=0$ peut s'écrire $(e^{2x})^2-6e^{2x}+1=0$. En posant $u=e^{2x}$, on obtient $u^2-6u+1=0$, qui est l'équation traitée en a). Les solutions sont
$u_1 = 3+2\sqrt{2} \cong 5,828$ et $u_2 = 3-2\sqrt{2} \cong 0,172$.
Avec $u_1 = 3+2\sqrt{2}$ et $u_1 = e^{2x_1}$, on obtient $e^{2x_1} = 3+2\sqrt{2} \Rightarrow 2x_1 = \ln(3+2\sqrt{2})$
$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}\ln(3+2\sqrt{2}) \cong 0,881$.
Avec $u_2 = 3-2\sqrt{2}$ et $u_2 = e^{2x_2}$, on obtient $e^{2x_2} = 3-2\sqrt{2} \Rightarrow 2x_2 = \ln(3-2\sqrt{2})$
$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}\ln(3-2\sqrt{2}) \cong -0,881$.
On a : $u_1 \cdot u_2 = (3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) = (A+B)(A-B) = A^2-B^2 = 3^2-(2\sqrt{2})^2 = 9-8 = 1$ et
$x_1+x_2 = \frac{1}{2}\ln(3+2\sqrt{2}) + \frac{1}{2}\ln(3-2\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\left(\ln(3+2\sqrt{2}) + \ln(3-2\sqrt{2})\right) =$
$= \frac{1}{2}\ln\left((3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\right) = \frac{1}{2}\ln(u_1 \cdot u_2) = \frac{1}{2}\ln(1) = \frac{1}{2}.0 = 0$.

c) On a $f(x) = 4\dfrac{e^x}{e^{2x}+1} = \dfrac{4e^x}{e^{2x}+1}$.

a) Domaine de définition : Comme $e^x > 0$ pour toute valeur de x, on a $e^{2x}+1 > 0$. Ainsi $D_f = \mathbb{R}$.

b) Parité : $f(-x) = \dfrac{4e^{-x}}{e^{-2x}+1} = \dfrac{4e^{-x} \cdot e^{2x}}{(e^{-2x}+1)e^{2x}} = \dfrac{4e^x}{1+e^{2x}} = f(x) \Rightarrow f$ est paire.

c) Périodicité : Comme f ne contient pas de fonction périodique, f n'est pas périodique.

d) Zéros : $f(x)=0 \Rightarrow \dfrac{4e^x}{e^{2x}+1} = 0 \Rightarrow 4e^x = 0 \Rightarrow e^x = 0$ ce qui est exclu $(e^x > 0)$.

e) Intersection avec Oy : $x=0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{4e^0}{e^0+1} = \dfrac{4.1}{1+1} = \dfrac{4}{2} = 2$.

f) Tableau de signes :

x	
Signes de $f(x)$	+

g) Asymptotes verticales, trous, sauts : aucun puisque $D_f = \mathbb{R}$.

h) Comportement asymptotique : /

i) Asymptotes non verticales : On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4e^x}{e^{2x}+1} = \dfrac{4.0}{0+1} = 0$ et
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4e^x}{e^{2x}+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4e^x}{(e^x+\frac{1}{e^x})e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{e^x+\frac{1}{e^x}} = \dfrac{4}{+\infty+0} = 0$.

Ainsi $y=0$ est asymptote horizontale.

j) Comportement asymptotique : D'après i), on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{4.0_+}{0_++1} = 0_+$ et
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{4}{+\infty+0_+} = 0_+$.
Ainsi f s'approche à $\pm\infty$ de $y=0$ par au-dessus.

k) Intersections avec les asymptotes non verticales: $f(x)=0 \Rightarrow$ aucune solution (voir d)).

l) Première dérivée: On a $f(x)=\frac{u}{v}$ avec $u=4e^x$ et $v=e^{2x}+1$. Ainsi $u'=4e^x$ et $v'=2e^{2x}$, d'où $f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{4e^x(e^{2x}+1)-4e^x\cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}=\frac{4e^x(e^{2x}+1-2e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2}=$

$=\frac{4e^x(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2}$. Son domaine est $D_{f'}=\mathbb{R}$.

m) Points à tangente horizontale: $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{4e^x(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2}=0 \Rightarrow 4e^x(1-e^{2x})=0$

$\Rightarrow 1-e^{2x}=0 \quad (e^x>0) \Rightarrow e^{2x}=1 \Rightarrow 2x=\ln(1)=0 \Rightarrow x=0.$

Avec $x=0$, on a $f(x)=2$ (voir e)).

Ainsi $(0;2)$ est l'unique point à tangente horizontale de f.

n) Pentes des tangentes aux points critiques de f: f n'a pas de points critiques.

o) Tableau de variations:

x		0	
Signes de $f'(x)$	$+$	0	$-$
croissance ou décroissance de $f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

Ainsi f est croissante sur $]-\infty;0[$ et décroissante sur $]0;+\infty[$.

p) Nature des points à tangente horizontale: D'après o), $(0;2)$ est un maximum.

q) Deuxième dérivée: On a $f'(x)=\frac{4e^x(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2}=\frac{u}{v}$ avec $u=4e^x(1-e^{2x})$ et

$v=(e^{2x}+1)^2$. Ainsi $u'=4\left(e^x(1-e^{2x})+e^x(-2e^{2x})\right)=4e^x(1-e^{2x}-2e^{2x})=$

$=4e^x(1-3e^{2x})$ et $v'=2(e^{2x}+1)\cdot 2e^{2x}=4e^{2x}(e^{2x}+1)$, d'où

$$f''(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{4e^x(1-3e^{2x})\cdot(e^{2x}+1)^2-4e^x(1-e^{2x})\cdot 4e^{2x}(e^{2x}+1)}{((e^{2x}+1)^2)^2}=$$

$$=\frac{4e^x(e^{2x}+1)\left((1-3e^{2x})(e^{2x}+1)-(1-e^{2x})\cdot 4e^{2x}\right)}{(e^{2x}+1)^4}=$$

$$=\frac{4e^x\left(e^{2x}+1-3e^{4x}-3e^{2x}-4e^{2x}+4e^{4x}\right)}{(e^{2x}+1)^3}=\frac{4e^x(e^{4x}-6e^{2x}+1)}{(e^{2x}+1)^3}.$$

Son domaine est $D_{f''}=\mathbb{R}$.

r) Points d'inflexion: $f''(x)=0 \Rightarrow \frac{4e^x(e^{4x}-6e^{2x}+1)}{(e^{2x}+1)^3}=0 \Rightarrow 4e^x(e^{4x}-6e^{2x}+1)=0$

$\Rightarrow e^{4x}-6e^{2x}+1=0 \quad (e^x>0)$.

D'après la partie b) de l'exercice, les solutions de cette équation sont

$x_1=\frac{1}{2}\ln(3+2\sqrt{2})\cong 0{,}881$ et $x_2=\frac{1}{2}\ln(3-2\sqrt{2})\cong -0{,}881$.

Avec $x_1=\frac{1}{2}\ln(3+2\sqrt{2})$, on a $f(x)=\frac{4e^{\frac{1}{2}\ln(3+2\sqrt{2})}}{e^{2\cdot\frac{1}{2}\ln(3+2\sqrt{2})}+1}=\frac{4e^{\ln(\sqrt{3+2\sqrt{2}})}}{e^{\ln(3+2\sqrt{2})}+1}=$

$$=\frac{4\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{3+2\sqrt{2}+1}=\frac{4\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{4+2\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{3+2\sqrt{2}}\,(4-2\sqrt{2})}{(4+2\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})}=\frac{4\sqrt{(3+2\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})^2}}{4^2-(2\sqrt{2})^2}=$$

$$=\frac{4\sqrt{(3+2\sqrt{2})(16-16\sqrt{2}+4\cdot 2)}}{16-4\cdot 2}=\frac{4\sqrt{(3+2\sqrt{2})(24-16\sqrt{2})}}{16-8}=\frac{4\sqrt{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\cdot 8}}{8}=$$

$$=\frac{\sqrt{(3^2-(2\sqrt{2})^2)\cdot 8}}{2}=\frac{\sqrt{(9-8)\cdot 8}}{2}=\frac{\sqrt{8}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}.$$

En outre, comme $x_1+x_2=0$ (voir b) de l'exercice), on a $x_2=-x_1$. Ainsi, x_1 et x_2 sont symétriques par rapport à l'origine et, comme f est paire, on a, pour $x_2=\frac{1}{2}\ln(3-2\sqrt{2})$, $f(x_2)=f(-x_1)=f(x_1)=\sqrt{2}$.

En outre, avec $x_1=\frac{1}{2}\ln(3+2\sqrt{2})$, on a $f'(x)=\dfrac{4e^{\frac{1}{2}\ln(3+2\sqrt{2})}\left(1-e^{2\cdot\frac{1}{2}\ln(3+2\sqrt{2})}\right)}{\left(e^{2\cdot\frac{1}{2}\ln(3+2\sqrt{2})}+1\right)^2}=$

$$=\frac{4e^{\ln(\sqrt{3+2\sqrt{2}})}\left(1-e^{\ln(3+2\sqrt{2})}\right)}{\left(e^{\ln(3+2\sqrt{2})}+1\right)^2}=\frac{4\sqrt{3+2\sqrt{2}}\,(1-(3+2\sqrt{2}))}{(3+2\sqrt{2}+1)^2}=$$

$$=\frac{4\sqrt{3+2\sqrt{2}}\,(-2-2\sqrt{2})}{(4+2\sqrt{2})^2}=\frac{-8\sqrt{3+2\sqrt{2}}\,(1+\sqrt{2})}{4(2+\sqrt{2})^2}=-\frac{2\sqrt{3+2\sqrt{2}}\,(1+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})^2}=$$

$$=-\frac{2\sqrt{3+2\sqrt{2}}\,(1+\sqrt{2})}{4+4\sqrt{2}+2}=-\frac{2\sqrt{3+2\sqrt{2}}\,(1+\sqrt{2})}{6+4\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}\,(1+\sqrt{2})}{3+2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}\,(1+\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}=$$

$$=-\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}\,(3-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2\cdot 2)}{3^2-(2\sqrt{2})^2}=-\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}\,(\sqrt{2}-1)}{9-8}=-\sqrt{3+2\sqrt{2}}\,(\sqrt{2}-1)=$$

$$=-\sqrt{(3+2\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)^2}=-\sqrt{(3+2\sqrt{2})(2-2\sqrt{2}+1)}=-\sqrt{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}=-\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2}=$$

$$=-\sqrt{9-8}=-\sqrt{1}=-1.$$

Par symétrie (puisque f est paire), on a, avec $x_2=\frac{1}{2}\ln(3-2\sqrt{2})$, $f'(x)=1$.

Il y a donc 2 points d'inflexion:

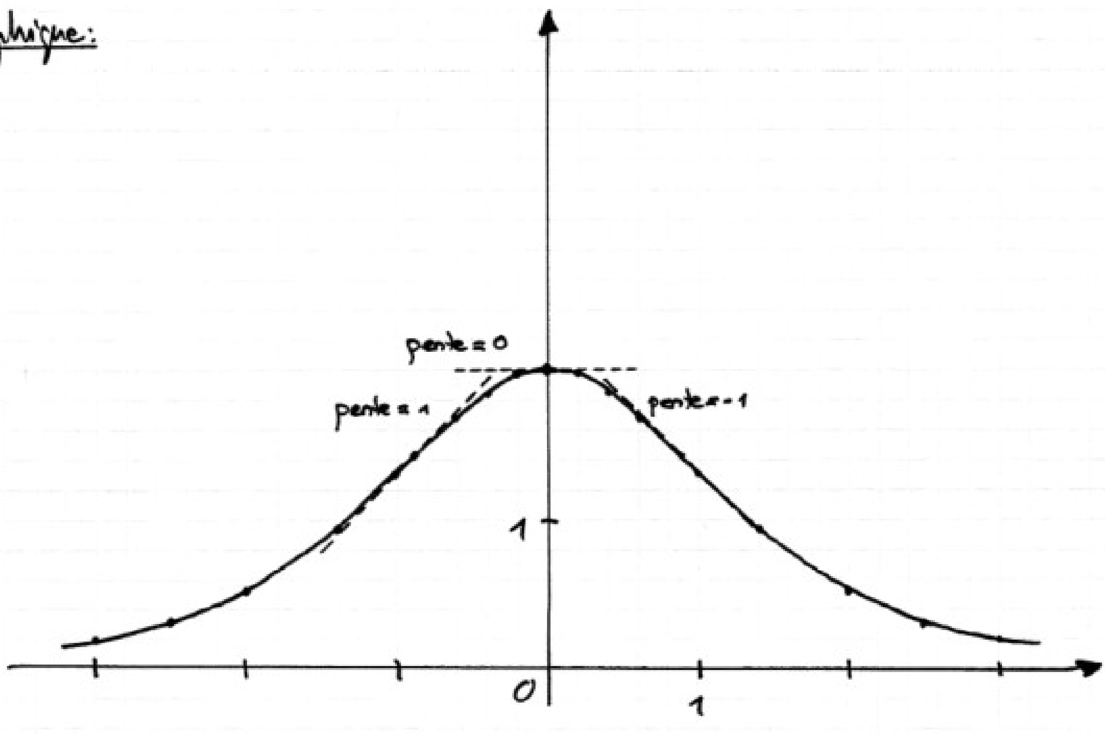
$\left(\frac{1}{2}\ln(3+2\sqrt{2});\sqrt{2}\right)\cong(0{,}881;1{,}414)$ avec $f'\left(\frac{1}{2}\ln(3+2\sqrt{2})\right)=-1$ et

$\left(\frac{1}{2}\ln(3-2\sqrt{2};\sqrt{2}\right)\cong(-0{,}881;1{,}414)$ avec $f'\left(\frac{1}{2}\ln(3-2\sqrt{2})\right)=1$.

s) Tableau de concavité:

x		$-0{,}881$		$0{,}881$	
Signes de $f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Convexité ou concavité de $f(x)$	convexe		concave		convexe

t) Graphique:



On a $g(x) = (f(x))^2 = 16\dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \dfrac{16e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$.

On cherche une primitive G de g, autrement dit à calculer $\int (f(x))^2 dx$.

On a $\int (f(x))^2 dx = \int \dfrac{16e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} dx = 16 \int \dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} dx$.

On pose $u = e^{2x}+1$, on a alors $u' = 2e^{2x} \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 2e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x}dx$
$\Rightarrow e^{2x}dx = \frac{1}{2}du$.

Ainsi $\int (f(x))^2 dx = 16 \int \dfrac{1}{(e^{2x}+1)^2} e^{2x} dx = 16 \int \dfrac{1}{u^2} \cdot \dfrac{1}{2} du = 8 \int \dfrac{1}{u^2} du =$
$= 8\left(-\dfrac{1}{u}\right) + c = -\dfrac{8}{u} + c = -\dfrac{8}{e^{2x}+1} + c$.

Une primitive de $g(x)$ est donc $G(x) = -\dfrac{8}{e^{2x+1}} + c$.

d) D'après Formulaires et Tables p. 82, le volume engendré est $\pi \int_0^{+\infty} (f(x))^2 dx$.

On a $\int_0^b (f(x))^2 dx = \int_0^b g(x) dx = G(b) - G(0) = -\dfrac{8}{e^{2b}+1} - \left(-\dfrac{8}{e^0+1}\right)$ (voir c))
$= -\dfrac{8}{e^{2b}+1} + \dfrac{8}{1+1} = -\dfrac{8}{e^{2b}+1} + 4$.

Le volume engendré est ainsi $\pi \int_0^{+\infty} (f(x))^2 dx = \pi \lim_{b \to +\infty} \int_0^b (f(x))^2 dx =$
$= \pi \lim_{b \to +\infty} \left(-\dfrac{8}{e^{2b}+1} + 4\right) = \pi\left(-\dfrac{8}{+\infty} + 4\right) = \pi(0+4) = 4\pi \cong 12{,}566$.

Exercice 8

On a $f_a(x) = \frac{a}{x^2+a^2}$, $a \neq 0$.

a) Première dérivée: On a $f_a(x) = \frac{u}{v}$ avec $u = a$ et $v = x^2+a^2$. Ainsi $u' = 0$ et $v' = 2x$, d'où $f_a'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{0\cdot(x^2+a^2) - a\cdot 2x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{-2ax}{(x^2+a^2)^2}$.

Points à tangente horizontale: $f'_a(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2ax}{(x^2+a^2)^2} = 0 \Rightarrow -2ax = 0 \Rightarrow x = 0$.
Avec $x=0$, on a $f_a(x) = \frac{a}{0^2+a^2} = \frac{a}{a^2} = \frac{1}{a}$.
Ainsi le point à tangente horizontale est $(0; \frac{1}{a})$.

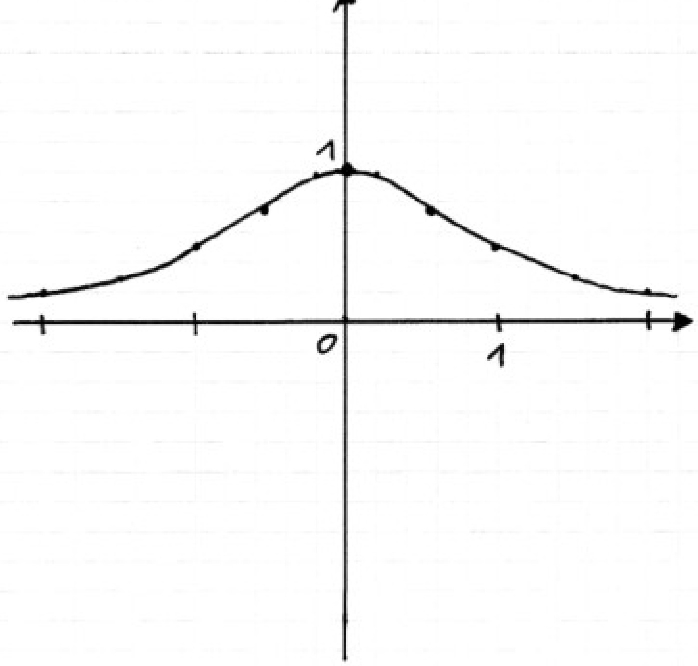
Seconde dérivée: On a $f_a'(x) = \frac{u}{v}$ avec $u = -2ax$ et $v = (x^2+a^2)^2$. Ainsi $u' = -2a$ et $v' = 2(x^2+a^2)\cdot 2x$, d'où $f_a''(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} =$

$$= \frac{-2a\cdot(x^2+a^2)^2 - (-2ax)\cdot 2(x^2+a^2)\cdot 2x}{((x^2+a^2)^2)^2} = \frac{(x^2+a^2)(-2a(x^2+a^2)+8ax^2)}{(x^2+a^2)^4} =$$

$$= \frac{-2a(x^2+a^2)+8ax^2}{(x^2+a^2)^3} = \frac{-2ax^2-2a^3+8ax^2}{(x^2+a^2)^3} = \frac{6ax^2-2a^3}{(x^2+a^2)^3} = \frac{2a(3x^2-a^2)}{(x^2+a^2)^3}$$

Points d'inflexion: $f_a''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2a(3x^2-a^2)}{(x^2+a^2)^3} = 0 \Rightarrow 2a(3x^2-a^2) = 0$
$\Rightarrow 3x^2 - a^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 = a^2 \Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{a^2}{3}} = \pm\frac{|a|}{\sqrt{3}} = \pm\frac{a}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}a}{3}$.
Avec $x = \pm\frac{\sqrt{3}a}{3}$, on a $f_a(x) = \frac{a}{(\pm\frac{\sqrt{3}a}{3})^2+a^2} = \frac{a}{\frac{a^2}{3}+a^2} = \frac{a}{\frac{4}{3}a^2} = \frac{1}{\frac{4}{3}a} = \frac{1}{\frac{4a}{3}} = \frac{3}{4a}$.
Ainsi les points d'inflexion sont $(-\frac{\sqrt{3}a}{3}; \frac{3}{4a})$ et $(\frac{\sqrt{3}a}{3}; \frac{3}{4a})$.

Avec $a=1$, on a $f_1(x) = \frac{1}{x^2+1}$.
Le point à tangente horizontale est $(0; \frac{1}{1}) = (0;1)$.
Les points d'inflexion sont $(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{3}{4}) \cong (-0{,}577; 0{,}75)$ et $(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{3}{4}) \cong (0{,}577; 0{,}75)$.
Graphique:



b) On a $I = \int_0^{\infty} \frac{a}{x^2+a^2}\,dx = a\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = a \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{1}{x^2+a^2}\,dx$ avec $a>1$.

D'après Formulaires et Tables p. 78, une primitive de $\frac{1}{x^2+a^2}$ est $F(x) = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$.

On a $F(b) = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ et $F(0) = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{0}{a}\right) = \frac{1}{a}\arctan(0) = \frac{1}{a}\cdot 0$.

Ainsi $\int_0^b \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = F(b)-F(0) = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ et $I = a \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{1}{x^2+a^2}\,dx =$

$= a \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \lim_{b\to+\infty} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$.

Par conséquent $I = \frac{\pi}{2}$ pour toute valeur de $a>0$.

On a $J = \int_0^{x_1} \frac{a}{x^2+a^2}\,dx = F(x_1) - F(0) = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x_1}{a}\right)$.

Ainsi $J = \frac{1}{3}I \Rightarrow \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x_1}{a}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2} \Rightarrow \arctan\left(\frac{x_1}{a}\right) = \frac{\pi a}{6} \Rightarrow \frac{x_1}{a} = \tan\left(\frac{\pi a}{6}\right)$

$\Rightarrow x_1 = a\tan\left(\frac{\pi a}{6}\right)$.

c) On doit trouver k et m tels que $P(x) = \frac{kx}{x^2+1} + m\arctan(x)$ soit une primitive de $(f_1(x))^2 = \frac{1}{(x^2+1)^2}$. On doit avoir $P'(x) = (f_1(x))^2$.

On a $\frac{x}{x^2+1} = \frac{u}{v}$ avec $u=x$ et $v = x^2+1$. Ainsi $u'=1$ et $v'=2x$, d'où

$\left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$.

En outre, d'après Formulaires et Tables p. 75, $(\arctan(x))' = \frac{1}{x^2+1}$.

Ainsi $P'(x) = k\cdot\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} + m\cdot\frac{1}{x^2+1} = \frac{-kx^2+k}{(x^2+1)^2} + \frac{m}{x^2+1} = \frac{-kx^2+k+m(x^2+1)}{(x^2+1)^2} =$

$= \frac{-kx^2+k+mx^2+m}{(x^2+1)^2} = \frac{(m-k)x^2+m+k}{(x^2+1)^2}$.

Par conséquent, $P'(x) = (f_1(x))^2 \Rightarrow \frac{(m-k)x^2+m+k}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{(x^2+1)^2}$

$\Rightarrow (m-k)x^2+m+k = 1$.

Par identification des termes, on doit avoir $m-k=0$ et $m+k=1$, d'où $m=k=\frac{1}{2}$.

Ainsi, avec $m=k=\frac{1}{2}$, $P(x)$ est une primitive de $(f_1(x))^2$.

Avec $m=k=\frac{1}{2}$, on a $P(x) = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan(x)$.

D'après Formulaires et Tables p. 82, le volume engendré cherché est $V = \pi\int_{-1}^{1}(f_1(x))^2\,dx$.

Comme $P(x) = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan(x)$ est une primitive de $(f_1(x))^2$, on a

$V = \pi\left(P(1)-P(-1)\right) = \pi\left(\frac{1}{2(1^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan(1) - \left(\frac{-1}{2((-1)^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan(-1)\right)\right) =$

$= \pi\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right) = \pi\left(\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}\right) = \pi\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{4}$.

Le volume engendré est donc $V = \frac{\pi^2}{4}$.

d) On a $y = f_a(x) = \dfrac{a}{x^2+a^2}$.

L'équation différentielle est $(x^2+4)\,y' - 2xy = \dfrac{8x}{x^2+4}$.

Pour que $y = f_a(x)$ soit une solution particulière de l'équation différentielle, on remplace y (et y') dans l'équation et on cherche les a qui jouent.

On a $y = \dfrac{a}{x^2+a^2} = \dfrac{u}{v}$ avec $u = a$ et $v = x^2+a^2$. Ainsi, $y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} =$
$= \dfrac{0\cdot(x^2+a^2) - a\cdot 2x}{(x^2+a^2)^2} = \dfrac{-2ax}{(x^2+a^2)^2}$.

Par substitution dans l'équation différentielle, on obtient:

$$(x^2+4)\cdot\frac{-2ax}{(x^2+a^2)^2} - 2x\cdot\frac{a}{x^2+a^2} = \frac{8x}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow \frac{-2ax(x^2+4)}{(x^2+a^2)^2} - \frac{2ax}{x^2+a^2} = \frac{8x}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow \frac{-2ax(x^2+4) - 2ax(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^2} = \frac{8x}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow \left(-2ax(x^2+4) - 2ax(x^2+a^2)\right)(x^2+4) = 8x(x^2+a^2)^2$$

$$\Rightarrow -2ax\,(x^2+4+x^2+a^2)(x^2+4) = 8x(x^2+a^2)^2$$

$$\Rightarrow -2ax\,(2x^2+a^2+4)(x^2+4) = 8x\,(x^2+a^2)^2$$

$$\Rightarrow -a(2x^2+a^2+4)(x^2+4) = 4\,(x^2+a^2)^2$$

$$\Rightarrow -(2ax^2+a^3+4a)(x^2+4) = 4(x^4+2a^2x^2+a^4)$$

$$\Rightarrow -\left(2ax^4+8ax^2+a^3x^2+4a^3+4ax^2+16a\right) = 4x^4+8a^2x^2+4a^4$$

$$\Rightarrow -2ax^4 - (8a+a^3+4a)x^2 - (4a^3+16a) = 4x^4+8a^2x^2+4a^4$$

On doit par conséquent avoir $\begin{cases} -2a = 4 & (1) \\ -(8a+a^3+4a) = 8a^2 & (2) \\ -(4a^3+16a) = 4a^4 & (3) \end{cases}$

De (1), on tire $a = -2$.

Dans (2), on a $-(8a+a^3+4a) = -(-16-8-8) = 32$ et $8a^2 = 8\cdot(-2)^2 = 32$ et,
dans (3), on a $-(4x^3+16a) = -(4\cdot(-8)+16\cdot(-2)) = -(-32-32) = +64$ et $4a^4 = 4\cdot(-2)^4 = 4\cdot 16 = 64$.

Ainsi, si $a = -2$, $f_a(x)$ est solution de l'équation différentielle.
Avec $a = -2$, $f_a(x) = \dfrac{-2}{x^2+4}$.

D'après Formulaires et Tables p. 84, la solution de l'équation différentielle est la somme d'une solution particulière de l'équation (donc $f_a(x) = \dfrac{-2}{x^2+4}$) et de la solution générale de l'équation sans second membre.

L'équation sans second membre est $(x^2+4)y' - 2xy = 0$.
Elle s'écrit $(x^2+4)y' = 2xy \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2x}{x^2+4}$.

Ainsi $\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{2x}{x^2+4}\,dx \Rightarrow \ln|y| = \ln|x^2+4| + c \Rightarrow \ln|y| = \ln(x^2+4) + \ln k$

$\Rightarrow \ln|y| = \ln\left(k(x^2+4)\right) \Rightarrow |y| = k(x^2+4)$, $k \in \mathbb{R}$

Comme k peut être positif ou négatif, on peut écrire $y = k(x^2+4)$, $k \in \mathbb{R}$.
Ainsi une solution générale de l'équation sans second membre est $y = k(x^2+4)$, $k \in \mathbb{R}$.

On en conclut que la solution de $(x^2+4)y' - 2xy = \frac{8x}{x^2+4}$ est

$y = -\frac{2}{x^2+4} + k(x^2+4)$, $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 9

On a $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

a) a) Domaine de définition: comme $e^x>0$ pour toute valeur de x, on a $e^x+1>0$ et, donc, $D_f=\mathbb{R}$.

b) Parité: $f(-x)=\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\dfrac{(e^{-x}-1)e^x}{(e^{-x}+1)e^x}=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}=-\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=-f(x) \Rightarrow f$ est impaire.

c) Périodicité: Comme f ne contient pas de fonction périodique, elle n'est pas périodique.

d) Zéros: $f(x)=0 \Rightarrow \dfrac{e^x-1}{e^x+1}=0 \Rightarrow e^x-1 \Rightarrow e^x=1 \Rightarrow x=0$.

e) Intersection avec Oy: $x=0 \Rightarrow f(x)=\dfrac{e^0-1}{e^0+1}=\dfrac{1-1}{1+1}=0$.

f) Tableau de signes:

x		0	
Signes de $f(x)$	$-$	0	$+$

g) Asymptotes verticales, sauts, trous: Aucun car $D_f=\mathbb{R}$.

h) Comportement asymptotique: /

i) Asymptotes non verticales: On a $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(1+e^{-x})}=\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{1-0}{1+0}=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{0-1}{0+1}=-1$.

Par conséquent, $y=-1$ est une asymptote horizontale lorsque $x\to-\infty$ et $y=1$ est une asymptote horizontale lorsque $x\to+\infty$.

j) Comportement asymptotique: D'après i), on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1-0+}{1+0+}=\dfrac{1-}{1+}=1-$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{0_+-1}{0_++1}=\dfrac{-1+}{1+}=-1_+$.

k) Intersection avec les asymptotes non verticales: $f(x)=1 \Rightarrow \dfrac{e^x-1}{e^x+1}=1$
$\Rightarrow e^x-1=e^x+1 \Rightarrow -1=1$ impossible;
$f(x)=-1 \Rightarrow \dfrac{e^x-1}{e^x+1}=-1 \Rightarrow e^x-1=-e^x-1 \Rightarrow e^x=-e^x \Rightarrow 2e^x=0$ impossible
$\Rightarrow$ il n'y a pas d'intersection avec les asymptotes non verticales.

l) Première dérivée: On a $f(x)=\dfrac{u}{v}$ avec $u=e^x-1$ et $v=e^x+1$. On a $u'=e^x$ et $v'=e^x$, d'où $f'(x)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}=\dfrac{e^x(e^x+1)-(e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x}{(e^x+1)^2}=$
$=\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$. Son domaine est $D_{f'}=\mathbb{R}$.

m) Points à tangente horizontale: $f'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}=0 \Rightarrow 2e^x=0$ impossible.
f n'a pas de point à tangente horizontale.

n) Pentes des tangentes aux points critiques de f': f n'a pas de points critiques.

o) Tableau de variations:

x	
Signes de $f'(x)$	$+$
Croissance ou décroissance de $f(x)$	$\nearrow$

p) <u>Nature des points à tangente horizontale:</u> /

q) <u>Deuxième dérivée:</u> On a $f'(x) = \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{u}{v}$ avec $u = 2e^x$ et $v = (e^x+1)^2$.

On a $u' = 2e^x$ et $v' = 2(e^x+1)e^x$, d'où $f''(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} =$

$$= \frac{2e^x(e^x+1)^2 - 2e^x \cdot 2(e^x+1)e^x}{((e^x+1)^2)^2} = \frac{(e^x+1)\left(2e^x(e^x+1) - 4e^xe^x\right)}{(e^x+1)^4} =$$

$$= \frac{2e^{2x} + 2e^x - 4e^{2x}}{(e^x+1)^3} = \frac{2e^x - 2e^{2x}}{(e^x+1)^3} = \frac{2e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}.$$ Son domaine est $D_{f''} = \mathbb{R}$.

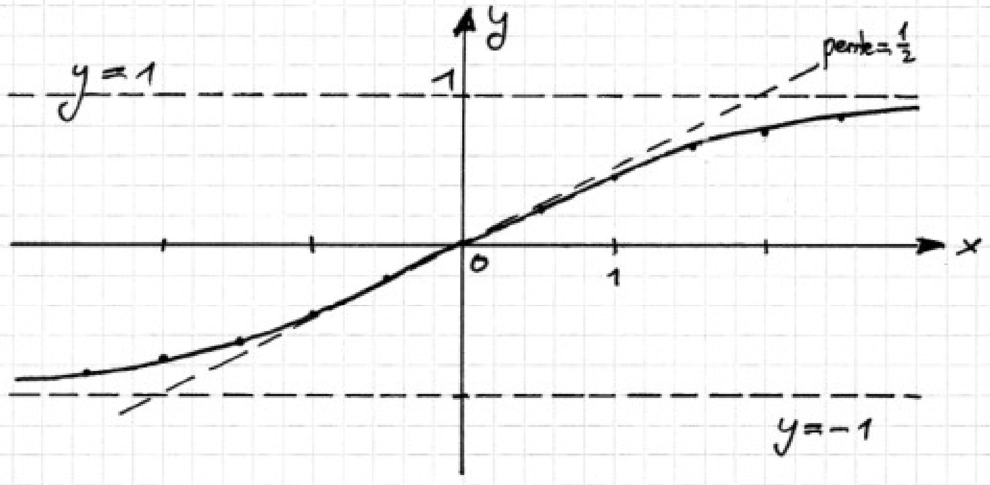
r) <u>Points d'inflexion:</u> $f''(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{2e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3} = 0 \Rightarrow 2e^x(1-e^x) = 0 \Rightarrow 1 - e^x = 0$ $(2e^x > 0) \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$.

Avec $x = 0$, on a $f(x) = 0$ et $f'(x) = \dfrac{2 \cdot e^0}{(e^0+1)^2} = \dfrac{2 \cdot 1}{(1+1)^2} = \dfrac{2}{2^2} = \dfrac{1}{2}$.

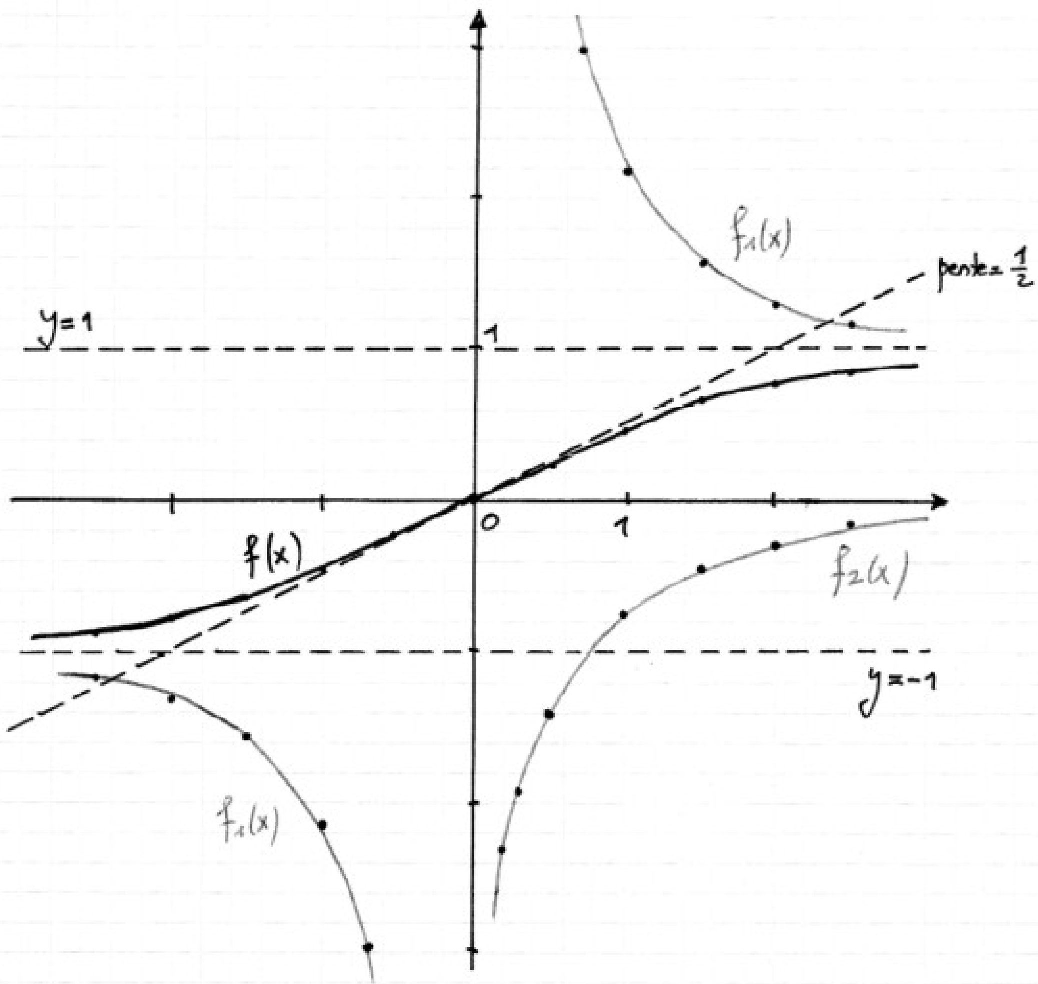
s) <u>Tableau de convexité:</u>

x		0	
Signes de $f''(x)$	$+$	0	$-$
Convexité ou concavité de $f(x)$	$\smile$ convexe		$\frown$ concave

t) <u>Graphique:</u>



b) Voici les graphes de $f(x)$, $f_1(x)$ et $f_2(x)$:



c) On a $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \Rightarrow y(e^x - 1) = e^x + 1 \Rightarrow e^x y - y = e^x + 1 \Rightarrow e^x y - e^x = y + 1$

$\Rightarrow e^x(y-1) = y+1 \Rightarrow e^x = \frac{y+1}{y-1} \Rightarrow x = \ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right|$.

Ainsi la fonction réciproque est $f^{-1}(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$.

Si $f(x) = 0{,}9$, on a alors $x = f^{-1}(0{,}9) = \ln\left|\frac{0{,}9+1}{0{,}9-1}\right| = \ln\left|\frac{1{,}9}{-0{,}1}\right| = \ln 19 \cong 2{,}944$.

d) On a $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ et on cherche une primitive de f, autrement dit à trouver $\int f(x)\,dx$.

On pose $u = e^x$. On a alors $u' = e^x$, d'où $du = e^x dx \Rightarrow du = u\,dx \Rightarrow dx = \frac{1}{u} du$.

Ainsi $\int f(x)\,dx = \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\,dx = \int \frac{u-1}{u+1} \cdot \frac{1}{u}\,du = \int \frac{u-1}{u(u+1)}\,du$.

On va chercher A et $B \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{u-1}{u(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1}$.

On a : $\frac{A}{u} + \frac{B}{u+1} = \frac{A(u+1) + Bu}{u(u+1)} = \frac{(A+B)u + A}{u(u+1)}$.

Ainsi, on obtient $\frac{(A+B)u + A}{u(u+1)} = \frac{u-1}{u(u+1)}$. Par identification des termes, on doit avoir $A + B = 1$ et $A = -1$. Ainsi $A = -1$ et $B = 2$.

Par conséquent $\frac{u-1}{u(u+1)} = -\frac{1}{u} + \frac{2}{u+1}$.

On obtient alors $\int f(x)\,dx = \int \frac{u-1}{u(u+1)}\,du = \int \left(-\frac{1}{u}+\frac{2}{u+1}\right)du = -\int \frac{1}{u}\,du + 2\int \frac{1}{u+1}\,du =$
$= -\ln|u| + 2\ln|u+1| + c,\ c\in\mathbb{R}.$

Avec $u = e^x$, on trouve $\int f(x)\,dx = -\ln|e^x| + 2\ln|e^x+1| + c = -\ln(e^x) + 2\ln(e^x+1) + c$
$= -x + 2\ln(e^x+1) + c.$

Une primitive de f est donc $-x + 2\ln(e^x+1) + c$.

e) On a $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ et, dans le 1^e quadrant, $y=1$ est l'asymptote horizontale de f.

L'aire cherchée est $\int_0^{+\infty} (1-f(x))\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b (1-f(x))\,dx.$

D'après e), une primitive de f est $-x + 2\ln(e^x+1)$.

Ainsi une primitive de $1-f(x) = F(x) = x + x - 2\ln(e^x+1) = 2x - 2\ln(e^x+1)$.

On a $\int_0^b (1-f(x))\,dx = F(b) - F(0) = 2b - 2\ln(e^b+1) - (2\cdot 0 - 2\ln(e^0+1)) =$

$= 2b - 2\ln(e^b+1) + 2\ln(1+1) = 2b - 2\ln(e^b+1) + 2\ln 2 =$
$= 2(b - \ln(e^b+1)) + 2\ln 2 = 2(\ln e^b - \ln(e^b+1)) + 2\ln 2 =$
$= 2\ln \frac{e^b}{e^b+1} + 2\ln 2 = 2\ln \frac{1}{1+e^{-b}} + 2\ln 2.$

Ainsi $\int_0^{+\infty} (1-f(x))\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left(2\ln \frac{1}{1-e^{-b}} + 2\ln 2\right) = 2\ln \frac{1}{1+0} + 2\ln 2 =$
$= 2\ln 1 + 2\ln 2 = 2\cdot 0 + 2\ln 2 = 2\ln 2.$

L'aire cherchée est donc $2\ln 2$.

Exercice 10

a) On a $f(x) = \cos(2x) + \cos(x)$.

a) Domaine de définition : $D_f = \mathbb{R}$. (Remarque : on prend x en radians).

b) Parités : Comme $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$, on a $f(-x) = \cos(-2x) + \cos(-x) = \cos(2x) + \cos(x) =$
$= f(x) \Rightarrow f$ est paire.

c) Périodicité : La période de $\cos(x)$ est 2π ($\cos(x+2\pi) = \cos(x)$). La période de $\cos(2x)$ est π ($\cos(2(x+\pi)) = \cos(2x+2\pi) = \cos(2x)$). Par conséquent, f est périodique et sa période est 2π. Il suffit donc d'étudier f sur $[0; 2\pi]$.

d) Zéros : $f(x) = 0 \Rightarrow \cos(2x) + \cos(x) = 0 \Rightarrow \cos(2x) = -\cos(x)$
$\Rightarrow \cos(2x) = \cos(\pi - x) \Rightarrow 2x = \pi - x + k\cdot 2\pi$ ou $2x = -(\pi - x) + k\cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
(voir Formulaires et Tables, p. 18 et 30) $\Rightarrow 3x = \pi + k\cdot 2\pi$ ou $2x = -\pi + x + k\cdot 2\pi$
$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\cdot\frac{2\pi}{3}$ ou $x = -\pi + k\cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Avec $k=0$, on a $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = -\pi$.
Avec $k=1$, on a $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$ ou $x = -\pi + 2\pi = \pi$.
Avec $k=2$, on a $x = \frac{\pi}{3} + 2\cdot\frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ ou $x = -\pi + 2\cdot 2\pi = 3\pi$.
Les zéros de f dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ sont donc $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \pi$ et $x = \frac{5\pi}{3}$.

e) Intersection avec Oy : $x = 0 \Rightarrow f(x) = \cos(2\cdot 0) + \cos(0) = \cos(0) + \cos(0) = 1 + 1 = 2$.

f) Tableau de signes :

x		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$	
signe de $f(x)$	+	0	−	0	−	0	+

g) Asymptotes verticales, points, trous : Aucun puisque $D_f = \mathbb{R}$.

h) Comportement asymptotique : /

i) Asymptotes non verticales : Aucune puisque f est périodique.

j) Comportement asymptotique : /

k) Intersection avec les asymptotes non verticales : /

l) Première dérivée : On a $f'(x) = -2\sin(2x) - \sin(x)$. Son domaine est $D_{f'} = \mathbb{R}$.

m) Points à tangente horizontale : $f'(x) = 0 \Rightarrow -2\sin(2x) - \sin(x) = 0$
$\Rightarrow -2\cdot 2\sin(x)\cos(x) - \sin(x) = 0$ (puisque $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, voir Formulaire et Tables p. 29) $\Rightarrow -\sin(x)(4\cos(x)+1) = 0$
$\Rightarrow$ soit $\sin(x) = 0$, soit $4\cos(x) + 1 = 0$
$\Rightarrow$ soit $\sin(x) = 0$, soit $\cos(x) = -\frac{1}{4}$
$\Rightarrow$ soit $x = k\cdot\pi$, soit $x = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + k\cdot 2\pi$, soit $x = -\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + k\cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow$ soit $x = 0, \pi$ ou 2π, soit $x = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) \cong 1{,}823$ rad, soit $x = -\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi \cong$
$\cong 4{,}460$.

Avec $x=0$, on a $f(x)=2$ (voir e)).
Avec $x=\pi$, on a $f(x)=\cos(2\pi)+\cos(\pi)=1-1=0$.
Avec $x=2\pi$, on a $f(x)=f(0)=2$.
Avec $x=\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$, on a $f(x)=\cos\left(2\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right)+\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right)=\cos\left(2\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right)+\frac{1}{4}=$
$=-1{,}125=-\frac{9}{8}$.
Avec $x=-\arccos\left(\frac{1}{4}\right)+2\pi$, on a $f(x)=\cos\left(2\left(-\arccos\left(\frac{1}{4}\right)+2\pi\right)\right)+\cos\left(-\arccos\left(\frac{1}{4}\right)+2\pi\right)=$
$=-1{,}125=-\frac{9}{8}$.
Dans $[0;2\pi]$, les points à tangente horizontale sont $(0;2)$, $(\pi;0)$, $(2\pi;2)$, $\left(1{,}823;-\frac{9}{8}\right)$ et $\left(4{,}460;-\frac{9}{8}\right)$.

n) <u>Pentes des tangentes aux points critiques de f':</u> f' n'a pas de points critiques.

o) <u>Tableau de variations:</u>

x		0		1,823		π		4,460		2π	
Signes de $f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−
Croissance ou décroissance de $f(x)$	↗	max	↘	min	↗	max	↘	min	↗	max	↘

p) <u>Nature des points à tangente horizontale:</u> D'après o), $(0;2)$, $(\pi;0)$ et $(2\pi;2)$ sont des maximums et $\left(1{,}823;-\frac{9}{8}\right)$ et $\left(4{,}460;-\frac{9}{8}\right)$ sont des minimums.

q) <u>Deuxième dérivée:</u> On a $f''(x)=-4\cos(2x)-\cos(x)$. Son domaine est $D_{f''}=\mathbb{R}$.

r) <u>Points d'inflexion:</u> $f''(x)=0 \Rightarrow -4\cos(2x)-\cos(x)=0 \Rightarrow -4\left(2\cos^2(x)-1\right)-\cos(x)=0$
(puisque $\cos(2x)=2\cos^2(x)-1$, voir Formulaires et Tables, p. 29)
$\Rightarrow -8\cos^2(x)+4-\cos(x)=0 \Rightarrow 8\cos^2(x)+\cos(x)-4=0$.

Posons $u=\cos(x)$, on obtient $8u^2+u-4=0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $au^2+bu+c=0$ avec $a=8$, $b=1$ et $c=-4$; on a $\Delta=b^2-4ac=$
$=1^2-4\cdot 8\cdot(-4)=1+128=129$; les solutions sont $u=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{129}}{2\cdot 8}=\frac{-1+\sqrt{129}}{16}$ et $u=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{129}}{16}$.
Avec $u=\frac{-1+\sqrt{129}}{16}$ et $u=\cos(x)$, on a $\cos(x)=\frac{-1+\sqrt{129}}{16} \Rightarrow x=\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{129}}{16}\right)+k\cdot 2\pi$ et $x=-\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{129}}{16}\right)+k\cdot 2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
Avec $u=\frac{-1-\sqrt{129}}{16}$ et $u=\cos(x)$, on a $\cos(x)=\frac{-1-\sqrt{129}}{16} \Rightarrow x=\arccos\left(\frac{-1-\sqrt{129}}{16}\right)+k\cdot 2\pi$ et $x=-\arccos\left(\frac{-1-\sqrt{129}}{16}\right)+k\cdot 2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
Avec $k=0$, on a les solutions $x=\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{129}}{16}\right)\cong 0{,}867$, $x=-\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{129}}{16}\right)\cong -0{,}867$, $x=\arccos\left(\frac{-1-\sqrt{129}}{16}\right)\cong 2{,}453$, $x=-\arccos\left(\frac{-1-\sqrt{129}}{16}\right)\cong -2{,}453$.
Avec $k=1$, on a les solutions $x=\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{129}}{16}\right)+2\pi\cong 7{,}150$, $x=-\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{129}}{16}\right)+2\pi\cong$
$\cong 5{,}417$, $x=\arccos\left(\frac{-1-\sqrt{129}}{16}\right)+2\pi\cong 8{,}737$, $x=-\arccos\left(\frac{-1-\sqrt{129}}{16}\right)+2\pi\cong 3{,}830$.
Dans l'intervalle $[0;2\pi]$, les x correspondant à $f''(x)=0$ sont donc $x\cong 0{,}867$, $x\cong 2{,}453$,

$x \cong 5{,}417$ et $x \cong 3{,}830$.

Avec $x \cong 0{,}867$, on a $f(x) = 0{,}486$ et $f'(x) = -2{,}736$.

Avec $x \cong 2{,}453$, on a $f(x) = -0{,}579$ et $f'(x) = 1{,}327$.

Avec $x \cong 3{,}830$, on a $f(x) = -0{,}579$ et $f'(x) = -1{,}327$.

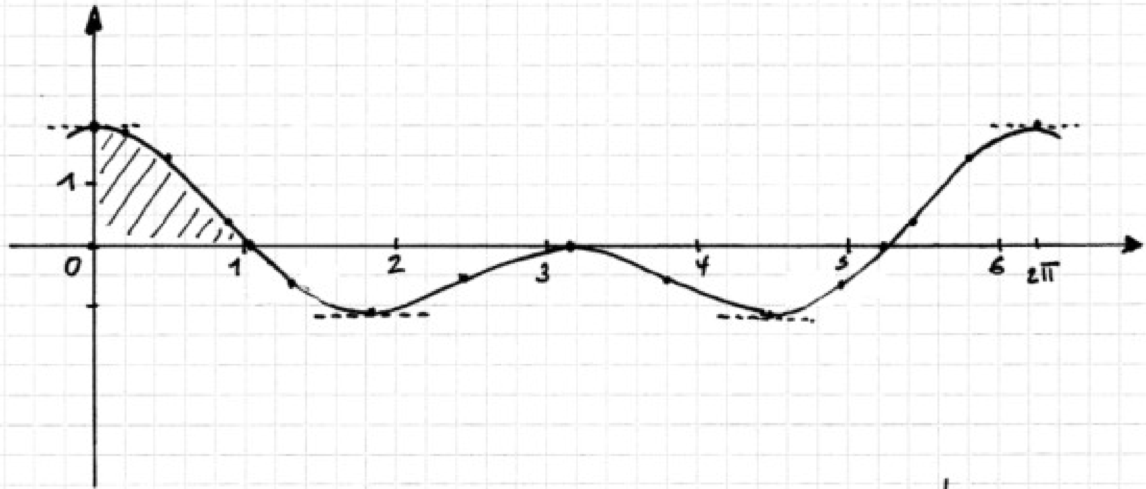
Avec $x \cong 5{,}417$, on a $f(x) = 0{,}486$ et $f'(x) = 2{,}736$.

Par conséquent $(0{,}867 ; 0{,}486)$, $(2{,}453 ; -0{,}579)$, $(3{,}830 ; -0{,}579)$ et $(5{,}417 ; 0{,}486)$ sont les points d'inflexion de f.

s) Tableau de convexité:

x	0		0,867		2,453		3,830		5,417		2π
Signes de $f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
Convexité ou concavité de $f(x)$		concave		convexe		concave		convexe		concave	

t) Graphique:



b) L'aire délimité par le graphe de f et les parties positives des axes de coordonnées est $\int_0^b f(x)dx$, où b est le premier zéro positif de f. D'après la partie a) de l'exercice, on a $b = \frac{\pi}{3}$.

Une primitive de $f(x) = \cos(2x) + \cos(x)$ est $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + \sin(x)$.

Ainsi l'aire cherchée est $\int_0^{\pi/3} f(x)dx = F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F(0) =$

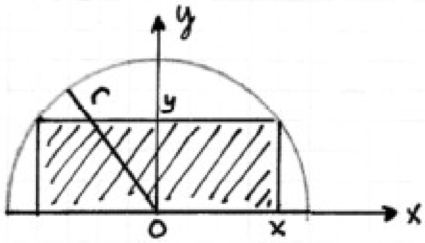
$= \frac{1}{2}\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\sin(2\cdot 0) + \sin(0)\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - 0 =$

$= \frac{1}{2}\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

(voir Formulaires et tables, p. 28).

Exercice 11

On a la situation suivante :



a) L'aire du triangle est $2xy$.

L'équation du demi-cercle est $x^2+y^2=r^2 \Rightarrow y=\sqrt{r^2-x^2}$.

Ainsi l'aire est donné par la fonction $f(x)=2x\sqrt{r^2-x^2}$.

On doit chercher x tel que $f(x)$ soit maximal.

Pour cela, on commence par résoudre $f'(x)=0$ (points à tangente horizontale).

On a $f(x)=u\cdot v$ avec $u=2x$ et $v=\sqrt{r^2-x^2}$.

Ainsi $u'=2$ et $v'=\frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$, d'où $f'(x)=u'v+uv'=$

$=2\cdot\sqrt{r^2-x^2}+2x\left(-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)=2\sqrt{r^2-x^2}-\frac{2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}=\frac{2}{\sqrt{r^2-x^2}}(r^2-x^2-x^2)=$

$=\frac{2}{\sqrt{r^2-x^2}}(r^2-2x^2)=\frac{2(r^2-2x^2)}{\sqrt{r^2-x^2}}$.

$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{2(r^2-2x^2)}{\sqrt{r^2-x^2}}=0 \Rightarrow 2(r^2-2x^2)=0 \Rightarrow r^2-2x^2=0 \Rightarrow 2x^2=r^2$

$\Rightarrow x^2=\frac{r^2}{2} \Rightarrow x=\frac{r}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}r}{2}$.

On vérifie que $x=\frac{\sqrt{2}r}{2}$ correspond au maximum de l'aire en faisant un tableau de variations:

x		$\frac{\sqrt{2}r}{2}$	
Signe de $f'(x)$	+	0	−
Croissance ou décroissance de $f(x)$	↗	max	↘

Ainsi $x=\frac{\sqrt{2}r}{2}$ donne une aire maximum pour le rectangle.

Elle vaut alors $f\left(\frac{\sqrt{2}r}{2}\right)=2\frac{\sqrt{2}r}{2}\sqrt{r^2-\left(\frac{\sqrt{2}r}{2}\right)^2}=\sqrt{2}r\sqrt{r^2-\frac{r^2}{2}}=\sqrt{2}r\sqrt{\frac{r^2}{2}}=$

$=\sqrt{2}r\frac{r}{\sqrt{2}}=r^2$.

Ainsi l'aire maximum du rectangle est r^2.

b) Le volume engendré par la rotation du rectangle autour du diamètre du cercle est le volume d'un cylindre de rayon y et de hauteur $2x$.

Le volume vaut donc $\pi y^2\cdot 2x=2xy^2$.

Avec $y=\sqrt{r^2-x^2}$, on a volume $=2\pi x(r^2-x^2)$.

Pour trouver le volume maximum, on doit trouver le maximum de la fonction $g(x)=2\pi x(r^2-x^2)$.

On a $g(x)=u\cdot v$ avec $u=2\pi x$ et $v=r^2-x^2$. Ainsi $u'=2\pi$ et $v'=-2x$, d'où

$g'(x) = u'v + uv' = 2\pi \cdot (r^2 - x^2) + 2\pi x(-2x) = 2\pi r^2 - 2\pi x^2 - 4\pi x^2 =$
$= 2\pi r^2 - 6\pi x^2 = 2\pi(r^2 - 3x^2)$.

Ainsi $g'(x) = 0 \Rightarrow 2\pi(r^2 - 3x^2) = 0 \Rightarrow r^2 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{r^2}{3} \Rightarrow x = \frac{r}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}r}{3}$.

On vérifie que $x = \frac{\sqrt{3}r}{3}$ correspond au maximum du volume engendré en faisant un tableau de variation:

x		$\frac{\sqrt{3}r}{3}$	
Signe de $g'(x)$	$+$	0	$-$
Croissance ou décroissance de $g(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

Ainsi $x = \frac{\sqrt{3}r}{3}$ donne un volume maximum pour le cylindre engendré.

Il vaut alors $g\left(\frac{\sqrt{3}r}{3}\right) = 2\pi \frac{\sqrt{3}r}{3}\left(r^2 - \left(\frac{\sqrt{3}r}{3}\right)^2\right) = \frac{2\pi\sqrt{3}r}{3}\left(r^2 - \frac{r^2}{3}\right) =$
$= \frac{2\pi\sqrt{3}r}{3} \cdot \frac{2r^2}{3} = \frac{4\pi\sqrt{3}r^3}{9}$.

Ainsi le volume maximum engendré est $\frac{4\pi\sqrt{3}r^3}{9}$.

c) Le volume engendré par la rotation autour de l'axe de symétrie du demi-cercle (autrement dit de l'axe y du dessin) est le volume d'un cylindre de rayon x et de hauteur y.

Le volume vaut donc $\pi x^2 y$.

Avec $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, on a volume $= \pi x^2 \sqrt{r^2 - x^2}$.

Pour trouver le volume maximum, on doit trouver le maximum de la fonction $h(x) = \pi x^2 \sqrt{r^2 - x^2}$.

On a $h(x) = u \cdot v$ avec $u = \pi x^2$ et $v = \sqrt{r^2 - x^2}$. Ainsi $u' = 2\pi x$ et $v' = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$,
d'où $h'(x) = u'v + uv' = 2\pi x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + \pi x^2 \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right) =$
$= 2\pi x \sqrt{r^2 - x^2} - \frac{\pi x^3}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{\pi x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\left(2(r^2 - x^2) - x^2\right) = \frac{\pi x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\left(2r^2 - 2x^2 - x^2\right) =$
$= \frac{\pi x}{\sqrt{r^2 - x^2}}(2r^2 - 3x^2)$.

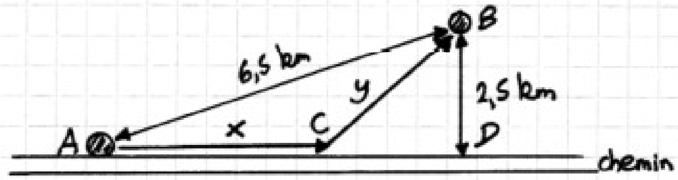
Ainsi $h'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\pi x}{\sqrt{r^2 - x^2}}(2r^2 - 3x^2) = 0 \Rightarrow x = 0$ (exclu) ou $2r^2 - 3x^2 = 0$
$\Rightarrow 3x^2 = 2r^2 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{3}r^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}}\,r$.

Similairement à a) et b), on vérifie avec un tableau de variation que $x = \sqrt{\frac{2}{3}}\,r$ correspond à un maximum pour $h(x)$.

Avec $x = \sqrt{\frac{2}{3}}\,r$, le volume engendré vaut alors $h\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,r\right) = \pi\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,r\right)^2 \sqrt{r^2 - \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,r\right)^2} =$
$= \pi \frac{2}{3} r^2 \cdot \sqrt{r^2 - \frac{2}{3}r^2} = \frac{2\pi}{3} r^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}r^2} = \frac{2\pi}{3} r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} r = \frac{2\pi\sqrt{3}r^3}{9}$.

Exercice 12

On a la situation suivante :



La vitesse est le quotient de la distance par le temps ($V = \frac{d}{t}$).

Par conséquent, le temps est le quotient de la distance par la vitesse ($t = \frac{d}{V}$).

Entre A et C, la vitesse est de 15 km/h (sur le chemin).

Le temps de parcours entre A et C est donc $\frac{x}{15}$.

Entre C et B, la vitesse est de 10 km/h (à travers champs).

Le temps de parcours entre C et B est ainsi $\frac{y}{10}$.

Le temps de parcours total est donc $t = \frac{x}{15} + \frac{y}{10}$ avec $0 \leq x \leq AD$.

Dans le triangle ABD, par le théorème de Pythagore, on a $AB^2 = AD^2 + BD^2$

$\Rightarrow AD^2 = AB^2 - AD^2 = 6{,}5^2 - 2{,}5^2 = 36 \Rightarrow AD = 6$.

De plus $CD = AD - AC = 6 - x$.

Par le théorème de Pythagore dans le triangle BCD, on a $BC^2 = CD^2 + BD^2 =$

$= (6-x)^2 + 2{,}5^2 = (6-x)^2 + 6{,}25$.

Comme $y = BC$, on a $y = \sqrt{(6-x)^2 + 6{,}25}$.

Le temps de parcours entre A et B est ainsi $t = \frac{x}{15} + \frac{\sqrt{(6-x)^2+6{,}25}}{10} =$

$= \frac{2x + 3\sqrt{(6-x)^2+6{,}25}}{30}$ avec $0 \leq x \leq 6$.

On doit donc trouver le minimum de la fonction $t(x) = \frac{2x+3\sqrt{(6-x)^2+6{,}25}}{30}$, $0 \leq x \leq 6$.

On a $t'(x) = \frac{1}{30}\left(2 + 3 \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{(6-x)^2+6{,}25}} \cdot \cancel{2}(6-x)\cdot(-1)\right) = \frac{1}{30}\left(2 - \frac{3(6-x)}{\sqrt{(6-x)^2+6{,}25}}\right)$.

$t'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{30}\left(2 - \frac{3(6-x)}{\sqrt{(6-x)^2+6{,}25}}\right) = 0 \Rightarrow 2 - \frac{3(6-x)}{\sqrt{(6-x)^2+6{,}25}} = 0 \Rightarrow 2 = \frac{3(6-x)}{\sqrt{(6-x)^2+6{,}25}}$

$\Rightarrow 2\sqrt{(6-x)^2+6{,}25} = 3(6-x) \Rightarrow 4\left((6-x)^2+6{,}25\right) = 9(6-x)^2$

$\Rightarrow 4(6-x)^2 + 25 = 9(6-x)^2 \Rightarrow 5(6-x)^2 = 25 \Rightarrow (6-x)^2 = 5 \Rightarrow 6 - x = \pm\sqrt{5}$

$\Rightarrow x = 6 \pm \sqrt{5}$.

Le cas $x = 6 + \sqrt{5}$ est exclu puisqu'on doit avoir $0 \leq x \leq 6$.

Ainsi $x = 6 - \sqrt{5}$.

Avec un tableau de variations, on vérifie que $x = 6 - \sqrt{5}$ est un minimum de $t(x)$:

x	0		$6-\sqrt{5}$		6
signes de $t'(x)$		$-$	0	$+$	
croissance ou décroissance de $t(x)$		↘	min	↗	

Ainsi $x = 6-\sqrt{5}$ est bien le minimum de $t(x)$ lorsque $0 \leq x \leq 6$.

Avec $x = 6-\sqrt{5}$, on a $t(x) = \dfrac{2(6-\sqrt{5}) + 3\sqrt{(6-6+\sqrt{5})^2+6,25}}{30} = \dfrac{12-2\sqrt{5}+3\sqrt{(\sqrt{5})^2+6,25}}{30} =$

$$= \frac{12-2\sqrt{5}+3\sqrt{5+6,25}}{30} = \frac{12-2\sqrt{5}+3\sqrt{11,25}}{30} = \frac{12-2\sqrt{5}+3\sqrt{\frac{45}{4}}}{30} = \frac{12-2\sqrt{5}+\frac{3}{2}\sqrt{45}}{30} =$$

$$= \frac{12-2\sqrt{5}+\frac{3}{2}\cdot 3\sqrt{5}}{30} = \frac{12-2\sqrt{5}+\frac{9}{2}\sqrt{5}}{30} = \frac{12+\frac{5}{2}\sqrt{5}}{30} = \frac{24+5\sqrt{5}}{60} \cong 0,586\text{h} =$$

$$= 35,18 \text{ min} = 35 \text{ min } 10,82 \text{s}.$$

Le temps minimum est donc 35 min 10,82s.