Corrigé

Problème 1

On va utiliser la formule des intérêts composés $C_n = C_0(1+t)^n$ lorsqu'il y a augmentation de la valeur du capital et la formule des amortissements $C_n = C_0(1-t)^n$ lorsqu'il y a diminution de la valeur du capital (C_0 est le capital de départ, t est le taux en code à virgule, n le nombre de périodes de temps considérées et C_n le capital après n périodes).

a) Puisque l'action perd mensuellement 7% de sa valeur pendant 6 mois, elle commencera par perdre 7% de sa valeur pendant 4 mois. On utilise donc la formule $C_n = C_0(1-t)^n$ avec $C_0 = 88,50$ CHF, $t = 7\% = 0,07$, $n = 4$.

Ainsi $C_4 = 88,5 \cdot (1-0,07)^4 = 88,5 \cdot 0,93^4 \cong 66,20$ CHF.

Après 4 mois, le titre vaut $\underline{66,20 \text{ CHF}}$.

Pour les 8 premiers mois, on a tout d'abord 6 mois de baisse mensuelle de 7%, puis 2 mois d'augmentation de 7%.

Après 6 mois : $C_n = C_0(1-t)^n$ où $C_0 = 88,50$ CHF, $t = 7\% = 0,07$ et $n = 6$

$\Rightarrow C_6 = 88,5 \cdot (1-0,07)^6 = 88,5 \cdot 0,93^6 \cong 57,26$ CHF.

Pour les 2 mois suivants : $C_n = C_0(1+t)^n$ où $C_0 = 57,26$ CHF, $t = 7\% = 0,07$ et $n = 2$

$\Rightarrow C_2 = 57,26 \cdot (1+0,07)^2 = 57,26 \cdot 1,07^2 \cong 65,56$ CHF.

Ainsi, après 8 mois, le titre vaut $\underline{\underline{65,56 \text{ CHF}}}$.

Pour les 12 premiers mois, on a tout d'abord 6 mois de baisse mensuelle de 7%, puis 6 mois d'augmentation de 7%.

Après 6 mois : $C_n = C_0(1-t)^n$ où $C_0 = 88,50$ CHF, $t = 7\% = 0,07$ et $n = 6$

$\Rightarrow C_6 = 88,5 \cdot (1-0,07)^6 = 88,5 \cdot 0,93^6 \cong 57,26$ CHF.

Pour les 6 mois suivants : $C_n = C_0(1+t)^n$ où $C_0 = 57,26$ CHF, $t = 7\% = 0,07$ et $n = 6$

$\Rightarrow C_6 = 57,26 \cdot (1+0,07)^6 = 57,26 \cdot 1,07^6 = 85,93$ CHF.

Ainsi, après 12 mois, le titre vaut $\underline{85,93 \text{ CHF}}$.

b) D'après a), on sait que, après 12 mois, le titre vaut 85,93 CHF.

Calculons le nombre de mois après cela pour qu'il atteigne 120 CHF (taux = 7%).

On utilise $C_n = C_0(1+t)^n$, où $C_n = 120$ CHF, $t = 7\% = 0,07$ et $C_0 = 85,93$ CHF.

On obtient l'équation $120 = 85,93(1+0,07)^n \Rightarrow 120 = 85,93 \cdot 1,07^n$.

En divisant par 85,93 des 2 côtés de l'équation, on obtient $1{,}07^n = 1{,}40$.

On sait que $a^n = b \Rightarrow n = \frac{\log(b)}{\log(a)}$.

Ainsi $1{,}07^n = 1{,}40 \Rightarrow n = \frac{\log(1{,}40)}{\log(1{,}07)} = 4{,}94 \cong 5$.

Par conséquent, après 5 mois suite aux 12 premiers mois, autrement dit après 17 mois à partir du début, l'action vaut 120 CHF.

c) Au départ, l'action vaut $C_0 = 88{,}50$ CHF.

D'après a), après 12 mois, elle vaut $C_{12} = 85{,}93$ CHF.

Il y a donc décroissance de l'action. Il faut trouver le taux mensuel correspondant.

On a $C_{12} = C_0(1-t)^{12} \Rightarrow 85{,}93 = 88{,}50\,(1-t)^{12}$

$\Rightarrow (1-t)^{12} = \frac{85{,}93}{88{,}5} = 0{,}97 \Rightarrow 1-t = \sqrt[12]{0{,}97} \cong 0{,}9975$

$\Rightarrow -t \cong -0{,}0025 \Rightarrow t \cong 0{,}0025 = 0{,}25\%$.

Le taux de décroissance correspondant est donc $\underline{\underline{0{,}25\%}}$.

d) Au départ l'action vaut 88,50 CHF.

Après 6 mois, elle vaut $C_6 = C_0(1-t)^6$ où $C_0 = 88{,}50$ et $t = 7\% = 0{,}07$

$\Rightarrow C_6 = 88{,}5 \cdot (1-0{,}07)^6 = 88{,}5 \cdot 0{,}93^6 \cong 57{,}26$ CHF.

Il faut calculer le taux mensuel pour repasser en 6 mois de 57,26 CHF à 88,50 CHF.

On utilise $C_6 = C_0(1+t)^6$ où $C_0 = 57{,}26$ CHF et $C_6 = 88{,}50$ CHF.

On obtient $88{,}5 = 57{,}26\,(1+t)^6 \Rightarrow (1+t)^6 = \frac{88{,}5}{57{,}26} \cong 1{,}55$

$\Rightarrow 1+t \cong \sqrt[6]{1{,}55} \cong 1{,}075 \Rightarrow t \cong 0{,}075 = 7{,}5\%$.

Ainsi, le taux devrait être de $\underline{\underline{7{,}5\%}}$.

Problème 2

a) On va utiliser la formule des intérêts composés $C_n = C_0(1+t)^n$, où C_0 est le nombre d'habitants au 31 décembre 2000, t est le taux d'accroissement annuel, $n = 12$ ans et C_n est le nombre d'habitants au 31 décembre 2012.

Pour la population totale: $C_0 = 7{,}164$ et $C_n = 8{,}039$

$\Rightarrow 8{,}039 = 7{,}164 \cdot (1+t)^{12}$

$\Rightarrow (1+t)^{12} = \dfrac{8{,}039}{7{,}164} \cong 1{,}122$

$\Rightarrow 1+t \cong \sqrt[12]{1{,}122} \cong 1{,}00965$

$\Rightarrow t \cong 0{,}00965 = 0{,}965\,\%$.

Le taux d'accroissement annuel est $\underline{\underline{0{,}965\,\%}}$.

Pour la population étrangère: $C_0 = 1{,}321$ et $C_n = 1{,}870$

$\Rightarrow 1{,}870 = 1{,}321 \cdot (1+t)^{12}$

$\Rightarrow (1+t)^{12} = \dfrac{1{,}870}{1{,}321} \cong 1{,}416$

$\Rightarrow 1+t = \sqrt[12]{1{,}416} \cong 1{,}0294$

$\Rightarrow t \cong 0{,}0294 = 2{,}94\,\%$.

Le taux d'accroissement annuel est $\underline{2{,}94\,\%}$.

b) Pour la population totale: $C_0 = 7{,}164$, $n = 2020 - 2000 = 20$, $t = 0{,}965\,\% = 0{,}00965$ (voir a))

$\Rightarrow C_{20} = C_0(1+t)^{20} = 7{,}164 \cdot (1+0{,}00965)^{20} =$

$= 7{,}164 \cdot 1{,}00965^{20} \cong 8{,}681$.

La population serait de $\underline{\underline{8{,}681 \text{ millions d'habitants}}}$.

Pour la population étrangère: $C_0 = 1{,}321$, $n = 20$, $t = 2{,}94\,\% = 0{,}0294$ (voir a))

$\Rightarrow C_{20} = C_0(1+t)^{20} = 1{,}321 \cdot (1+0{,}0294)^{20} =$

$= 1{,}321 \cdot 1{,}0294^{20} \cong 2{,}358$.

La population serait de $\underline{\underline{2{,}358 \text{ millions d'habitants}}}$.

c) La population résidente (= population totale) est donnée par $C_n = C_0(1+t)^n$ avec $C_0 = 7{,}164$ et $t = 0{,}965\,\% = 0{,}00965$ (voir a)) $\Rightarrow C_n = 7{,}164 \cdot (1+0{,}00965)^n$

$\Rightarrow C_n = 7{,}164 \cdot 1{,}00965^n$.

La population étrangère est donnée par $C_n' = C_0(1+t)^n$ avec $C_0 = 1{,}321$ et $t = 2{,}94\,\% = 0{,}0294$ (voir a)) $\Rightarrow C_n' = 1{,}321 \cdot (1+0{,}0294)^n = 1{,}321 \cdot 1{,}0294^n$.

Il faut trouver n tel que la population étrangère représente le tiers de la population résidence, c'est-à-dire $C_n' = \frac{1}{3} C_n$.

Avec $C_n' = 1{,}321 \cdot 1{,}0294^n$ et $C_n = 7{,}164 \cdot 1{,}00965^n$, on obtient

$$1{,}321 \cdot 1{,}0294^n = \frac{1}{3} \cdot 7{,}164 \cdot 1{,}00965^n$$

$$\Longrightarrow 1{,}321 \cdot 1{,}0294^n = 2{,}388 \cdot 1{,}00965^n$$

$$\Longrightarrow \frac{1{,}0294^n}{1{,}00965^n} = \frac{2{,}388}{1{,}321} \Longrightarrow \left(\frac{1{,}0294}{1{,}00965}\right)^n = 1{,}8077$$

$$\Longrightarrow 1{,}020^n = 1{,}8077 \Longrightarrow n = \frac{\log(1{,}8077)}{\log(1{,}020)} \cong 30{,}56 \cong 31.$$

Ainsi, ça sera 31 ans après l'an 2000, donc <u>en 2031.</u>

Problème 3

On a $V(t) = \dfrac{25}{1+9\cdot 2{,}45^{-0{,}23t}}$, où t est en mois et $V(t)$, le nombre d'individus vaccinés, en millions.

a) Le début de la vaccination correspond à $t=0$.

On a alors $V(0) = \dfrac{25}{1+9\cdot 2{,}45^{0}} = \dfrac{25}{1+9} = 2{,}5$.

Il y a donc 2,5 millions d'individus déjà vaccinés au début de la campagne.

b) Après 1 an, on a $t = 12$ mois.

On a alors $V(12) = \dfrac{25}{1+9\cdot 2{,}45^{-0{,}23\cdot 12}} = \dfrac{25}{1+9\cdot 2{,}45^{-2{,}76}} \cong \dfrac{25}{1+9\cdot 0{,}084} =$

$= \dfrac{25}{1+0{,}759} = \dfrac{25}{1{,}759} \cong 14{,}214$

Il y a donc 14,214 millions d'individus vaccinés après une année.

c) Il faut chercher t (en mois) tel que $V(t) = 18$ (millions d'individus).

$V(t) = 18 \Rightarrow \dfrac{25}{1+9\cdot 2{,}45^{-0{,}23t}} = 18 \Rightarrow 25 = 18\cdot\left(1+9\cdot 2{,}45^{-0{,}23t}\right)$

$\xRightarrow{:18} \dfrac{25}{18} = 1+9\cdot 2{,}45^{-0{,}23t} \xRightarrow{-1} \dfrac{7}{18} = 9\cdot 2{,}45^{-0{,}23t} \xRightarrow{:9} \dfrac{7}{162} = 2{,}45^{-0{,}23t}$

$\Rightarrow -0{,}23t = \dfrac{\log(7/162)}{\log(2{,}45)} \cong -3{,}506 \xRightarrow{:(-0{,}23)} t \cong 15{,}24$ mois.

Par conséquent, à 16 mois, on pourra considérer que 18 millions d'individus ont été vaccinés.

d) A long terme, on peut considérer que tous les individus de la région seront vaccinés.

Ainsi, on peut considérer que le nombre d'habitants de la région vaut $\lim\limits_{t\to+\infty} V(t)$.

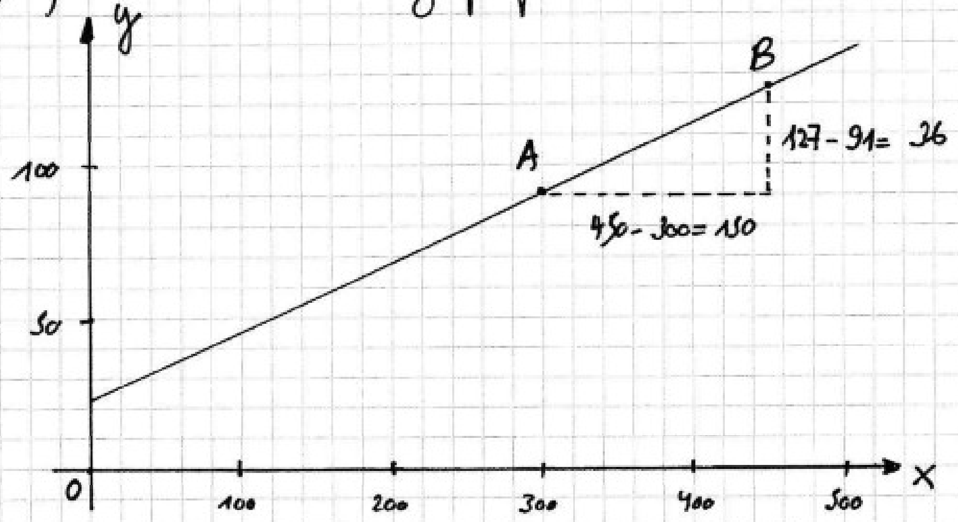
On a $\lim\limits_{t\to+\infty} 2{,}45^{-0{,}23t} = 2{,}45^{-\infty} = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{t\to+\infty} V(t) = \dfrac{25}{1+9\cdot 0} = \dfrac{25}{1} = 25$.

La région compte donc 25 millions d'habitants.

Problème 4

a) Disposons les données sur un graphique :



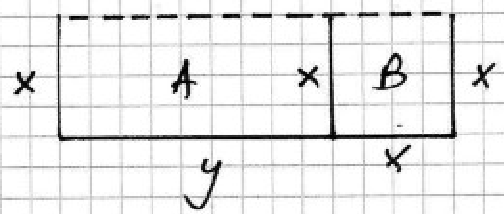
La droite représentée est de la forme $y = ax + b$ où a est la pente.
D'après le graphique, on a $a = \frac{36}{150} = 0{,}24$.
Ainsi, la droite s'écrit $y = 0{,}24x + b$.
La droite passe par le point $A(300\,;\,91)$. En substituant, dans $y = 0{,}24x + b$, x par 300 et y par 91, on obtient $91 = 0{,}24 \cdot 300 + b \Rightarrow 91 = 72 + b \Rightarrow b = 19$.
Ainsi, l'équation de la droite est $y = 0{,}24x + 19$.
On en déduit que le <u>prix du kWh est 0,24 CHF et la taxe de base est 19 CHF.</u>

b) Si $x = 200$ kWh, on a $y = 0{,}24 \cdot x + 19 = 0{,}24 \cdot 200 + 19 = 67$ CHF.
Ainsi, le montant de la facture est de <u>67 CHF.</u>

c) Si $y = 146{,}20$ CHF, on a $y = 0{,}24x + 19 \Rightarrow 146{,}20 = 0{,}24x + 19$
$\xRightarrow{-19} 127{,}20 = 0{,}24x \xRightarrow{:0{,}24} x = 530$ kWh.
Ainsi, la consommation a été de <u>530 kWh.</u>

Problème 5

On a la situation suivante:



On met des barrières le long des traits continus, mais pas des traitillés.

Comme on a 120m de barrière à disposition, on doit avoir

$$x+y+x+x+x=120 \Rightarrow 4x+y=120 \Rightarrow y=120-4x.$$

L'aire du secteur A est xy. L'aire du secteur B est x^2. L'aire totale est $xy+x^2$.
Avec $y=120-4x$, l'aire totale s'écrit $x(120-4x)+x^2=120x-4x^2+x^2=$
$=-3x^2+120x$, ce qui est une fonction du 2e degré de la forme ax^2+bx+c avec $a=-3$ et $b=120$. On sait que le sommet de cette parabole (maximum puisque $a=-3<0$) est $-\frac{b}{2a}=-\frac{120}{2\cdot(-3)}=\frac{120}{6}=20$.

On doit ainsi avoir $x=20$, d'où $y=120-4x=120-4\cdot 20=120-80=40$.
L'aire totale est alors $xy+x^2=20\cdot 40+20^2=800+400=1200$.

Ainsi, les dimensions du secteur A sont 40 sur 20 m, du secteur B sont 20 sur 20 m et l'aire totale est 1200 m^2.