Exercice 1

Décompose en produits de facteurs premiers :
25'000 , 150'000 , 4700 , 4200 , 20'000'000 ,
4095 , 375'000.

25'000	2
12'500	2
6250	2
3125	5
625	5
125	5
25	5
5	5
1	

$25'000 = 2^3 \cdot 5^5$

150'000	2
75'000	2
37'500	2
18'750	2
9375	3
3125	5
625	5
125	5
25	5
5	5
1	

$150'000 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^5$

4700	2
2350	2
1175	5
235	5
47	47
1	

$4700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 47$

4200	2
2100	2
1050	2
525	3
175	5
35	5
7	7
1	

$4200 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$

20'000'000	2
10'000'000	2
5'000'000	2
2'500'000	2
1'250'000	2
625'000	2
312'500	2
156'250	2
78'125	5
15'625	5
3'125	5
625	5
125	5
25	5
5	5
1	

$20'000'000 = 2^8 \cdot 5^7$

4095	3
1365	3
455	5
91	7
13	13
1	

$4095 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$

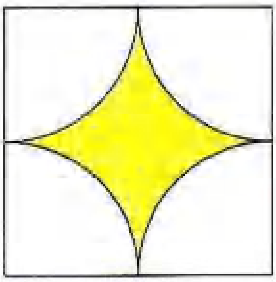
375'000	2
187'500	2
93'750	2
46'875	3
15'625	5
3125	5
625	5
125	5
25	5
5	5
1	

$375'000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^6$

Exercice 2

Calcule le périmètre et l'aire des figures colorées.

a)



$5^2 - 4\cdot\frac{\pi\cdot 2{,}5^2}{4} =$

$= 25 - \pi\cdot 2{,}5^2 =$

$= 25 - 6{,}25\pi \cong \underline{5{,}365\,cm^2}$

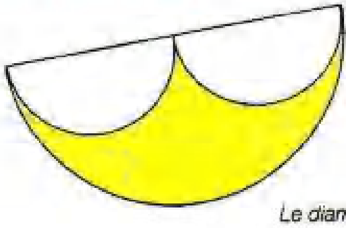
$4\cdot\frac{2\pi\cdot 2{,}5}{4} = 5\pi \cong \underline{15{,}708\,cm}$

Le côté du carré mesure 5 cm.

e)

$\frac{\pi\cdot 7^2}{2} - \cancel{2}\cdot\frac{\pi\cdot 3{,}5^2}{\cancel{2}} = \frac{49\pi}{2} - 12{,}25\pi = 12{,}25\pi \cong$

$\cong \underline{38{,}48\,cm^2}$

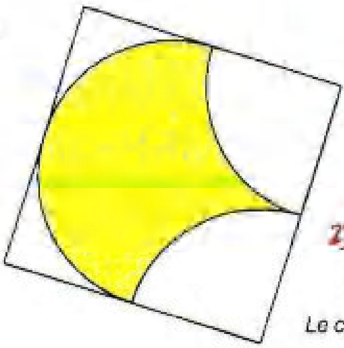


$\frac{\cancel{2}\pi\cdot 7}{\cancel{2}} + \cancel{2}\cdot\frac{2\pi\cdot 3{,}5}{\cancel{2}} =$

$= 7\pi + 7\pi = 14\pi \cong \underline{43{,}98\,cm}$

Le diamètre du grand demi-cercle est 14 cm.

b)



$\frac{\pi\cdot 2^2}{2} + \left(2\cdot 4 - 2\cdot\frac{\pi\cdot 2^2}{4}\right) =$

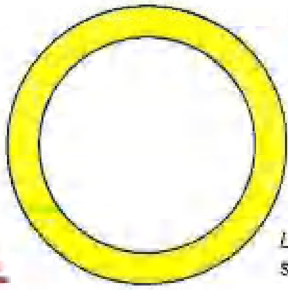
$= 2\pi + (8 - 2\pi) = \underline{8\,cm^2}$

(= aire du demi-carré)

$\frac{2\pi\cdot 2}{2} + 2\cdot\frac{2\pi\cdot 2}{4} = 4\pi \cong \underline{12{,}566\,cm}$

Le côté du carré mesure 4 cm.

f)



$\pi\cdot 12^2 - \pi\cdot 9^2 = \pi(144-81) =$

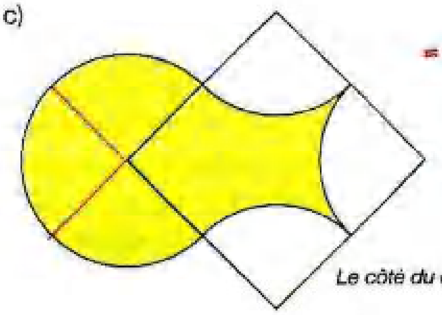
$= 63\pi \cong \underline{197{,}92\,cm^2}$

$2\pi\cdot 12 + 2\pi\cdot 9 = 24\pi + 18\pi =$

$= 42\pi \cong \underline{131{,}95\,cm}$

Les rayons des cercles sont 9 et 12 cm.

c)



= aire du carré =

$= \underline{64\,cm^2}$

$6\cdot\frac{2\pi\cdot 4}{4} = 12\pi \cong \underline{37{,}7\,cm}$

Le côté du carré mesure 8 cm.

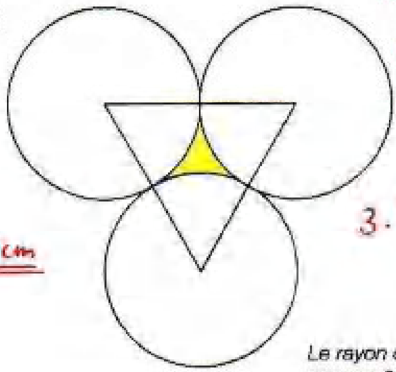
g)

aire triangle $= \frac{6\cdot\sqrt{6^2-3^2}}{2} \cong 15{,}588$

aire cercle $= \pi\cdot 3^2 \cong 28{,}27$

aire colorée $= 15{,}588 - \frac{28{,}274}{2}$

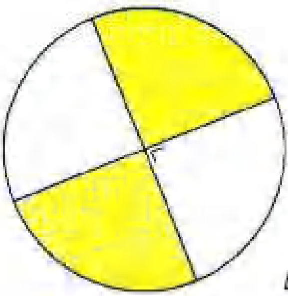
$\cong \underline{1{,}45\,cm^2}$



$3\cdot\frac{2\pi\cdot 3}{6} = 3\pi \cong \underline{9{,}425\,cm}$

Le rayon de chaque cercle mesure 3 cm.

d)



$\frac{\pi\cdot 3^2}{2} = \frac{9\pi}{2} \cong \underline{14{,}137\,cm^2}$

$2\cdot\frac{2\pi\cdot 3}{4} + 4\cdot 3 = 3\pi + 12 \cong$

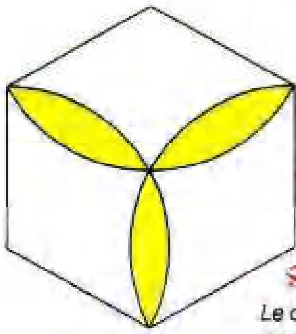
$\cong \underline{21{,}425\,cm}$

Le rayon du cercle est 3 cm.

h)

aire hexagone $= 6\cdot\frac{5\cdot\sqrt{5^2-2{,}5^2}}{2} \cong$

$\cong 64{,}95$



aire tiers du cercle $= \frac{\pi\cdot 5^2}{3} = \frac{25\pi}{3}$

aire couleur $\cong 3\cdot\frac{25\pi}{3} - 64{,}95 =$

$\cong \underline{13{,}588\,cm^2}$

$3\cdot\frac{2\pi\cdot 5}{3} = 10\pi = \underline{31{,}416\,cm}$

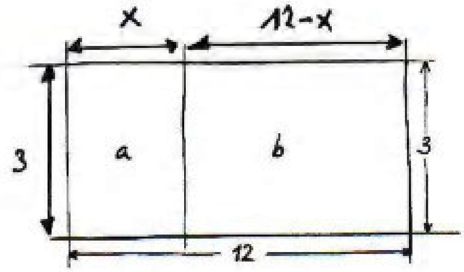
Le côté de l'hexagone régulier mesure 5 cm.

Exercice 3

Comment faire?

a) Le périmètre du rectangle *a* est le tiers du périmètre du rectangle *b*.

Quelles sont les dimensions du rectangle *a* ?



b) Un bûcheron empile des billes de bois en formant 5 couches dont chacune comprend une bille de moins que la couche directement située sous elle.

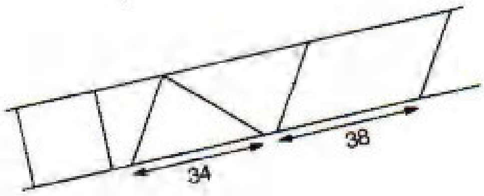
Combien doit-il poser de billes sur le sol s'il veut empiler 45 billes ?

c) A l'entraînement, Julie parcourt 1 km en 5 min et Léonie 1 km en 6 min. Cette dernière constate : « Aujourd'hui, nous avons couru durant le même intervalle de temps, mais tu as parcouru exactement 1,5 km de plus que moi. »

Quelle a été la durée de leur entraînement ?

d) L'aire du parallélogramme est égale à celle du carré et du triangle réunis.

Quelle est la largeur de la bande dans laquelle ces trois polygones ont été dessinés ?



a) périmètre du rectangle a : $2x+6$

périmètre du rectangle b : $2(12-x)+6 = 24-2x+6 = 30-2x$

périmètre du rectangle a = $\frac{1}{3}$ périmètre du rectangle b :

$$2x+6 = \frac{1}{3}(30-2x) \quad | \cdot 3$$
$$6x+18 = 30-2x \quad | +2x$$
$$8x+18 = 30 \quad | -18$$
$$8x = 12 \quad | :8$$
$$x = 1{,}5$$

⇒ les dimensions du rectangle a sont 3 cm sur 1,5 cm.

b) x = nb de bille sur le sol

Couches supérieures : x−1, x−2, x−3, x−4

total : 45 billes

⇒ $x+x-1+x-2+x-3+x-4 = 45$ | réduction
$$5x-10 = 45 \quad | +10$$
$$5x = 55 \quad | :5$$
$$x = 11$$

⇒ il doit mettre 11 billes sur le sol

c) Julie : 1 km en 5 mn
Léonie : 1 km en 6 mn
t = durée de l'entraînement (en mn)
Julie : $\frac{1}{5}$ km en 1 mn $\Rightarrow$ $\frac{t}{5}$ km en t mn
Léonie : $\frac{1}{6}$ km en 1 mn $\Rightarrow$ $\frac{t}{6}$ km en t mn
Léonie dit que Julie a parcouru 1,5 km de plus qu'elle :

$$\frac{t}{5} = \frac{t}{6} + 1{,}5 \quad \Big| \cdot 30$$
$$6t = 5t + 45 \quad \Big| -5t$$
$$t = 45$$

$\Rightarrow$ l'entraînement a duré $\underline{\underline{45 \text{ mn}}}$

d) x = largeur de la bande.
aire du parallélogramme : $38x$
aire du carré : x^2
aire du triangle : $\frac{34x}{2}$
aire du parallélogramme = aire du carré + aire du triangle :

$$38x = x^2 + \frac{34x}{2} \quad \Big| \cdot 2$$
$$76x = 2x^2 + 34x \quad \Big| -34x$$
$$42x = 2x^2 \quad \Big| :2$$
$$21x = x^2 \quad \Big| -x^2$$
$$21x - x^2 = 0 \quad \Big| \text{factorisation}$$
$$x(21 - x) = 0 \quad \Big| \text{produit nul}$$

$\Rightarrow$ soit $x = 0$
(solution inintéressante)
soit $21 - x = 0$ | $+x$
$21 = x$

$\Rightarrow$ la largeur de la bande est $\underline{\underline{21}}$.

Exercice 4

Ces quelques problèmes...

a) Trouve deux nombres dont la somme est 654 et la différence 456.

b) Trouve deux nombres dont la somme est 123 et la différence 321.

c) Trouve deux nombres dont la somme est 276, l'un étant le triple de l'autre.

d) La somme de deux nombres est 140. La division du premier par le second donne un quotient de 7 et un reste de 4.

Quels sont ces nombres ?

e) Un terrain rectangulaire a un périmètre de 110 m. On diminue sa longueur de 1 m et on augmente sa largeur de 1 m. Son aire augmente ainsi de 4 m^2.

Quelles étaient les dimensions initiales du terrain ?

f) Une boîte contient des billes jaunes et des billes vertes.

Si on ajoutait une bille jaune, les billes jaunes représenteraient le quart du nouveau contenu de la boîte.

Si on en retirait une, elles n'en représenteraient plus que le cinquième.

Combien cette boîte contient-elle de billes vertes ?

g) Une échelle est dressée verticalement contre un mur. Le sommet de l'échelle dépasse de 10 cm le sommet du mur.
Si on écarte de 70 cm le pied de l'échelle du pied du mur, leurs sommets coïncident.

Quelle est la hauteur du mur ?

a) nombres : x et y

$$\begin{cases} x+y=654 \\ x-y=456 \end{cases} +$$

$2x = 1110$

$x = \underline{\underline{555}}$

$\Rightarrow 555 + y = 654$

$\Rightarrow y = \underline{\underline{99}}$

b) nombres : x et y

$$\begin{cases} x+y=123 \\ x-y=321 \end{cases} +$$

$2x = 444$

$x = \underline{\underline{222}}$

$\Rightarrow 222 + y = 123$

$\Rightarrow y = \underline{\underline{-99}}$

c) nombres : x et y

$$\begin{cases} x+y=276 \\ x=3y \end{cases}$$

$\Rightarrow 3y + y = 276$

$4y = 276$

$y = \underline{\underline{69}}$

$\Rightarrow x = 3.69 = \underline{\underline{207}}$

d) nombres : x et y

$$\begin{cases} x+y=140 \\ x=7y+4 \end{cases}$$

$\Rightarrow 7y+4+y = 140$

$8y = 136$

$\Rightarrow y = \underline{\underline{17}}$

$\Rightarrow x + 17 = 140$

$\Rightarrow x = \underline{\underline{123}}$

e) dimensions : x et y

$$2x + 2y = 110 \Rightarrow x + y = 50$$
$$(x-1)(y+1) = xy + 4$$
$$xy + x - y - 1 = xy + 4$$
$$x - y - 1 = 4$$
$$\Rightarrow x - y = 5$$

équations :
$$\begin{array}{r} x + y = 50 \\ x - y = 5 \;\; + \\ \hline 2x = 55 \\ x = \underline{\underline{27{,}5}} \end{array}$$

$$\Rightarrow 27{,}5 + y = 50 \Rightarrow y = \underline{\underline{22{,}5}}$$

f) x = billes vertes
y = billes jaunes

$$\begin{cases} y + 1 = \frac{1}{4}(x + y + 1) & (1) \\ y - 1 = \frac{1}{5}(x + y - 1) & (2) \end{cases}$$

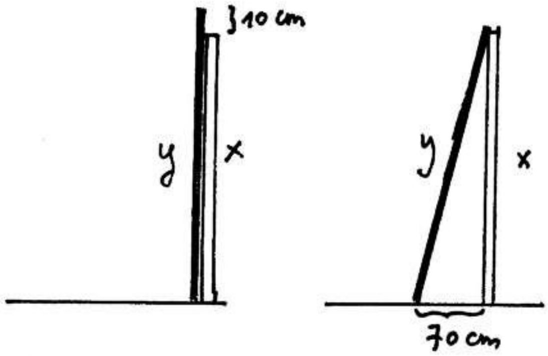
$(1) \cdot 4 \quad 4y + 4 = x + y + 1$
$$\Rightarrow 3y - x + 4 = 1$$
$$\Rightarrow x - 3y = 3$$

$(2) \cdot 5 \quad 5y - 5 = x + y - 1$
$$4y - x - 5 = -1$$
$$\Rightarrow -x + 4y = 4$$

équations :
$$\begin{array}{r} x - 3y = 3 \\ -x + 4y = 4 \;\; + \\ \hline y = 7 \end{array}$$

$$\Rightarrow x - 3 \cdot 7 = 3$$
$$x - 21 = 3$$
$$\Rightarrow x = \underline{\underline{24}}$$

g)



équations : $y = x + 10$
$$y^2 = x^2 + 70^2$$
$$\Rightarrow (x+10)^2 = x^2 + 4900$$
$$x^2 + 20x + 100 = x^2 + 4900$$
$$20x + 100 = 4900$$
$$20x = 4800$$
$$x = \underline{\underline{240\,cm}}$$

Exercice 5

Calcule :

a) (+528) + (−78) = 450

b) (+725) + (+79) = 804

c) (−725) + (−79) = −804

d) (−528) + (−78) = −606

e) (−528) + (+78) = −450

f) (−725) + (+79) = −646

g) (+191) + (−19) + (−81) = 91

h) (+229) + (−129) + (−107) = −7

i) (+187) + (−65) + (−22) = 100

j) (−9) + (−19) + (−605) = −633

k) (−2500) + (+1984) = −516

l) (−10000) + (−15) + (+23) = −9992

m) (+171) + (−17) + (−11) = 143

n) (+17) + (+11) + (−171) = −143

o) (−119) + (+111) + (+119) = 111

p) (−218) + (−72) + (+28) = −262

q) (−72) + (−228) + (−18) = −318

r) (−604) + (−175) + (−25) = −804

s) (+174) + (−49) + (−61) = (+64)

t) (−62) + (+22) + (−47) = (−87)

u) (+121) + (−115) + (−116) = (−110)

v) (−124) + (−17) + (+905) = (+764)

w) (+621) + (−721) + (−90) = (−190)

x) (−41) + (−619) + (−978) = (−1638)

Exercice 6

Calcule :

a) (-5737) - (-737) + (-4000) = - 9000

b) (-489) + (-89) - (+400) = - 978

c) (-3) + (-5) - (+9) = - 17

d) (-11) - (+8) + (-9) = - 28

e) (-11) - (+8) - (-9) = - 10

f) (-171) + (-200) - (+50) = - 421

g) (-5737) - (-737) - (+4000) = - 9000

h) (-489) - (-89) + (+400) = 0

i) (-3) + (-5) + (+9) = 1

j) (-11) - (+8) - (+9) = - 28

k) (-171) - (+200) + (-50) = - 421

l) (-604) - (-71) + (-16) = - 549

m) (-71) + (-17) - (+5) = - 93

n) (-17) + (-5) + (-71) = - 93

o) (-190) - (+19) - (+81) = - 290

p) (-210) - (-104) - (-296) = 190

q) (-81) - (+7) - (-19) = (-69)

r) (-228) + (-71) - (-71) = (-228)

s) (+1296) - (-729) - (-140) = (+2165)

t) (-181) - (-71) + (-890) = (-1000)

u) (-171) - (-189) - (-71) = (+89)

v) (-891) - (-18) - (-17) = (-856)

Exercice 7

Calcule :

$(-8)\cdot(+10) = -80$

$(+5)\cdot(+15) = 75$

$(-2)\cdot(-9) = 18$

$(+2)\cdot(+9) = 18$

$(-2)\cdot(+4)\cdot(-3) = 24$

$(-6)\cdot(+3)\cdot(+2)\cdot(-6) = 216$

$(-4)^2 = 16$

$(-2)^5 = -32$

$(-17)\cdot(-12) = 204$

$(-5)\cdot(-7) = 35$

$(-7)\cdot(+5) = -35$

$(+5)\cdot(+7) = 35$

$(-5)\cdot(-7)\cdot(-8) = -280$

$(-11)\cdot(+7)\cdot(-2) = 154$

$(+4)^2 = 16$

$(-2)^6 = 64$

Exercice 8

Effectue les opérations suivantes :

a) $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$

b) $\frac{3}{8} + \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$

c) $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

d) $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$

e) $\frac{1}{10} + \frac{4}{15} = \frac{11}{30}$

f) $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{5}{6} = \frac{17}{6}$

g) $\frac{2}{9} + \frac{7}{15} = \frac{31}{45}$

h) $\frac{3}{4} - \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$

i) $1 + \frac{10}{9} = \frac{19}{9}$

j) $0,5 + \frac{4}{3} = \frac{11}{6}$

k) $2 + \frac{5}{6} - \frac{7}{8} = \frac{47}{24}$

l) $\frac{2}{5} + \frac{4}{15} + 2,2 = \frac{43}{15}$

m) $\frac{27}{100} - 0,12 = \frac{3}{20}$

n) $\frac{25}{17} - \frac{19}{17} = \frac{6}{17}$

o) $\frac{7}{3} - 0,1 - \frac{1}{3} = \frac{19}{10}$

p) $\frac{15}{2} - 7,5 + \frac{12}{13} = \frac{12}{13}$

q) $\frac{1}{3} - 0,33 = \frac{1}{300}$

r) $\frac{5}{6} + \frac{5}{7} + \frac{5}{8} = \frac{365}{168}$

Exercice 9

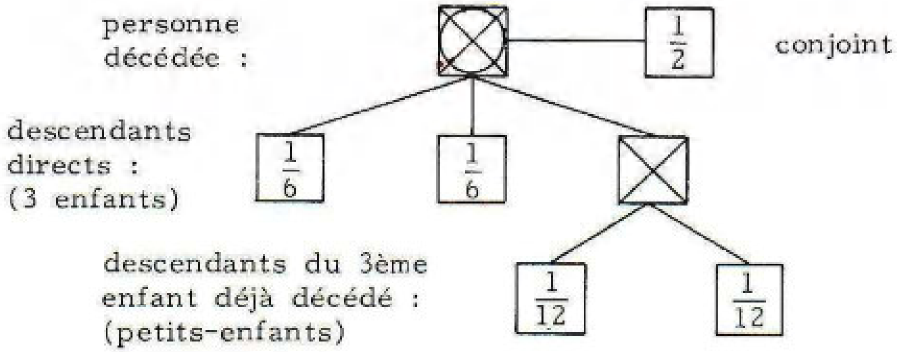
Héritages

Lorsqu'une personne décède et laisse un héritage, la loi prévoit que son conjoint (mari ou femme) reçoit la moitié de la succession et que ses descendants directs (ses enfants) se partagent le reste en parties égales.

Si le conjoint est déjà décédé, les descendants directs se partagent la succession entière.

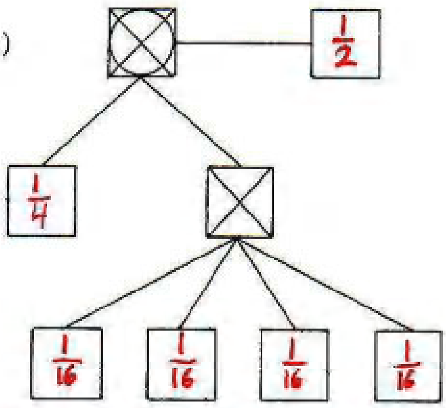
Si l'un des descendants est "prédécédé", sa part est partagée entre ses descendants.

Exemple :

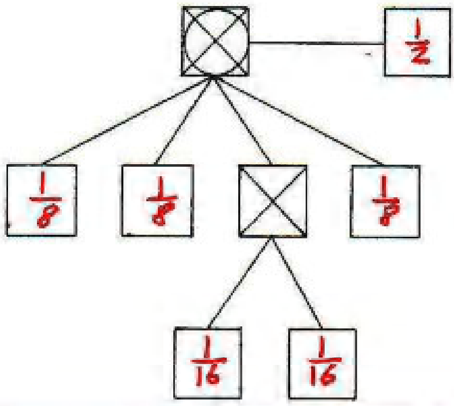


Calcule la fraction d'héritage que recevra chaque héritier lors des successions illustrées par les schémas suivants :

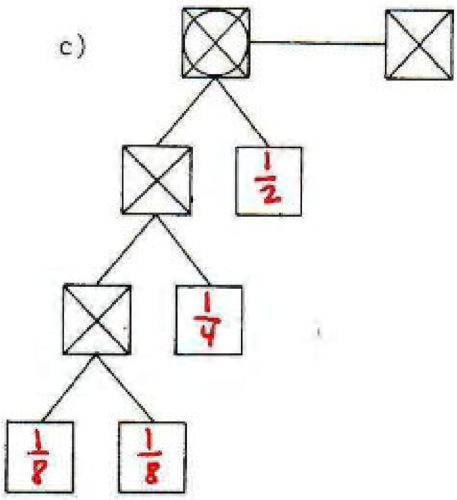
a)



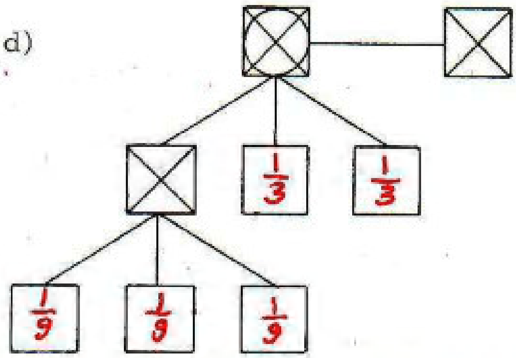
b)



c)



d)



Exercice 10

Calcule et donne une réponse sous forme de code irréductible.

a) $\frac{3}{10} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{8}$

b) $\frac{5}{6} \cdot \frac{10}{9} = \frac{25}{27}$

c) $\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{12}$

d) $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$

e) $\frac{5}{8} \cdot \frac{7}{1} = \frac{35}{8}$

f) $\frac{22}{3} \cdot \frac{1}{11} = \frac{2}{3}$

g) $\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{1} = 1$

h) $\frac{3}{2} \cdot \frac{6}{1} = 9$

i) $\frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$

j) $\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{4} = \frac{21}{8}$

k) $\frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{4}{3}$

l) $\frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{15}{4}$

m) $\frac{6}{7} \cdot 2 = \frac{12}{7}$

n) $\frac{1}{2} \cdot 6 = 3$

o) $\frac{5}{7} \cdot 9 = \frac{45}{7}$

p) $\frac{3}{8} \cdot 2 = \frac{3}{4}$

q) $\frac{7}{3} \cdot 6 = 14$

r) $\frac{8}{9} \cdot 5 = \frac{40}{9}$

s) $\frac{11}{12} \cdot 9 = \frac{33}{4}$

t) $\frac{1}{2} \cdot 0,6 = \frac{3}{10}$

u) $\frac{1}{3} \cdot 0,9 = \frac{3}{10}$

v) $\frac{1}{4} \cdot 0,25 = \frac{1}{16}$

w) $\frac{1}{8} \cdot 1,2 = \frac{3}{20}$

x) $0,7 \cdot \frac{1}{14} = \frac{1}{20}$

y) $\frac{2}{5} \cdot 1,5 = \frac{3}{5}$

z) $0,45 \cdot 2,5 = \frac{9}{8}$

Exercice 11

Je suis parti en vacances avec Fr. 1200.--. A Paris, j'ai dépensé les $\frac{2}{5}$ de mon argent. A Marseille, j'ai dépensé les $\frac{3}{4}$ du reste. Quelle somme ai-je encore ?

$1200.- - \frac{2}{5} \times 1200.- = 1200.- - \frac{2400.-}{5} = 1200.- - 480.- = 720.-$

$720.- - \frac{3}{4} \times 720.- = 720.- - \frac{2160.-}{4} = 720.- - 540.- = \underline{\underline{180.-}}$

Exercice 12

Complète :

18543 cm =	185,43	m	25000 cm^2 =	2,5	m^2
0,04 km =	40	m	450 mm^2 =	4,5	cm^2
0,082 m =	8,2	cm	0,000 005 km^2 =	5	m^2
21000 mm =	21	m	6,3 ha =	630	a

Exercice 13

Complète :

0,027 m^3	=	27	dm^3		70 000 ℓ	=	70'000	dm^3
347 200 mm^3	=	347,2	cm^3		1 800 000 ℓ	=	1800	m^3
0,755 ℓ	=	75,5	cℓ		17,5 ℓ	=	17'500	cm^3
2504 mℓ	=	2,504	dm^3		0,85 ℓ	=	850'000	mm^3

Exercice 14

Les durées sont souvent exprimées à l'aide de plusieurs unités.

Exemples : d_1 = 3h 24mn d_2 = 1j 15h 30mn

d_3 = 2h 47mn 30s d_4 = 19h 25mn 55s

Sous cette forme, complexe, il n'est pas aussi facile d'effectuer des opérations qu'avec des nombres écrits en codes à virgule décimaux. C'est possible toutefois. Essaie :

a) $d_1 + d_2$ = 1j 18h 54mn

b) $d_1 + d_3$ = 6h 11mn 30s

c) $d_2 - d_3$ = 1j 12h 42mn 30s

d) $5\ d_1$ = 17h

e) $d_2 + d_3 + d_4$ = 2j 13h 43mn 25s

f) $10\ d_3$ = 1j 3h 55mn

g) $d_1 : 6$ = 34mn

h) $d_4 : 10$ = 1h 56mn 35,5s

Exercice 15

Sur une carte au 1:50 000, la distance mesurée entre Zweisimmen et la Lenk est de 23 cm.

a) Quelle est la distance séparant ces deux localités dans la réalité ?

b) Quelle distance mesurerais-tu sur une carte au 1:25 000 ? au 1:100 000 ?

a)

	(cm) carte	(cm) réalité	
$\cdot 23$	1	50'000	$\cdot 23$
	23	1'150'000	

1'150'000 cm = 11500 m = 11,5 km

b)

	carte (cm)	réalité (cm)	
: 25'000	1	25'000	: 25'000
· 1'150'000	46	1'150'000	· 1'150'000

	carte (cm)	réalité (cm)	
: 100'000	1	100'000	: 100'000
· 1'150'000	11,5	1'150'000	· 1'150'000

Exercice 16

Sur cet extrait de carte, tu peux lire la distance qui sépare Milan de Bergame et Bergame de Brescia.

A toi de retrouver l'échelle de la carte !

Milan-Bergame :
carte : ~5cm
réalité : 49 km =
= 4'900'000cm

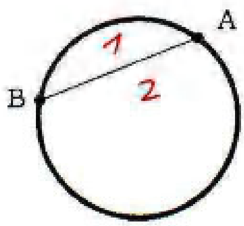
Bergame-Brescia :
carte : ~5cm
réalité : 51 km =
= 5'100'000cm

Echelle carte = 5'000'000cm : 5cm = 1'000'000 ⇒ 1:1'000'000

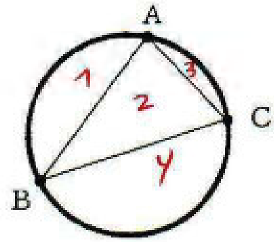
Exercice 17

Un disque dans tous ses états

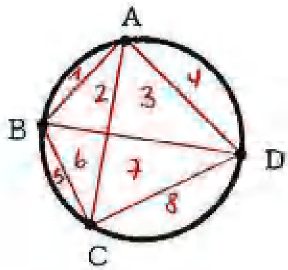
Une corde AB divise ce disque en 2 morceaux :



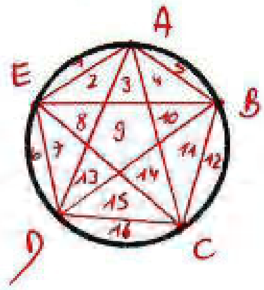
Les trois cordes AB, BC et AC le divisent en 4 morceaux :



Continue en ajoutant un point D et en traçant toutes les cordes qui relient les 4 points. Combien obtiens-tu de cordes et de morceaux ? 8 morceaux et 6 cordes



Et avec un cinquième point E, situé sur le cercle ? 16 morceaux et 10 cordes



Peux-tu prévoir le nombre de cordes et de morceaux obtenus avec 6 points du cercle ? Vérifie tes résultats !!!

Oui

Récapitulation :

Nombre de points	2	3	4	5	6	7	n
Nombre de cordes	1	3	6	10	15	21	$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$
Nombre de morceaux	2	4	8	16	32	64	2^{n-1}

Exercice 18

Complète :

ppmc(13;17) = $13 \cdot 17 = 221$

pgdc(143;22) = $\text{pgdc}(11 \cdot 13; 11 \cdot 2) = 11$

pgdc(217;155) = $\text{pgdc}(7 \cdot 31; 5 \cdot 31) = 31$

ppmc(145;435) = $\text{ppmc}(5 \cdot 29; 3 \cdot 5 \cdot 29) = 3 \cdot 5 \cdot 29 = 435$

pgdc(102;170;238) =

$= \text{pgdc}(2 \cdot 3 \cdot 17; 2 \cdot 5 \cdot 17, 2 \cdot 7 \cdot 17) = 2 \cdot 17 = 34$

pgdc(783;1131) = $\text{pgdc}(3^3 \cdot 29; 3 \cdot 13 \cdot 29) = 3 \cdot 29 = 87$

ppmc(333;407) = $\text{ppmc}(3^2 \cdot 37; 11 \cdot 37) = 3^2 \cdot 11 \cdot 37 = 3663$

pgdc(1409;87) = 1 (1409 est premier)

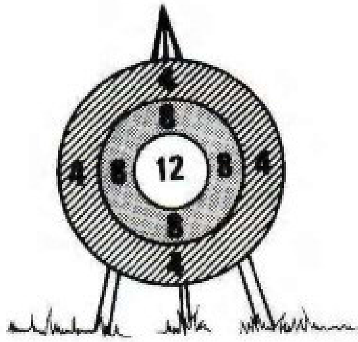
ppmc(1581;51) = $\text{ppmc}(3 \cdot 17 \cdot 31, 3 \cdot 17) = 1581$

ppmc(65;156;104) =

$= \text{ppmc}(5 \cdot 13, 2^2 \cdot 3 \cdot 13; 2^3 \cdot 13) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 = 1560$

Exercice 19

Tir à l'arbalète



Après leur séance d'entraînement sur cette cible, les tireurs du Tell's Club font leurs comptes :

- le nombre de points obtenu par les flèches tirées dans le centre "12" est le même que celui de la zone "8" et que celui de la zone extérieure "4";
- en comptant les 51 flèches qui ont manqué la cible, on obtient pour la séance d'entraînement, une moyenne de 5 points par flèche, exactement.

Combien de flèches ont atteint chaque zone de la cible, et combien de points ont été obtenus au cours de la séance d'entraînement ?

x = nb de points ds le "12" = nb de points ds le "8" = nb de points ds le "4"

$\Rightarrow$ nb de flèches ds 12 = $\frac{x}{12}$

nb de flèches ds 8 = $\frac{x}{8}$

nb de flèches ds 4 = $\frac{x}{4}$

nb de flèches tirées = $\frac{x}{12} + \frac{x}{8} + \frac{x}{4} + 51 = \frac{11x}{24} + 51 = \frac{11x+1224}{24}$

nb de points totaux = $3x$

moyenne = $\dfrac{3x}{\frac{11x+1224}{24}} = 3x : \frac{11x+1224}{24} = 3x \cdot \frac{24}{11x+1224} = \frac{72x}{11x+1224} = 5$

$$\frac{72x}{11x+1224} = 5$$

$$72x = 5(11x+1224)$$

$$72x = 55x + 6120$$

$$17x = 6120$$

$$x = 360$$

$\Rightarrow$ nb de flèches ds 12 = $\frac{360}{12} = \underline{\underline{30}}$

nb de flèches ds 8 = $\frac{360}{8} = \underline{\underline{45}}$

nb de flèches ds 4 = $\frac{360}{4} = \underline{\underline{90}}$

points totaux = $3x$ = $\underline{\underline{1080 \text{ pts}}}$

Exercice 20

$$\boxed{\; ? \quad \begin{array}{c} 3 \\ \hline 2 \\ \hline 5 \end{array} \quad ? \;}$$

- Amélie pense qu'il s'agit du nombre 0,3 ou $\frac{3}{10}$
- Marcel estime qu'il s'agit du nombre 7,5 ou $\frac{15}{2}$

Et toi, qu'en penses-tu ? Comment Amélie et Marcel sont-ils arrivés à leur interprétation ?

Amélie : $(3 : 2) : 5 = 3 \cdot 10 = \frac{3}{10} = 0{,}3$

Marcel : $3 : (2 : 5) = 3 : 0{,}4 = 7{,}5 = \frac{15}{2}$

Calcule :

$\frac{1}{\frac{2}{3}} = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ $\qquad \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ $\qquad \frac{\frac{3}{4}}{\frac{8}{9}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{8} = \frac{27}{32}$

$1 : \frac{2}{3} = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ $\qquad \frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ $\qquad \frac{3}{4} : \frac{8}{9} = \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{8} = \frac{27}{32}$

$\frac{8}{9} : \frac{3}{4} = \frac{8}{9} \cdot \frac{4}{3} = \frac{32}{27}$ $\qquad \frac{3}{4} : \frac{9}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} = \frac{2}{3}$ $\qquad \frac{9}{8} : \frac{4}{3} = \frac{9}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{32}$

Exercice 21

Calcule :

a) $\left(\frac{13}{10} : \frac{13}{10}\right) : \frac{26}{27} = \frac{27}{26}$

b) $\frac{13}{10} : \left(\frac{13}{10} : \frac{26}{27}\right) = \frac{26}{27}$

c) $\left(\frac{3}{11} : \frac{22}{9}\right) \cdot \frac{8}{33} = \frac{36}{1331}$

d) $\frac{3}{11} : \left(\frac{22}{9} \cdot \frac{8}{33}\right) = \frac{81}{176}$

e) $\left(\frac{1}{18} \cdot 2\right) : \frac{-1}{9} = -1$

f) $\frac{1}{18} \cdot \left(2 : \frac{-1}{9}\right) = -1$

g) $\left(\frac{14}{25} : \frac{21}{25}\right) \cdot \frac{5}{28} = \frac{5}{42}$

h) $\frac{14}{25} : \left(\frac{21}{25} \cdot \frac{5}{28}\right) = \frac{56}{15}$

i) $\left(\frac{7}{4} \cdot \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{8}{15} : 4\right) = \frac{5}{6}$

j) $\left(\frac{47}{3} + \frac{28}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1$

k) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 - \left(4 + \frac{2}{5}\right) = -\frac{542}{125}$

l) $\left(\frac{15}{7} : \frac{18}{7}\right) + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10}\right) = \frac{9}{10}$

m) $\left(\frac{5}{6} - \frac{3}{10}\right)^2 = \frac{64}{225}$

n) $\left(\frac{2}{7} \cdot \frac{14}{3}\right) - \left(1 + \frac{1}{3}\right) = 0$

o) $\left(7 + \frac{3}{4}\right)^2 : \left(5 + \frac{1}{6}\right) = \frac{93}{8}$

p) $\left(\frac{11}{15} - \frac{3}{20}\right) - \left(\frac{9}{10} - \frac{11}{15}\right) = \frac{5}{12}$

Exercice 22

Dans toutes les expressions de cette page, tu devras remplacer les lettres u, v, w, x, y et z par les valeurs suivantes :

$u = \frac{2}{3}$ $v = \frac{1}{4}$ $w = \frac{-1}{6}$ $x = \frac{4}{3}$ $y = 0,6$ $z = \frac{-3}{7}$

Mais avant d'effectuer les calculs, il n'est pas interdit de se demander si les deux expressions d'un même ligne prendront la même valeur !

a) $(u+v)+w = \frac{3}{4}$ $u+(v+w) = \frac{3}{4}$

b) $(x+y)v = \frac{29}{60}$ $xv+yv = \frac{29}{60}$

c) $(x-z)+u = \frac{17}{7}$ $x-(z-u) = \frac{17}{7}$

d) $u^2+w^2 = \frac{17}{36}$ $(u+w)^2 = \frac{1}{4}$

e) $18(ux) = 16$ $(18u)(18x) = 288$

f) $\frac{1}{u}+\frac{1}{v} = \frac{11}{2}$ $\frac{1}{u+v} = \frac{12}{11}$

g) $\frac{u}{w}+\frac{x}{w} = -12$ $\frac{u+x}{w} = -12$

h) $\frac{3y}{7x} = \frac{27}{140}$ $\frac{3}{7}(y:x) = \frac{27}{140}$

i) $(xy)^3 = \frac{64}{125}$ $x^3y^3 = \frac{64}{125}$

j) $(y-z)^2 = \frac{1296}{1225}$ $y^2-z^2 = \frac{216}{1225}$

k) $\left(\frac{x}{z}\right)^2 = \frac{784}{81}$ $\frac{x^2}{z^2} = \frac{784}{81}$

l) $\frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{4}{3}$ $1 \cdot x = \frac{4}{3}$

m) $(y-z)(y+z) = \frac{216}{1225}$ $y^2-z^2 = \frac{216}{1225}$

n) $(5v)^2 = \frac{25}{16}$ $10v^2 = \frac{5}{8}$

o) $-w^2 = -\frac{1}{36}$ $(-w)^2 = \frac{1}{36}$

p) $\frac{1}{-u} = -\frac{3}{2}$ $\frac{-1}{u} = -\frac{3}{2}$

q) $3v^2 = \frac{3}{16}$ $(3v)^2 = \frac{9}{16}$

Exercice 23

Cette clé permet de boulonner des écrous d'un demi-pouce de largeur.
(1 pouce = 2,54 cm)

Bill, mécanicien américain, possède dans sa boîte à outils les clefs suivantes :

$\frac{9}{32}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{19}{32}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{11}{32}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{25}{32}$
$\frac{9}{32}$	$\frac{12}{32}$	$\frac{8}{32}$	$\frac{19}{32}$	$\frac{14}{32}$	$\frac{20}{32}$	$\frac{22}{32}$	$\frac{16}{32}$	$\frac{18}{32}$	$\frac{24}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{11}{32}$	$\frac{30}{32}$	$\frac{26}{32}$	$\frac{28}{32}$	$\frac{25}{32}$

a) Il désire les ranger de la plus petite à la plus grande. Dans quel ordre doit-il les disposer ?

$$\frac{1}{4} < \frac{9}{32} < \frac{5}{16} < \frac{11}{32} < \frac{3}{8} < \frac{7}{16} < \frac{1}{2} < \frac{9}{16} < \frac{19}{32} < \frac{5}{8} < \frac{11}{16} < \frac{3}{4} < \frac{25}{32} < \frac{13}{16} < \frac{7}{8} < \frac{15}{16}$$

b) En réparant une machine, il s'aperçoit que celle-ci a été fabriquée en Europe, où la largeur des écrous s'exprime en mm. Quelles clefs devra-t-il choisir pour dévisser des écrous de 10 mm ? de 16 mm ? de 22 mm ?

On a $2{,}54\,cm = 25{,}4\,mm = 1$ pouce $\Rightarrow 1\,mm = \frac{1}{25{,}4}$ pouce $= \frac{10}{254} = \frac{5}{127}$ pouce

$10\,mm = \frac{50}{127}$ pouces $\simeq 0{,}39$ pouces $\simeq \frac{12{,}6}{32}$ pouces $\Rightarrow$ il devra choisir la clé de $\frac{14}{32} = \frac{7}{16}$

similairement : pour 16 mm, clé de $\frac{11}{16}$ et pour 22 mm, clé de $\frac{7}{8}$

Exercice 24

Le croquis ci-dessous représente une partie d'une boîte de vitesses (3ème vitesse engagée) reliée à la roue motrice d'une voiture.

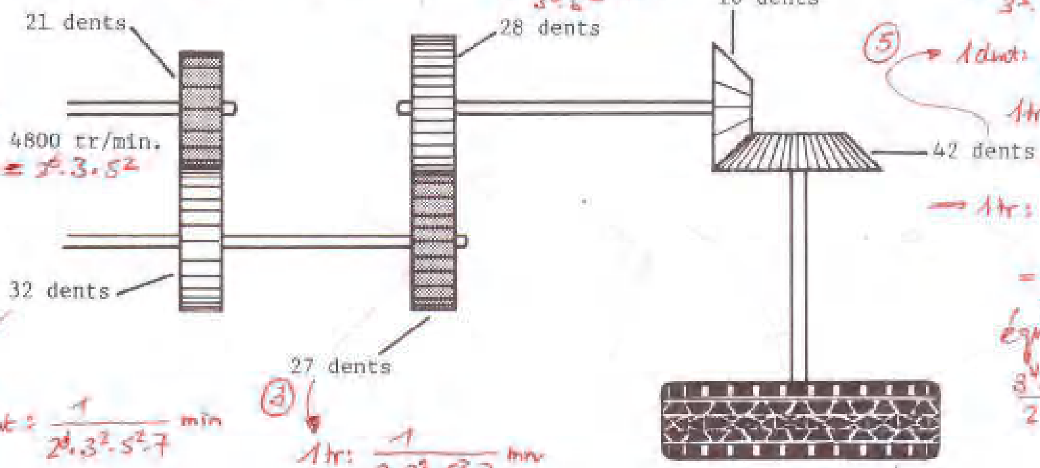
Trouve la vitesse du véhicule, en km/h, si le diamètre du pneu est de 55 cm.

(1) 4800 tr pour 1 mn

1 tr pour $\frac{1}{4800}$ mn $= \frac{1}{2^6\cdot 3\cdot 5^2}$ mn

21 dents $= 3\cdot 7$ dents

$\Rightarrow$ 1 dent : $\frac{1}{2^6\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7}$ min



$= 2^6\cdot 3\cdot 5^2$

(2) 1 dent : $\frac{1}{2^6\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7}$ min

1 tr = 32 dents = 2^5 dents

$\Rightarrow$ 1 tr : $\frac{2^5}{2^6\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7}$ min $= \frac{1}{2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7}$ mn

(3) 1 tr : $\frac{1}{2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7}$ mn

27 dents = 3^3 dents

$\Rightarrow$ 1 dent : $\frac{1}{2\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7}$ mn

(4) 1 dent : $\frac{1}{2\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7}$ mn

1 tr = 28 dents = $2^2\cdot 7$ min

$\Rightarrow$ 1 tr : $\frac{2^2\cdot 7}{2\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7}$ min $= \frac{2}{3^5\cdot 5^2}$ min

(5) 1 tr : $\frac{2}{3^5\cdot 5^2}$ min

10 dents = $2\cdot 5$ dents

$\Rightarrow$ 1 dent : $\frac{2}{3^5\cdot 5^2\cdot 2\cdot 5}$ mn $= \frac{1}{3^5\cdot 5^3}$ mn

(5) 1 dent : $\frac{1}{3^5\cdot 5^3}$ mn

1 tr = 42 dents = $2\cdot 3\cdot 7$ dents

$\Rightarrow$ 1 tr : $\frac{2\cdot 3\cdot 7}{3^5\cdot 5^3}$ min $= \frac{2\cdot 7}{3^4\cdot 5^3}$

équivalent à $\frac{3^4\cdot 5^3}{2\cdot 7}$ tr/min

(6) $\frac{3^4\cdot 5^3}{2\cdot 7}$ tr/min

1 tour $= \pi\cdot d = \pi\cdot 55$ cm

$\Rightarrow \frac{3^4\cdot 5^3}{2\cdot 7}\cdot\pi\cdot 55$ cm/min

$\Rightarrow 60\cdot\frac{3^4\cdot 5^3}{2\cdot 7}\cdot\pi\cdot 55$ cm/h

$\Rightarrow \frac{60}{100'000}\cdot\frac{3^4\cdot 5^3}{2\cdot 7}\pi\cdot 55$ km/h

$\Rightarrow \cong$ 75 km/h

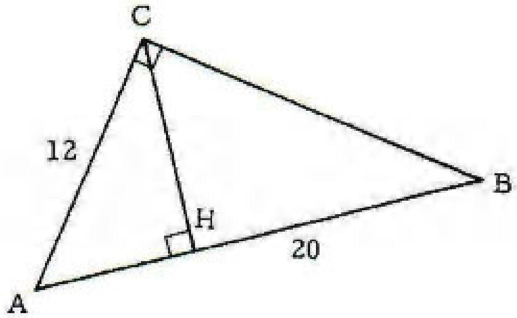
Exercice 25

Ce triangle est rectangle :

$\widehat{ACB} = 90$ (degrés)

$AC = 12$, $AB = 20$ (cm)

Calcule BC, puis CH, et enfin AH et BH.



Pythagore. $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$20^2 = 12^2 + BC^2$

$400 = 144 + BC^2$

$BC^2 = 256$

$BC = \sqrt{256} = 16$ cm

Relation des aires : $AC \cdot BC = AB \cdot CH$

$12 \cdot 16 = 20 \cdot CH$

$192 = 20 \cdot CH$

$CH = \frac{192}{20} = 9{,}6$ cm

Pythagore : $AC^2 = AH^2 + CH^2$

$12^2 = AH^2 + 9{,}6^2$

$144 = AH^2 + 92{,}16$

$AH^2 = 51{,}84$

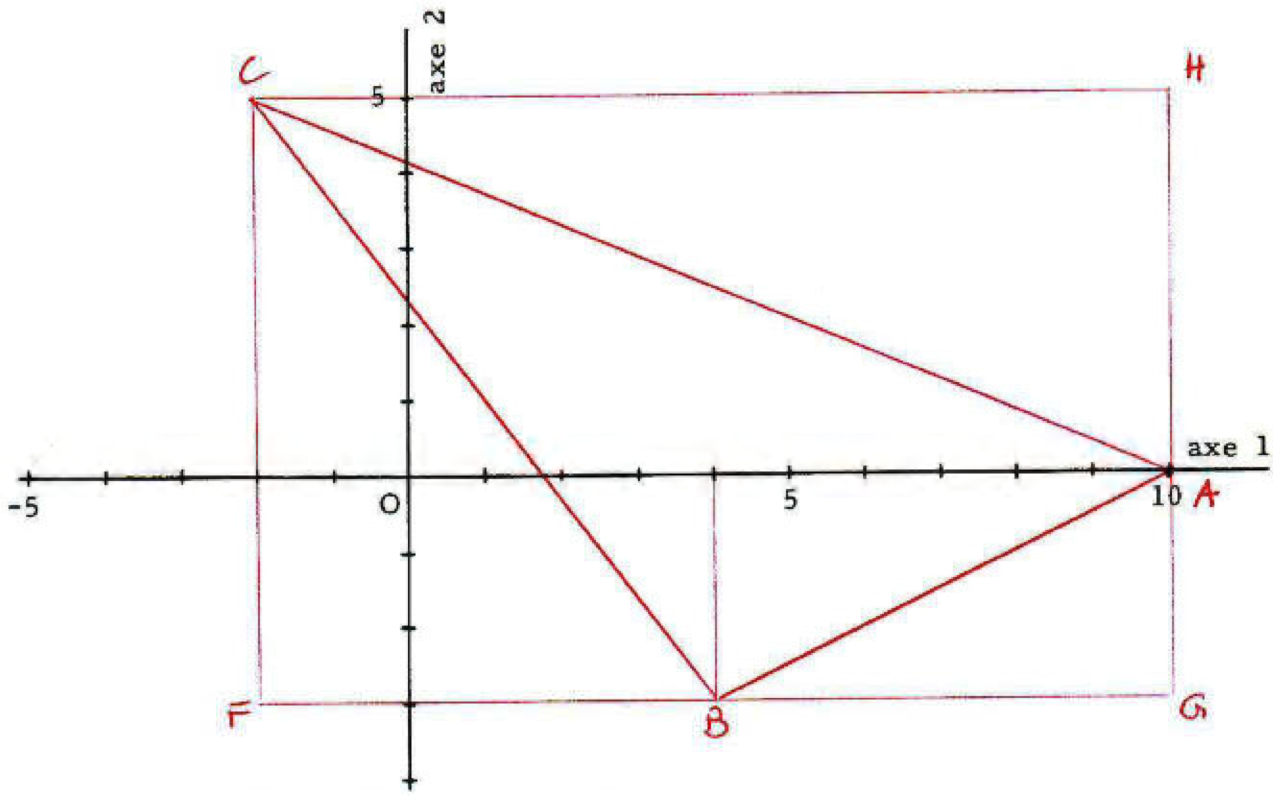
$AH = \sqrt{51{,}84} = 7{,}2$

et $BH = 20 - AH = 20 - 7{,}2 = 12{,}8$

Exercice 26

Construis le triangle ABC donné par les coordonnées de ses sommets :
A(10;0) B(4;-3) C(-2;5)

Calcule le périmètre et l'aire de ce triangle.



$AB = \sqrt{6^2+3^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$BC = \sqrt{8^2+6^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$

$AC = \sqrt{12^2+5^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$

$\Rightarrow$ périmètre $= 3\sqrt{5} + 10 + 13 = \underline{\underline{3\sqrt{5} + 23 \cong 29{,}7\,cm}}$

aire $ACH = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30\ cm^2$

aire $ABG = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9\ cm^2$

aire $BCF = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24\ cm^2$

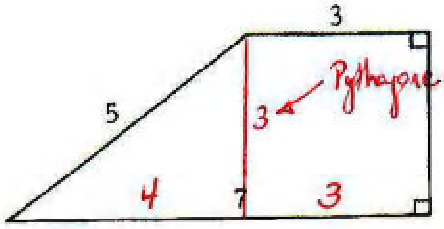
aire $CFGH = 12 \cdot 8 = 96\ cm^2$

$\Rightarrow$ aire $ABC = 96 - 30 - 9 - 24 = \underline{\underline{33\ cm^2}}$

Exercice 27

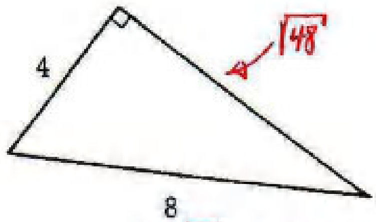
Calcule l'aire de ces polygones : (mesures en cm)

a) trapèze rectangle



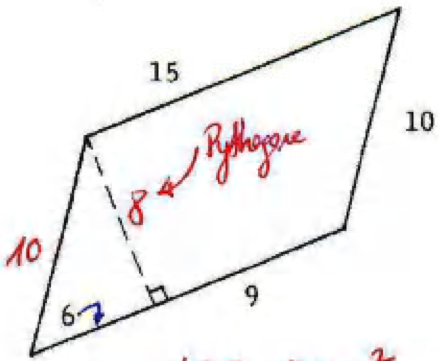
aire $= \frac{4 \cdot 3}{2} + 3^2 = 6 + 9 = 15 \text{ cm}^2$

b) triangle rectangle



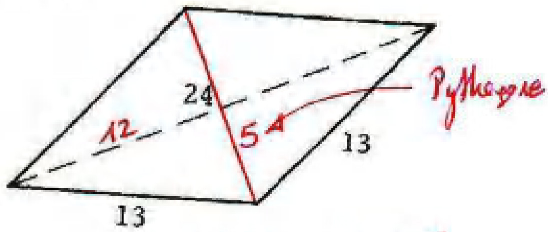
aire $= \frac{4\sqrt{48}}{2} = 2\sqrt{48} \cong 13{,}8564 \text{ cm}^2$

c) parallélogramme



aire $= 15 \cdot 8 = 120 \text{ cm}^2$

d) losange

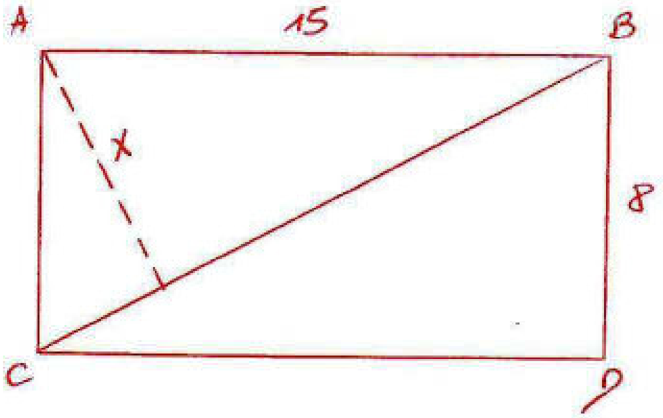


aire $= \frac{10 \cdot 24}{2} = 120 \text{ cm}^2$

Exercice 28

Les dimensions d'un rectangle sont 8 et 15 cm.

Quelle est la distance entre un sommet et la diagonale ne passant pas par ce sommet ?



$$\text{Aire } ABC = \frac{15 \cdot 8}{2} = 60 \text{ cm}^2$$

$$BC = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17 \text{ cm}$$

$$\text{Aire } ABC = \frac{BC \cdot x}{2} = \frac{17 \cdot x}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{17 \cdot x}{2} = 60$$

$$17 \cdot x = 120$$

$$x = \frac{120}{17} \cong 7{,}06 \text{ cm}$$

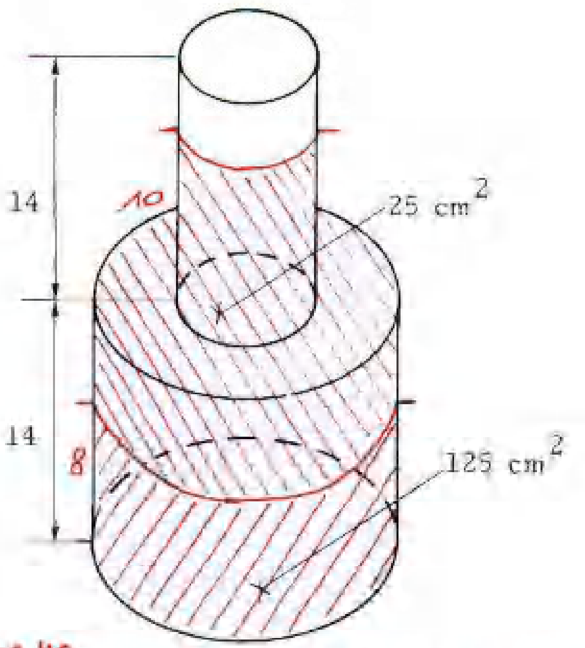
Exercice 29

Les deux parties de ce récipient sont des cylindres circulaires droits.

L'aire de base, intérieure, de la partie inférieure vaut 125 cm^2, l'aire de base du cylindre supérieur vaut 25 cm^2. Chacun des deux cylindres a 14 cm de hauteur.

Le récipient contient déjà 1 litre d'eau. On y ajoute encore 1 litre.

Jusqu'où l'eau va-t-elle monter ?
Débordera-t-elle ? non



$1\ell = 1 dm^3 = 1000 cm^3 = 125 \cdot 8$

$\Rightarrow$ hauteur pour le 1er litre = 8 cm

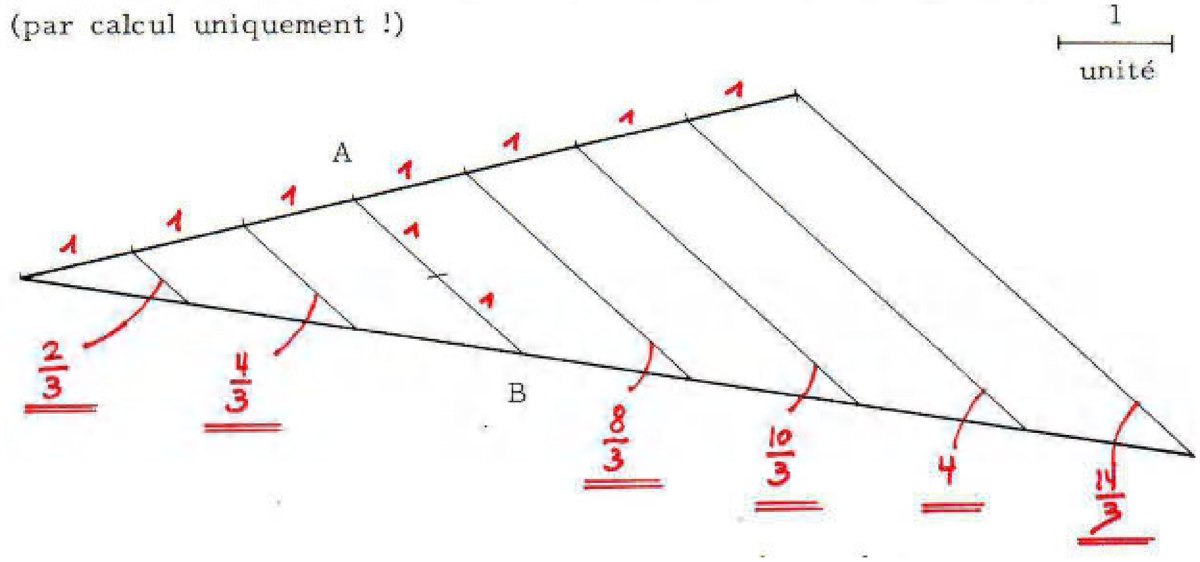
Il reste 6 cm ds le cylindre du bas qui donne un volume de $125 \cdot 6 = 750 cm^3$. Sur le 2e litre, il reste donc $250 cm^3 = 25 \cdot 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ hauteur ds le 2e cylindre = 10 cm

Exercice 30

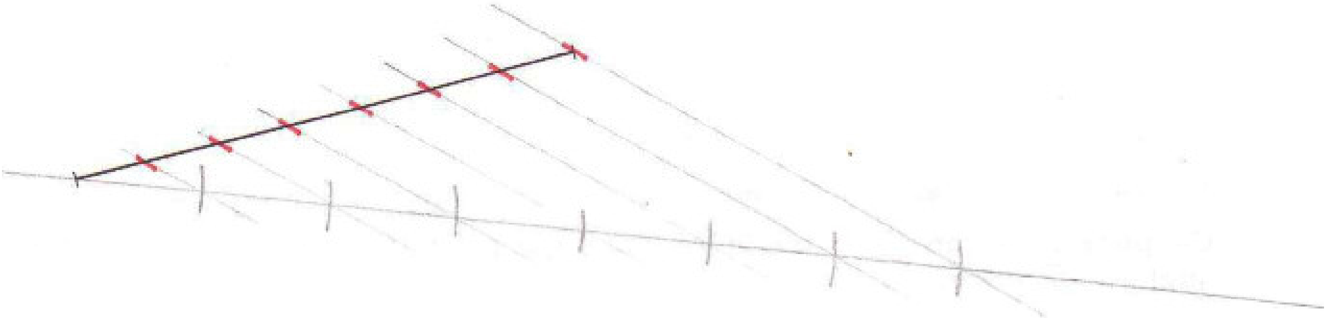
Détermine la longueur des segments parallèles à AB (mes AB = 2).

(par calcul uniquement !)



Exercice 31

Divise le segment en 7 parties égales, sans règle graduée.

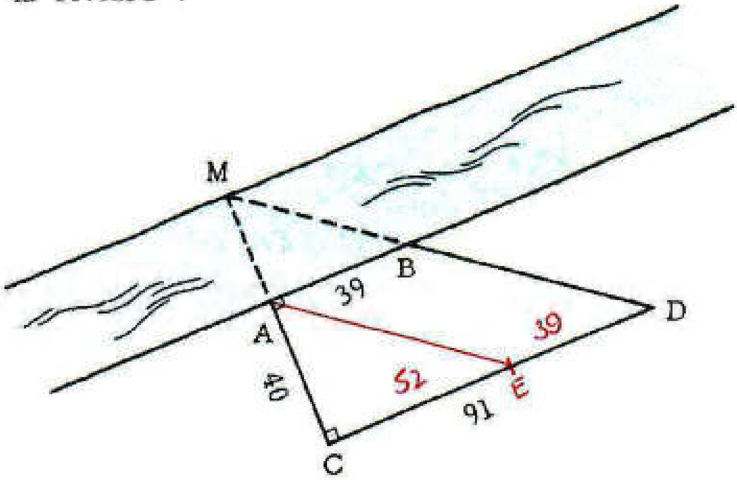


Exercice 32

Infranchissable !

Pour mesurer la largeur d'une rivière infranchissable, des géomètres ont placé 4 jalons A, B, C, D selon ce plan : (mesures en m)

Quelle est la largeur de la rivière ?



Les triangles ACE et CDM sont semblables

$CE \longrightarrow CD$

$52 \longrightarrow 91$

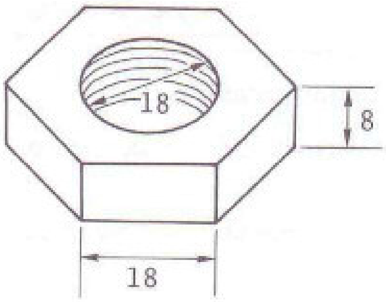
$\cdot \frac{91}{52} = \cdot \frac{7}{4}$

$AC \xrightarrow[\cdot \frac{7}{4}]{} CM = \frac{7}{4} \cdot AC = \frac{7}{4} \cdot 40 = 70$

$\Rightarrow AM = CM - AC = 70 - 40 = \underline{\underline{30m}}$

Exercice 33

a) $V = 6\cdot\left(\frac{18\cdot\sqrt{18^2-9^2}}{2}\right)\cdot 8 - \pi\cdot 9^2\cdot 8 \cong \underline{4698,46\ mm^3}$

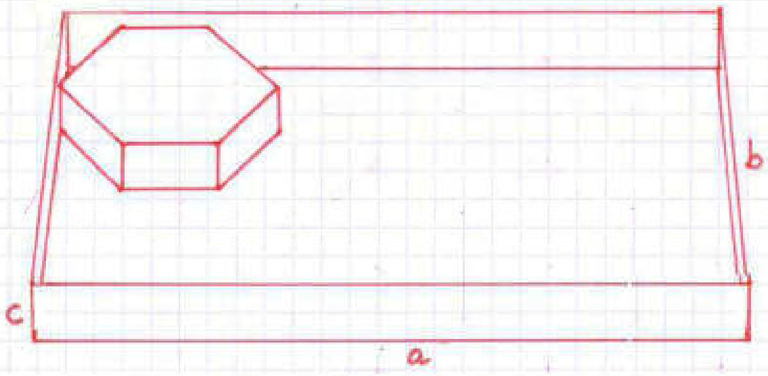


a) Calcule le volume de cet écrou.

b) Une boîte, en forme de parallélipipède rectangle, a pour dimensions intérieures : 25, 20 et 8 cm.

Combien d'écrous, identiques à celui-ci, pourrait-on y ranger, au maximum ?

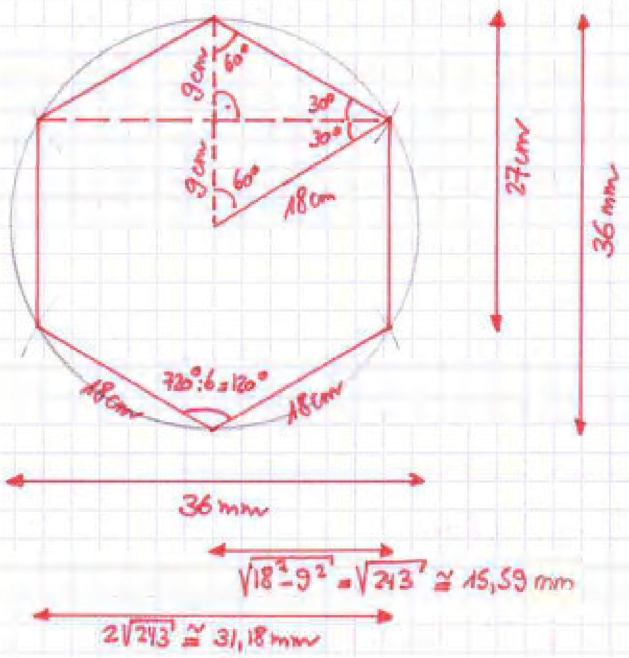
b) les écrous peuvent être rangés de plusieurs manières



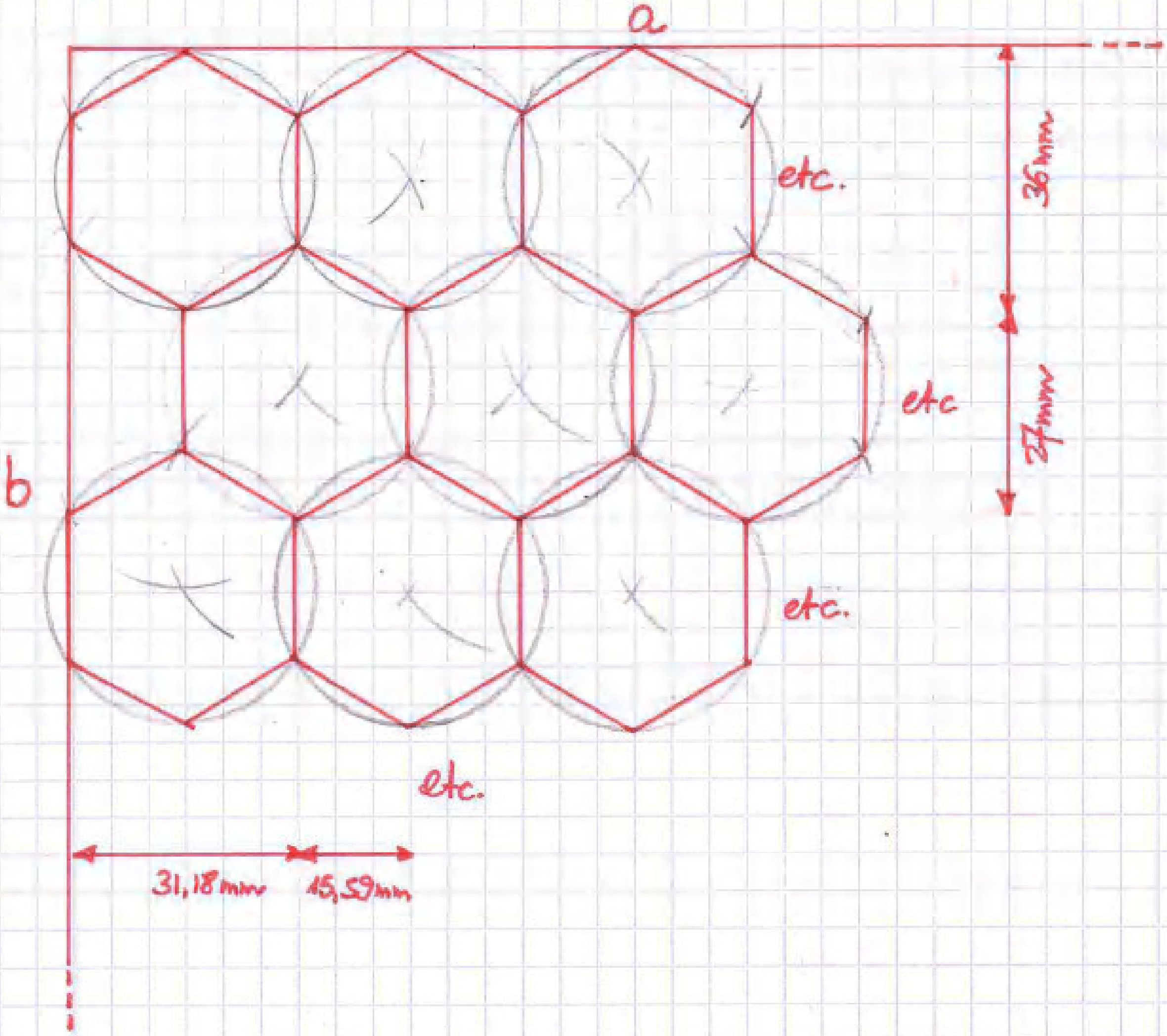
où les triples a, b, c prennent les dimensions suivantes

1) 25, 20, 8 cm
2) 25, 8, 20 cm
3) 20, 25, 8 cm
4) 20, 8, 25 cm
5) 8, 25, 20 cm
6) 8, 20, 25 cm

Précisons certaines dimensions de l'écrou (hexagone régulier).



Au fond de la boîte, on place les écrous de la manière suivante



1) $a = 25cm,\ b = 20cm,\ c = 8cm$:

$a = 25cm = 250mm = 8 \times 31{,}18mm + 0{,}56mm$ = 8 lignes

$b = 20cm = 200mm = 6 \times 27mm + 36mm + 2mm$ = 7 lignes

1 couche d'écrou $= 4 \times 8 + 3 \times 7 = 53$ écrous

$c = 8cm = 80mm = 10 \times 8mm = 10$ couches $\Rightarrow$ 530 écrous

2) $a = 25cm,\ b = 8cm,\ c = 20cm$:

$a = 25cm$ = 8 lignes

$b = 8cm = 80mm = 1 \times 27mm + 36mm + 17mm$ = 2 lignes

1 couche d'écrou $= 1 \times 8 + 1 \times 7 = 15$ écrous

$c = 20cm = 200mm = 25 \times 8mm = 25$ couches $\Rightarrow$ 375 écrous

3) $a = 20cm,\ b = 25cm,\ c = 8cm$:

$a = 20cm = 200mm = 6 \times 31{,}18mm + 12{,}92mm$ = 6 lignes

$b = 25cm = 250mm = 7 \times 27mm + 36mm + 25mm$ = 8 lignes

1 couche d'écrous = $4 \times 6 + 4 \times 5 = 44$ écrous

c = 8cm = 10 couches $\Rightarrow$ <u>440 écrous</u>

4) <u>a = 20 cm, b = 8cm, c = 25cm :</u>

a = 20cm = 6 lignes

b = 8 cm = 2 lignes

1 couche d'écrous = $1 \times 6 + 1 \times 5 = 11$ écrous

c = 25cm = 250 mm = 31×8mm + 2 mm = 31 couches $\Rightarrow$ <u>341 écrous</u>

5) <u>a = 8cm, b = 25cm, c = 20cm :</u>

a = 8cm = 80 mm = $2 \times 31{,}18 + 17{,}64$ mm = 2 lignes

b = 25cm = 8 lignes

1 couche d'écrous = $8 \times 2 = 16$ écrous

c = 20 cm = 25 couches $\Rightarrow$ <u>400 écrous</u>

6) <u>a = 8cm, b = 20 cm, c = 25cm :</u>

a = 8cm = 2 lignes

b = 20cm = 7 lignes

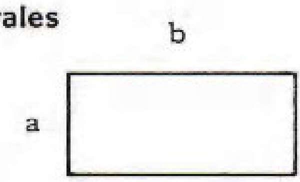
1 couche d'écrous = $7 \times 2 = 14$ écrous

c = 25 cm = 31 couches $\Rightarrow$ <u>434 écrous</u>

$\Rightarrow$ <u>on peut ranger au maximum 530 écrous</u>

Exercice 34

Représentation de grandeurs par des écritures littérales



Si, par exemple, a et b représentent les mesures des côtés d'un rectangle, on désigne son aire par l'écriture littérale $a \cdot b$ et son périmètre par $2 \cdot (a+b)$.

Désigne les grandeurs suivantes par des écritures littérales :

a) le prix de n objets coûtant chacun 17 Fr., $n \cdot 17$

b) un multiple de 7, $k \cdot 7$, $k \in \mathbb{N}_+$

c) un nombre naturel impair, $2n+1$, $n \in \mathbb{N}$

d) un nombre naturel inférieur à 100 dont le chiffre des unités est u et le chiffre des dizaines est d, $10d + u$, $0 \le u, d \le 9$

e) une somme d'argent formée de x pièces de 5 Fr., y pièces de 2 Fr. et z pièces de 1 Fr., $5x + 2y + z$

f) le terme de rang n de cette suite, obtenue par soustractions successives de 7, à partir de 100 :

rang	1	2	3	4	5	n
termes	100 ;	93 ;	86 ;	79 ;	72	$100 - (n-1)7$

g) la durée entre deux coups d'une horloge qui sonne midi en t secondes, $\frac{t}{11}$

h) le périmètre et l'aire d'un carré dont le côté mesure c, périmètre $= 4c$, aire $= c^2$

i) les trois quarts d'un nombre q, $\frac{3}{4}q$

j) l'image de x par la fonction "multiplier par 3 puis ajouter 5", $3x+5$

k) l'image de x par la fonction "ajouter 5 puis multiplier par 3", $(5+x) \cdot 3$

l) la somme des angles d'un polygone à n côtés, $(n-2) \cdot 180$

m) la longueur d'un cercle et l'aire d'un disque de rayon r, longueur $= 2\pi r$, aire $= \pi r^2$

n) le volume d'un prisme de hauteur h dont la base est un carré de côté c, $c^2 \cdot h$

o) la moyenne de trois notes a, b et c. $\frac{a+b+c}{3}$

Exercice 35

Ecritures égales

Certaines des écritures suivantes sont égales. Regroupe-les.

$(3b)(\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{3})$	$a+2$	$(a+5)+(a+7)$	$b+0$	$a-b$
$(a+12)+a$	$(-a)+a$	$(0,2a)\cdot(5b)$	$\frac{1}{2}\cdot a$	$a\cdot b$
$b-a$	$b\cdot 1$	$(a+b)-a$	$2+a$	$\frac{1}{a}\cdot a$
$7a$	$b-b$	$2abc$	$a\cdot 7$	$a+(-b)$
$(2a)\cdot(bc)$	$-a+b$	$0,5a$	$a+a$	

Exercice 36

Produits et puissances de monômes

Lorsqu'on multiplie entre eux des monômes, qui sont eux-mêmes des produits, seule la multiplication intervient dans les calculs. Les propriétés de cette opération permettent d'associer et de permuter librement les facteurs.

Le calcul de puissances de monômes fait appel aux trois règles que tu as déjà établies :

$\boxed{x^m \cdot x^n = x^{m+n}}$ $\boxed{(x^m)^n = x^{m \cdot n}}$ $\boxed{(a \cdot x)^n = a^n \cdot x^n}$

m, n sont des nombres naturels,

x et a désignent respectivement l'indéterminée et un nombre réel.

Effectue les opérations suivantes :

$x \cdot x^2 = x^3$

$2 \cdot 3x^2 = 6x^2$

$2x \cdot 3x^2 = 6x^3$

$x^3 \cdot x^2 = x^5$

$(-3x) \cdot (-2) = 6x$

$4x^3 \cdot (-5x) = -20x^4$

$6x^6 \cdot 3x^3 = 18x^9$

$(x^5)^2 = x^{10}$

$x^5 \cdot x^5 = x^{10}$

$-3^4 \cdot x^4 = -81x^4$

$(-3)^4 \cdot x^4 = 81x^4$

$\frac{1}{8}x \cdot 8x = x^2$

$(\frac{1}{3}x)^2 = \frac{1}{9}x^2$

$\frac{x^3}{3} \cdot \frac{x^4}{4} = \frac{x^7}{12}$

$\frac{2x^3}{5} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^5}{5}$

$(2x)^5 = 32x^5$

$(0,5x)^3 = 0,125x^3$

$(10x^2)^3 = 1000x^6$

$(-2x)^5 = -32x^5$

$(\sqrt{2}x)^2 = 2x^2$

$(2x^5)^{10} = 1024x^{50}$

$0,7x^2 \cdot 2,5x \cdot 4x^3 = 7x^6$

$\frac{1}{5}x^3 \cdot 0,9x^5 \cdot \frac{x}{7} = \frac{9}{350}x^9$

$(2x)^3 \cdot (3x)^2 = 72x^5$

$(-4x^3)^3 \cdot (-5x) \cdot x^7 = 320x^{17}$

$\frac{x}{7} \cdot \frac{7x^2}{8} \cdot \frac{4x}{3} = \frac{1}{6}x^4$

$\frac{-4x}{3} \cdot \frac{-5x^2}{4} \cdot 36x^5 = 60x^8$

$(-2x^3)^2 \cdot 3x^4 = 12x^{10}$

$(-x)^3 \cdot x = -x^4$

$(-0,1x^2)^3 \cdot (10x^3)^2 = -0,1x^{12}$

$-x^3 \cdot x = -x^4$

$(-3x^2) \cdot (-3x)^2 = -27x^4$

$(-x)^4 \cdot x = x^5$

$(0,2x)^3 \cdot (5x^2)^3 = x^9$

$-x^4 \cdot x = -x^5$

Exercice 37

Sommes de monômes semblables

La distributivité de la multiplication sur l'addition permet de transformer la somme de deux monômes semblables en un monôme, encore semblable aux deux termes.

Exemple : $5\cdot x^3 + 9\cdot x^3 = (5+9)\cdot x^3 = 14\cdot x^3$

mise en évidence de x^3, facteur commun aux deux monômes

addition des coefficients 5 et 9, dans $\mathbb{R}$

a) Effectue les additions suivantes:

$3x^2+4x^2 = 7x^2$

$x^2+15x^2 = 16x^2$

$49x^3-57x^3 = -8x^3$

$6x-x = 5x$

$3x+5x-2x = 6x$

$\frac{x}{2}+3x = \frac{7}{2}x$

$\frac{3x^2}{4}+x^2+\frac{x^2}{2} = \frac{9x^2}{4}$

$\frac{x^3}{4}-\frac{2}{3}x^3 = -\frac{5}{12}x^3$

$0,5x^2-\frac{3}{4}x^2+x^2 = \frac{3}{4}x^2$

$3(x^2+2)+x(x^2+2) = (3+x)(x^2+2)$

b) Si la règle d'addition de deux monômes semblables se résume à une simple addition des deux coefficients, son application réserve toutefois quelques surprises :

$37x^2+(-37x^2) = 0$

$0,2x^3-\frac{x^3}{5} = 0$

$(-x)^2-(x^2) = 0$

$10x+10^2x+10^3x = 1110x$

$2x^3-x^3 = x^3$

$x^2+2x^2-3x^2 = 0$

$-x^4+1,2x^4 = 0,2x^4$

$x^4-\frac{x^4}{4} = \frac{3}{4}x^4$

$-x^2-x^2 = -2x^2$

$9,2x^5-x^5 = 8,2x^5$

$9,2(x^5-x^5) = 0$

$2x^5-3x^5 = -x^5$

$\frac{2}{7}x^2-x^2 = -\frac{5}{7}x^2$

$\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+\frac{x}{6} = \frac{37x}{60}$

Exercice 38

Sommes de polynômes

L'addition de polynômes est une opération "élémentaire" qui consiste à regrouper les termes semblables par commutativité et associativité pour les réduire ensuite par distributivité.

Effectue les additions suivantes à partir des sept polynômes :

$A = 3x^2-12x+5$ $\quad$ $B = x^3-7x^2+x-13$ $\quad$ $C = -4x^3-x+7$ $\quad$ $D = x^2-\frac{3x}{4}+\frac{1}{3}$

$E = -3x^3+7x^2-x+13$ $\quad$ $F = x^3-x^2+x-1$ $\quad$ $G = 0$

$A+B = 3x^2-12x+5+x^3-7x^2+x-13 = \underline{\underline{x^3-4x^2-11x-8}}$

$(A+B)+C = x^3-4x^2-11x-8-4x^3-x+7 = \underline{\underline{-3x^3-4x^2-12x-1}}$

$B+C = x^3-7x^2\cancel{+x}-13-4x^3\cancel{-x}+7 = \underline{\underline{-3x^3-7x^2-6}}$

$A+(B+C) = 3x^2-12x+5-3x^3-7x^2-6 = \underline{\underline{-3x^3-4x^2-12x-1}}$

$C+D = -4x^3-x+7+x^2-\frac{3x}{4}+\frac{1}{3} = -4x^3+x^2-(1+\frac{3}{4})x+7+\frac{1}{3} = \underline{\underline{-4x^3+x^2-\frac{7}{4}x+\frac{22}{3}}}$

$A+B+D = x^3-4x^2-11x-8+x^2-\frac{3x}{4}+\frac{1}{3} = x^3-3x^2-(11+\frac{3}{4})x-8+\frac{1}{3} = \underline{\underline{x^3-3x^2-\frac{47}{4}x-\frac{23}{3}}}$

$A+E = 3x^2-12x+5-3x^3+7x^2-x+13 = \underline{\underline{-3x^3+10x^2-13x+18}}$

$E+F = -3x^3+7x^2\cancel{-x}+13+x^3-x^2\cancel{+x}-1 = \underline{\underline{-2x^3+6x^2+12}}$

Exercice 39

Factorisation

Dans l'exercice précédent, tu as calculé des produits de polynômes pour obtenir des polynômes.

Il arrive souvent aussi qu'on ait à transformer un polynôme (somme) en produit de polynômes. Cette transformation s'appelle **factorisation** ou **mise en évidence d'un facteur commun.**

C'est toujours la distributivité de la multiplication sur l'addition qui est en jeu.

Exemples :

$3x+5x^2-7x^3 = x(3+5x-7x^2)$ le trinôme $3x+5x^2-7x^3$ a été transformé en un produit d'un monôme, x, par un trinôme, $3+5x-7x^2$.

$13x^2-26x+39 = 13(x^2-2x+3)$ Ici, c'est le facteur 13 qui a été mis en évidence.

Transforme les polynômes suivants en produits, par factorisation :

$x^4-x^3+x^2 = x^2(x^2-x+1)$

$24x^3-8x^2+8 = 8(3x^3-x^2+1)$

$-49x^5-140x^4+35x^3-7x^2 = 7x^2(-7x^3-20x^2+5x-1)$

$\frac{3x}{5}+\frac{7}{5} = \frac{1}{5}(3x+7)$

$\frac{x^2}{4}-2x = \frac{x}{4}(x-8)$

$-3x-3x^2 = -3x(1+x)$

$5+\frac{5x^2}{2} = 5(1+\frac{x^2}{2})$

Par la suite, les facteurs à mettre en évidence ne sont plus donnés. A toi de les choisir, de degré le plus élevé possible, et pour simplifier les écritures au maximum.

$42x^7-12x^5+36x^3 = 6x^3(7x^4-2x^2+6)$

$25x^2-100x^3+150x^4 = 25x^2(1-4x+6x^2)$

$-2-2x-2x^2-2x^3 = -2(1+x+x^2+x^3)$

$\frac{-x}{4}+\frac{1}{8} = \frac{1}{8}(-2x+1)$

$\frac{x^3}{7}-\frac{x^2}{14}+\frac{2x}{7}-\frac{59}{70} = \frac{1}{70}(10x^3-5x^2+20x-59)$

$3x^3-3x^2-3x+3 = 3(x^3-x^2-x+1)$

$17x^4-51x+34 = 17(x^4-3x+2)$

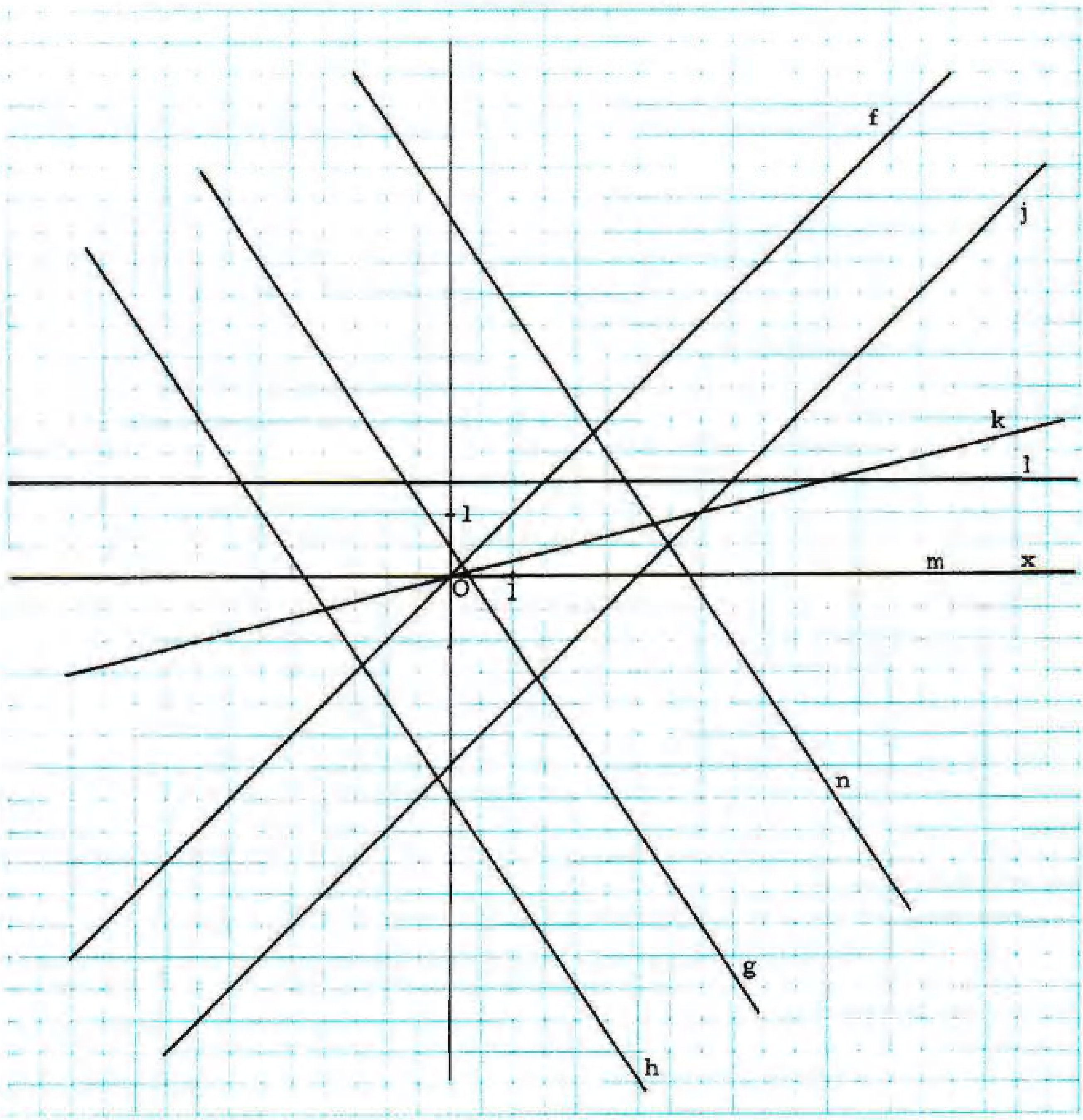
$x^2(x-4)+3(x-4) = (x^2+3)(x-4)$

$3x(x^2-5)+2x(x^2-5) = (3x+2x)(x^2-5) = 5x(x^2-5)$

Exercice 40

Dans le système d'axes ci-dessous, on a donné une représentation des fonctions f, g, h, j, k, l, m, n.

Trouve les expressions fonctionnelles correspondantes.



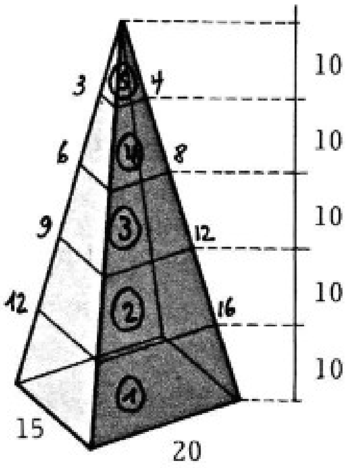
f : x $\longmapsto$ x	k : x $\longmapsto$ 0,25x
g : x $\longmapsto$ −1,5x+0,5	l : x $\longmapsto$ 1,5
h : x $\longmapsto$ −1,5x−3,5	m : x $\longmapsto$ 0
j : x $\longmapsto$ x−3	n : x $\longmapsto$ −1,5x+5,75

Exercice 41

Ce pain de sucre en forme de pyramide pèse 1 kg.

Il est découpé en cinq tranches de même hauteur.

Combien pèse chacune de ces tranches ?



Les dimensions de la pyramide totale sont $15 \times 20 \times 50$.
La hauteur de la petite pyramide du haut est 10. La petite pyramide du haut est donc 5x plus petite que la pyramide totale. Ses dimensions sont donc $3 \times 4 \times 10$.

Ainsi les dimensions des pyramides sont, en commençant par celle du haut et en descendant:
$3 \times 4 \times 10$, $6 \times 8 \times 20$, $9 \times 12 \times 30$, $12 \times 16 \times 40$, $15 \times 20 \times 50$.

Le volume de la pyramide du haut (5) vaut $\frac{3 \times 4 \times 10}{3} = 40$.

Le volume de la tranche 4 est $\frac{6.8.20}{3} - 5 = 320 - 40 = 280$.

Le volume de la tranche 3 est $\frac{9.12.30}{3} - 4 - 5 = 1080 - 280 - 40 = 760$.

Le volume de la tranche 2 est $\frac{12.16.40}{3} - 3 - 4 - 5 = 2560 - 760 - 280 - 40 = 1480$.

Le volume de la tranche 1 est $\frac{15.20.50}{3} - 2 - 3 - 4 - 5 = 5000 - 1480 - 760 - 280 - 40 = 2440$.

Le volume de la pyramide totale est $\frac{15.20.50}{3} = 5000$ $(= 40 + 280 + 760 + 1480 + 2440)$.

On a alors les correspondances suivantes:

	volume	kg	
	5000	1	
	1	0,0002	
1	40	0,008	Au total : 1
2	280	0,056	
3	760	0,152	
4	1480	0,296	
5	2440	0,488	

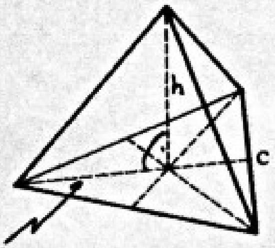
Ainsi la tranche 1 pèse 0,008 kg,
la tranche 2 pèse 0,056 kg,
la tranche 3 pèse 0,152 kg,
la tranche 4 pèse 0,296 kg,
la tranche 5 pèse 0,488 kg.

Exercice 42

13. Tétraèdre régulier

Voici un extrait d'un formulaire de mathématiques :

" **Tétraèdre régulier :** **polyèdre dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux.**



$\frac{2}{3}a$

c : mesure d'une arête

$p = 6c$ $\qquad a = \frac{c\sqrt{3}}{2}$ $\qquad h = \frac{c\sqrt{6}}{3}$

$A = c^2\sqrt{3}$ $\qquad B = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$ $\qquad V = \frac{c^3\sqrt{2}}{12}$

... "

a) Que représentent les lettres p, a, h, A, B, V ? p= longueur totale des arêtes, a= hauteur d'une des faces, h= hauteur de la pyramide, A= aire totale de la pyramide, B= aire de base ou aire d'une face de la pyramide, V= volume de la pyramide.

b) Essaie de justifier quelques-unes de ces formules. voir ci-dessous.

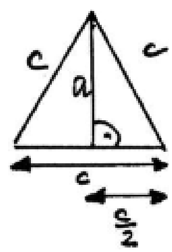
c) Calcule le volume et l'aire totale d'un tétraèdre de 7 cm d'arête.

Voir feuilles annexes.

d) Calcule la mesure d'une arête d'un tétraèdre de 1 dm^3 de volume.

voir feuilles annexes.

b) Comme le tétraèdre a 6 arêtes, si l'arête vaut c, la longueur total des arêtes est $\underline{p = 6c}$.



Calculons la hauteur H d'une des face du tétraèdre:

Par le théorème de Pythagore, on a $c^2 = a^2 + (\frac{c}{2})^2$

$\Rightarrow a^2 = c^2 - (\frac{c}{2})^2 = c^2 - \frac{c^2}{4} \Rightarrow \frac{3c^2}{4} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{3c^2}{4}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}c}{2}}}$.

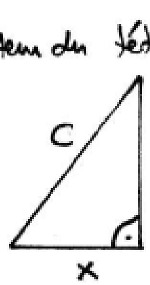
L'aire d'une des faces du tétraèdre est ainsi $\frac{1}{2} \cdot c \cdot H =$

$= \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{\sqrt{3}c}{2} = \frac{\sqrt{3}c^2}{4}$.

En particulier, l'aire de la base est $\underline{\underline{B = \frac{\sqrt{3}c^2}{4}}}$ et l'aire totale du tétraèdre est 4 fois l'aire d'une des faces (le tétraèdre a 4 faces) et vaut

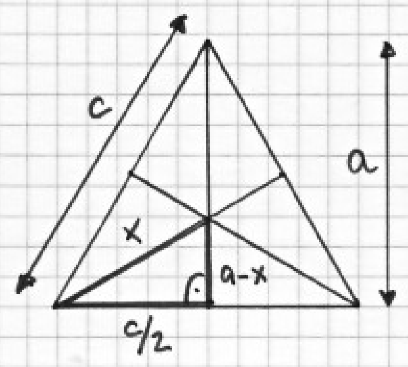
$A = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}c^2}{4} = \underline{\underline{\sqrt{3}c^2}}$.

Calculons maintenant la hauteur du tétraèdre. Pour cela, on va utiliser le triangle rectangle suivant:



(1)

On va commencer par montrer que $x=\frac{2}{3}a$ (les $\frac{2}{3}$ de la hauteur de la base, un triangle équilatéral). La base se présente comme suit:



Par le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle, on a:

$$x^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+(a-x)^2 \Rightarrow x^2=\frac{c^2}{4}+a^2-2ax+x^2$$

$$\Rightarrow 0=\frac{c^2}{4}+a^2-2ax \Rightarrow 2ax=\frac{c^2}{4}+a^2$$

Avec $a=\frac{\sqrt{3}c}{2}$, on a $c=\frac{2a}{\sqrt{3}}$ et $c^2=\frac{4a^2}{3}$.

On obtient ainsi $2ax=\frac{1}{4}\cdot\frac{4a^2}{3}+a^2 \Rightarrow 2ax=\frac{a^2}{3}+a^2$

$$\Rightarrow 2ax=\frac{4a^2}{3} \Rightarrow ax=\frac{2a^2}{3} \Rightarrow x=\frac{2}{3}a \quad (a\neq 0).$$

On peut alors appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle (1):

$$c^2=h^2+x^2 \Rightarrow h^2=c^2-x^2=c^2-\left(\frac{2}{3}a\right)^2=c^2-\frac{4}{9}a^2.$$

Avec $a=\frac{\sqrt{3}c}{2}$, on trouve $h^2=c^2-\frac{4}{9}\left(\frac{\sqrt{3}c}{2}\right)^2=c^2-\frac{\cancel{4}}{\cancel{9}_3}\cdot\frac{\cancel{3}c^2}{\cancel{4}}=c^2-\frac{c^2}{3}=\frac{2c^2}{3}$

$$\Rightarrow h=\sqrt{\frac{2c^2}{3}}=\frac{\sqrt{2}c}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}c\sqrt{3}}{3}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{6}c}{3}}}.$$

Le volume du tétraèdre est alors donné par $\frac{1}{3}$ aire base · hauteur =

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{c\cdot a}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}c}{3}=\frac{\sqrt{6}ac^2}{18}=\frac{\sqrt{6}c^2}{18}\cdot a=\frac{\sqrt{6}c^2}{18}\cdot\frac{\sqrt{3}c}{2}=\frac{\sqrt{18}c^3}{36}=\frac{\sqrt{9\cdot 2}c^3}{36}=\frac{3\sqrt{2}c^3}{36}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{2}c^3}{12}}}.$$

c) On a ici $c=7$cm.

Ainsi aire totale $=A=7^2\sqrt{3}=\underline{\underline{49\sqrt{3}\cong 84{,}870\text{ cm}^2}}$

et volume $=V=\frac{c^3\sqrt{2}}{12}=\frac{7^3\sqrt{2}}{12}=\underline{\underline{\frac{343\sqrt{2}}{12}\cong 40{,}423\text{ cm}^3}}.$

d) On a volume $=V=\frac{c^3\sqrt{2}}{12}$.

Comme on veut $V=1\text{dm}^3$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{c^3\sqrt{2}}{12}&=1 &&\Big|\cdot 12\\ c^3\sqrt{2}&=12 &&\Big|:\sqrt{2}\\ c^3&=\frac{12}{\sqrt{2}} &&\Big|\sqrt[3]{}\\ c&=\sqrt[3]{\frac{12}{\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

Ainsi $\underline{\underline{c=\sqrt[3]{\frac{12}{\sqrt{2}}}\cong 2{,}040\text{ dm}}}.$

Exercice 43

Au marché

Une fermière se rend au marché avec un panier d'oeufs.
Au premier client, elle vend la moitié de ses oeufs plus la moitié d'un oeuf.
Au deuxième client, elle vend la moitié de ce qui lui reste plus la moitié d'un oeuf.
Et ainsi de suite, elle vend toujours la moitié de ce qui lui reste plus la moitié d'un oeuf.
Après cinq clients, son panier est vide et, bien sûr, elle n'a cassé aucun oeuf.

Combien avait-elle d'oeufs en arrivant au marché ?

x = nombre d'oeufs en arrivant au marché.

1ᵉ client : elle vend la moitié de ses oeufs + la moitié d'un $= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2}$.

Il lui reste $x - \frac{x+1}{2} = \frac{2x-x-1}{2} = \frac{x-1}{2}$ oeufs.

2ᵉ client : elle vend la moitié de ses oeufs + la moitié d'un $= \frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x-1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{x-1+2}{4} = \frac{x+1}{4}$.

Il lui reste $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{4} = \frac{2x-2-x-1}{4} = \frac{x-3}{4}$ oeufs.

3ᵉ client : elle vend la moitié de ses oeufs + la moitié d'un $= \frac{1}{2} \cdot \frac{x-3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{x-3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{x-3+4}{8} = \frac{x+1}{8}$.

Il lui reste $\frac{x-3}{4} - \frac{x+1}{8} = \frac{2x-6-x-1}{8} = \frac{x-7}{8}$ oeufs.

4ᵉ client : elle vent la moitié de ses oeufs + la moitié d'un $= \frac{1}{2} \cdot \frac{x-7}{8} + \frac{1}{2} = \frac{x-7}{16} + \frac{1}{2} = \frac{x-7+8}{16} = \frac{x+1}{16}$.

Il lui reste $\frac{x-7}{8} - \frac{x+1}{16} = \frac{2x-14-x-1}{16} = \frac{x-15}{16}$ oeufs.

5ᵉ client : elle vent la moitié de ses oeufs + la moitié d'un $= \frac{1}{2} \cdot \frac{x-15}{16} + \frac{1}{2} = \frac{x-15}{32} + \frac{1}{2} = \frac{x-15+16}{32} = \frac{x+1}{32}$.

Il lui reste $\frac{x-15}{16} - \frac{x+1}{32} = \frac{2x-30-x-1}{32} = \frac{x-31}{32}$ oeufs.

Or, après le 5ᵉ client, elle n'a plus d'oeufs. On doit donc avoir $x - 31 = 0 \Rightarrow x = 31$.

Elle avait donc 31 oeufs au départ.

Exercice 44

Factorisation

Ecris les polynômes suivants sous la forme de produits, par mise en évidence d'un facteur commun ou à l'aide des identités remarquables :

a) $3x + 6y + 12 = 3(x+2y+4)$

b) $ax + 2ay - 5a = a(x+2y-5)$

c) $a(x+y) + b(x+y) = (x+y)(a+b)$

d) $x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$ $\quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

e) $y^2 - 6y + 9 = (y-3)^2$ $\quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

f) $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ $\quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

g) $x - xy + 5 - 5y = x(1-y) + 5(1-y) = (x+5)(1-y)$

h) $(x+y)^2 + (x+y)(x-y) = (x+y)(x+\cancel{y}+x-\cancel{y}) = 2x(x+y)$

i) $4x^2 - 9y^2 = (2x+3y)(2x-3y)$ $\quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Exercice 45

Complète les égalités suivantes :

a) $2x^2 \cdot (4x-5) = 8x^3 - 10x^2$

b) $7(2x-1) = 14x-7$

c) $-5x(-x^2+x) = 5x^3 - 5x^2$

d) $24ax^5 - 18ax^2 + ax = ax(24x^4-18x+1)$

e) $(2x-5)(2x+5) = 4x^2 - 25$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

f) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

g) $4(x+3) - x(x+3) = (x+3)(4-x)$

h) $(ax+b)(y+1) = \underbrace{axy + by}_{(ax+b)y} + ax + b$

Exercice 46

Fractions rationnelles équivalentes

Lorsqu'on travaille avec des fractions, il est indispensable de savoir reconnaître celles qui sont équivalentes et de les simplifier ou amplifier pour passer de l'une à l'autre de leurs écritures.

La seule règle à connaître à cet effet est celle-ci : $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C}$ $(C \neq 0)$

Complète les séries suivantes de fractions rationnelles équivalentes :

a) $\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2} = \frac{x^2}{x^3} = \frac{x+3}{x^2+3x} = \frac{4x}{4x^2} = \frac{3}{3x} = \frac{0{,}4}{0{,}4x}$

b) $\frac{x}{5} = \frac{12x}{60} = \frac{x^2+3x}{5x+15} = \frac{x^3}{5x^2} = \frac{2x^2+3x}{10x+15} = \frac{x^2(x-3)}{5x(x-3)}$

c) $4 = \frac{4x+8}{x+2} = \frac{4}{1} = \frac{4x}{x} = \frac{16x+32}{4x+8} = \frac{32x^3}{8x^3} = \frac{24x^3+16x^2-8x+32}{6x^3+4x^2-2x+8}$

d) $\frac{x+2}{x+3} = \frac{3x+6}{3x+9} = \frac{x^2+2x}{x^2+3x} = \frac{7x+14}{7x+21} = \frac{x^2+5x+6}{(x+3)^2} = \frac{(x+2)^2}{x^2+5x+6}$

e) $\frac{x+1}{x^2} = \frac{x^2+2x+1}{x^2(x+1)} = \frac{x^2-1}{x^2(x-1)} = \frac{3x^2(x+1)}{3x^4} = \frac{-3x-3}{-3x^2}$

Exercice 47

Simplification de fractions rationnelles

Simplifier une fraction, c'est supprimer un facteur commun du numérateur et du dénominateur (ou les diviser par un même facteur).

Mais, avant de passer de la forme $\frac{A \cdot C}{B \cdot C}$ à $\frac{A}{B}$, il faut faire apparaître le facteur commun C.

Cette factorisation n'est pas toujours évidente et il n'y a pas de procédé systématique pour y arriver. Les moyens à ta disposition :

- essayer de mettre en évidence des facteurs (nombres ou monômes) au numérateur et au dénominateur, communs si possible !
- transformer le dénominateur ou le numérateur en produit à l'aide d'une identité remarquable,
- essayer de trouver les diviseurs du numérateur et du dénominateur qui permettent de les écrire sous forme de produit de polynômes du premier degré,
- vérifier si l'un des deux termes de la fraction est divisible par l'autre.

Mais, dans tous les cas, il faut de la patience, du flair, de l'obstination et une excellente maîtrise de la multiplication (et de la division).

Toutes les fractions suivantes sont simplifiables. A toi d'exercer ta perspicacité et de les simplifier :

a) $\frac{x^2-2x}{4x-8} = \frac{x(x-2)}{4(x-2)} = \frac{x}{4}$

b) $\frac{x-1}{x^4-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x^3+x^2+x+1)} = \frac{1}{x^3+x^2+x+1}$

c) $\frac{5x+15}{4x^2+12x} = \frac{5(x+3)}{4x(x+3)} = \frac{5}{4x}$

d) $\frac{x^2+10x+25}{7x+35} = \frac{(x+5)^2}{7(x+5)} = \frac{x+5}{7}$

e) $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{x+1}{x-1}$

f) $\frac{x^2+7x+12}{x^4+3x^3} = \frac{(x+3)(x+4)}{x^3(x+3)} = \frac{x+4}{x^3}$

g) $\frac{-12x+5}{12x-5} = \frac{-(12x-5)}{12x-5} = -1$

h) $\frac{ax+a}{(b+1)x+b+1} = \frac{a(x+1)}{(b+1)(x+1)} = \frac{a}{b+1}$

i) $\frac{x+3}{x^3+3x^2-7x-21} = \frac{x+3}{(x+3)(x^2-7)} = \frac{1}{x^2-7}$

(voir feuille annexe)

j) $\frac{ax+3a}{(x-5)(x+3)} = \frac{a(x+3)}{(x-5)(x+3)} = \frac{a}{x-5}$

k) $\frac{x^3-2x^2+x}{x^5-x^4} = \frac{x(x^2-2x+1)}{x^4(x-1)} = \frac{x(x-1)^2}{x^4(x-1)} = \frac{x-1}{x^3}$

l) $\frac{x^2-10x-39}{x^2-11x-26} = \frac{(x+3)(x-13)}{(x+2)(x-13)} = \frac{x+3}{x+2}$

m) $\frac{x-1}{x^7-1} = \frac{x-1}{(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x-1)} = \frac{1}{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}$

n) $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2+2x+1} = \frac{(x+1)^3}{(x+1)^2} = x+1$

o) $\frac{-x^2+7x}{-x^3+5x^2+15x-7} = \frac{-x(x-7)}{(x-7)(-x^2-2x+1)} = \frac{-x}{-x^2-2x+1} = \frac{x}{x^2+2x-1}$ (voir feuille annexe)

p) $\frac{2x^2-6x+8}{-3x^2+9x-12} = \frac{2(x^2-3x+4)}{-3(x^2-3x+4)} = -\frac{2}{3}$.

i) $x^3 + 3x^2 - 7x - 21 : x+3 = x^2 - 7$

$$\begin{array}{l}
x^3 + 3x^2 - 7x - 21 \\
\underline{-(x^3 + 3x^2)} \\
\quad -7x - 21 \\
\quad \underline{-(-7x - 21)} \\
\quad\quad 0
\end{array}
\quad\Bigg|\quad
\begin{array}{l}
x+3 \\ \hline x^2 - 7
\end{array}$$

o) $-x^3 + 5x^2 + 15x - 7 : x-7 = -x^2 - 2x + 1$

$$\begin{array}{l}
-x^3 + 5x^2 + 15x - 7 \\
\underline{-(-x^3 + 7x^2)} \\
\quad -2x^2 + 15x - 7 \\
\quad \underline{-(-2x^2 + 14x)} \\
\quad\quad x - 7 \\
\quad\quad \underline{-(x-7)} \\
\quad\quad\quad 0
\end{array}
\quad\Bigg|\quad
\begin{array}{l}
x-7 \\ \hline -x^2 - 2x + 1
\end{array}$$

Exercice 48

Multiplication de fractions rationnelles

Pour multiplier deux fractions rationnelles, on utilise la règle, établie précédemment (R.11) :

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$$

Le numérateur et le dénominateur ($A \cdot C$ et $B \cdot D$) du produit des deux fractions sont les produits des numérateurs et des dénominateurs.

Il faut profiter de cette écriture sous forme de produits pour simplifier la fraction, avant d'effectuer les multiplications des numérateur et dénominateur et de les écrire sous la forme réduite de polynôme.

(Ces multiplications des numérateur et dénominateur ne sont pas toujours souhaitables, on préfère souvent conserver les deux termes de la fraction sous forme de produits.)

a) $\frac{\cancel{x}}{\cancel{y}} \cdot \frac{\cancel{y}}{\cancel{x}} = 1$

b) $\frac{\cancel{x+y}}{\cancel{x-y}} \cdot \frac{\cancel{x-y}}{\cancel{x+y}} = 1$

c) $\frac{\overset{2}{\cancel{4x}}}{\cancel{y}} \cdot \frac{3y^{\cancel{2}}}{\cancel{2x}} = 6y$

d) $\frac{-x^{\cancel{2}}y^{\cancel{3}}}{\cancel{7}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{14}}}{\cancel{x}y^{\cancel{2}}} = -2xy$

e) $\frac{x+y}{2} \cdot \frac{x-y}{3} = \frac{x^2-y^2}{6}$

f) $\frac{x-y}{2x} \cdot \frac{5y}{2x-2y} = \frac{5y(x-y)}{2x.2(x-y)} = \frac{5y}{4x}$

g) $\frac{2x-y}{2} \cdot \frac{x+2y}{4} = \frac{(2x-y)(x+2y)}{8}$

h) $\frac{3x-1}{y} \cdot \frac{5}{1-3x} = \frac{5(3x-1)}{-y(3x-1)} = -\frac{5}{y}$

i) $\frac{x^2}{2} \cdot \frac{y^3}{3} \cdot \frac{x^4}{4} = \frac{x^6y^3}{24}$

j) $3x \cdot \frac{x^2+1}{9} = \frac{3x(x^2+1)}{9}$

k) $\frac{\cancel{x}}{\cancel{y}} \cdot \frac{2x}{3} \cdot \frac{\cancel{y}}{\cancel{x}} = \frac{2x}{3}$

l) $\frac{x^2-1}{y+5} \cdot \frac{y^2+10y+25}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)(y+5)^2}{(y+5)(x-1)} = (x+1)(y+5)$

m) $\frac{x^2+x-6}{x^2-2x-15} \cdot \frac{x-5}{x+2} = \frac{(x+3)(x-2)(x-5)}{(x+3)(x-5)(x+2)} = \frac{x-2}{x+2}$

n) $\frac{x^3+2x}{y+1} \cdot \frac{1}{2x} = \frac{x(x^2+2)}{2x(y+1)} = \frac{x^2+2}{2y+2}$

o) $(x^2+1)\frac{1}{x+1} = \frac{x^2+1}{x+1}$

p) $\frac{-1}{4x^2-9} \cdot \frac{2x-3}{2y-3} = \frac{-(2x-3)}{(2x-3)(2x+3)(2y-3)} = \frac{-1}{(2x+3)(2y-3)}$

q) $\frac{1}{x-7} \cdot \frac{1}{x+7}(x^2-14x+49) = \frac{(x-7)^2}{(\cancel{x-7})(x+7)} = \frac{x-7}{x+7}$

r) $\frac{x-3}{2x-3} \cdot \frac{\cancel{2x}}{3-x} \cdot \frac{3-2x}{\underset{2}{\cancel{4x}}} = \frac{(x-3)(3-2x)}{2(3-2x)(x-3)} = \frac{1}{2}$.

Exercice 49

Division de fractions rationnelles

Par convention, le quotient de deux éléments A et B ($B \neq 0$) se note par l'une des trois écritures équivalentes (R.5) :

$$A:B = \frac{A}{B} = A \cdot \frac{1}{B}$$

Lorsque les éléments sont des fractions rationnelles, la règle est la même : diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse.

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \qquad\qquad = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$$ (voir ex. 14, a et d)

Ecris les quotients suivants sous forme de fractions simplifiées :

a) $\frac{x}{2} : \frac{x^2}{3} = \frac{\cancel{x}}{2} \cdot \frac{3}{x^{\cancel{2}}} = \frac{3}{2x}$

b) $\frac{3x^4}{5} : \frac{1}{x^2} = \frac{3x^4}{5} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{3x^6}{10}$

c) $\frac{2}{x} : x^2 = \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x^3}$

d) $\frac{3x + 18y}{x} : 3 = \frac{3x+18y}{x} \cdot \frac{1}{3} = \frac{x+6y}{x}$

e) $-3x : \frac{1}{x} = -3x \cdot x = -3x^2$

f) $(13x - 26y) : \frac{13}{2x} = (13x-26y) \cdot \frac{2x}{13} =$
$= (x-2y) \cdot 2x = 2x(x-2y)$

g) $\frac{1}{x^2} : \frac{1}{x^3} = \frac{1}{\cancel{x^2}} \cdot \frac{x^{\cancel{3}}}{1} = x$

h) $\frac{x}{y} : \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} = \frac{x^2}{y^2}$

i) $\frac{2x - 3}{x + 2} : \frac{6 - 4x}{x^2 - 4} = \frac{2x-3}{x+2} \cdot \frac{(x+2)(x-2)}{-2(2x-3)} =$
$= \frac{x-2}{-2} = \frac{2-x}{2}$

j) $\frac{x^2 - y^2}{3} : \frac{x - y}{3} = \frac{(x+y)(x-y)}{3} \cdot \frac{3}{x-y} = x+y$

Exercice 50

Addition de fractions rationnelles

Pour additionner deux fractions rationnelles, on utilise l'une des règles établies précédemment :

(R.12') $\frac{A}{B} + \frac{C}{B} = \frac{A+C}{B}$ $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD+BC}{BD}$ (R.12)

Ecris les sommes suivantes sous la forme d'une seule fraction simplifiée :

a) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3} = \frac{3x+2x}{6} = \frac{5x}{6}$

b) $\frac{2x+3}{x} + \frac{2x-3}{x} = \frac{2x+3+2x-3}{x} = \frac{4x}{x} = 4$

c) $12+\frac{1}{x} = \frac{12x+1}{x}$

d) $\frac{1}{2x} + \frac{1}{y} = \frac{y+2x}{2xy} = \frac{2x+y}{2xy}$

e) $\frac{3-x}{2} + \frac{3x}{2} = \frac{3-x+3x}{2} = \frac{2x+3}{2}$

f) $\frac{3x}{y} + \frac{3y}{x} = \frac{3x^2+3y^2}{xy}$

Exercice 51

Traduis les situations suivantes par des systèmes de deux équations à deux variables, détermines-en les solutions et interprète tes résultats.

a) L'aire d'un rectangle de dimensions x et y est 60 (cm^2), son périmètre est 31 (cm).

b) Le petit côté de l'angle droit d'un triangle rectangle mesure 5 cm. L'hypoténuse mesure 1 cm de plus que le grand côté de l'angle droit.

c) L'aire d'un disque de rayon r est la même que celle d'un carré de côté c. Le rayon mesure 1 cm de moins que le côté du carré.

d) Un cylindre de rayon r et de hauteur h a un volume de 100 cm^3. Le diamètre de ce cylindre est égal à sa hauteur.

e) 350 spectateurs ont assisté à un spectacle.
Il y en avait p au parterre, qui payaient chacun Fr. 12.- et g à la galerie, qui payaient chacun Fr. 10.-.
La recette des entrées se montait à Fr. 3900.-.

f) Un nageur nage à une vitesse v en eau calme.
En nageant dans une rivière à contre-courant, sa vitesse est de 0,2 m/s par rapport à la rive. Dans le sens du courant, sa vitesse est de 1,4 m/s.
La vitesse propre du courant est c.

a) On a : $\begin{cases} xy = 60 & (1) \\ 2x + 2y = 31 & (2) \end{cases}$

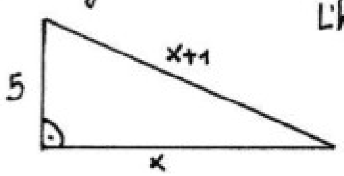
De (1), on tire $y = \frac{60}{x}$.

Par substitution dans (2), on obtient

$$\begin{array}{l|l} 2x + 2\cdot\frac{60}{x} = 31 & \text{Réduction} \\ 2x + \frac{120}{x} = 31 & \cdot x \\ 2x^2 + 120 = 31x & -31x \\ 2x^2 - 31x + 120 = 0 & \end{array}$$

ce qui est une équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=2$, $b=-31$ et $c=120$.
On a $\Delta = b^2-4ac = (-31)^2 - 4\cdot2\cdot120 = 961-960 = 1$, d'où $\sqrt{\Delta} = 1$. Les solutions sont
$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{31+1}{2\cdot2} = \frac{32}{4} = 8$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{31-1}{2\cdot2} = \frac{30}{4} = 7{,}5$.
Avec $x_1 = 8$, on a $y_1 = \frac{60}{x_1} = \frac{60}{8} = 7{,}5$ et, avec $x_2 = 7{,}5$, on a $y_2 = \frac{60}{x_2} = \frac{60}{7{,}5} = 8$.
On obtient donc les solutions $x_1 = 8$cm, $y_1 = 7{,}5$cm et $x_2 = 7{,}5$cm, $y_2 = 8$m.
Elles sont symétriques ($x_1 = y_2$ et $y_1 = x_2$).

b) On fait un schéma:



on appelle x la longueur du grand côté du triangle rectangle.
L'hypoténuse vaut ainsi x+1.
Par le théorème de Pythagore, on a alors

$$\begin{array}{r|l} (x+1)^2 = 5^2 + x^2 & \text{identité remarquable} \\ x^2+2x+1 = 25+x^2 & -x^2 \\ 2x+1 = 25 & -1 \\ 2x = 24 & :2 \\ x = 12 & \end{array}$$

Le grand côté de l'angle droit vaut donc 12 cm et l'hypoténuse $12+1=13$ cm.

c) L'aire d'un disque de rayon r est πr^2.

Le rayon mesure 1 cm de moins que le côté du carré. Ainsi le côté du carré vaut $r+1$.

L'aire du carré est alors $(r+1)^2$.

Les deux aires sont égales :

$$\begin{array}{rl|l} \pi r^2 &= (r+1)^2 & \text{identité remarquable} \\ \pi r^2 &= r^2+2r+1 & -\pi r^2 \\ 0 &= (1-\pi)r^2+2r+1 & \end{array}$$

ce qui est une équation du 2e degré de la forme $ar^2+br+c=0$ avec $a=1-\pi$, $b=2$ et $c=1$.

On a $\Delta = b^2-4ac = 2^2-4(1-\pi)\cdot 1 = 4-4+4\pi = 4\pi > 0$ et $\sqrt{\Delta}=\sqrt{4\pi}=2\sqrt{\pi}$. Les solutions sont :

$r_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2+2\sqrt{\pi}}{2(1-\pi)} = \dfrac{-2(1-\sqrt{\pi})}{2(1-\pi)} = -\dfrac{1-\sqrt{\pi}}{1-\pi} = -\dfrac{1-\sqrt{\pi}}{(1+\sqrt{\pi})(1-\sqrt{\pi})}$ en utilisant l'identité remarquable

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ avec $a=1$ et $b=\sqrt{\pi}$, d'où $r_1=-\dfrac{1}{1+\sqrt{\pi}}$, et, similairement,

$r_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2-2\sqrt{\pi}}{2(1-\pi)} = \dfrac{-2(1+\sqrt{\pi})}{2(1-\pi)} = -\dfrac{1+\sqrt{\pi}}{1-\pi} = -\dfrac{1+\sqrt{\pi}}{(1+\sqrt{\pi})(1-\sqrt{\pi})} = -\dfrac{1}{1-\sqrt{\pi}} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}-1}$.

Or, $r_1 = -\dfrac{1}{1+\sqrt{\pi}} < 0$ et $r_2 = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}-1} > 0$.

La seule solution valable pour le problème est donc $r=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}-1} \cong 1{,}29$.

Le rayon du disque est donc $\sim 1{,}29$ cm et le côté du carré est $\sim 1{,}29+1 \cong 2{,}29$ cm.

d) La formule du volume du cylindre est $V=\pi r^2 h$. Ici $V=100\ \text{cm}^3$.

Le diamètre du cylindre est $2r$ et vaut h. Ainsi $h=2r$

On obtient ainsi l'équation

$$\begin{array}{rl|l} \pi r^2\cdot 2r &= 100 & \text{Réduction} \\ 2\pi r^3 &= 100 & :2 \\ \pi r^3 &= 50 & :\pi \\ r^3 &= \dfrac{50}{\pi} & \sqrt[3]{} \\ r &= \sqrt[3]{\dfrac{50}{\pi}} & \end{array}$$

Le rayon de base du cylindre est donc $r=\sqrt[3]{\dfrac{50}{\pi}} \cong 2{,}52$ et la hauteur est $2r \cong 5{,}03$ cm.

e) Il y avait 350 spectateurs. Ainsi, on a $p+g=350$.

La recette était de 3900.–. Ainsi, on a $12p+10g=3900$.

On doit donc résoudre le système $\begin{cases} p+g=350 & (1) \\ 12p+10g=3900 & (2) \end{cases}$.

De (1), on tire $g=350-p$.

Par substitution dans (2), on trouve

$$\begin{array}{rl|l} 12p+10(350-p) &= 3900 & \text{Distributivité} \\ 12p+3500-10p &= 3900 & \text{Réduction} \\ 2p+3500 &= 3900 & -3500 \end{array}$$

$$2p = 400 \quad \Big| \; :2$$
$$p = 200$$

Avec $p = 200$, on a $g = 350 - p = 350 - 200 = 150$.

Ainsi, il y avait 200 personnes au parterre et 150 à la galerie.

f) A contre-courant, sa vitesse effective est de $v - c$. Ainsi, on a $v - c = 0{,}2$.

Dans le sens du courant, sa vitesse effective est de $v + c$. Ainsi, on a $v + c = 1{,}4$.

On doit donc résoudre le système $\begin{cases} v - c = 0{,}2 \\ v + c = 1{,}4 \end{cases}$.

En additionnant ces 2 équations, on trouve $2v = 1{,}6$, d'où $v = 0{,}8$.

Avec $v = 0{,}8$, on a $0{,}8 - c = 0{,}2$, d'où $c = 0{,}6$.

La vitesse du nageur est donc $v = 0{,}8$ m/s et la vitesse propre du courant est $c = 0{,}6$ m/s.

Exercice 52

On utilise l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Carré d'une somme de deux termes	Somme développée
$(-3y^2 - 3x^2)^2 = (-3y^2)^2 + 2(-3y^2)(-3x^2) + (-3x^2)^2$	$= 9y^4 + 18x^2y^2 + 9x^4$
$(5y^2 - z^3)^2 = (5y^2)^2 + 2 \cdot 5y^2(-z^3) + (-z^3)^2$	$= 25y^4 - 10y^2z^3 + z^6$
$(4z^3 + 4y^3)^2 = (4z^3)^2 + 2 \cdot 4z^3 \cdot 4y^3 + (4y^3)^2$	$= 16z^6 + 32y^3z^3 + 16y^6$
$(-4 - x)^2 = (-4)^2 + 2(-4)(-x) + (-x)^2$	$= 16 + 8x + x^2 = x^2 + 8x + 16$
$(5z^2 - x^2)^2 = (5z^2)^2 + 2(5z^2)(-x^2) + (-x^2)^2$	$= 25z^4 - 10x^2z^2 + x^4$
$(-3y^3 + 4)^2 = (-3y^3)^2 + 2(-3y^3) \cdot 4 + 4^2$	$= 9y^6 - 24y^3 + 16$
$(-y^2 + 2x)^2 = (-y^2)^2 + 2(-y^2) \cdot 2x + (2x)^2$	$= y^4 - 4xy^2 + 4x^2$
$(3z + y^3)^2 = (3z)^2 + 2 \cdot 3z \cdot y^3 + (y^3)^2$	$= 9z^2 + 6y^3z + y^6$
$(y^2 + 4)^2 = (y^2)^2 + 2y^2 \cdot 4 + 4^2$	$= y^4 + 8y^2 + 16$
$(-2 + 5z^2)^2 = (-2)^2 + 2 \cdot (-2) \cdot 5z^2 + (5z^2)^2$	$= 4 - 20z^2 + 25z^4$

Exercice 53

On utilise l'identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Produit de deux binômes	Différence de deux carrés
$(-2x-3x^2)(-2x+3x^2) = (-2x)^2 - (3x^2)^2$	$= 4x^2 - 9x^4$
$(3y^2-9)(3y^2+9) = (3y^2)^2 - 9^2$	$= 9y^4 - 81$
$(3y^3+3y)(3y^3-3y) = (3y^3)^2 - (3y)^2$	$= 9y^6 - 9y^2$
$(-8+5z^3)(-8-5z^3) = (-8)^2 - (5z^3)^2$	$= 64 - 25z^6$
$(-4-3y)(-4+3y) = (-4)^2 - (3y)^2$	$= 16 - 9y^2$
$(2z^3+7)(2z^3-7) = (2z^3)^2 - 7^2$	$= 4z^6 - 49$
$(3+5y^2)(3-5y^2) = 3^2 - (5y^2)^2$	$= 9 - 25y^4$
$(-z^2+4x)(-z^2-4x) = (-z^2)^2 - (4x)^2$	$= z^4 - 16x^2$
$(4z-8)(4z+8) = (4z)^2 - 8^2$	$= 16z^2 - 64$
$(-6+5z)(-6-5z) = (-6)^2 - (5z)^2$	$= 36 - 25z^2$

Exercice 54

Effectue les chaînes de calculs suivants, en faisant attention à l'ordre des opérations.

1.	(2 x 3 + 3) x 4 - 5 x 2	=	....	16.	4 x 3 + 2 x 4 + 3 x 3	=	....
2.	(5 x 3 + 3) x 4 + 4 x 4	=	....	17.	4 x 3 + 3 x 4 + 3 x 3	=	....
3.	5 x 2 + 2 x 2 + 2 x 4	=	....	18.	(2 x 4 - 4) x 3 + 4 x 4	=	....
4.	(4 + 4 x 5) x 5 + 4 x 4	=	....	19.	(2 + 2 x 4) x 5 - 3 x 5	=	....
5.	(4 x 5 + 5) x 5 + 2 x 2	=	....	20.	(3 x 5 + 4) x 3 + 3 x 5	=	....
6.	3 x 5 + 4 x 5 + 4 x 3	=	....	21.	(4 x 3 - 3) x 4 + 3 x 4	=	....
7.	(2 + 3 x 4) x 4 + 3 x 3	=	....	22.	(2 + 4 x 5) x 3 - 4 x 3	=	....
8.	(4 x 4 + 2) x 3 + 3 x 4	=	....	23.	(4 x 2 + 4) x 3 - 4 x 2	=	....
9.	4 x 3 + 3 x 3 + 5 x 2	=	....	24.	(4 + 5 x 4) x 4 - 3 x 5	=	....
10.	(3 x 2 + 5) x 4 - 3 x 3	=	....	25.	(4 x 3 + 2) x 3 - 3 x 4	=	....
11.	(4 + 2 x 4) x 5 + 4 x 5	=	....	26.	5 x 2 + 2 x 5 + 3 x 4	=	....
12.	2 x 3 + 3 x 3 + 5 x 3	=	....	27.	(3 x 3 + 4) x 2 - 2 x 2	=	....
13.	(4 + 4 x 2) x 2 + 2 x 3	=	....	28.	(3 x 5 - 4) x 3 + 3 x 3	=	....
14.	(3 x 4 + 4) x 3 - 3 x 4	=	....	29.	(4 x 3 + 4) x 3 + 4 x 3	=	....
15.	(4 x 3 - 5) x 3 + 5 x 4	=	....	30.	(4 + 4 x 4) x 5 - 2 x 5	=	....

Réponses

1) **26**	2) **88**	3) **22**	4) **136**	5) **129**	6) **47**	7) **65**	8) **66**	9) **31**	10) **35**
11) **80**	12) **30**	13) **30**	14) **36**	15) **41**	16) **29**	17) **33**	18) **28**	19) **35**	20) **72**
21) **48**	22) **54**	23) **28**	24) **81**	25) **30**	26) **32**	27) **22**	28) **42**	29) **60**	30) **90**

Exercice 55

1. Dojima achète aux soldes une télévision qu'il paie 652.5 francs. Calcule le prix qu'il aurait payé si il n'avait pas eu une réduction de 25%.
   Voir feuilles annexes

2. Figo a payé un téléphone portable 246.5 francs.
   Calcule la réduction en %, sachant que cet article coûtait au départ 290 francs.

3. Claire-Marie a payé un VTT 833 francs.
   Calcule la réduction en %, sachant que cet article coûtait au départ 980 francs.

4. Ronaldinho souhaite acheter une télévision qui coûte 580 francs.
   Sur la vitrine, il lit : " *10% de réduction sur tous les articles.* "
   Calcule le prix que Ronaldinho va payer à la caisse.

5. Beckham a payé une télévision 666 francs.
   Calcule la réduction en %, sachant que cet article coûtait au départ 740 francs.

6. Zizou a payé une chemise 114 francs.
   Calcule la réduction en %, sachant que cet article coûtait au départ 120 francs.

7. Mathieu achète aux soldes un home-cinema qu'il paie 621 francs. Calcule le prix qu'il aurait payé si il n'avait pas eu une réduction de 10%.

8. Maureen achète aux soldes une télévision qu'elle paie 465 francs. Calcule le prix qu'elle aurait payé si elle n'avait pas eu une réduction de 25%.

9. Johan Djourou a payé une chaîne hi-fi 833 francs.
   Calcule la réduction en %, sachant que cet article coûtait au départ 980 francs.

10. 50 Cent a payé un lecteur MP3 114 francs.
    Calcule la réduction en %, sachant que cet article coûtait au départ 190 francs.

1. Prix de départ = 100% = ?
Réduction = 25% ⟹ prix à payer = 100 − 25 = 75%
Prix réduit = 652.50

	%	frs	
:75	75	652.50	:75
·100	1	8,7	·100
	100	**870.–**	

2. Prix de départ = 100% = 290.–
Réduction = ? ⟹ prix à payer = 100 − ? %
Prix réduit = 246.50
⟹ réduction = **15%.**

	%	frs	
:290	100	290	:290
·246.50	0,345	1	·246.50
	85	246.50	

3. Prix de départ = 100% = 980.–
Réduction = ? ⟹ prix à payer = 100 − ? %
Prix réduit = 833.–
⟹ réduction = **15%.**

	%	frs	
:980	100	980	:980
·833	0,102	1	·833
	85	833	

4. Prix de départ = 100 % = 580.–
Réduction = 10% ⟹ prix à payer = 100 − 10 = 90%
Prix réduit = ?

	%	frs	
:100	100	580	:100
·90	1	5,8	·90
	90	**522.–**	

5. Prix de départ = 100% = 740.–
Réduction = ? ⟹ prix à payer = 100 − ? %
Prix réduit = 666.–
⟹ réduction = **10%.**

	%	frs	
:740	100	740	:740
·666	0,135	1	·666
	90	666	

6. Prix de départ = 100% = 120.–
Réduction = ? ⟹ prix à payer = 100 − ? %
Prix réduit = 114.–
⟹ réduction = **5%.**

	%	frs	
:120	100	120	:120
·114	$0,8\overline{3}$	1	·114
	95	114	

7. Prix de départ = 100% = ?
Réduction = 10% ⟹ prix à payer = 100 − 10 = 90%
Prix réduit = 621.–

	%	frs	
:90	90	621	:90
·100	1	6,9	·100
	100	**690.–**	

8. Prix de départ = 100% = ?

Réduction = 25% $\Rightarrow$ prix à payer = 100 − 25 = 75%

Prix réduit = 465.–

	%	frs	
:75	75	465	:75
·100	1	6,2	·100
	100	<u>620.–</u>	

9. Prix de départ = 100% = 980.–

Réduction = ? $\Rightarrow$ prix à payer = 100 − ? %

Prix réduit = 833.–

$\Rightarrow$ réduction = <u>15%.</u>

	%	frs	
:980	100	980	:980
·833	0,102	1	·833
	85	833	

10. Prix de départ = 100% = 190.–

Réduction = ? $\Rightarrow$ prix à payer = 100 − ? %

Prix réduit = 114.–

$\Rightarrow$ réduction = <u>40%.</u>

	%	frs	
:190	100	190	:190
·114	0,526	1	·114
	60	114	

Exercice 56

Le testament

L'oncle Jules, après s'être retrouvé veuf et sans héritiers, a finalement trouvé le bonheur dans les bras d'une jeune femme qui attend actuellement un heureux événement. Se sentant mal, l'oncle Jules s'en fut voir son notaire et lui dicta un testament au terme duquel sa fortune, qui s'élève à 350 000 euros, devait être ainsi partagée : si l'enfant à naître était un garçon, la jeune veuve éplorée recevrait la moitié de la part de son fils, mais si l'enfant était une fille, elle recevrait le double de la part de sa fille.
L'oncle Jules mourut peu de temps après et il n'eut pas le temps de voir naître les jumeaux Patrick et Patricia. Comment le notaire s'y prit-il pour respecter les dernières volontés de l'oncle Jules ?

Le notaire partagea la fortune de l'oncle Jules en trois parts telles que la part de la veuve soit égale à la moitié de la part de son fils et au double de la part de sa fille.
Si on note V la part de la veuve, on doit avoir :

$$350'000 = V + 2V + \frac{1}{2}V = 3{,}5\,V \implies V = 100'000.$$

Par conséquent, Patrick a reçu 200'000 €, Patricia, 50'000 € et leur mère, 100'000 €.

Exercice 57

Simplifier les expressions suivantes :

a) $\dfrac{a^m \cdot a^n}{a^2}$ b) $\dfrac{x^m \cdot x^{2m} \cdot x^{2m}}{x}$ c) $x^{m-n} \cdot x^{n-m}$

d) $\dfrac{(xy)^m \cdot (x^{m+1} \cdot y^{m-1})}{xy}$ e) $(x^{1-n} \cdot y^{n-1}) \cdot x^2 y^2$ f) $\dfrac{\left(x^2 \cdot y^3\right)^2}{xy^2}$

a) $\dfrac{a^m \cdot a^n}{a^2} = \dfrac{a^{m+n}}{a^2} = \underline{\underline{a^{m+n-2}}}.$

b) $\dfrac{x^m \cdot x^{2m} \cdot x^{2m}}{x} = \dfrac{x^{m+2m+2m}}{x^2} = \dfrac{x^{5m}}{x^2} = \underline{\underline{x^{5m-2}}}.$

c) $x^{m-n} \cdot x^{n-m} = x^{m-n+n-m} = x^0 = \underline{\underline{1}}.$

d) $\dfrac{(xy)^m \cdot (x^{m+1} \cdot y^{m-1})}{xy} = \dfrac{x^m \cdot x^{m+1} \cdot y^m \cdot y^{m-1}}{xy} = \dfrac{x^{m+m+1} \cdot y^{m+m-1}}{xy} =$

$= \dfrac{x^{2m+1} y^{2m-1}}{xy} = \dfrac{x^{2m+1}}{x} \cdot \dfrac{y^{2m-1}}{y} = x^{2m+1-1} y^{2m-1-1} = \underline{\underline{x^{2m} y^{2m-2}}}.$

e) $(x^{1-n} \cdot y^{n-1}) \cdot x^2 y^2 = x^{1-n} \cdot x^2 \cdot y^{n-1} \cdot y^2 = x^{1-n+2} y^{n-1+2} = \underline{\underline{x^{3-n} y^{n+1}}}.$

f) $\dfrac{(x^2 \cdot y^3)^2}{xy^2} = \dfrac{(x^2)^2 \cdot (y^3)^2}{xy^2} = \dfrac{x^4 \cdot y^6}{xy^2} = \dfrac{x^4}{x} \cdot \dfrac{y^6}{y^2} = x^{4-1} y^{6-2} = \underline{\underline{x^3 y^4}}.$

Exercice 58

a) La vitesse de la lumière est de 300'000 kilomètres par seconde. Combien de mètres parcourt-elle en 1 an ? On estimera la durée d'une année à 365,25 jours de 24 heures.
Remarque : On appelle cette distance une année-lumière !!

b) La masse d'un litre d'eau est de 1 kilogramme. Quelle est la masse d'eau contenue dans une piscine olympique dont les dimensions sont 50 x 25 x 3 m ?

c) La masse d'un électron est approximativement de $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg. Combien d'électrons faut-il pour que leur masse soit égale à 5 grammes ?

d) Le plus long film jamais tourné est un film britannique de 48 heures. Sachant qu'il y a 24 images qui défilent chaque seconde, calculer le nombre d'images que contient ce film.

e) L'eau occupe $3{,}61 \cdot 10^{8}$ km^2 à la surface de la Terre, soit 70% de la surface totale. Exprimer la surface totale de la Terre en **m^2**.

a) 300'000 km en 1 seconde

$\Rightarrow$ $300'000 \cdot 60$ km en 1 minute

$\Rightarrow$ $300'000 \cdot 60^2$ km en 1 heure

$\Rightarrow$ $300'000 \cdot 60^2 \cdot 24$ km en 1 jour

$\Rightarrow$ $300'000 \cdot 60^2 \cdot 24 \cdot 365$ km en 1 an $=$ $\underline{\underline{9{,}46 \cdot 10^{12} \text{ km en 1 an.}}}$

b) Volume de la piscine $= 50 \cdot 25 \cdot 3 = 3750$ m^3 $= 3'750'000$ dm^3 $=$

$= 3'750'000$ litres.

Pour l'eau, 1 litre = 1 kg.

$\Rightarrow$ masse d'eau dans la piscine $=$ $\underline{\underline{3'750'000 \text{ kg} = 3{,}75 \cdot 10^{6} \text{ kg.}}}$

c) masse d'un électron $= 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg $= 9{,}11 \cdot 10^{-28}$ g.

On fait une règle de trois :

nb d'électrons	masse (en g)
1	$9{,}11 \cdot 10^{-28}$
?	5

$\Rightarrow$ nb d'électrons pour que leur masse soit 5 g $= \dfrac{5 \cdot 1}{9{,}11 \cdot 10^{-28}} = \underline{\underline{5{,}49 \cdot 10^{27}}}$

d) 24 images en 1 seconde $\Rightarrow$ $24 \cdot 60$ images en 1 minute

$\Rightarrow$ $24 \cdot 60^2$ images en 1 heure $\Rightarrow$ $24 \cdot 60^2 \cdot 48$ images en 48 heures $=$

$=$ $\underline{\underline{4'147'200 \text{ images en 48 heures} = 4{,}1472 \cdot 10^{6} \text{ images en 48 heures.}}}$

e) On commence par une règle de trois :

%	km^2
70	$3{,}61 \cdot 10^8$
100	?

$\Rightarrow$ surface totale de la Terre $= \dfrac{100 \cdot 3{,}61 \cdot 10^8}{70}\ km^2 = 5{,}157 \cdot 10^8\ km^2 =$

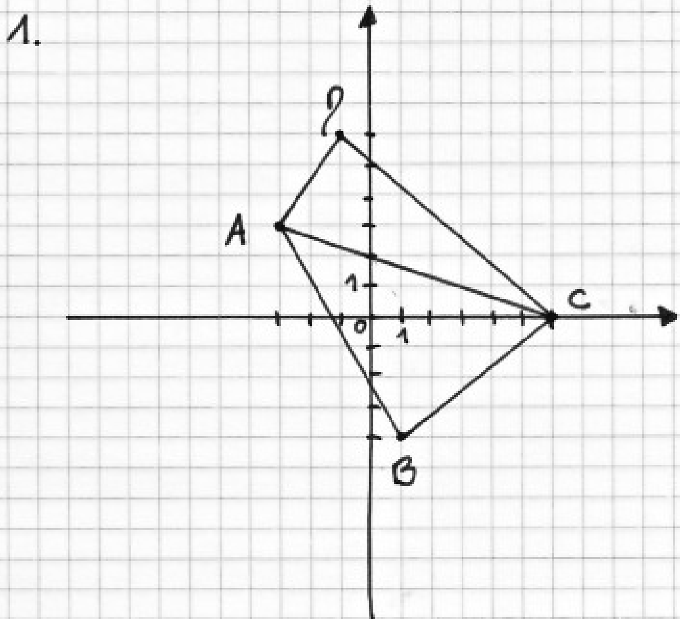
$= \underline{\underline{5{,}157 \cdot 10^{14}\ m^2}}.$

Exercice 59

Dessiner les deux quadrilatères suivants et calculer leurs aires.

1. $A(-3;3)$, $B(1;-4)$, $C(6;0)$ et $D(-1;6)$
2. $A'(-2;-4)$, $B'(0;1)$, $C'(7;-1)$ et $D'(-3;6)$

1.



On sait que $\det(\vec{v_1};\vec{v_2})$ est au signe près l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$.

On en déduit que $\frac{1}{2}|\det(\vec{v_1};\vec{v_2})|$ est l'aire du triangle engendré par $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$.

On divise le quadrilatère ABCD en 2 triangle: ABC et ACD.

On a alors :

aire ABCD = aire ABC + aire ACD =

$= \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})| + \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})|$.

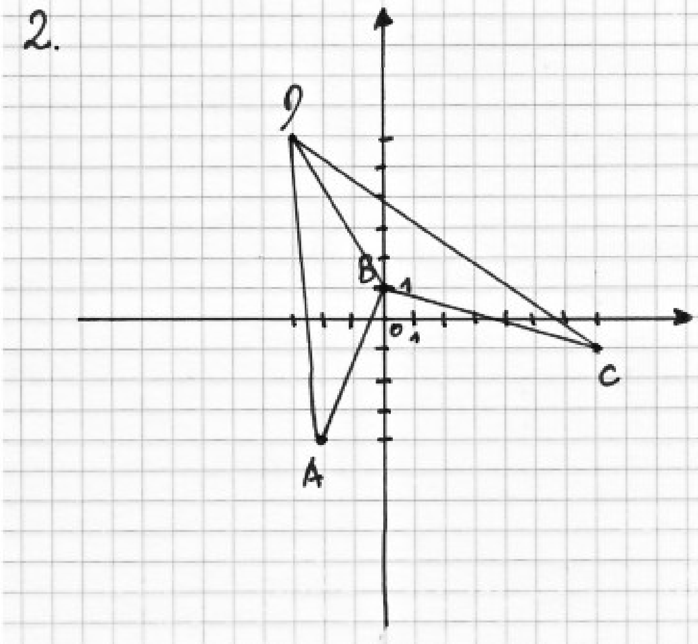
On a: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\-3\end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$; $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix}4 & 9\\-7 & -3\end{vmatrix} = 4\cdot(-3)-(-7)\cdot 9 =$

$= -12+63 = 51$; $\det(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix}9 & 2\\-3 & 3\end{vmatrix} = 9\cdot 3-(-3)\cdot 2 = 27+6 = 33$.

Ainsi aire ABCD $= \frac{1}{2}\cdot 51 + \frac{1}{2}\cdot 33 = 25{,}5 + 16{,}5 = \underline{\underline{42}}$.

2.



Ici : aire ABCD = aire ABD + aire BCD =

$= \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})| + \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD})|$.

On a: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\10\end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$;

$\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix}2 & -1\\5 & 10\end{vmatrix} = 2\cdot 10 - 5\cdot(-1) = 25$;

$\det(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD}) = \begin{vmatrix}7 & -3\\-2 & 5\end{vmatrix} = 7\cdot 5 - (-2)(-3) = 29$.

Ainsi aire ABCD $= \frac{1}{2}\cdot 25 + \frac{1}{2}\cdot 29 = 12{,}5 + 14{,}5 = \underline{\underline{27}}$.

Exercice 60

Compléter la facture

Désignation de l'article	Quantité	Prix Unitaire H.T.	Prix Total H.T.
Magnétoscope	1	260,00	260,00
Platine laser	1	184,00	184,00
Compact disque	8	24,95	8·24,95 = 199,60
Cassette vidéo	32,4 : 5,4 6	5,40	+ 32,40
	Prix total Hors taxes		676,00
	Remise 5%		− 33,80
	Total H.T. après remise		642,20
	TVA 19,6 %		+ 125,87
	Total T.T.C.		768,07

	%	frs	
: 20	100	676	: 20
	5	$\boxed{33,8}$	

	%	frs	
· 0,196	100	642,2	· 0,196
	19,6	$\boxed{125,87}$	

Exercice 61

Résoudre les systèmes d'équations suivants.

1. $\begin{cases} x+y=25 \\ x-y=15 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x+2y=3 \\ 4x-3y=-13 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3(x-y)=2(x-3)-(y+2) \\ 5x=y+1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{4}+\dfrac{x-y}{3}=3 \\ \dfrac{12x-7y}{13}=3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{4y+2}{10}=0 \\ \dfrac{4x-2}{6}+\dfrac{2y+1}{5}=6 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x+4y=7 \\ \dfrac{x+1}{2}-(2y+3)=-3 \end{cases}$

1. $\left\{\begin{matrix} x+y=25 \\ x-y=15 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{+} 2x=40 \Rightarrow \underline{\underline{x=20}} \Rightarrow 20+y=25 \Rightarrow \underline{\underline{y=5}}.$

2. $\left\{\begin{matrix} 3x+2y=3 \xrightarrow{\cdot 3} 9x+6y=9 \\ 4x-3y=-13 \xrightarrow{\cdot 2} 8x-6y=-26 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{+} 17x=-17 \Rightarrow \underline{\underline{x=-1}} \Rightarrow -3+2y=3 \Rightarrow 2y=6 \Rightarrow \underline{\underline{y=3}}.$

3. $\begin{cases} 3(x-y)=2(x-3)-(y+2) \\ 5x=y+1 \Rightarrow y=5x-1 \end{cases}$

$$\begin{array}{l|l}
3\left(x-(5x-1)\right)=2(x-3)-(5x-1+2) & \text{Distributivité} \\
3(x-5x+1)=2x-6-5x+1-2 & \text{Distributivité} \\
3x-15x+3=2x-6-5x+1-2 & \text{Réduction} \\
-12x+3=-3x-7 & +3x \\
-9x+3=-7 & -3 \\
-9x=-10 & :9 \\
\underline{\underline{x=\frac{10}{9}}} &
\end{array}$$

$\Rightarrow y=5x-1=5\cdot\frac{10}{9}-1=\frac{50}{9}-1=\underline{\underline{\frac{41}{9}}}.$

4. $\begin{cases} \frac{x+y}{4}+\frac{x-y}{3}=3 \xrightarrow{\cdot 12} 3(x+y)+4(x-y)=36 \Rightarrow 3x+3y+4x-4y=36 \Rightarrow 7x-y=36 \\ \frac{12x-7y}{13}=3 \xrightarrow{\cdot 13} 12x-7y=39 \end{cases}$

$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} 7x-y=36 \xrightarrow{\cdot 7} 49x-7y=252 \\ 12x-7y=39 \xrightarrow{\cdot(-1)} -12x+7y=-39 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{+} 37x=213 \Rightarrow \underline{\underline{x=\frac{213}{37}}}$

$\Rightarrow 7\cdot\frac{213}{37}-y=36 \Rightarrow \frac{1491}{37}-y=36 \Rightarrow -y=36-\frac{1491}{37}=-\frac{159}{37} \Rightarrow \underline{\underline{y=\frac{159}{37}}}.$

5. $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3} - \dfrac{4y+2}{10} = 0 \xrightarrow{\cdot 30} 10(2x-1) - 3(4y+2) = 0 \Rightarrow 20x - 10 - 12y - 6 = 0 \Rightarrow 20x - 12y - 16 = 0 \\ \Rightarrow 20x - 12y = 16 \Rightarrow 5x - 3y = 4 \\ \dfrac{4x-2}{6} + \dfrac{2y+1}{5} = 6 \xrightarrow{\cdot 30} 5(4x-2) + 6(2y+1) = 180 \Rightarrow 20x - 10 + 12y + 6 = 180 \Rightarrow 20x + 12y - 4 = 180 \\ \Rightarrow 20x + 12y = 184 \Rightarrow 5x + 3y = 46 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 5x - 3y = 4 \\ 5x + 3y = 46 \end{cases} \xrightarrow{+} 10x = 50 \Rightarrow \underline{\underline{x = 5}} \Rightarrow 5 \cdot 5 + 3y = 46 \Rightarrow 3y = 21 \Rightarrow \underline{\underline{y = 7.}}$

6. $\begin{cases} x + 4y = 7 \longrightarrow x = 7 - 4y \\ \dfrac{x+1}{2} - (2y+3) = -3 \end{cases}$

$\dfrac{7-4y+1}{2} - (2y+3) = -3$	Réduction
$\dfrac{8-4y}{2} - (2y+3) = -3$	Simplification
$4 - 2y - (2y+3) = -3$	Distributivité
$4 - 2y - 2y - 3 = -3$	Réduction
$-4y + 1 = -3$	-1
$-4y = -4$	$:(-4)$
$\underline{\underline{y = 1}}$	

$\Rightarrow x = 7 - 4y = 7 - 4 = \underline{\underline{3.}}$

Exercice 62

Effectuer les conversions d'unités suivantes dans le cahier de solutions (arrondir à deux chiffres après la virgule si besoin):

1) Périmètre d'un terrain de football de 90m sur 60m :
En m ? En km ? En cm ?

2) Aire d'un terrain de volley-ball de 9m sur 16m :
En m^2 ? En dam^2? En cm^2 ?

3) Volume d'un bassin de piscine de 25m sur 7m et de 2m de profondeur :
En m^3 ? En litres ? (Aide : 1 dm^3 = 1 litre)

4) 3heures et 20 minutes :
En secondes ?

5) Le 5 janvier 2012, le cours du jour est de 1 euro = 1.22 francs.
   a) Sabine a changé 150 euros en francs, combien a-t-elle obtenu de francs ?
   b) Mathieu a changé 200 francs en euros. Combien a-t-il obtenu d'euros ?
   c) Trois mois plus tard, Mathieu a rechangé 50 euros et il a obtenu 62.50 francs. Quel était alors le cours du jour pour 1 franc? Pour Mathieu, le cours est-il plus ou moins favorable que le cours du 5 janvier 2012?

1) Le périmètre d'un terrain de football de 90m sur 60m est $2 \cdot 90 + 2 \cdot 60 =$
$= \underline{\underline{300 m}} = \underline{\underline{0,3 km}} = \underline{\underline{30'000 cm}}$.

2) L'aire d'un terrain de volley-ball de 9m sur 12m est $9 \cdot 12 = \underline{\underline{108 m^2}} = \underline{\underline{1,08 dam^2}} =$
$= \underline{\underline{1'080'000 cm^2}}$.

3) Le volume d'un bassin de piscine de 25m sur 7m sur 2m est $25 \cdot 7 \cdot 2 =$
$= \underline{\underline{350 m^3}} = 350'000 dm^3 = \underline{\underline{350'000 \text{ litres}}}$.

4) 3heures et 20 minutes $= 3 \cdot 60 + 20 = 180 + 20 = 200$ minutes $= 200 \cdot 60 =$
$= \underline{\underline{12'000 \text{ secondes}}}$.

5) a) Sabine a obtenu $150 \cdot 1,22 = \underline{\underline{183 \text{ frs}}}$.

b) Matthieu a obtenu $200 : 1,22 \cong \underline{\underline{163,93}}$ €.

c) On a $62,50 : 50 = 1,25$. Le cours était donc 1 € = 1,25 frs.
Comme $1,25 > 1,22$, le cours du 5 avril (3 mois plus tard) est plus avantageux pour Matthieu que celui du 5 janvier (il obtiendra plus de francs avec ses 50 €).

Exercice 63

a)

$25{,}2 \cdot 100$	2520
$12 \cdot 0{,}1$	1,2
$42 : 10$	4,2
$2{,}5 \cdot 8$	20
$25 : 4$	6,25
$7{,}5 + 3{,}8 + 2{,}5$	13,8
$25 \cdot 7{,}1 \cdot 4$	710
$9 \cdot 0{,}8 + 0{,}8$	8
$4{,}7 - 3{,}8$	0,9
$2{,}5^2$	6,25

b)

$1000 \cdot 0{,}5$	500
$250 : 100$	2,5
$8{,}1 + 11{,}3 + 0{,}7$	20,1
$1{,}1^2$	1,21
$7 : 0{,}1$	70
$1{,}5 \cdot 7 + 0{,}5 \cdot 7$	14
$72 : 3$	24
$4 \cdot 0{,}7$	2,8
$0{,}1 \cdot 0{,}1$	0,01
$27{,}2 - 15$	12,2

c)

$11 \cdot 1{,}9 - 1{,}9$	19
$13 \cdot 4 \cdot 5$	260
$135 + 75$	210
$0{,}2 + 4{,}1 + 5{,}8 + 0{,}9$	11
$25{,}2 : 2$	12,6
$9 \cdot 0{,}8$	7,2
$4 : 1000$	0,004
$0{,}01 \cdot 32$	0,32
$90 \cdot 100 \cdot 4$	36'000
$12 : 0{,}5$	24

Exercice 64

a) $43 + (999 \cdot 43)$ 43'000
b) $2{,}5 \cdot 17{,}4 \cdot 4$ 174
c) $2{,}5 : 0{,}2$ 12,5
d) $42{,}42 + 17{,}55 - 2{,}42$ 57,55
e) $(88 \cdot 3{,}14) + (12 \cdot 3{,}14)$ 314
f) $(6 \cdot 1{,}3) - (3 \cdot 1{,}3) - (3 \cdot 1{,}3)$ 0
g) $12{,}25 + 9{,}5 - 12{,}25$ 9,5
h) $(2{,}2 \cdot 0{,}8) - (0{,}2 \cdot 0{,}8)$ 1,6
i) $0{,}2^2 : 0{,}2^2$ 1
j) $(15 : 0{,}5) \cdot 0{,}5$ 15

Exercice 65

a)

12,73 − 5,815	6,915
8,5 · 4,2	35,7
10,12 − 13,12	−3
12,81 : 4,2	3,05

b)

0,84 · 6,5	5,46
$(7,6 + 8,9)^2$	272,25
5,17 . 0,55	9,4
345 : 6,6	$52,\overline{27}$

c)

8888 : 25	355,52
4,23 − 0,91	3,32
$2,5^3$	15,625
48 : 3,3	$14,\overline{54}$

d)

413 + 79,8	492,8
401,6 : 16	25,1
183 : 1,25	146,4
54,5 − 5,45	49,05

e)

124,85 − 86,7	38,15
12,2 · 0,05	0,61
1000 − 222,22	777,78
0,123 + 1,23	1,353

f)

1111 : 1,1	1010
1,04 · 12,1	12,584
$(5,8 - 3,9)^2$	3,61
2,46 + 4,68	7,14

Exercice 66

a)	$2003 : 100$	20,03	b)	$102 : 3$	34	c)	$0{,}07 \cdot 10$	0,7
	$12 \cdot 3{,}5$	42		$15 \cdot 0{,}02$	0,3		$3 \cdot 12{,}5 \cdot 4$	150
	$176 \cdot 8$	1408		$1{,}2 \cdot 1000$	1200		$12{,}5 \cdot 6$	75
	$0{,}3^2$	0,09		$2{,}5 \cdot 10$	25		$432 - 321$	111
	$1{,}7 \cdot 0{,}1$	0,17		$7 \cdot 9{,}5$	66,5		$8 \cdot 3{,}1 + 2 \cdot 3{,}1$	31
	$43 - 15{,}1$	27,9		$7{,}2 + 5{,}1 + 0{,}9 + 2{,}8$	16		$144 : 6$	24
	$36 : 0{,}5$	72		$4 : 0{,}25$	16		$0{,}4 \cdot 3{,}2$	1,28
	$25 \cdot 2{,}5 \cdot 8$	500		$18{,}5 - 9{,}2$	9,3		$20'000 : 1000$	20
	$0{,}8 + 4{,}7 + 19{,}2$	24,7		$1{,}5 \cdot 125 \cdot 4$	750		$241 + 78 + 32$	351
	$0{,}7 \cdot 19 + 0{,}7$	14		$31 \cdot 12 - 12$	360		$7{,}5 : 1{,}5$	5

Exercice 67

a) $(-7{,}1) + (+0{,}5) = -6{,}6$
b) $(-17) \cdot (+0{,}5) = -8{,}5$
c) $(+8{,}5) - (+5{,}3) = 3{,}2$
d) $(-12) : (+0{,}6) = -20$
e) $(-12{,}1) - (+0{,}8) = -12{,}9$
f) $(-3{,}4) : (-20) = 0{,}17$
g) $(+6{,}3) + (+4{,}2) = 10{,}5$
h) $(+6{,}3) \cdot (+4) = 25{,}2$

i) $(-3{,}4) - (-17{,}6) = 14{,}2$
j) $(-18) : (-\frac{3}{4}) = 24$
k) $(-0{,}4) + (-17{,}3) = -17{,}7$
l) $(+10{,}1) : (-100) = -0{,}101$
m) $(-0{,}4) - (-17{,}3) = 16{,}9$
n) $(+2{,}4) + (-12{,}4) = -10$
o) $(+6{,}4) : (+4) = 1{,}6$
p) $(+8{,}5) \cdot (+4) = 34$

q) $(+4) \cdot (-\frac{1}{2}) = -2$
r) $(-12{,}1) + (+0{,}8) = -11{,}3$
s) $(-12) \cdot (+0{,}8) = -9{,}6$
t) $(-3{,}4) + (-17{,}6) = -21$
u) $(+6{,}3) - (+4{,}2) = 2{,}1$
v) $(-7{,}1) - (+0{,}5) = -7{,}6$
w) $(+8{,}5) + (+5{,}9) = 14{,}4$
x) $(-0{,}25) \cdot (-44) = 11$

Exercice 68

Un commerçant mélange 50 kilos de café à Fr. 12.-- le kilo avec 20 kilos d'une autre qualité de café à Fr. 15 le kilo. Quel est le prix de revient d'un cornet de 250 grammes de ce mélange?

50 kg à 12.–/kg : $50 \cdot 12 = 600.-$

20 kg à 15.–/kg : $20 \cdot 15 = 300.-$

total: 70 kg 900.–

$900 : 70 \cong 12,85$ fr/kg

Comme $250\,g = 1\,kg : 4$, $12,85 : 4 \cong 3,20$ fr

$\Longrightarrow$ le cornet de 250 g vaut ~ 3,20 fr

Exercice 69

Une somme de fr. 615.-- est partagée entre 3 adolescents proportionnellement à leur âge: Léonardo 12 ans, Amélie 15 ans et Eve 14 ans.
Déterminez ce que chacun a reçu.

Léonardo :	12 ans
Amélie :	15 ans
Eve :	14 ans
total :	41 ans

On fait $615 : 41 = 15$.
Ainsi chacun a 15.– par année de vie.
Donc Léonardo a $12 \cdot 15 = \underline{\underline{180.-}}$, Amélie a $15 \cdot 15 = \underline{\underline{225.-}}$ et Eve a $14 \cdot 15 = \underline{\underline{210.-}}$

Exercice 70

Jules Lachat décède et laisse un héritage de CHF 420'000.-- à ses descendants Albert, Bernard et Charlotte. Sachant que l'état prélève 10% d'impôts sur les successions, répartir l'héritage ainsi: Albert reçoit la moitié, Bernard le tiers et Charlotte le reste. Combien recevra chacun?

On doit déjà déduire les 10% d'impôt, autrement dit calculer les 90% de 420'000.–

	%	frs	
:100	100	420'000	:100
·90	1	4200	·90
	90	378'000	

Albert reçoit la moitié: 378'000 : 2 = 189'000.–

Bernard reçoit le tiers: 378'000 : 3 = 126'000.–

Charlotte reçoit le reste: 378'000 – 189'000 – 126'000 = 63'000.–

Exercice 71

Quatre amis se partagent les 70 billes qu'ils ont trouvées d'une manière inversement proportionnelle à leur âge.
Ils ont 3, 4, 6 et 12 ans.
Combien de billes va recevoir chacun d'eux?

3 ans par rapport à 12 ans : le quart → "3 ans" reçoit 4x plus que "12 ans"
4 ans par rapport à 12 ans : le tiers → "4 ans" reçoit 3x plus que "12 ans"
6 ans par rapport à 12 ans : la moitié → "6 ans" reçoit 2x plus que "12 ans"

3 ans : 4 x "12 ans"
4 ans : 3 x "12 ans"
6 ans : 2 x "12 ans"
12 ans : 1 x "12 ans"

total : 10 x "12 ans" = 70 billes ⟹ "12 ans" = 7 billes

⟹ celui de 3 ans reçoit 4 · 7 = 28 billes
celui de 4 ans reçoit 3 · 7 = 21 billes
celui de 6 ans reçoit 2 · 7 = 14 billes
celui de 12 ans reçoit 7 billes

Exercice 72

Calculer la valeur numérique des expressions:

a) $(a-b)\cdot c^2$ pour $a=1$ $b=3$ $c=-4$

b) $\dfrac{(z-x)\cdot y}{z+x}=$ pour $x=-2$ $y=-1$ $z=3$

a) $(a-b)\cdot c^2 = (1-3)\cdot(-4)^2 = -2\cdot 16 = \underline{\underline{-32}}$

b) $\dfrac{(z-x)\cdot y}{z+x} = \dfrac{(3-(-2))\cdot(-1)}{3+(-2)} = \dfrac{(3+2)\cdot(-1)}{3-2} = \dfrac{5\cdot(-1)}{1} = \underline{\underline{-5}}$

Exercice 73

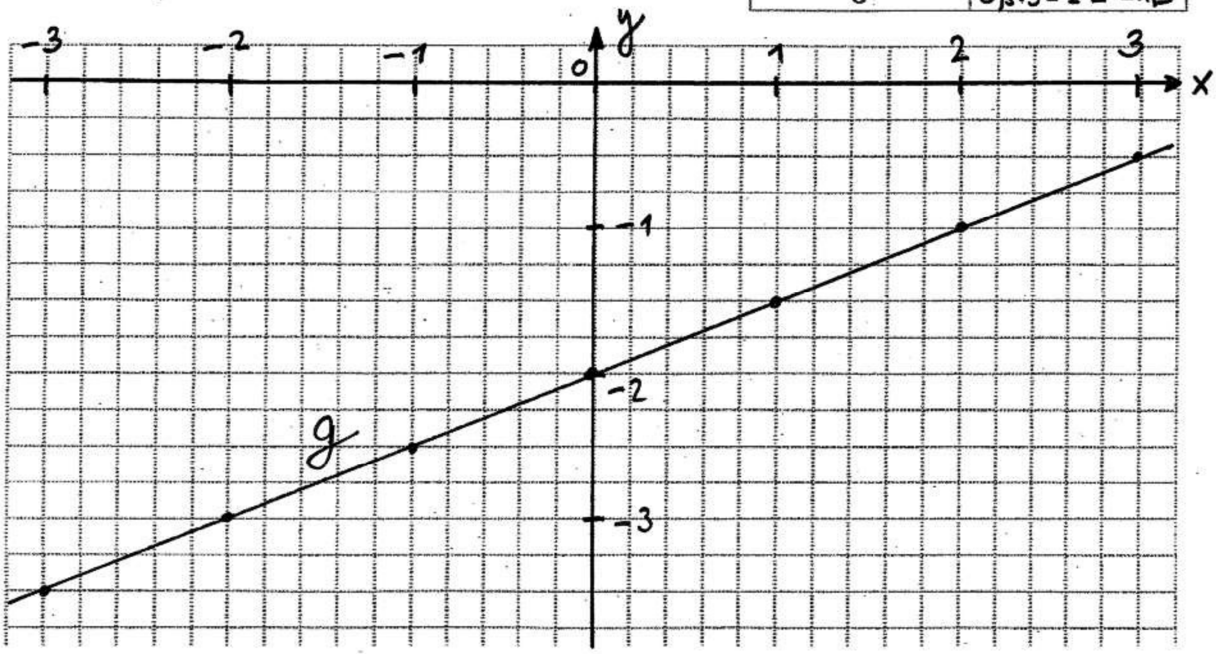
On donne la fonction $g : x \mapsto 0,5x - 2$

a) Complète le tableau de valeurs.

b) Établis un système d'axes (1 unité pour 2cm).

c) Trace précisément le graphe de g, après avoir placé tous les points donnés par le tableau de valeurs.

x	g(x) = 0,5x – 2
-3	$0,5 \cdot (-3) - 2 = -3,5$
-2	$0,5 \cdot (-2) - 2 = -3$
-1	$0,5 \cdot (-1) - 2 = -2,5$
0	$0,5 \cdot 0 - 2 = -2$
1	$0,5 \cdot 1 - 2 = -1,5$
2	$0,5 \cdot 2 - 2 = -1$
3	$0,5 \cdot 3 - 2 = -1,5$



On choisit de mettre l'axe x en haut car toutes les valeurs calculées de g sont négatives.

Exercice 74

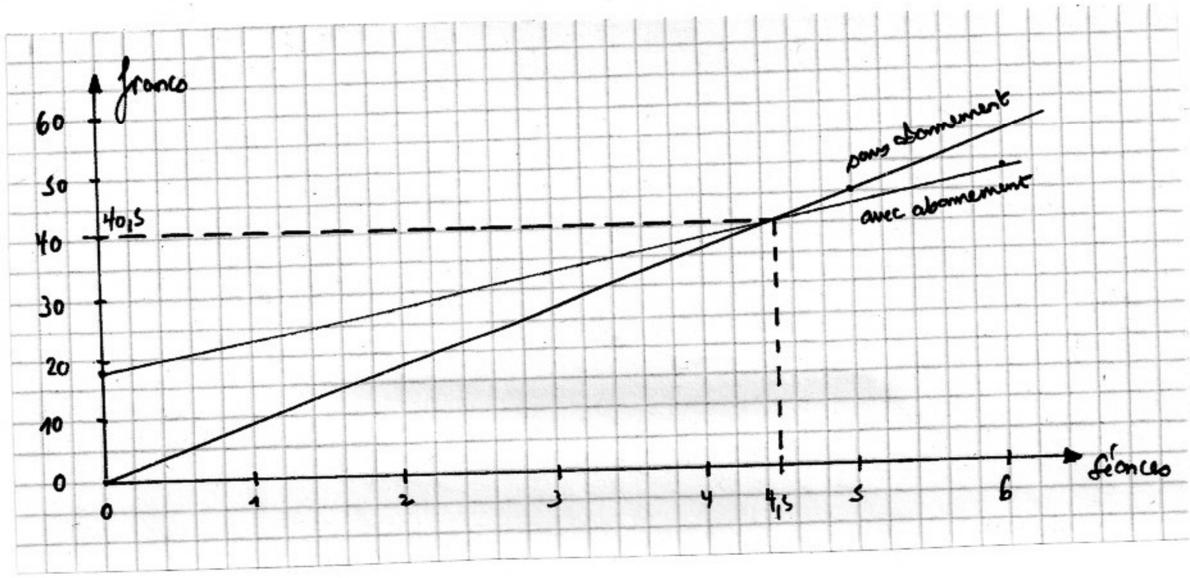
La séance de cinéma coûte Frs. 9.-.
Avec une carte d'abonnement annuel à Frs. 18.-, la séance coûte Frs. 5.- .

1. Si l'on va voir n séances, exprimer en fonction de n, le prix à payer (avec ou sans abonnement)
2. Sur une feuille quadrillée, représenter ces situations dans un même système d'axes.
3. Calculer les coordonnées du point d'intersection des deux droites. Quelle est la signification de ce point ?
4. Quel est le tarif le plus avantageux ?

1. Avec abonnement : $n \longmapsto 5n + 18$

Sans abonnement : $n \longmapsto 9n$.

2.



3. Les fonctions se coupent si

$$\begin{aligned} 5n + 18 &= 9n & &\mid -5n \\ 18 &= 4n & &\mid :4 \\ 4,5 &= n \end{aligned}$$

Avec $n = 4,5$, $5n + 18 = 5 \cdot 4,5 + 18 = 40,5$ et $9n = 9 \cdot 4,5 = 40,5$.
Les coordonnées du point d'intersection des deux droites sont donc $(4,5 ; 40,5)$.
C'est le point où les prix avec ou sans abonnement sont égaux.

4. Jusqu'à $n = 4$, c'est la formule sans abonnement qui est la moins chère.
Dès $n = 5$, c'est la formule avec abonnement qui est la moins chère.

Exercice 75

Un cycliste fait une excursion. Il part de Lausanne à 9h30 et monte jusqu'au col du Pillon. Une fois arrivé, il fait une pause d'une heure et redescend par le même trajet.
Calculer à quelle heure il arrive à Lausanne, sachant
– que la distance entre Lausanne et le col du Pillon est de 72 km,
– qu'à la montée (trajet aller), il a une vitesse moyenne de 34 km/h,
– qu'à la descente (trajet retour), il a une vitesse moyenne de 52 km/h.
Le résultat doit être arrondi à la minute.

Temps pour monter: $72 : 34 = \frac{72}{34} = \frac{36}{17}$ heures.

Temps pour descendre: $72 : 52 = \frac{72}{52} = \frac{18}{13}$ heures

$\Rightarrow$ Heure d'arrivée à Lausanne $= 9h30 + \frac{36}{17} + 1 + \frac{18}{13} = 9{,}5 + \frac{36}{17} + 1 + \frac{18}{13} \cong$

$\cong 14{,}00226\ h = 14h + 0{,}00226\ h = 14h + 0{,}00226 \cdot 60\ min =$

$= 14h + 0{,}136\ min = 14h0min = \underline{\underline{14h00.}}$

Exercice 76

Résoudre :

(a)	$6x-30=2x-10$	$-2x$
	$4x-30=-10$	$+30$
	$4x=20$	$:4$
	$x=5$	
(b)	$3(x-3)+4(x+5)=60$	distributivité
	$3x-9+4x+20=60$	réduction
	$7x+11=60$	-11
	$7x=49$	$:7$
	$x=7$	
(c)	$\frac{2x}{3}+16=26$	$\cdot 3$
	$2x+48=78$	-48
	$2x=30$	$:2$
	$x=15$	

Exercice 77

Résoudre les équations suivantes :

a) $\frac{1}{2}x - \frac{1-x}{4} = 5$	dénominateur commun
$\frac{2x}{4} - \frac{1-x}{4} = \frac{20}{4}$	$\cdot 4$
$2x-(1-x)=20$	parenthèses
$2x-1+x=20$	réduction
$3x-1=20$	$+1$
$3x=21$	$:3$
$x=7$	

b) $2A = \frac{(b+B)}{2} \cdot h$	$\cdot 2$
$4A=(b+B)\cdot h$	$:h$
$\frac{4A}{h}=b+B$	$-B$
$b=\frac{4A}{h}-B$	

c) $5 = \frac{1}{x+3}$	$\cdot(x+3)$
$5(x+3)=1$	distributivité
$5x+15=1$	-15
$5x=-14$	$:5$
$x=-\frac{14}{5}=-2{,}8$	

Exercice 78

Calculer et simplifier :

- $(x-3)^2 = x^2-6x+9$ par l'identité remarquable $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

- $2x^2-3x-(x^2-5x+2) = 2x^2-3x-x^2+5x-2 = x^2+2x-2$

- $(2x+3)^2 = 4x^2+12x+9$ par l'identité remarquable $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

- $(x+5)(x-5) = x^2-25$ par l'identité remarquable $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

- $\frac{a}{2}-\frac{1}{2}(1+3a) = \frac{a}{2}-\frac{1+3a}{2} = \frac{a-(1+3a)}{2} = \frac{a-1-3a}{2} = \frac{-2a-1}{2} = -a-\frac{1}{2}$

- $(3a^3)^3 = 3^3(a^3)^3 = 27a^9.$