TE de révision - ANALYSE
CORRIGÉ

Exercice 1:

On a $f(x) = e^{2x-6}$.

a) On doit résoudre $f(x) = 3$, i.e.:

$$\begin{array}{rcl|l} e^{2x-6} &=& 3 & \ln(\ ) \\ 2x-6 &=& \ln(3) & +6 \\ 2x &=& \ln(3)+6 & :2 \\ x &=& \dfrac{\ln(3)+6}{2} & \end{array}$$

b) On doit trouver l'équation de la tangente au graphe de f en $x = 3$.
Cette tangente est de la forme: $y = mx + h$, avec $m = f'(3)$.
Calculons f':

On a : $x \longmapsto z = 2x-6 \longmapsto y = e^z$

$z = 2x-6 \xrightarrow{\text{dérivée}} z' = 2$

$y = e^z \xrightarrow{\text{dérivée}} y' = e^z = e^{2x-6}$.

Ainsi $f'(x) = z' \cdot y' = 2e^{2x-6}$.

Et on a $f'(3) = 2e^{2\cdot 3-6} = 2e^0 = 2$. Ainsi $m = 2$.
L'équation de la tangente s'écrit donc $y = 2x + h$.

La tangente passe au point $(3; f(3))$ (point de tangence).
On a $f(3) = e^{2\cdot 3-6} = e^0 = 1$.
Ainsi la tangente passe au point $(3; 1)$.
En substituant x par 3 et y par 1 dans l'équation de la tangente $y = 2x + h$, on obtient $1 = 2\cdot 3 + h$, i.e. $1 = 6 + h$, i.e. $h = -5$.

Par conséquent, l'équation de la tangente au graphe de f en son point d'abscisse 3 est $\underline{y = 2x - 5}$.

c) Pour calculer $\int_0^4 f(x)\,dx$, on doit trouver une primitive F de f et on aura $\int_0^4 f(x)\,dx = F(4) - F(0)$.

La dérivée de e^x est e^x.
La dérivée de e^{2x-6} est $2e^{2x-6}$.

Donc, la dérivée de $\frac{1}{2}e^{2x-6}$ est e^{2x-6}, i.e. $\frac{1}{2}e^{2x-6}$ est une primitive de e^{2x-6}.
Ainsi, on prend $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x-6}$.

On a : $F(4) = \frac{1}{2}e^{2\cdot4-6} = \frac{1}{2}e^{2}$ et

$F(0) = \frac{1}{2}e^{2\cdot0-6} = \frac{1}{2}e^{-6}$.

Ainsi $\int_0^4 f(x)\,dx = F(4) - F(0) = \underline{\frac{1}{2}e^{2} - \frac{1}{2}e^{-6}} \cong 3,69.$

Exercice 2

On a $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$

a) Les points à tangente horizontale du graphe de f correspondent à $f'(x) = 0$.
Calculons $f'(x)$:
On a : $f(x) = u \cdot v$ avec $u = x^2$ et $v = \ln(x)$.
Comme $u' = 2x$ et $v' = \frac{1}{x}$, on a :
$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x\ln(x) + x.$
On résoud $f'(x) = 0$, i.e.

$2x\ln(x) + x = 0$	mise en évidence
$x(2\ln(x)+1) = 0$	comme $x>0$ (sinon on ne pourrait pas calculer $\ln(x)$), divisons par x
$2\ln(x)+1 = 0$	-1
$2\ln(x) = -1$	$:2$
$\ln(x) = -\frac{1}{2}$	$e^{\cdots}$
$x = e^{-\frac{1}{2}}$	

Ainsi l'abscisse du point à tangente horizontale est $x = e^{-\frac{1}{2}}$.
Calculons maintenant son ordonnée : $f(e^{-\frac{1}{2}}) = (e^{-\frac{1}{2}})^2 \ln(e^{-\frac{1}{2}}) =$
$= e^{-\frac{1}{2}\cdot 2} \cdot (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}e^{-1}$.

<u>Ainsi le point à tangente horizontale est $(e^{-\frac{1}{2}} ; -\frac{1}{2}e^{-1})$.</u>

b) On va trouver une primitive de $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$ par intégration par parties.
La formule d'intégration par parties est :
primitive de $(u' \cdot v) = u \cdot v -$ primitive de $(u \cdot v')$.
On choisit v de telle manière que v' soit plus simple que v.
En prenant $f(x) = x^2 \cdot \ln(x) = u' \cdot v$ avec $u' = x^2$ et $v = \ln(x)$,

on a : $u = \frac{x^3}{3}$ et $v' = \frac{1}{x}$.

Ainsi : primitive de f = primitive de $(u' \cdot v)$ =

$= u \cdot v -$ primitive de $(u \cdot v') = \frac{x^3}{3} \cdot \ln(x) -$ primitive de $\left(\frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\right)$

$= \frac{x^3 \ln(x)}{3} -$ primitive de $\frac{x^2}{3} = \frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9}$.

Ainsi, une primitive de f est $\underline{\underline{F(x) = \frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9} + c}}$ (c = constante).

Exercice 3

On a $f(x) = \frac{x^2+m}{x-5}$, où $m \in \mathbb{R}$.

a) On doit avoir que f possède un point à tangente horizontale d'abscisse égale à 3.

Cela signifie qu'on doit avoir $f'(3) = 0$.

Calculons f' :

on a : $f(x) = \frac{u}{v}$ avec $u = x^2 + m$ et $v = x - 5$;

ainsi : $u' = 2x$ et $v' = 1$;

donc $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2x(x-5) - (x^2+m) \cdot 1}{(x-5)^2} =$

$= \frac{2x^2 - 10x - x^2 - m}{(x-5)^2} = \frac{x^2 - 10x - m}{(x-5)^2}$.

Par conséquent : $f'(3) = \frac{3^2 - 10 \cdot 3 - m}{(3-5)^2} = \frac{9 - 30 - m}{(-2)^2} = \frac{-21-m}{4}$.

Comme on doit avoir $f'(3) = 0$, on doit avoir $\frac{-21-m}{4} = 0$, i.e

$-21 - m = 0$, i.e $\underline{\underline{m = -21.}}$

b) Avec $m = -21$, on a $f(x) = \frac{x^2 - 21}{x - 5}$ et $f'(x) = \frac{x^2 - 10x + 21}{(x-5)^2}$.

Les points à tangente horizontale du graphe de f correspondent à $f'(x) = 0$, i.e.

$$\frac{x^2 - 10x + 21}{(x-5)^2} = 0 \quad \Big| \cdot (x-5)^2$$

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

ce qui est une équation du deuxième degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -10$ et $c = 21$.

Le discriminant Δ vaut $\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21 =$

$= 100 - 84 = 16$.

Ainsi, les solutions de $x^2 - 10x + 21 = 0$ sont :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10+\sqrt{16}}{2\cdot 1} = \frac{10+4}{2} = 7, \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10-\sqrt{16}}{2\cdot 1} = \frac{10-4}{2} = 3.$$

Les coordonnées de ces 2 points à tangente horizontale seront $(x_1; f(x_1))$ et $(x_2; f(x_2))$.

On a $f(x_1) = f(7) = \frac{7^2-21}{7-5} = \frac{49-21}{2} = \frac{28}{2} = 14$, et

$$f(x_2) = f(3) = \frac{3^2-21}{3-5} = \frac{9-21}{-2} = \frac{-12}{-2} = 6.$$

Ainsi les 2 points à tangente horizontale du graphe de f sont:

$$(7; 14) \text{ et } (3; 6).$$