FONCTIONS

CORRIGE DES EXERCICES

Exercice 64

$f: \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N}$
$x \mapsto y = x^2+1$ est une fonction.

$g: \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Q}$
$x \mapsto y = \frac{1}{x}$ n'est pas une fonction car $x=0$ n'a pas d'image.

$h: \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{N}$
$x \mapsto y = 2$ est une fonction.

$i: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$
$x \mapsto y = \frac{3}{x^2-2}$ n'est pas une fonction car $x = \pm\sqrt{2}$ n'a pas d'image.

$j: \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{Q}$
$x \mapsto y = \frac{3}{x^2-2}$ est une fonction $(\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q})$.

$k: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$
$x \mapsto y = x$ est une fonction

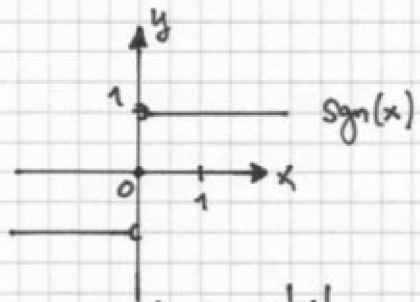
$l: \mathbb{N}^* \mapsto \mathbb{R}$
$x \mapsto y = \sqrt{x^2+2x-3}$ est une fonction car $x^2+2x-3 \geqslant 0$ si $x \geqslant 1$.

$m: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$
$x \mapsto y = \frac{x^2+3x+2}{x+2}$ est une fonction.

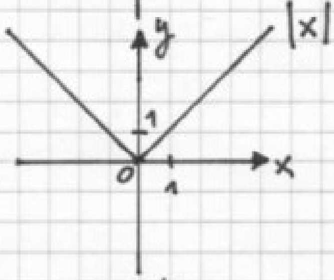
$n: \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{Q}$
$x \mapsto y = \frac{x}{x^2-2}$ est une fonction.

Exercice 65

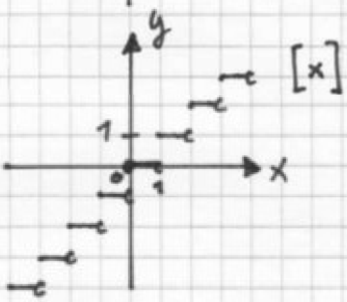
$$f : x \longmapsto y = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$



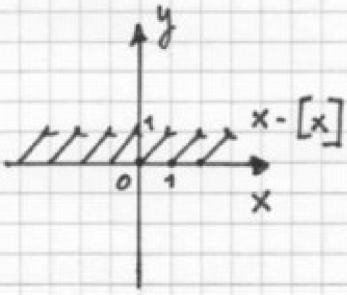
$$g : x \longmapsto y = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$



$$h : x \longmapsto y = [x]$$

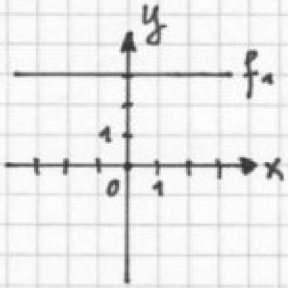


$$i : x \longmapsto y = x - [x]$$



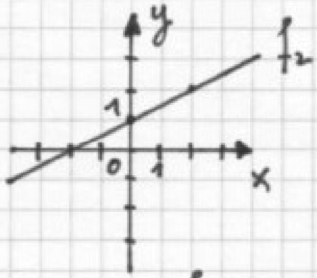
Exercice 66

$f_1(x) = 3$



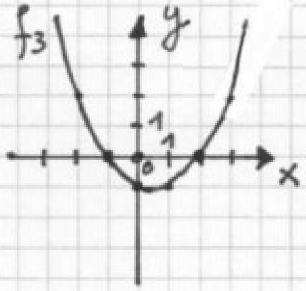
$\mathcal{D} = \mathbb{R}$
$f_1(\mathcal{D}) = \{3\}$.

$f_2(x) = 0{,}5x+1$



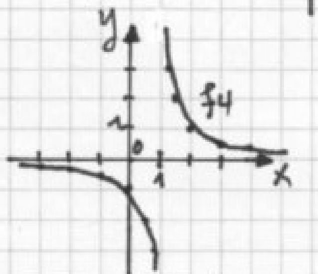
$\mathcal{D} = \mathbb{R}$
$f_2(\mathcal{D}) = \mathbb{R}$.

$f_3(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x - 2)$



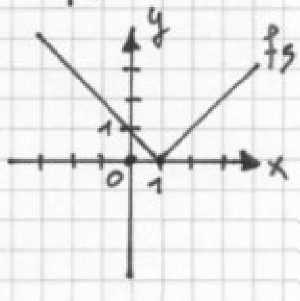
$\mathcal{D} = \mathbb{R}$
par symétrie, le sommet de la parabole est en $x = 0{,}5$;
$f(0{,}5) = -1{,}125$
$\Rightarrow f(\mathcal{D}) = [-1{,}125 ; +\infty[$.

$f_4(x) = \frac{1}{x-1}$



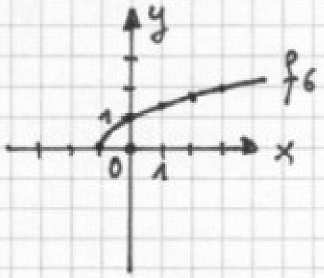
$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
$f(\mathcal{D}) = \mathbb{R}^* =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.

$f_5(x) = |x-1|$



$\mathcal{D} = \mathbb{R}$
$f(\mathcal{D}) = \mathbb{R}_+ = [0 ; +\infty[$.

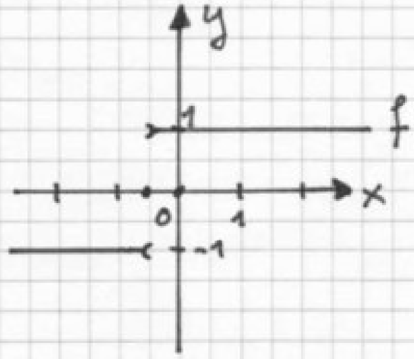
$f_6(x) = \sqrt{x+1}$



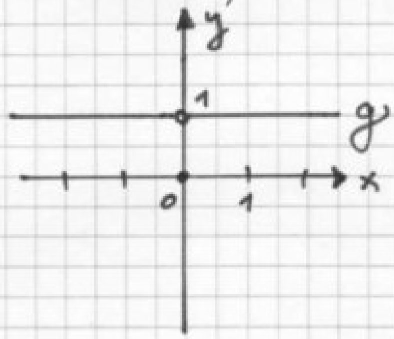
$\mathcal{D} = [-1 ; +\infty[$
$f(\mathcal{D}) = [0 ; +\infty[$.

Exercice 67

a) $f(x) = \operatorname{sgn}(2x+1) = \begin{cases} 1 \text{ si } 2x+1 > 0 \\ 0 \text{ si } 2x+1 = 0 \\ -1 \text{ si } 2x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ si } x > -\frac{1}{2} \\ 0 \text{ si } x = -\frac{1}{2} \\ -1 \text{ si } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$



b) $g(x) = \operatorname{sgn}(x^2) = \begin{cases} 1 \text{ si } x^2 > 0 \\ 0 \text{ si } x^2 = 0 \\ -1 \text{ si } x^2 < 0 \text{ (exclu)} \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$



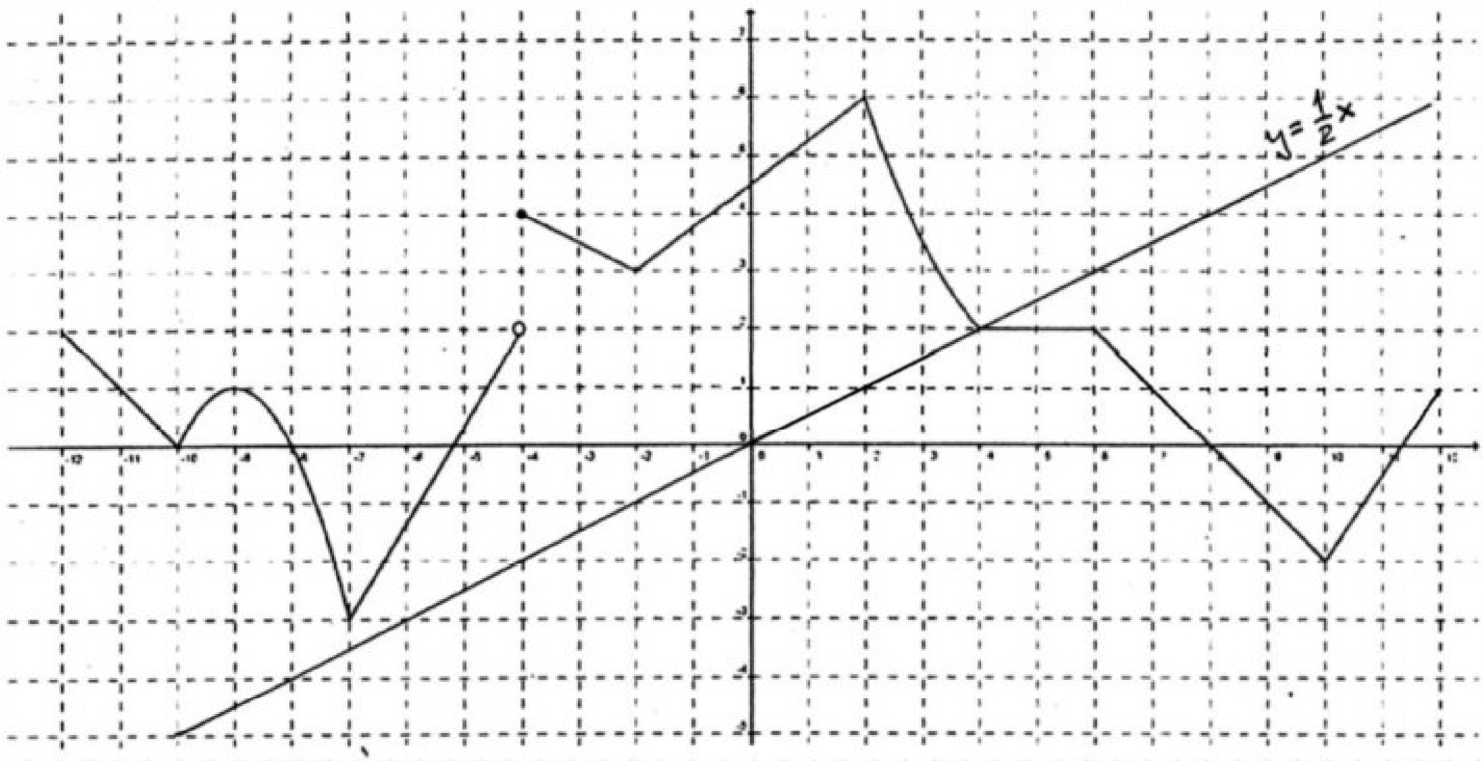
Exercice 68

a) $f(-11)=1$, $f(-7)=-3$, $f(-1)=3{,}75$, $f(1)=5{,}25$, $f(9)=-1$
(on détermine $f(-1)$ et $f(1)$ en utilisant la pente de la droite reliant les points $(-2;3)$ et $(2;6)$: les points intermédiaires sont $(-1;3{,}75)$; $(0;4{,}5)$; $(1;5{,}25)$).

b) $f(x)=0$ si $x=-10$, $x=-8$, $x=-\frac{16}{3}$ (comme ci-dessous), $x=8$ et $x=\frac{34}{3}$ (comme ci-dessous).

c) $f([-12;12])=[-3;6]$.
$f(]2;5[)=]2;6[$.
$f([-8;-2])=[-3;2[\cup[3;4]$.
$\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)=2\}=\{-12\}\cup[4;6]$.
$\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)>2\}=]-4;4[$.

d) Pour que l'abscisse vale le double de l'ordonnée, il faut que $x=2y$, i.e. $y=\frac{1}{2}x$.
On trace dans le même système d'axes que celui du graphe de f, le graphique de $y=\frac{1}{2}x$ et on trouve le point $(4;2)$:



e) $x \leq -10$: fonction affine de la forme $y = ax+b$;
$a = \text{pente} = -\frac{1}{1} = -1 \Rightarrow y = -x+b$;
passe par le point $(-10;0)$: on doit avoir $0 = 10+b \Rightarrow b = -10$;
donc $y = -x-10$.

$-10 \leq x \leq -7$: parabole de la forme $y = a(x-m)^2+p$, où $(m;p)$ est le sommet de la parabole : ici $(m;p) = (-9;1) \Rightarrow y = a(x+9)^2+1$;
passe par le point $(-8;0)$: on doit avoir $0 = a(-8+9)^2+1$
$\Rightarrow 0 = a+1 \Rightarrow a = -1$;
donc $y = -(x+9)^2+1 = -(x^2+18x+81)+1 = -x^2-18x-81+1 =$
$= -x^2-18x+80$.

$-7 \leq x < -4$: fonction affine de la forme $y = ax+b$;
$a = \text{pente} = \frac{5}{3} \Rightarrow y = \frac{5}{3}x+b$;
passe par le point $(-7;-3)$: on doit avoir $-3 = \frac{5}{3}\cdot(-7)+b$
$\Rightarrow -3 = -\frac{35}{3}+b \Rightarrow b = \frac{35}{3}-3 = \frac{26}{3}$;
donc $y = \frac{5}{3}x+\frac{26}{3}$.

$-4 \leq x \leq -2$: fonction affine de la forme $y = ax+b$;
$a = \text{pente} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x+b$;
passe par le point $(-2;3)$: on doit avoir $3 = -\frac{1}{2}\cdot(-2)+b$
$\Rightarrow 3 = 1+b \Rightarrow b = 2$;
donc $y = -\frac{1}{2}x+2$.

$-2 \leq x \leq 2$: fonction affine de la forme $y = ax+b$;
$a = \text{pente} = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{3}{4}x+b$;
passe par le point $(2;6)$: on doit avoir $6 = \frac{3}{4}\cdot 2+b$
$\Rightarrow 6 = \frac{3}{2}+b \Rightarrow b = 6-\frac{3}{2} = \frac{9}{2}$;
donc $y = \frac{3}{4}x+\frac{9}{2}$.

$2 \leq x \leq 4$: selon indication, est de la forme $y = \frac{a}{x-b}$;
passe par le point $(2;6)$: on doit avoir $6 = \frac{a}{2-b} \Rightarrow 6\cdot(2-b) = a$
$\Rightarrow 12-6b = a \Rightarrow a+6b = 12$ (1) ;
passe par le point $(4;2)$: on doit avoir $2 = \frac{a}{4-b} \Rightarrow 2\cdot(4-b) = a$
$\Rightarrow 8-2b = a \Rightarrow a+2b = 8$ (2) ;
en soustrayant (2) de (1), on obtient $4b = 4 \Rightarrow b = 1$;
avec $b = 1$, on obtient de (1) : $a+6 = 12 \Rightarrow a = 6$;
donc $y = \frac{6}{x-1}$.

$4 \leq x \leq 6$: fonction constante $y = 2$.

$6 \leq x \leq 10$: fonction affine de la forme $y = ax + b$;

pente $= -\frac{1}{1} = -1 \Rightarrow y = -x + b$;

passe par le point $(8;0)$: on doit avoir $0 = -8 + b \Rightarrow b = 8$;

donc $y = -x + 8$.

$10 \leq x \leq 12$: fonction affine de la forme $y = ax + b$;

pente $= \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + b$;

passe par le point $(12;1)$: on doit avoir $1 = \frac{3}{2} \cdot 12 + b$

$\Rightarrow 1 = 18 + b \Rightarrow b = -17$;

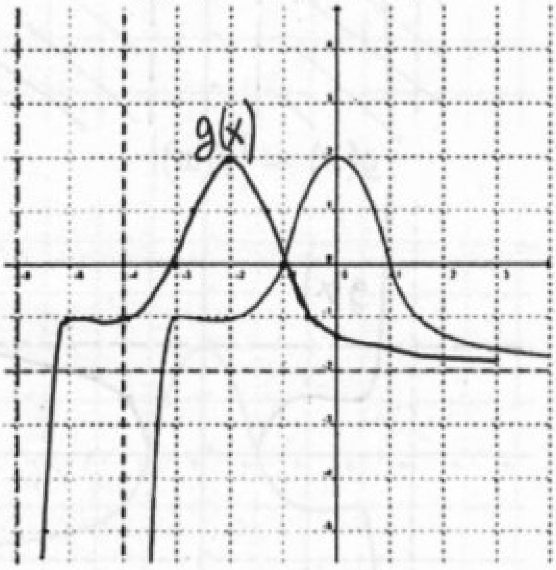
donc $y = \frac{3}{2}x - 17$.

Par conséquent :

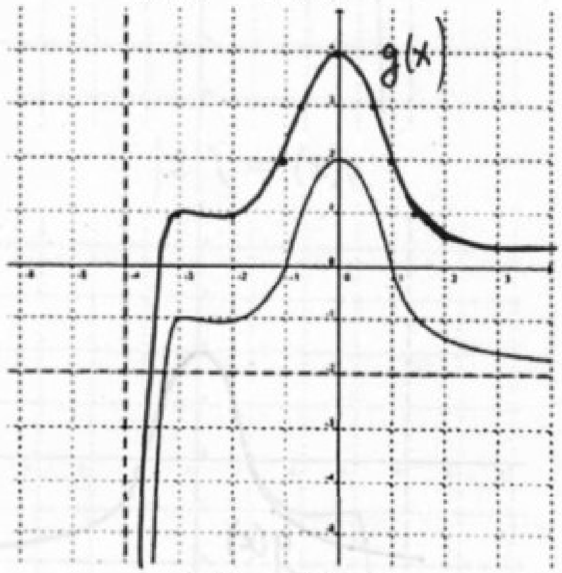
$$f(x) = \begin{cases} -x - 10 & \text{si } -12 \leq x \leq -10 \\ -x^2 - 18x + 80 & \text{si } -10 \leq x \leq -7 \\ \frac{5}{3}x + \frac{16}{3} & \text{si } -7 \leq x < -4 \\ -\frac{1}{2}x + 2 & \text{si } -4 \leq x \leq -2 \\ \frac{3}{4}x + \frac{9}{2} & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ \frac{6}{x-1} & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ 2 & \text{si } 4 \leq x \leq 6 \\ -x + 8 & \text{si } 6 \leq x \leq 10 \\ \frac{3}{2}x - 17 & \text{si } 10 \leq x \leq 12 \end{cases}$$

Exercice 69

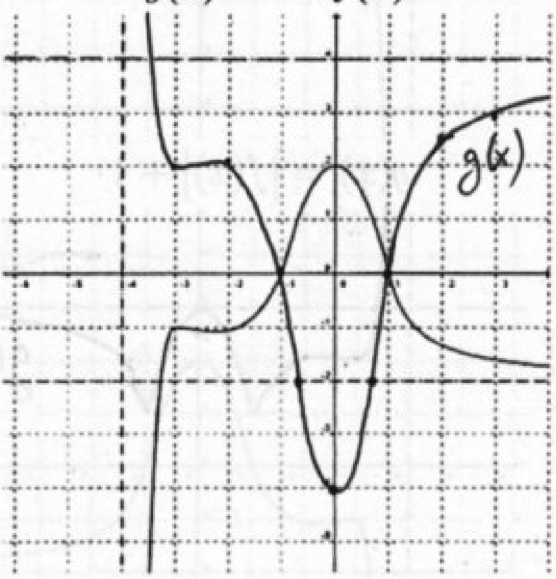
$g(x) = f(x+2)$



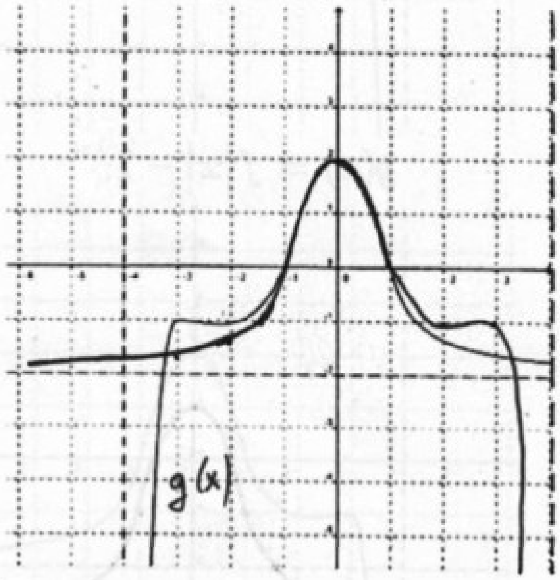
$g(x) = f(x) + 2$



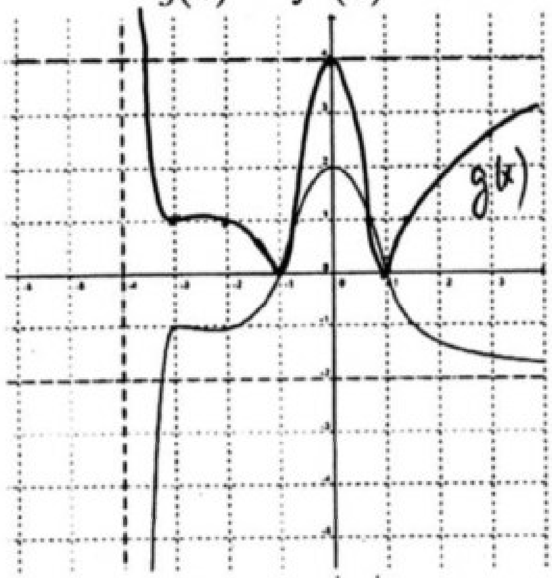
$g(x) = -2f(x)$



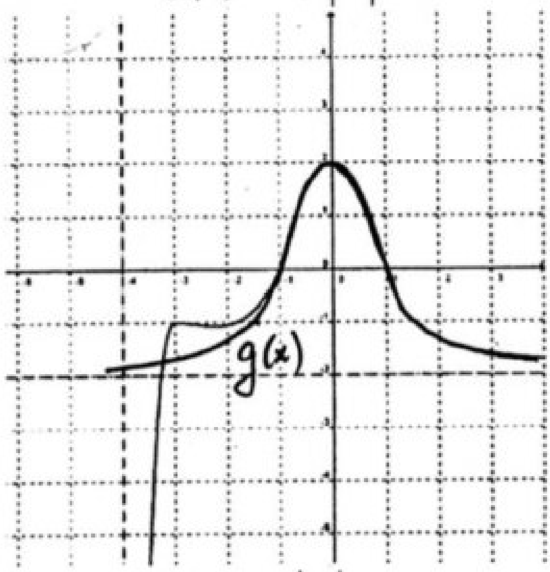
$g(x) = f(-x)$



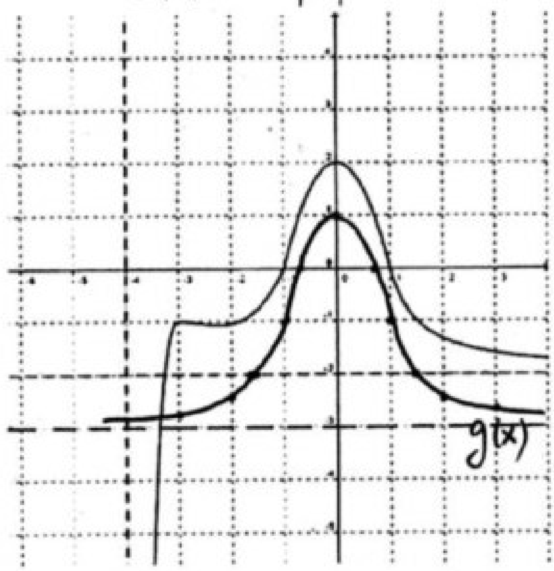
$g(x) = f^2(x)$



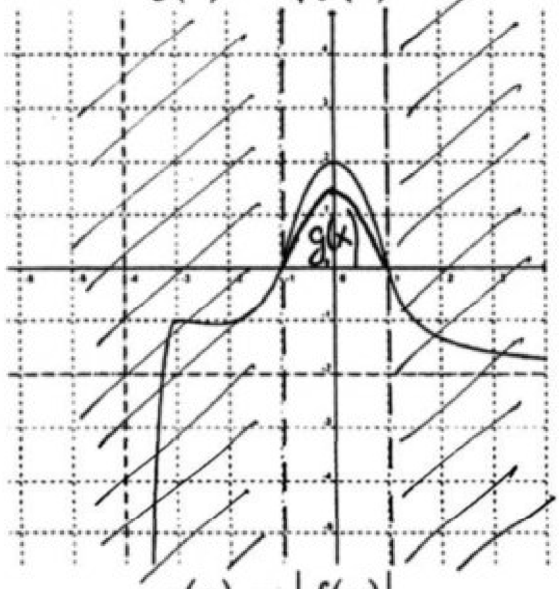
$g(x) = f|x|$



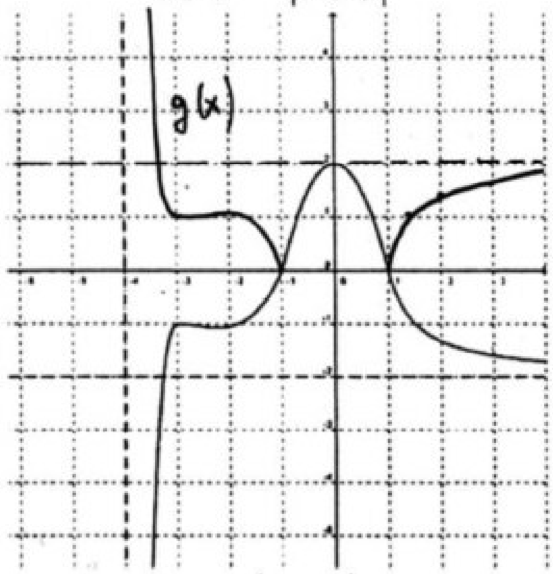
$g(x) = f|x| - 1$



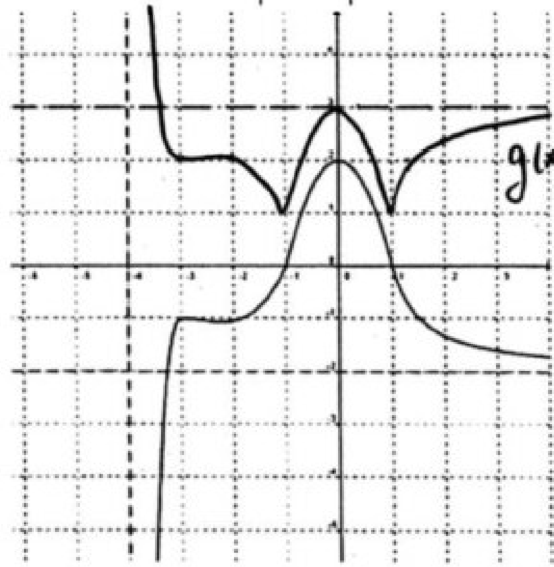
$g(x) = \sqrt{f(x)}$



$g(x) = |f(x)|$



$g(x) = |f(x)| + 1$



Exercice 70

$f_1(x)=\dfrac{2x+1}{x-5}$: $x-5\neq 0 \Rightarrow x\neq 5 \Rightarrow \underline{\underline{\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{5\}}}$.

$f_2(x)=\sqrt{x-5}$: $x-5\geqslant 0 \Rightarrow x\geqslant 5 \Rightarrow \underline{\underline{\mathcal{D}=[5;+\infty[}}$.

$f_3(x)=\dfrac{x-1}{2(5x-3)}$: $2(5x-3)\neq 0 \Rightarrow 5x-3\neq 0 \Rightarrow 5x\neq 3 \Rightarrow x\neq \frac{3}{5} \Rightarrow \underline{\underline{\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{5}\right\}}}$.

$f_4(x)=\dfrac{1}{x^2-2x+1}=\dfrac{1}{(x-1)^2}$: $(x-1)^2\neq 0 \Rightarrow x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 1 \Rightarrow \underline{\underline{\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}}}$.

$f_5(x)=\dfrac{2x^2+x+1}{x^2-9}=\dfrac{2x^2+x+1}{(x+3)(x-3)}$: $(x+3)(x-3)\neq 0 \Rightarrow x\neq -3$ et $x\neq 3$

$\Rightarrow \underline{\underline{\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{-3;3\}}}$.

$f_6(x)=\sqrt{2-3x}$: $2-3x\geqslant 0 \Rightarrow 2\geqslant 3x \Rightarrow \frac{2}{3}\geqslant x \Rightarrow \underline{\underline{\mathcal{D}=\left]-\infty;\frac{2}{3}\right]}}$.

$f_7(x)=\dfrac{x^2}{(x-3)(x+4)}$: $(x-3)(x+4)\neq 0 \Rightarrow x\neq 3$ et $x\neq -4 \Rightarrow \underline{\underline{\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{-4;3\}}}$.

$f_8(x)=\dfrac{1-x^2}{(x-4)^3}$: $(x-4)^3\neq 0 \Rightarrow x-4\neq 0 \Rightarrow x\neq 4 \Rightarrow \underline{\underline{\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{4\}}}$.

$f_9(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3x^2-6x}}$: $3x^2-6x\geqslant 0$ et $3x^2-6x\neq 0 \Rightarrow 3x^2-6x>0 \Rightarrow 3x(x-2)>0$

$\Rightarrow$ soit $x>0$ et $x-2>0 \Rightarrow x>2$;

soit $x<0$ et $x-2<0 \Rightarrow x<0$

$\Rightarrow \underline{\underline{\mathcal{D}=]-\infty;0[\cup]2;+\infty[=\mathbb{R}\setminus[0;2]}}$.

$f_{10}(x)=\sqrt{x^3-x^2-5x-3}$: $x^3-x^2-5x-3\geqslant 0$;

$x=3$ est solution de $x^3-x^2-5x-3=0$ $(3^3-3^2-5.3-3=$

$=27-9-15-3=0)$;

$$\begin{array}{r|l} x^3-x^2-5x-3 & x-3 \\ \cline{2-2} -(x^3-3x^2) & x^2+2x+1 \\ \cline{1-1} 2x^2-5x-3 & \\ -(2x^2-6x) & \\ \cline{1-1} x-3 & \\ -(x-3) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

ainsi $x^3-x^2-5x-3=(x-3)(x^2+2x+1)=(x-3)(x+1)^2$;

comme $(x+1)^2\geqslant 0$, $x^3-x^2-5x-3\geqslant 0$ si $x-3\geqslant 0$, i.e.

$x\geqslant 3 \Rightarrow \underline{\underline{\mathcal{D}=[3;+\infty[}}$.

$f_{11}(x)=\sqrt{x^2-5x+7}$: $x^2-5x+7\geqslant 0$; résolvons $x^2-5x+7=0$; on a : $a=1$, $b=-5$ et $c=7$; $\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4.1.7=25-28=-3<0$; ainsi $x^2-5x+7\neq 0$; comme x^2-5x+7 est une parabole tournée vers le haut ($\cup$), on a forcément $x^2-5x+7>0$.

$\Rightarrow \underline{\underline{D = \mathbb{R}.}}$

$f_{12}(x) = \sqrt{x^2 - 1}$: $x^2 - 1 \geqslant 0 \Rightarrow x^2 \geqslant 1 \Rightarrow x \geqslant 1$ ou $x \leqslant -1$

$\Rightarrow \underline{\underline{D =]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[= \mathbb{R} \setminus [-1 ; 1].}}$

Exercice 71

$$f(-x)=\frac{(-x)^3-(-x)+1}{(-x)^2}=\frac{-x^3+x+1}{x^2}=-\frac{x^3-x-1}{x^2}\neq \pm f(x)$$

$\Longrightarrow$ **f n'est ni paire, ni impaire.**

$$g(-x)=\frac{(-x)^2+2}{(-x)^3+(-x)}=\frac{x^2+2}{-x^3-x}=-\frac{x^2+2}{x^3+x}=-g(x)\Longrightarrow$$ **g est impaire.**

$$h(-x)=\frac{\sqrt{(-x)^4-1}}{(-x)^2+1}=\frac{\sqrt{x^4-1}}{x^2+1}=h(x)\Longrightarrow$$ **h est paire.**

$$i(-x)=\frac{-x}{|-x|}=-\frac{x}{|x|}=-i(x)\Longrightarrow$$ **i est impaire.**

$$j(-x)=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2}=j(x)\Longrightarrow$$ **j est paire.**

$$k(-x)=\frac{1}{2(-x)^2+(-x)+1}=\frac{1}{2x^2-x+1}\neq\pm k(x)\Longrightarrow$$ **k n'est ni paire, ni impaire.**

Exercice 72

a) $\dfrac{x^2-4}{(x+4)(x-1)} \geqslant 0$: $x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=2$ ou $x=-2$;

$x+4=0 \Leftrightarrow x=-4$;

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Tableau des signes :

x		-4		-2		1		2	
x^2-4	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{x^2-4}{(x+4)(x-1)}$	$+$	///	$-$	0	$+$	///	$-$	0	$+$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x \in \left]-\infty;-4\right[\cup \left[-2;1\right[\cup \left[2;+\infty\right[}}.$$

b) $\dfrac{4x^8-2x^7}{3x-5} < 0$: $\dfrac{2x^7(2x-1)}{3x-5} < 0$;

$2x^7=0 \Leftrightarrow x=0$;

$2x-1=0 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$;

$3x-5=0 \Leftrightarrow 3x=5 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$.

Tableau des signes:

x		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{3}$	
$2x^7$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$3x-5$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{4x^8-2x^7}{3x-5}$	$-$	0	$+$	///	$-$	///	$+$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x \in \left]-\infty;0\right[\cup \left]\tfrac{1}{2};\tfrac{5}{3}\right[}}.$$

c) $\dfrac{x+1}{x-1} > \dfrac{x-1}{x+1} \Rightarrow \dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+1} > 0 \Rightarrow \dfrac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x+1)(x-1)} > 0$

$\Rightarrow \dfrac{x^2+2x+1-(x^2-2x+1)}{(x+1)(x-1)} > 0 \Rightarrow \dfrac{x^2+2x+1-x^2+2x-1}{(x+1)(x-1)} > 0$

$\Rightarrow \dfrac{4x}{(x+1)(x-1)} > 0$: $4x=0 \Leftrightarrow x=0$;

$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$;

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Tableau des signes:

x		-1		0		1	
$4x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{4x}{(x+1)(x-1)}$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$

$\Rightarrow \underline{\underline{x \in \left]-1;0\right[\cup \left]1;+\infty\right[.}}$

d) $\frac{13}{2-x} \leq \frac{21x+3}{3x+1} \Rightarrow \frac{13}{2-x} - \frac{21x+3}{3x+1} \leq 0$

$$\Rightarrow \frac{13(3x+1)-(2-x)(21x+3)}{(2-x)(3x+1)} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{39x+13-(42x+6-21x^2-3x)}{(2-x)(3x+1)} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{39x}+13-\cancel{42x}-6+21x^2+\cancel{3x}}{(2-x)(3x+1)} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{21x^2+7}{(2-x)(3x+1)} = \frac{7(3x^2+1)}{(2-x)(3x+1)} \leq 0 :$$

$3x^2+1=0 \Rightarrow 3x^2=-1$ exclu;

$2-x=0 \Rightarrow x=2;$

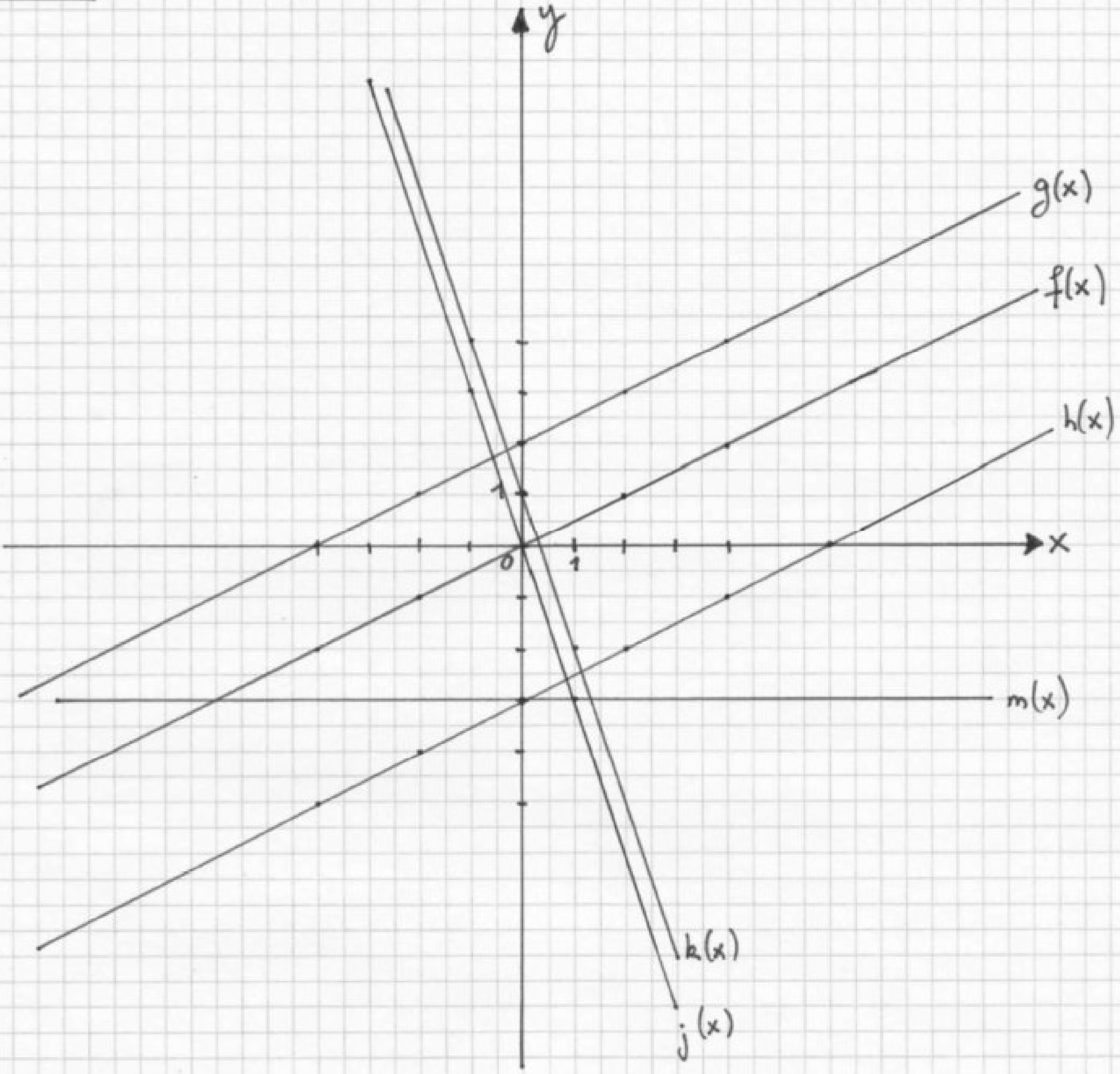
$3x+1=0 \Rightarrow 3x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}.$

Tableau du signe:

x		$-\frac{1}{3}$		2	
$7(3x^2+1)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$3x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{7(3x^2+1)}{(2-x)(3x+1)}$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$

$\Rightarrow \underline{\underline{x \in \left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[\cup \left[2;+\infty\right[.}}$

Exercice 73



Exercice 74

$y = ax+b$, où a est la pente et b l'ordonnée à l'origine ($x=0$).

La pente est donnée par $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, où $(x_1;x_2)$ et $(y_1;y_2)$ sont des points de la droite.

1) $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{6-0}{2-0} = \dfrac{4}{2} = 3$; ainsi $y = 3x+b$;

comme la droite passe par $(0;0)$, on a $b=0$;

$\Longrightarrow \underline{y = 3x}$.

2) $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-8-(-4)}{7-(-1)} = \dfrac{-8+4}{7+1} = \dfrac{-4}{8} = -\dfrac{1}{2}$; ainsi $y = -\dfrac{1}{2}x+b$;

on calcule b en utilisant le point $A(-1;-4)$ par exemple : par substitution, on a :

$-4 = -\dfrac{1}{2}\cdot(-1)+b \Longrightarrow -4 = \dfrac{1}{2}+b \Longrightarrow b = -4-\dfrac{1}{2} = -\dfrac{9}{2}$;

$\Longrightarrow \underline{y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{9}{2}}$.

3) $a = \dfrac{3}{5}$ (donnée) ; ainsi $y = \dfrac{3}{5}x+b$;

on calcule b en utilisant le point $C(2;-2)$: par substitution, on a :

$-2 = \dfrac{3}{5}\cdot 2+b \Longrightarrow -2 = \dfrac{6}{5}+b \Longrightarrow b = -2-\dfrac{6}{5} = -\dfrac{16}{5}$;

$\Longrightarrow \underline{y = \dfrac{3}{5}b - \dfrac{16}{5}}$.

4) $P(2;6)$ et $C(2;-2)$: $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-2-6}{2-2} = \dfrac{-8}{0}$ impossible

$\Longrightarrow$ la droite est verticale ; comme les 1ères coordonnées de P et C sont 2, la droite peut s'écrire $\underline{x=2}$.

5) D'après le dessin, la droite passe par $(0;5)$ et $(4;4)$;

$a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{4-5}{4-0} = \dfrac{-1}{4}$; comme la droite passe par $(0;5)$, on a $b=5$;

$\Longrightarrow \underline{y = -\dfrac{1}{4}x+5}$.

Exercice 75

On a : $f(x) = ax+b$ (c'est une droite).

$f(4) = 4 \Rightarrow 4 = a \cdot 4 + b \Rightarrow 4a + b = 4$ ①.

$f(-6) = -1 \Rightarrow -1 = a \cdot (-6) + b \Rightarrow -6a + b = -1$ ②.

En soustrayant ② de ①, on trouve : $10a = 5 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

Avec $a = \frac{1}{2}$ dans ①, on trouve $4 \cdot \frac{1}{2} + b = 4 \Rightarrow 2 + b = 4 \Rightarrow b = 2$.

Ainsi $\underline{f(x) = \frac{1}{2}x + 2.}$

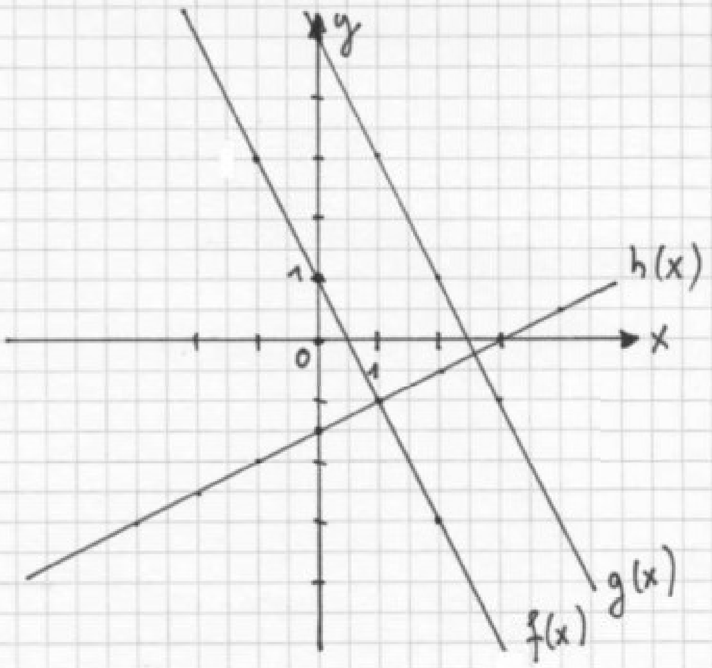
Exercice 76

$f(x) = -2x+1$ et $A(2;1)$

1) Deux droites parallèles ont la même pente.
La pente de f est -2. Ainsi la pente de g est -2.
On a donc $g(x) = -2x+b$.
Avec le point $A(2;1)$, par substitution, on trouve :
$-2\cdot 2+b=1 \Rightarrow -4+b=1 \Rightarrow b=5.$
Ainsi $\underline{g(x) = -2x+5.}$

2) La pente de h est $\frac{1}{2}$. Donc $h(x) = \frac{1}{2}x+b$.
h et f se coupe en $x=1$.
Avec $x=1$, $f(x) = -2x+1 = -2\cdot 1+1 = -2+1 = -1$.
On doit donc avoir $h(1) = -1$: $-1 = \frac{1}{2}\cdot 1+b \Rightarrow -1 = \frac{1}{2}+b$
$\Rightarrow b = -1-\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}.$

$\Rightarrow \underline{h(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.}$

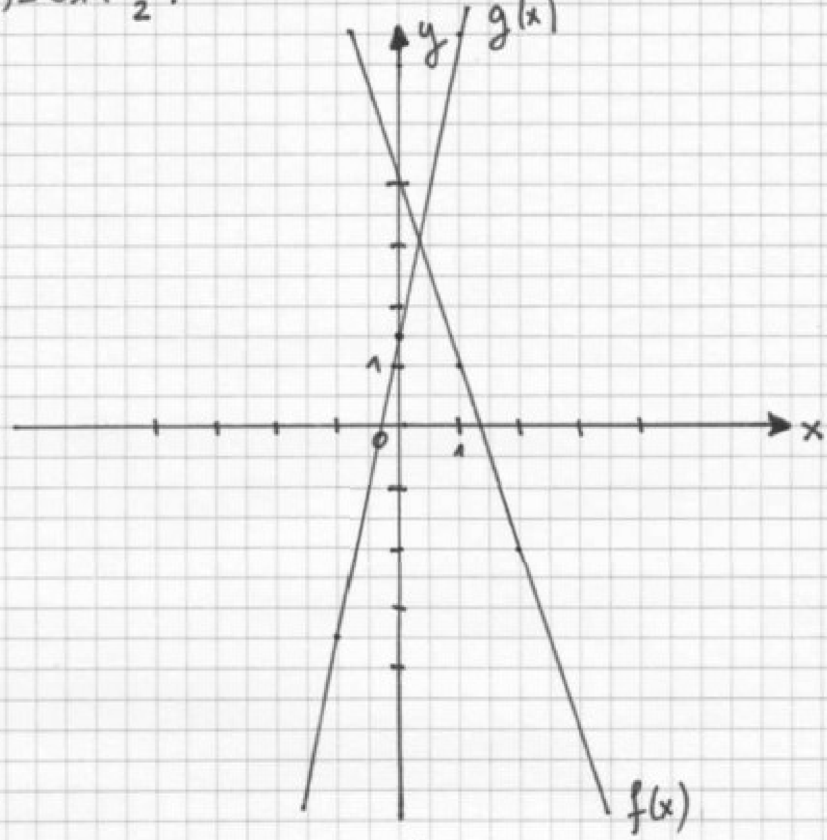


f et g sont parallèles $\Rightarrow$ elles ont la même pente.
f et h sont perpendiculaires : f est de pente -2 et h est de pente $\frac{1}{2}$;
ainsi si f est de pente a, h, perpendiculaire à f, est de pente $-\frac{1}{a}$.

Exercice 77

$f(x) = -3x+4$ et $g(x) = 5x + \frac{3}{2}$.

Graphiquement:



L'intersection est : $(0{,}3\,;\,3)$ (environ).

Algébriquement: L'intersection est donnée par $f(x) = g(x)$, i.e.

$$\begin{aligned}
-3x+4 &= 5x+\frac{3}{2} & &\quad \cdot 2\\
-6x+8 &= 10x+3 & &\quad -10x\\
-16x+8 &= 3 & &\quad -8\\
-16x &= -5 & &\quad :(-16)\\
x &= \frac{5}{16} = 0{,}3125 & &
\end{aligned}$$

Avec $x = \frac{5}{16}$, $f(x) = -3 \cdot \frac{5}{16} + 4 = \frac{-15}{16} + \frac{64}{16} = \frac{49}{16} = 3{,}0625$.

L'intersection est $(0{,}3125\,;\,3{,}0625)$ (exactement).

$A = \{x \mid f(x) < g(x)\}$ = ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x) < g(x)$

$= \left]0{,}3125\,;+\infty\right[$ (voir dessin ci-dessus).

Exercice 78

$A(2;0)$ et $B(-1;6)$.

f est de la forme $y=ax+b$, où a est la pente.

$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-0}{-1-2} = \frac{6}{-3} = -2$. Ainsi $y = -2x+b$.

Avec $A(2;0)$, par substitution, on trouve : $0=-2\cdot 2+b \Rightarrow 0=-4+b \Rightarrow b=4$.

Donc $\underline{f(x) = -2x+4}$.

Si f est de pente a, g, perpendiculaire à f, est de pente $a' = -\frac{1}{a}$.

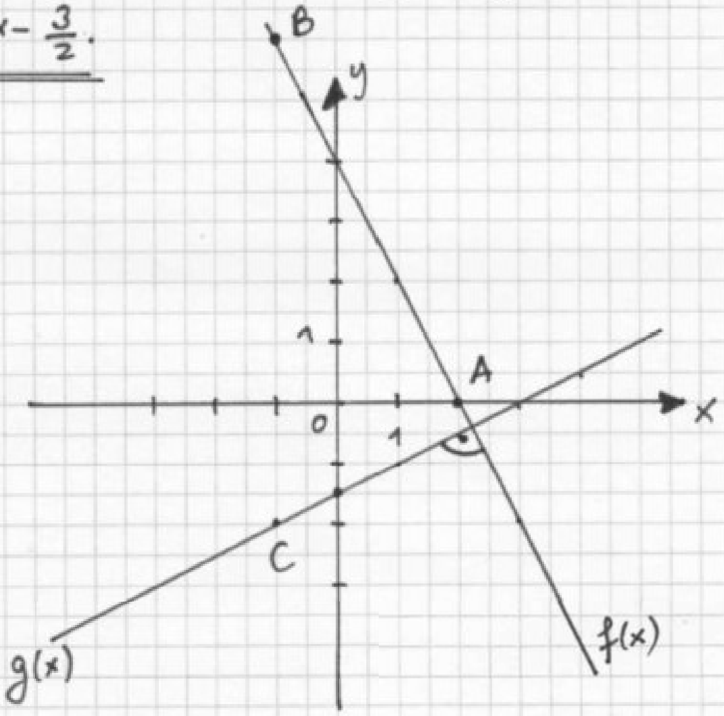
Comme $a=-2$, on a $a' = -\frac{1}{a} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$.

Ainsi l'équation de h est $y = a'x+b' = \frac{1}{2}x+b'$.

Avec $C(-1;-2)$, par substitution, on trouve : $-2 = \frac{1}{2}\cdot(-1)+b'$

$\Rightarrow -2 = -\frac{1}{2}+b' \Rightarrow b' = -2+\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$.

Donc $\underline{g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}}$.



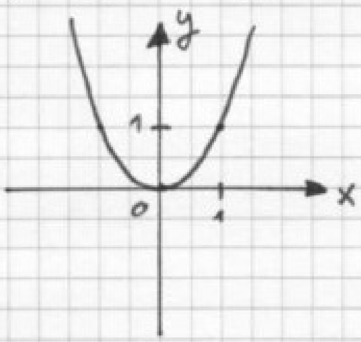
Exercice 79

Les intersections d'une fonction quadratique d'une fonction $f: x \mapsto y = ax^2+bx+c$ avec l'axe x sont les zéros de f, i.e. les solutions de $ax^2+bx+c=0$.
Le sommet de f est donné par $S(x_S\,;\,y_S)$, où $x_S = -\frac{b}{2a}$ et $y_S = f(x_S)$.

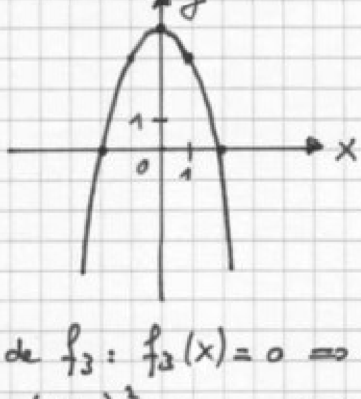
Les intersections d'une fonction quadratique d'une fonction $f: x \mapsto y = a(x-x_1)(x-x_2)$ avec l'axe x sont $(x_1\,;\,0)$ et $(x_2\,;\,0)$.

Le sommet de f donnée par $y = a(x-m)^2+p$ est $S(m\,;\,p)$.

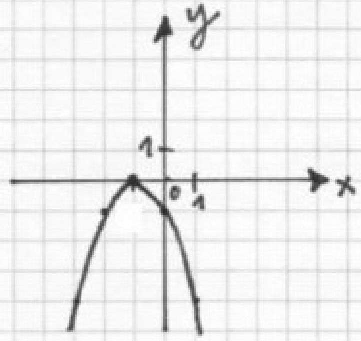
$f_1: x \mapsto y = x^2$: zéros de f_1 : $f_1(x)=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$;
$\Rightarrow (0\,;\,0)$;
sommet de f_1 : $f_1(x) = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2\cdot 1} = 0 \Rightarrow S(0\,;\,0)$.



$f_2: x \mapsto y = -x^2+4$: zéros de f_2 : $f_2(x)=0 \Rightarrow -x^2+4=0 \Rightarrow x^2=4$
$\Rightarrow x=-2$ ou $x=2$;
$\Rightarrow (-2\,;\,0)$ et $(2\,;\,0)$;
sommet de f_2 : $f_2(x) = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2\cdot(-1)} = 0$;
$f_2(0) = 4 \Rightarrow S(0\,;\,4)$.



$f_3: x \mapsto y = -(x+1)^2$: zéros de f_3 : $f_3(x)=0 \Rightarrow -(x+1)^2=0$
$\Rightarrow (x+1)^2=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$;
$\Rightarrow (-1\,;\,0)$;
sommet de f_3 : $m=-1$, $p=0 \Rightarrow S(-1\,;\,0)$.



$f_4 : x \mapsto y = -2(x+1)(x-3)$: zéros de f_4 : $x=-1$ et $x=3$

$\Rightarrow (-1;0)$ et $(3;0)$;

sommet de f_4 : $y = -2(x+1)(x-3) =$

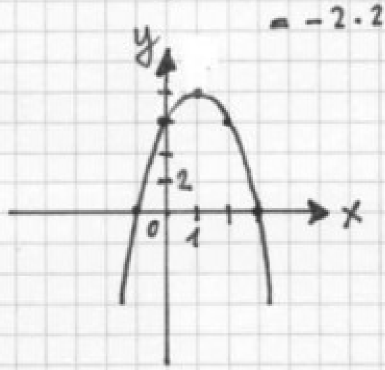
$= -2(x^2-3x+x-3) = -2(x^2-2x-3) =$

$= -2x^2+4x-3$; $a=-2$, $b=4$, $c=-3$;

$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2\cdot(-2)} = -\frac{4}{-4} = 1$;

$y_S = f_4(x_S) = -2(1+1)(1-3) =$

$= -2\cdot 2\cdot(-2) = 8 \Rightarrow S(1;8)$.

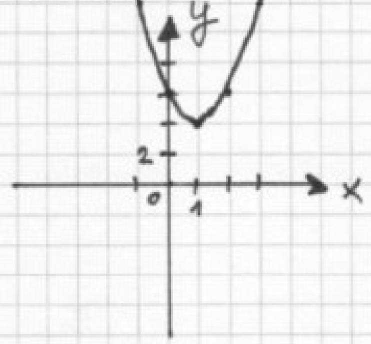


$f_5 : x \mapsto y = 2(x-1)^2+4$: zéros de f_5 : $f_5(x)=0 \Rightarrow 2(x-1)^2+4=0$

$\Rightarrow 2(x-1)^2=-4 \Rightarrow (x-1)^2=-2$ exclu ;

$\Rightarrow$ pas de zéro;

sommet de f_5 : $m=1$, $p=4 \Rightarrow S(1;4)$



$f_6 : x \mapsto y = x^2+4x-12$: zéros de f_6 : $f_6(x)=0 \Rightarrow x^2+4x-12=0$:

$a=1$, $b=4$, $c=-12$; $\Delta = b^2-4ac = 4^2-4\cdot1\cdot(-12) =$

$= 16+48 = 64$; $\sqrt{\Delta} = 8$;

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+8}{2\cdot1} = \frac{4}{2} = 2$ et

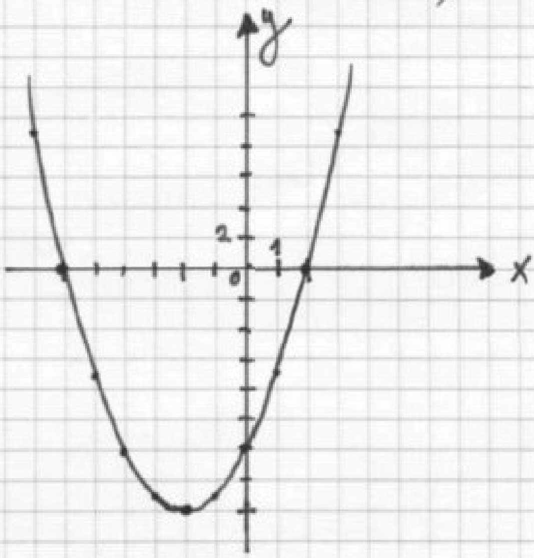
$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-8}{2\cdot 1} = \frac{-12}{2} = -6;$$

$$\Longrightarrow (2;0) \text{ et } (-6;0);$$

sommet de f_6 : $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2\cdot 1} = -\frac{4}{2} = -2;$

$$y_S = f(x_S) = f(-2) = (-2)^2 + 4\cdot(-2) - 12 = 4 - 8 - 12 = -16;$$

$$\Longrightarrow S(-2;-16).$$



Exercice 80

a) Si $f : x \mapsto y = ax^2+bx+c$, alors son sommet est $S(x_S ; y_S)$, où $x_S = -\frac{b}{2a}$ et $y_S = f(x_S)$.

Ici, $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$ et $c = 3$.

Donc $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2\cdot(-\frac{1}{2})} = -\frac{1}{-1} = 1$.

Et $y_S = f(x_S) = f(1) = -\frac{1}{2}\cdot 1^2 + 1 + 3 = -\frac{1}{2} + 4 = \frac{7}{2}$.

Par conséquent: $\underline{S = (1 ; \frac{7}{2})}$.

Les intersections de f et d sont les x tels que: $(d : y = x+1)$

$$
\begin{array}{rcl|l}
-\frac{1}{2}x^2+x+3 &=& x+1 & \cdot(-2) \\
x^2-2x-6 &=& -2x-2 & +2x \\
x^2-6 &=& -2 & +6 \\
x^2 &=& 4 & \sqrt{} \\
x = 2 & \text{ou} & x=-2 &
\end{array}
$$

Avec $x=2$, on a $y = x+1 = 2+1 = 3$.

Avec $x=-2$, on a $y = x+1 = -2+1 = -1$.

Les points d'intersection sont donc $\underline{(2;3) \text{ et } (-2;-1)}$.

b) Si $y = ax^2+bx+c$, on a $y = a(x-x_1)(x-x_2)$, où x_1 et x_2 sont les zéros de $ax^2+bx+c=0$.

Si $y = ax^2+bx+c$, on a $y = a(x-m)^2+p$, où $(m;p)$ est le sommet de la parabole.

Résolvons $-\frac{1}{2}x^2+x+3=0$: $a = -\frac{1}{2}$, $b=1$ et $c=3$;

$\Delta = b^2-4ac = 1^2-4\cdot(-\frac{1}{2})\cdot 3 = 1+6 = 7$; $\sqrt{\Delta} = \sqrt{7}$;

donc $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{7}}{2\cdot(-1/2)} = \frac{-1+\sqrt{7}}{-1} = 1-\sqrt{7}$ et

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{7}}{2\cdot(-1/2)} = \frac{-1-\sqrt{7}}{-1} = 1+\sqrt{7}$.

Cherchons le sommet de la parabole: $a = -\frac{1}{2}$ et $b=1$; donc $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2\cdot(-1/2)} = -\frac{1}{-1} = 1$

et $y_S = -\frac{1}{2}\cdot 1^2+1+3 = -\frac{1}{2}+4 = \frac{7}{2}$; donc $m=1$ et $p = \frac{7}{2}$.

Donc $\underline{y = -\frac{1}{2}x^2+x+3 = -\frac{1}{2}(x-1+\sqrt{7})(x-1-\sqrt{7}) = -\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{7}{2}}$.

Exercice 81

a) $f: x \mapsto y = \frac{1}{2}x^2+1$ et $d: x \mapsto y = 2x-1$.

Les points d'intersection sont donnés par : $\frac{1}{2}x^2+1 = 2x-1 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2-2x+2=0$.

On a : $a=\frac{1}{2}$, $b=-2$ et $c=2$;

$$\Delta = b^2-4ac = (-2)^2 - 4\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 2 = 4-4 = 0 \;;$$

donc $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2\cdot 1/2} = -\frac{-2}{1} = 2$ est solution double.

Avec $x=2$, on a $y = 2.2-1 = 3$.

Le point d'intersection est donc $\underline{\underline{(2;3)}}$.

b) Une droite est tangente à une parabole si elles n'ont qu'un point d'intersection.

$f: x \mapsto y = -x^2+2$ et $d: x \mapsto y = -3x+b$.

Les points d'intersection sont donnés par : $-x^2+2 = -3x+b \Rightarrow x^2-3x+b-2=0$.

On a : $A=1$, $B=-3$ et $C=b-2$;

$$\Delta = B^2-4AC = (-3)^2-4\cdot 1\cdot(b-2) = 9-4b+8 = 17-4b.$$

On doit avoir $\Delta = 0$ pour qu'il n'y ait aucune solution :

$$\Delta = 0 \Rightarrow 17-4b=0 \Rightarrow 4b=17 \Rightarrow \underline{\underline{b=\frac{17}{4}}}.$$

Exercice 82

La parabole est : $y = ax^2 + bx + c$.

Avec $A(1;5)$, on a : $5 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c \Rightarrow a+b+c=5$ ①.

Avec $B(2;5)$, on a : $5 = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c \Rightarrow 4a+2b+c=5$ ②.

Avec $C(-1;11)$, on a : $11 = a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c \Rightarrow a-b+c=11$ ③.

En soustrayant ① de ②, on obtient : $3a+b=0$ ④.

En soustrayant ② de ③, on obtient : $-3a-3b=6 \Rightarrow a+b=-2$ ⑤.

En soustrayant ⑤ de ④, on obtient : $2a = 2 \Rightarrow a = 1$.

Avec $a = 1$ dans ⑤, on trouve : $1+b=-2 \Rightarrow b=-3$.

Avec $a = 1$ et $b=-3$ dans ①, on trouve $1-3+c=5 \Rightarrow -2+c=5 \Rightarrow c=7$.

Ainsi l'équation de la parabole est $\underline{y = x^2-3x+7}$.

Exercice 83

L'équation de la parabole est $y = a(x-m)^2 + p$, où $(m;p)$ est le sommet.

Ici $m = 3$ et $p = 3$.

On a donc $y = a(x-3)^2 + 3$.

Avec le point $(0;0)$ (origine), on a : $0 = a(0-3)^2 + 3 \Rightarrow 0 = 9a + 3$

$\Rightarrow 9a = -3 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$.

Ainsi l'équation de la parabole est $\underline{y = -\frac{1}{3}(x-3)^2 + 3}$.

Exercice 84

Les droites passant par l'origine sont de la forme : $y = ax$, $a \in \mathbb{R}$ (fonctions linéaires).

Une droite est tangente à une parabole si elles n'ont qu'un point d'intersection.

Les points d'intersection sont donnés par : $\dfrac{x^2 - 2x + 9}{4} = ax$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 9 = 4ax \Rightarrow x^2 - 2x - 4ax + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 2(1+2a)x + 9 = 0.$$

On a : $A = 1$, $B = -2(1+2a)$ et $C = 9$;

$$\begin{aligned}\Delta = B^2 - 4AC &= [-2(1+2a)]^2 - 4\cdot 1\cdot 9 = 4(1+2a)^2 - 36 = \\ &= 4(1 + 4a + 4a^2) - 36 = 4 + 16a + 16a^2 - 36 \\ &= 16a^2 + 16a - 32 = 16(a^2 + a - 2).\end{aligned}$$

Pour qu'il n'y ait qu'une intersection, il faut que $\Delta = 0 \Rightarrow 16(a^2 + a - 2) = 0$
$\Rightarrow a^2 + a - 2 = 0$.

Ici $A' = 1$, $B' = 1$ et $C' = -2$;

$$\Delta' = B'^2 - 4A'C' = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 1 + 8 = 9 \; ; \; \sqrt{\Delta'} = 3.$$

Donc $a_1 = \dfrac{-B' + \sqrt{\Delta'}}{2A'} = \dfrac{-1+3}{2\cdot 1} = \dfrac{2}{2} = 1$ et

$a_2 = \dfrac{-B - \sqrt{\Delta'}}{2A'} = \dfrac{-1-3}{2\cdot 1} = \dfrac{-4}{2} = -2.$

Les droites sont donc $\underline{\underline{y = x \text{ et } y = -2x.}}$

Exercice 85

$f : x \mapsto y = 3x^2 + ax - a.$

Aucune intersection avec l'axe O_x signifie que l'équation $f(x) = 0$ n'a aucune solution.

Cherchons le discriminant de l'équation $3x^2 + ax - a = 0$.

On a : $A = 3$, $B = a$ et $C = -a$;

$$\Delta = B^2 - 4AC = a^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-a) = a^2 + 12a.$$

On doit avoir $\Delta < 0$ pour que $f(x) = 0$ n'ait aucune solution.

$\Delta < 0 \Rightarrow a^2 + 12a < 0 \Rightarrow a(a+12) < 0$

$\Rightarrow$ soit $a < 0$ et $a + 12 > 0$, i.e. $a < 0$ et $a > -12$, i.e. $-12 < a < 0$,

soit $a > 0$ et $a + 12 < 0$, i.e. $a > 0$ et $a < -12$, ce qui est exclu.

On doit donc avoir $\underline{a \in \left]-12 ; 0\right[}$.

Exercice 86

L'axe de symétrie d'une parabole est la droite $x = x_S$, où x_S est la 1ère coordonnée de son sommet.
Si la parabole est donnée par $y = ax^2 + bx + c$, alors $x_S = -\frac{b}{2a}$.

Ici : $a = 2$, $b = -n$ et $c = 3n$.

Donc $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-n}{2 \cdot 2} = \frac{n}{4}$.

Ainsi $x = \frac{n}{4}$ est l'axe de symétrie de la parabole.
Comme on veut que cet axe soit $x = 1$, on doit avoir $\frac{n}{4} = 1$, i.e. $\underline{\underline{n = 4}}$.

On a alors $x_S = 1$ et $f(x_S) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 2 - 4 + 12 = 10$.
Le sommet est donc $\underline{\underline{(1;10)}}$.

Exercice 87

Une équation du 2^e degré de la forme $y = ax^2 + bx + c$ a une solution double si son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est nul.

Ici : $a = 1$, $b = m$ et $c = m - 0{,}75$;

$$\Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 4.1.(m - 0{,}75) = m^2 - 4m + 3.$$

$\Delta = 0 \Longleftrightarrow m^2 - 4m + 3 = 0.$

Ici : $a' = 1$, $b' = -4$ et $c' = 3$;

$$\Delta' = b'^2 - 4ac = (-4)^2 - 4.1.3 = 16 - 12 = 4 ; \ \sqrt{\Delta'} = 2.$$

On a donc $m_1 = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{2a'} = \dfrac{4+2}{2 \cdot 1} = \dfrac{6}{2} = 3$ et $m_2 = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{2a'} = \dfrac{4-2}{2 \cdot 1} = \dfrac{2}{2} = 1.$

Les valeurs de m sont donc : $m = 3$ et $m = 1$.

Avec $m = 3$, on a : $a = 1$, $b = 3$ et $c = 3 - 0{,}75 = 2{,}25$;

ainsi $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{3}{2 \cdot 1} = -\dfrac{3}{2}$.

Avec $m = 1$, on a : $a = 1$, $b = 1$ et $c = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$;

ainsi $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{2 \cdot 1} = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 88

Si la parabole coupe l'axe des x en $x = 1$ et $x = -3$, cela signifie que la parabole peut s'écrire $y = a(x-1)(x+3)$.

On a alors : $y = a(x^2+3x-x-3) = a(x^2+2x-3) = ax^2+2ax-3a$.

Si une parabole est donnée par $y = Ax^2+Bx+C$, son sommet est donné par $(x_S ; y_S)$, où $x_S = -\dfrac{B}{2A}$ et $y_S = Ax_S^2+Bx_S+C$.

Ici $A = a$, $B = 2a$ et $C = -3a$.

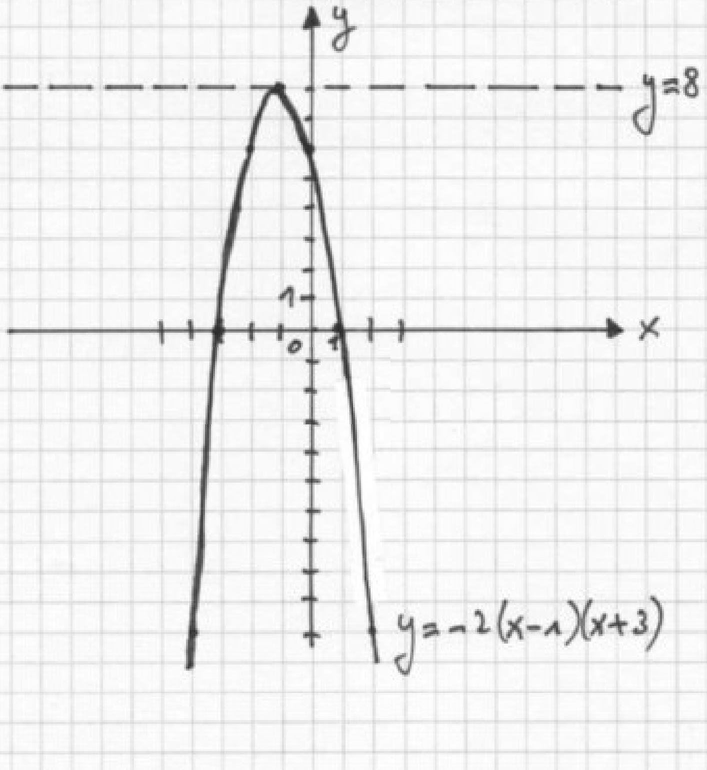
Donc $x_S = -\dfrac{B}{2A} = -\dfrac{2a}{2a} = -1$ et $y_S = a(-1-1)(-1+3) = a\cdot(-2)\cdot 2 = -4a$.

Or, on sait que la parabole est tangente à la droite $y = 8$, qui est une droite horizontale. On en déduit que cette droite doit passer par le sommet de la parabole, et, donc, que $y_S = 8$.

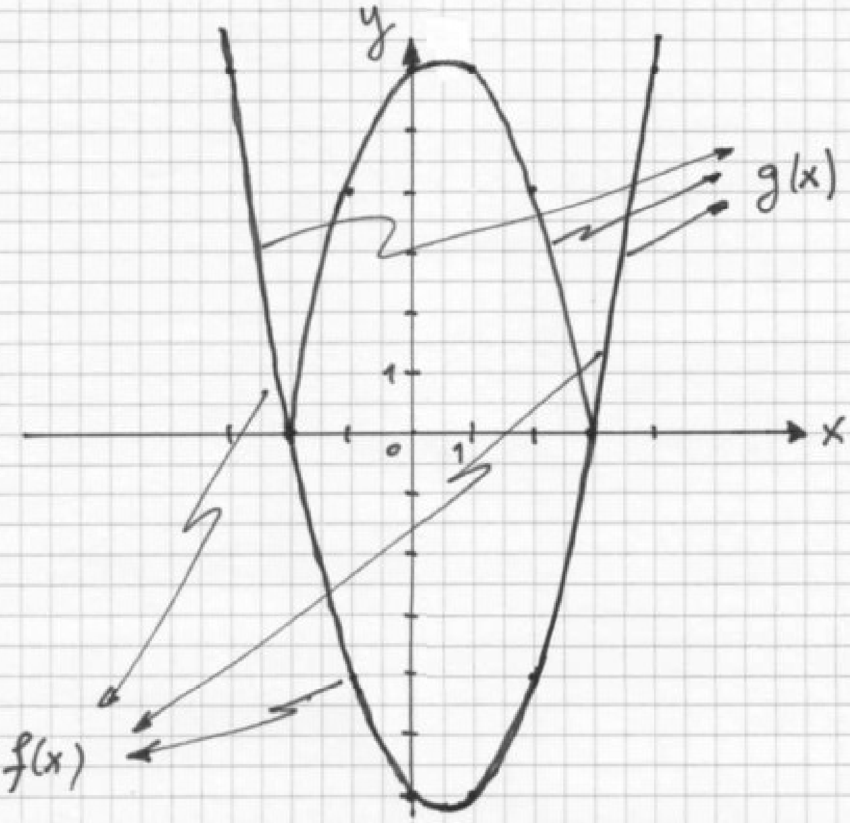
Le sommet est donc $\underline{(-1 ; 8)}$.

En outre, comme $y_S = -4a$ et $y_S = 8$, on doit avoir $-4a = 8 \Rightarrow a = -2$.

L'équation de la parabole est donc : $\underline{y = -2(x-1)(x+3)}$.



Exercice 89



Les zéros de $f(x)$ sont $x = -2$ et $x = 3$.

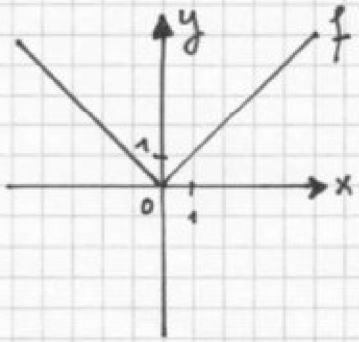
On a: $g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geqslant 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - x - 6 & \text{si } x^2 - x - 6 \geqslant 0 \\ -(x^2 - x - 6) & \text{si } x^2 - x - 6 < 0 \end{cases}$

$$= \begin{cases} x^2 - x - 6 & \text{si } x \leqslant -2 \text{ et } x \geqslant 3 \\ -x^2 + x + 6 & \text{si } -2 < x < 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 - x - 6 & \text{si } x \in \left]-\infty ; -2\right] \\ -x^2 + x + 6 & \text{si } x \in \left]-2 ; 3\right[\\ x^2 - x - 6 & \text{si } x \in \left[3 ; +\infty\right[. \end{cases}$$

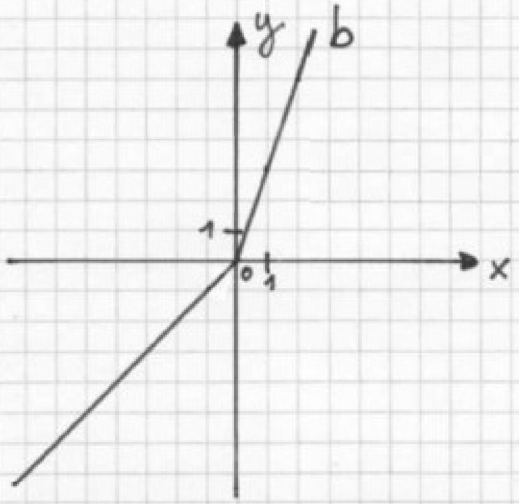
Exercice 90

a)



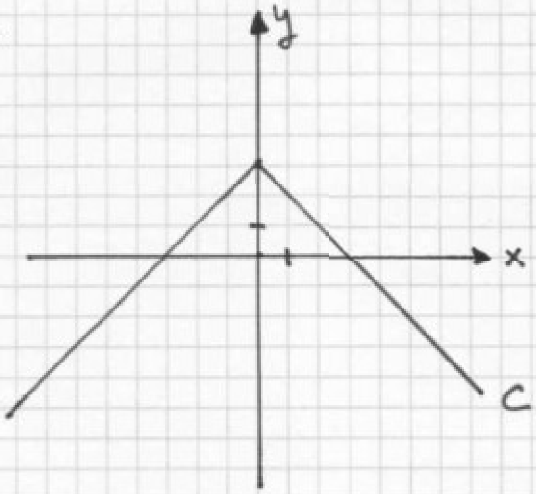
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

b)
c) $b(x) = 2x + |x|$:



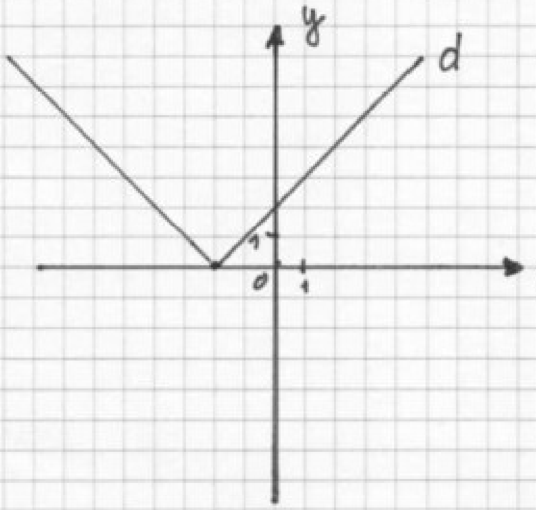
$$b(x) = \begin{cases} 2x + x & \text{si } x \geq 0 \\ 2x - x & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x & \text{si } x \geq 0 \\ x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

$c(x) = -|x| + 3$:



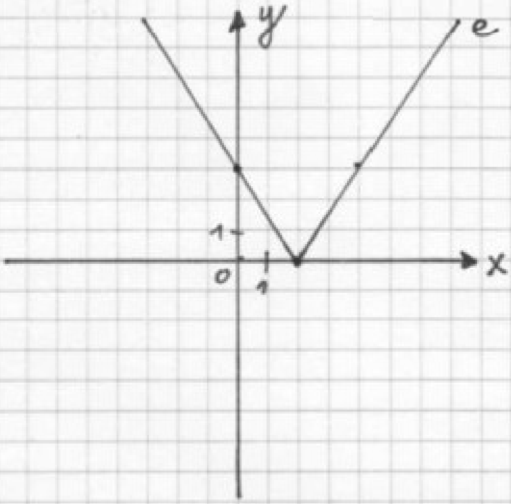
$$c(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x \geq 0 \\ -(-x) + 3 & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x \geq 0 \\ x + 3 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

$d(x) = |x+2|$:



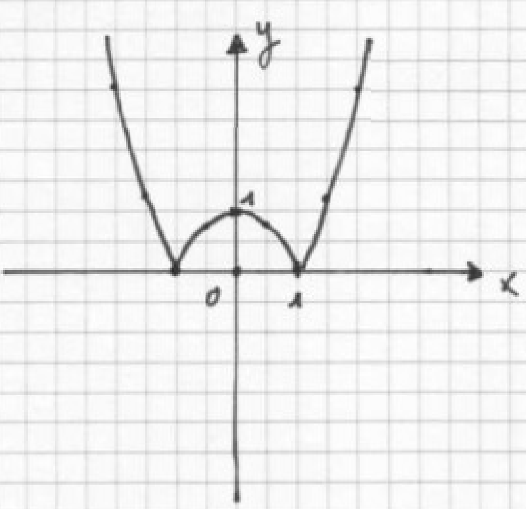
$$d(x) = \begin{cases} x+2 & \text{și } x+2 \geq 0 \\ -(x+2) & \text{și } x+2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+2 & \text{și } x \geq -2 \\ -x-2 & \text{și } x < -2. \end{cases}$$

$e(x) = |1{,}5x-3|$:



$$e(x) = \begin{cases} 1{,}5x-3 & \text{și } 1{,}5x-3 \geq 0 \\ -(1{,}5x-3) & \text{și } 1{,}5x-3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1{,}5x-3 & \text{și } x \geq 2 \\ -1{,}5x+3 & \text{și } x < 2. \end{cases}$$

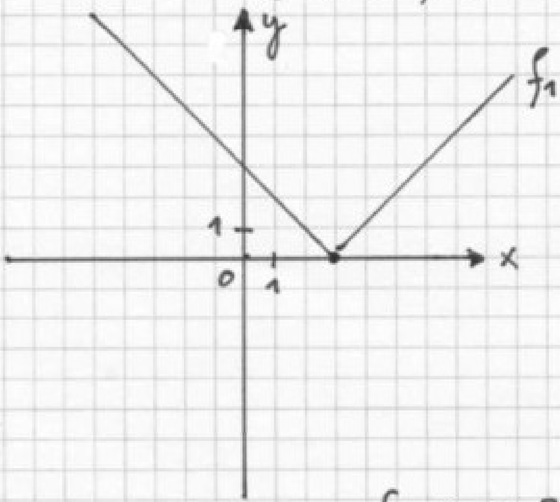
$g(x) = |-x^2+1|$:



$$g(x) = \begin{cases} -x^2+1 & \text{și } -x^2+1 \geq 0 \\ -(-x^2+1) & \text{și } -x^2+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} -x^2+1 & \text{și } x^2 \leq 1 \\ x^2-1 & \text{și } x^2 > 1 \end{cases} = \begin{cases} x^2-1 & \text{și } x > 1 \\ -x^2+1 & \text{și } -1 \leq x \leq 1 \\ x^2-1 & \text{și } x < -1 \end{cases}$$

Exercice 91

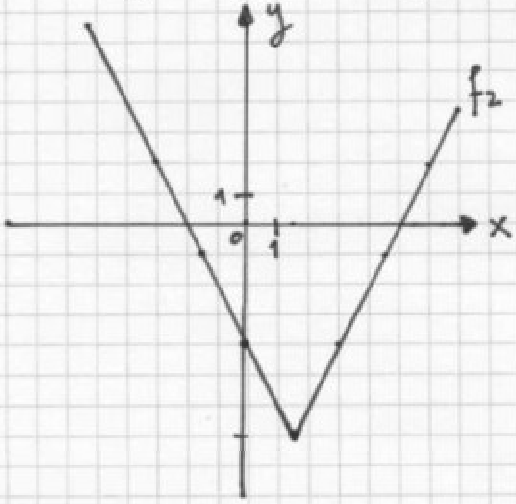
a) $f_1(x) = |-x+3| = \begin{cases} -x+3 & \text{si } -x+3 \geqslant 0 \\ -(-x+3) & \text{si } -x+3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} -x+3 & \text{si } x \leqslant 3 \\ x-3 & \text{si } x > 3. \end{cases}$



$f_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+ = [0 ; +\infty[.$

b) $f_2(x) = |-2x+3| - 7 = \begin{cases} -2x+3-7 & \text{si } -2x+3 \geqslant 0 \\ -(-2x+3)-7 & \text{si } -2x+3 < 0 \end{cases} =$

$= \begin{cases} -2x-4 & \text{si } 2x \leqslant 3 \\ 2x-3-7 & \text{si } 2x > 3 \end{cases} = \begin{cases} -2x-4 & \text{si } x \leqslant \frac{3}{2} \\ 2x-10 & \text{si } x > \frac{3}{2}. \end{cases}$



$f_2(\mathbb{R}) = [7 ; +\infty[.$

c) $f_3(x) = |-x^2+4x+5|$: $-x^2+4x+5 = 0$: on a $a = -1$, $b = 4$ et $c = 5$.

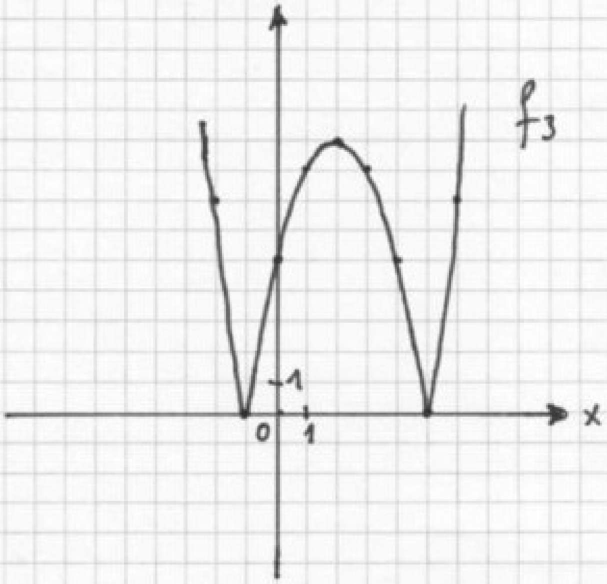
$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4.(-1).5 = 16 + 20 = 36$; $\sqrt{\Delta} = 6$;

donc $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4+6}{2.(-1)} = \dfrac{2}{-2} = -1$ et

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4-6}{2.(-1)} = \dfrac{-10}{-2} = 5.$

D'où $f_3(x) = \begin{cases} -x^2+4x+5 & \text{si } -x^2+4x+5 \geqslant 0 \\ -(-x^2+4x+5) & \text{si } -x^2+4x+5 < 0 \end{cases} =$

$= \begin{cases} x^2-4x-5 & \text{si } x < -1 \\ -x^2+4x+5 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 5 \\ x^2-4x-5 & \text{si } x \geqslant 5. \end{cases}$



$f_3(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^* = [0;+\infty[$

d) $f_4(x) = \left|2\cdot|x-3|-x\right|$:

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si } x-3 \geqslant 0 \\ -(x-3) & \text{si } x-3<0 \end{cases} = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \geqslant 3 \\ -x+3 & \text{si } x<3. \end{cases}$$

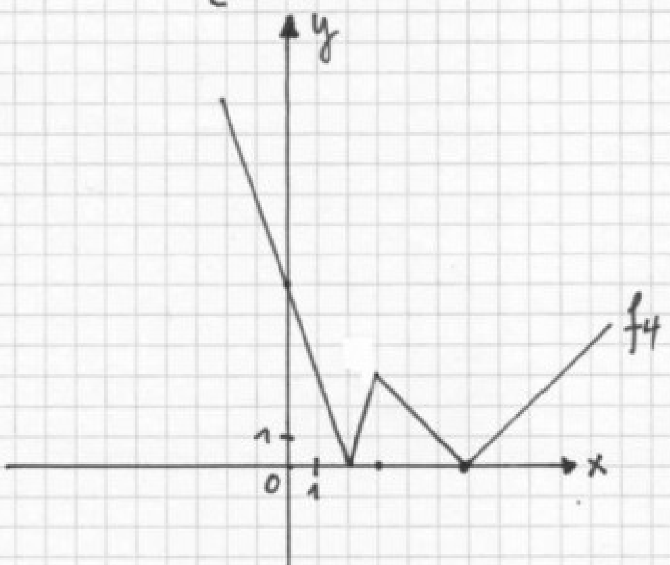
D'où: $$f_4(x) = \left|2\cdot|x-3|-x\right| = \begin{cases} |2(x-3)-x| & \text{si } x \geqslant 3 \\ |2(-x+3)-x| & \text{si } x<3 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} |2x-6-x| & \text{si } x \geqslant 3 \\ |-2x+6-x| & \text{si } x<3 \end{cases} = \begin{cases} |x-6| & \text{si } x \geqslant 3 \\ |-3x+6| & \text{si } x<3. \end{cases}$$

On a: $$|x-6| = \begin{cases} x-6 & \text{si } x-6 \geqslant 0 \\ -(x-6) & \text{si } x-6<0 \end{cases} = \begin{cases} x-6 & \text{si } x \geqslant 6 \\ -x+6 & \text{si } x<6, \end{cases}$$

et $$|-3x+6| = \begin{cases} -3x+6 & \text{si } -3x+6 \geqslant 0 \\ -(-3x+6) & \text{si } -3x+6<0 \end{cases} = \begin{cases} -3x+6 & \text{si } x \leqslant 2 \\ 3x-6 & \text{si } x>2 \end{cases}.$$

Ainsi $$f_4(x) = \begin{cases} x-6 & \text{si } x \geqslant 6 \\ -x+6 & \text{si } 3 \leqslant x<6 \\ 3x-6 & \text{si } 2<x<3 \\ -3x+6 & \text{si } x \leqslant 2 \end{cases}$$



$f_4(\mathbb{R}) = [0;+\infty[$.

Exercice 92

1. $|x^2+3x-4| = |-x+5|$: ① soit $x^2+3x-4 = -x+5$;
② soit $x^2+3x-4 = -(-x+5)$.

① $\Longrightarrow$ $x^2+4x-9=0$: on a $a=1$, $b=4$, $c=-9$;
$\Delta = b^2-4ac = 4^2-4\cdot1\cdot(-9) = 16+36 = 52$;
$\sqrt{\Delta} = \sqrt{52} = \sqrt{4\cdot13} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{13} = 2\sqrt{13}$;
ainsi $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4+2\sqrt{13}}{2\cdot1} = -2+\sqrt{13}$ et
$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4-2\sqrt{13}}{2\cdot1} = -2-\sqrt{13}$.

② $\Longrightarrow$ $x^2+3x-4 = x-5 \Longrightarrow x^2+2x+1=0 \Longrightarrow (x+1)^2=0$
$\Longrightarrow x+1=0 \Longrightarrow x=-1$.

On a donc les solutions : $x=-2+\sqrt{13}$, $x=-2-\sqrt{13}$, $x=-1$.

2. $|-2x+5|<3 \Longrightarrow |-2x+5|-3=0$

$\Longrightarrow$ soit $-2x+5-3=0$ si $-2x+5 \geqslant 0$ ① ;
soit $-(-2x+5)-3=0$ si $-2x+5<0$ ②

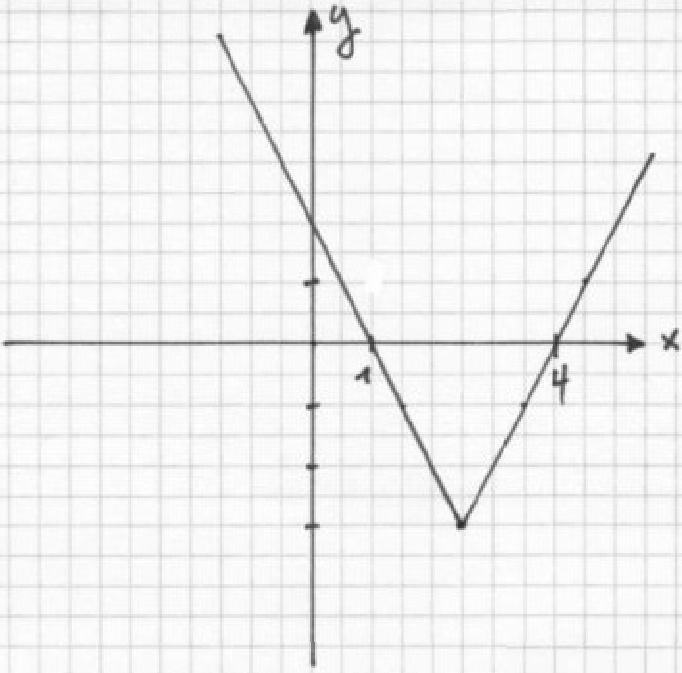
① $-2x+5-3=0 \Longrightarrow -2x+2=0 \Longrightarrow 2x=2 \Longrightarrow x=1$;
avec $x=1$, on a $-2x+5 = -2+5 = 3 \geqslant 0$;
$\Longrightarrow x=1$ est solution de $|-2x+5|-3=0$.

② $-(-2x+5)-3=0 \Longrightarrow 2x-5-3=0 \Longrightarrow 2x=8 \Longrightarrow x=4$;
avec $x=4$, on a $-2\cdot4+5 = -8+5 = -3 < 0$;
$\Longrightarrow x=4$ est solution de $|-2x+5|-3=0$.

Représentons maintenant la fonction $y=|-2x+5|-3$:

On a : $y = \begin{cases} -2x+5-3 & \text{si } -2x+5 \geqslant 0 \\ -(-2x+5)-3 & \text{si } -2x+5<0 \end{cases} = \begin{cases} -2x+2 & \text{si } x \leqslant \frac{5}{2} \\ 2x-8 & \text{si } x > \frac{5}{2} \end{cases}$;

On a alors:



ainsi $|-2x+5|-3<0$ si $x \in]1;4[$.

$\Rightarrow$ les solutions sont donc $\underline{\underline{x \in]1;4[}}$.

Exercice 93

les zéros de f sont les x tels que $f(x)=0$:

$$x^3-x^2-2x=0 \Rightarrow x(x^2-x-2)=0$$

$\Rightarrow$ soit $x=0$ ($1^{ère}$ solution),

soit $x^2-x-2=0$: on a $a=1$, $b=-1$ et $c=-2$;

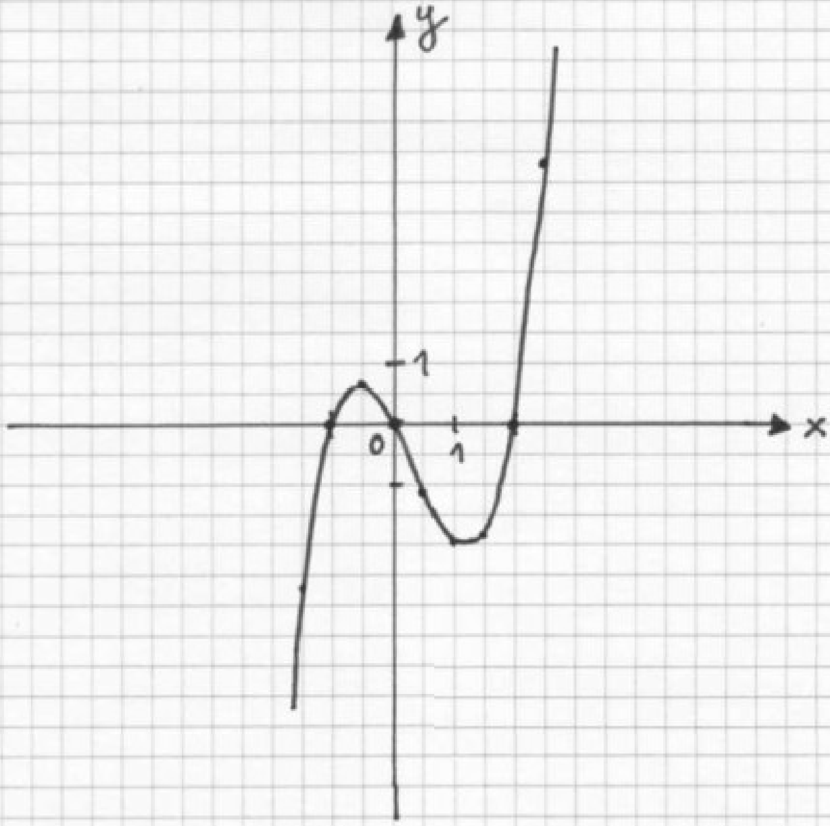
$$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)=1+8=9;$$

$$\sqrt{\Delta}=3.$$

ainsi $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{1+3}{2\cdot1}=\dfrac{4}{2}=2$ et

$x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{1-3}{2\cdot1}=\dfrac{-2}{2}=-1.$

$\Rightarrow$ les zéros sont: $\underline{x=-1,\ x=0 \text{ et } x=2.}$



Exercice 94

$f : x \mapsto y = \dfrac{x^4 - 8x^2 - 9}{4}.$

Domaine de définition: $\mathbb{R}$.

Intersections avec l'axe x : $y = 0 \Rightarrow \dfrac{x^4-8x^2-9}{4} = 0 \Rightarrow x^4 - 8x^2 - 9 = 0;$

on pose $u = x^2$; on obtient: $u^2 - 8u - 9 = 0;$

on a $a = 1$, $b = -8$ et $c = -9$;

$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 64 + 36 = 100; \sqrt{\Delta} = 10;$

ainsi $u_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8+10}{2 \cdot 1} = \dfrac{18}{2} = 9$ et

$u_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8-10}{2 \cdot 1} = \dfrac{-2}{2} = -1;$

avec $u_1 = 9$ et $u = x^2$, on trouve $x = \pm 3$;

avec $u_2 = -1$ et $u = x^2$, on ne trouve pas de x;

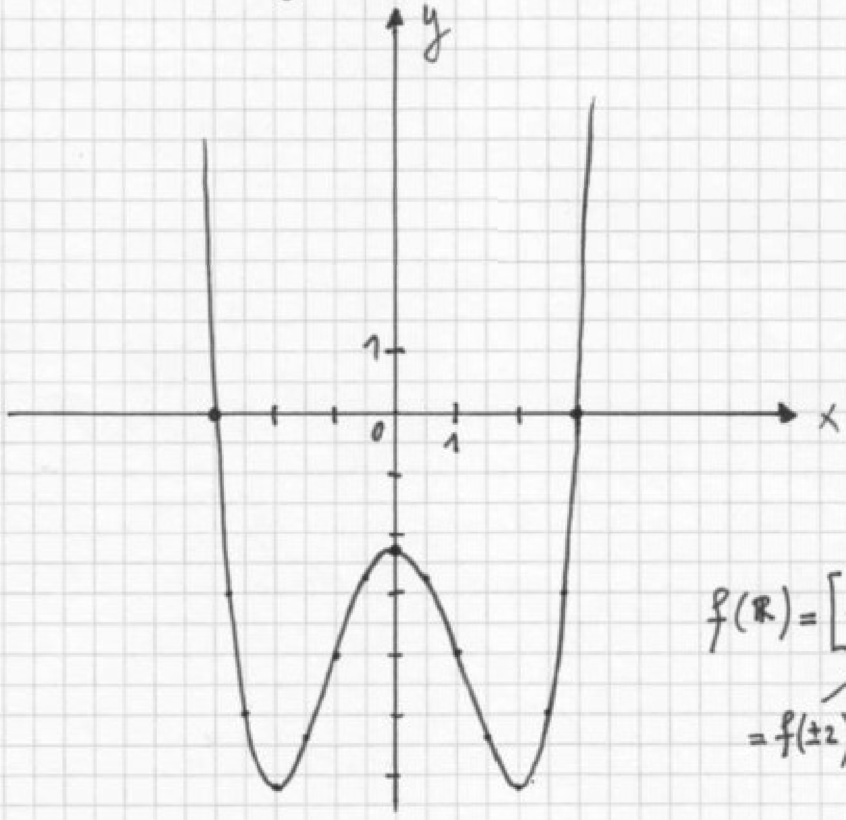
$\Rightarrow$ les zéros de f sont $(-3;0)$ et $(3;0)$.

Intersections avec l'axe y: on pose $x = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{9}{4} \Rightarrow \left(0; -\dfrac{9}{4}\right)$

Parité: $f(-x) = \dfrac{(-x)^4 - 8(-x)^2 - 9}{4} = \dfrac{x^4 - 8x^2 - 9}{4} = f(x)$

$\Rightarrow$ f est paire (symétrique par rapport à l'axe Oy).

Graphe:



$f(\mathbb{R}) = [-6,25; +\infty[.$

$= f(\pm 2)$

Exercice 95

a) Cherchons les zéros de x^3-8x-3 parmi les diviseurs de son terme constant, i.e. parmi $+1, +3, -1, -3$:

$x=1$: $x^3-8x-3 = 1-8-3 \neq 0$;

$x=3$: $x^3-8x-3 = 27-24-3 = 0$;

$x=-1$: $x^3-8x-3 = -1+8-3 \neq 0$;

$x=-3$: $x^3-8x-3 = -27+24-3 \neq 0$.

Ainsi $x=3$ est un zéro de x^3-8x-3 et, donc, x^3-8x-3 se divise par $x-3$:

$$\begin{array}{r|l}
x^3-8x-3 & x-3 \\
\cline{2-2}
-(x^3-3x^2) & x^2+3x+1 \\
\cline{1-1}
3x^2-8x-3 & \\
-(3x^2-9x) & \\
\cline{1-1}
x-3 & \\
-(x-3) & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

On a donc $x^3-8x-3 = (x-3)(x^2+3x+1)$.

Les autres zéros de x^3-8x-3 seront les zéros de x^2+3x+1:

$x^2+3x+1=0$: $a=1, b=3, c=1$;

$\Delta = b^2-4ac = 3^2-4.1.1 = 9-4 = 5$; $\sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$;

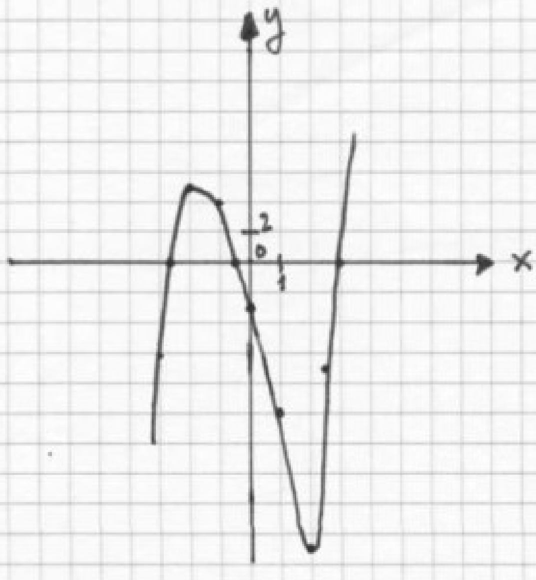
ainsi $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

Ainsi les solutions de $x^3-8x-3=0$ sont: $x=3$

$x = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} \cong -0,382$

$x = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2} \cong -2,618$.

b) Dessinons le graphique de x^3-8x-3:



Ainsi $x^3-8x-3 \geqslant 0$ si

$x \in \left[\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right] \cup [3; +\infty[$.

Exercice 96

Cherchons les zéros de f, i.e. les x tels que $f(x)=0$:

$x(x-1)(x^2+x+1)=0 \Rightarrow$ soit $x=0$;

soit $x-1=0 \Rightarrow x=1$;

soit $x^2+x+1=0$: on a $a=1$, $b=1$ et $c=1$;

$\Delta = b^2-4ac = 1^2-4\cdot1\cdot1 = 1-4 = -3 < 0$

$\Rightarrow$ pas de solution.

Les zéros de f sont donc $x=0$ et $x=1$.

On peut alors faire un tableau de signes:

x		0		1	
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x^2+x+1	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$.

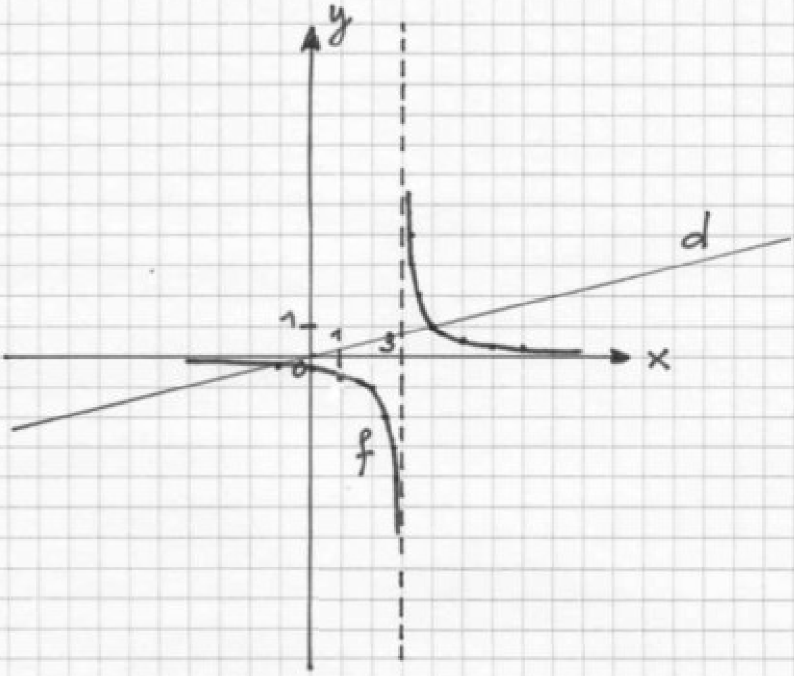
Exercice 97

$f(x) = \frac{1}{x-3}$

$d: x - 4y = 0$

$\Rightarrow 4y = x$

$\Rightarrow y = \frac{1}{4}x$



Points d'intersection de f et d:

$$\frac{1}{x-3} = \frac{1}{4}x \quad \Big| \cdot (x-3)$$
$$1 = \frac{1}{4}x(x-3) \quad \Big| \cdot 4$$
$$4 = x(x-3) \quad \Big| \text{ distributivité}$$
$$4 = x^2 - 3x \quad \Big| -4$$
$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

On a: $a = 1$, $b = -3$ et $c = -4$;

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4.1.(-4) = 9 + 16 = 25$; $\sqrt{25} = 5$;

ainsi $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+5}{2.1} = \frac{8}{2} = 4$ et

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-5}{2.1} = \frac{-2}{2} = -1$.

Avec $x_1 = 4$, on a $y_1 = \frac{1}{4}x_1 = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$.

Avec $x_2 = -1$, on a $y_2 = \frac{1}{4}x_2 = \frac{1}{4} \cdot (-1) = -\frac{1}{4}$.

Les points d'intersection sont donc $(4;1)$ et $(-1;-\frac{1}{4})$.

Exercice 98

1. $f(x) = \frac{1}{x}$.

1) Domaine de définition: $D = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (on ne peut pas diviser par 0).

Image du domaine de définition: $f(D) = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (voir graphique).

Parité: $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x) \Rightarrow f$ est impaire.

2) Intersections avec l'axe x: on pose $y=0 \Rightarrow \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow 1 = 0 \Rightarrow$ impossible

$\Rightarrow$ pas d'intersection avec l'axe x.

Intersection avec l'axe y: on devrait poser $x=0$, mais $0 \notin D$

$\Rightarrow$ pas d'intersection avec l'axe y.

3) $x=0$ est un exclu $\Rightarrow$ $x=0$ est une asymptote verticale.

Si $x \underset{<}{\to} 0$, $f(x) = \frac{1}{x} \to -\infty$.

Si $x \underset{>}{\to} 0$, $f(x) = \frac{1}{x} \to +\infty$.

Si $x \to +\infty$, $f(x) = \frac{1}{x} \to 0_+$ (va vers 0 avec des valeurs positives).

Si $x \to -\infty$, $f(x) = \frac{1}{x} \to 0_-$ (va vers 0 avec des valeurs négatives).

Ainsi $y=0$ est une asymptote horizontale.

4) Tableau des signes:

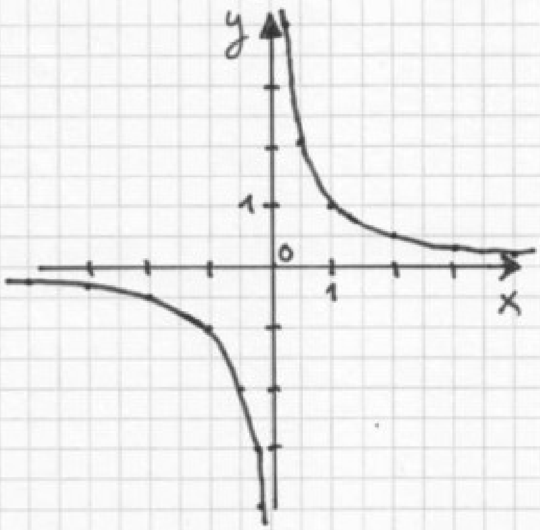
x		0	
$f(x)$	$-$		$+$

5) Tableau de valeurs:

x	-5	-4	-3	-2	-1	$-0{,}5$	$-0{,}25$
$f(x)$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4

x	$0{,}25$	$0{,}5$	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

6) Graphe:



2. $g(x) = \frac{1}{x^2}$

1) Domaine de définition: $D = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (on ne peut pas diviser par 0).

Image du domaine de définition: $g(D) =]0; +\infty[= \mathbb{R}_+^*$ (voir graphique).

Parité: $g(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = g(x) \Rightarrow g$ est paire.

2) Intersections avec l'axe x : on pose $y = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 = 0 \Rightarrow$ impossible

$\Rightarrow$ pas d'intersection avec l'axe x.

Intersections avec l'axe y: on devrait poser $x = 0$, mais $0 \notin D$

$\Rightarrow$ pas d'intersection avec l'axe y.

3) $x = 0$ est un exclu $\Rightarrow x = 0$ est une asymptote verticale.

Si $x \underset{<}{\to} 0$, $g(x) = \frac{1}{x^2} \to +\infty$.

Si $x \underset{>}{\to} 0$, $g(x) = \frac{1}{x^2} \to +\infty$.

Si $x \to +\infty$, $g(x) = \frac{1}{x^2} \to 0_+$ (va vers 0 avec des valeurs positives).

Si $x \to -\infty$, $g(x) = \frac{1}{x^2} \to 0_+$ (idem).

Ainsi $y = 0$ est une asymptote horizontale.

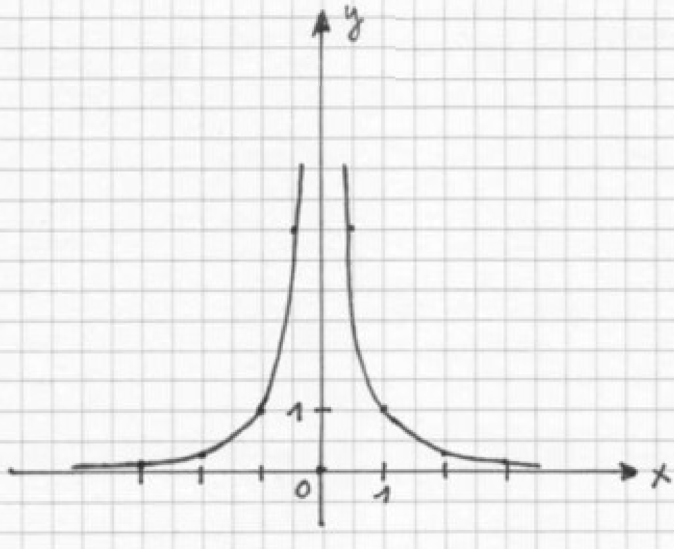
4) Tableau des signes:

x		0	
$g(x)$	+	////	+

5) Tableau de valeurs:

x	-3	-2	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	2	3
$g(x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	4	////	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$

6) Graphe:



3. $h(x) = \dfrac{2x-5}{3x+6}$

1) Domaine de définition : on doit avoir $3x+6 \neq 0 \Rightarrow 3x \neq -6 \Rightarrow x \neq -2$;

donc $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Image du domaine de définition : $h(D) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$ (voir graphique).

Parité : $h(-x) = \dfrac{2\cdot(-x)-5}{3\cdot(-x)+6} = \dfrac{-2x-5}{-3x+6} \neq \pm h(x) \Rightarrow$ h n'est ni paire ni impaire.

2) Intersections avec l'axe x : on pose $y=0 \Rightarrow \dfrac{2x-5}{3x+6} = 0 \Rightarrow 2x-5=0$

$\Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}; 0\right)$.

Intersection avec l'axe y : on pose $x=0 \Rightarrow h(x) = \frac{-5}{6} \Rightarrow \left(0; -\frac{5}{6}\right)$.

3) $x=-2$ est un exclu $\Rightarrow x=-2$ est une asymptote verticale.

Si $x \xrightarrow[<]{} -2$, $2x-5 \rightarrow -9$ et $3x+6 \rightarrow 0_- \Rightarrow h(x) \rightarrow +\infty$.

Si $x \xrightarrow[>]{} -2$, $2x-5 \rightarrow -9$ et $3x+6 \rightarrow 0_+ \Rightarrow h(x) \rightarrow -\infty$.

Si $x \rightarrow +\infty$, $h(x) = \dfrac{2x-5}{3x+6} = \dfrac{x\left(2-\frac{5}{x}\right)}{x\left(3+\frac{6}{x}\right)} = \dfrac{2-\frac{5}{x}}{3+\frac{6}{x}} \rightarrow \frac{2}{3}_-$ (va vers $\frac{2}{3}$ avec des valeurs inférieures).

Si $x \rightarrow -\infty$, $h(x) = \dfrac{2x-5}{3x+6} = \dfrac{2-\frac{5}{x}}{3+\frac{6}{x}} \rightarrow \frac{2}{3}_+$ (avec des valeurs supérieures).

Ainsi $y = \frac{2}{3}$ est une asymptote horizontale.

4) Tableau des signes :

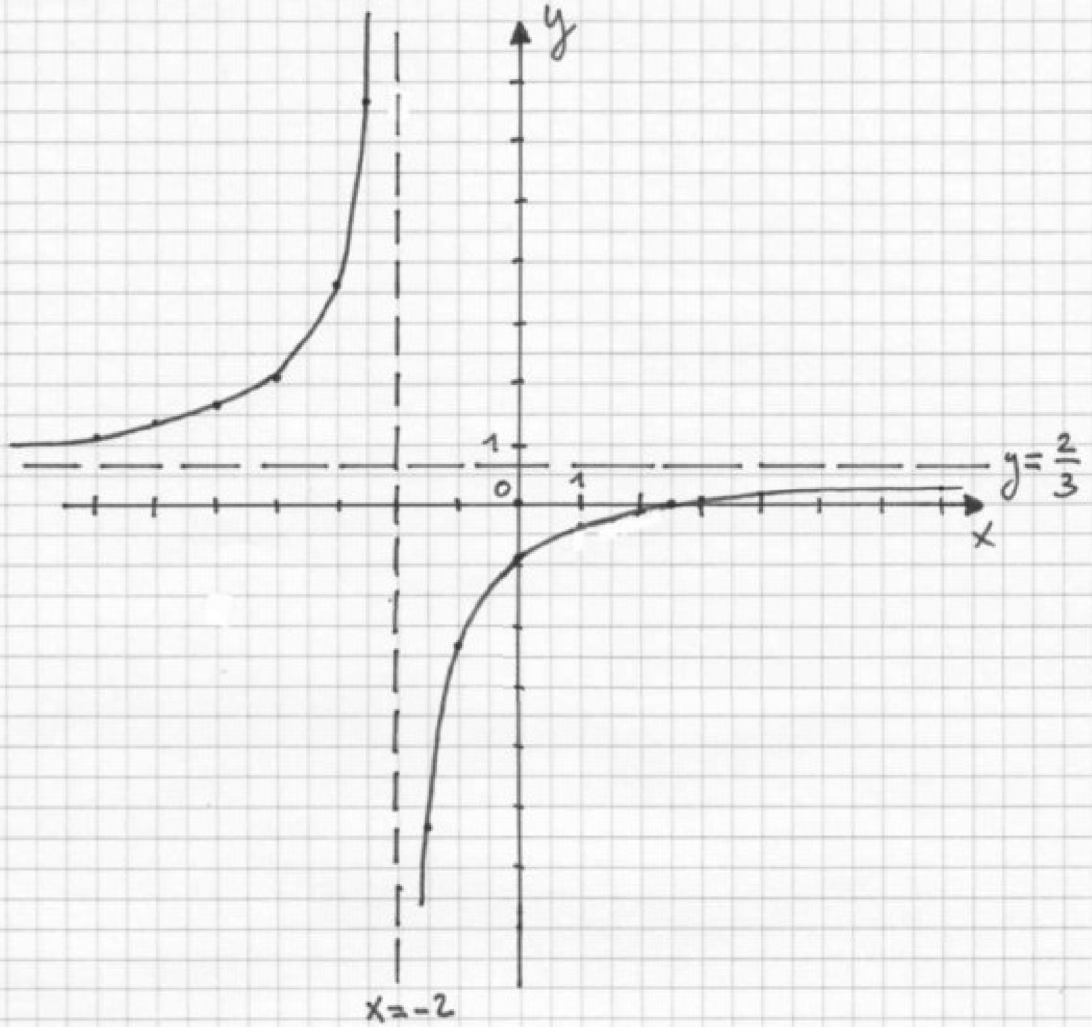
x		-2		$\frac{5}{2}$	
$h(x)$	$+$	//	$-$	0	$+$

5) Tableau de valeurs :

x	-5	-4	-3	$-2{,}5$	$-2{,}25$	$-1{,}75$
$h(x)$	$\frac{5}{3}$	$\frac{13}{6}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{38}{3}$	$-\frac{34}{3}$

x	$-1{,}5$	-1	0	1	2	$2{,}5$	3
$h(x)$	$-\frac{16}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{15}$

6) Graphe :



4. $i(x) = \frac{1}{x^2-4}$

1) Domaine de définition : on doit avoir $x^2-4 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq \pm 2$;
donc $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

Image du domaine de définition : $i(D) =]-\infty; -\frac{1}{4}] \cup]0; +\infty[$ (voir graphique)

Parité : $i(-x) = \frac{1}{(-x)^2-4} = \frac{1}{x^2-4} = i(x) \Rightarrow i$ est paire.

2) Intersections avec l'axe x : on pose $y = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2-4} = 0 \Rightarrow 1 = 0$ exclu
$\Rightarrow$ il n'y a pas d'intersection avec l'axe x.

Intersection avec l'axe y : on pose $x = 0 \Rightarrow i(x) = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow (0; -\frac{1}{4})$.

3) $x = -2$ est un exclu $\Rightarrow$ $x = -2$ est une asymptote verticale.

Si $x \underset{>}{\rightarrow} -2$, $\frac{1}{x^2-4} \rightarrow 0_-$ (va vers zéro avec des valeurs inférieures).

Si $x \underset{<}{\rightarrow} -2$, $\frac{1}{x^2-4} \rightarrow 0+$ (va vers zéro avec des valeurs supérieures).

$x = 2$ est un exclu $\Rightarrow$ $x = 2$ est une asymptote verticale.

Si $x \underset{>}{\rightarrow} 2$, $\frac{1}{x^2-4} \rightarrow 0+$.

Si $x \underset{<}{\rightarrow} 2$, $\frac{1}{x^2-4} \rightarrow 0_-$.

Si $x \to +\infty$, $\frac{1}{x^2-4} \to 0+$.

Si $x \to -\infty$, $\frac{1}{x^2-4} \to 0+$.

Ainsi $y = 0$ est une asymptote horizontale.

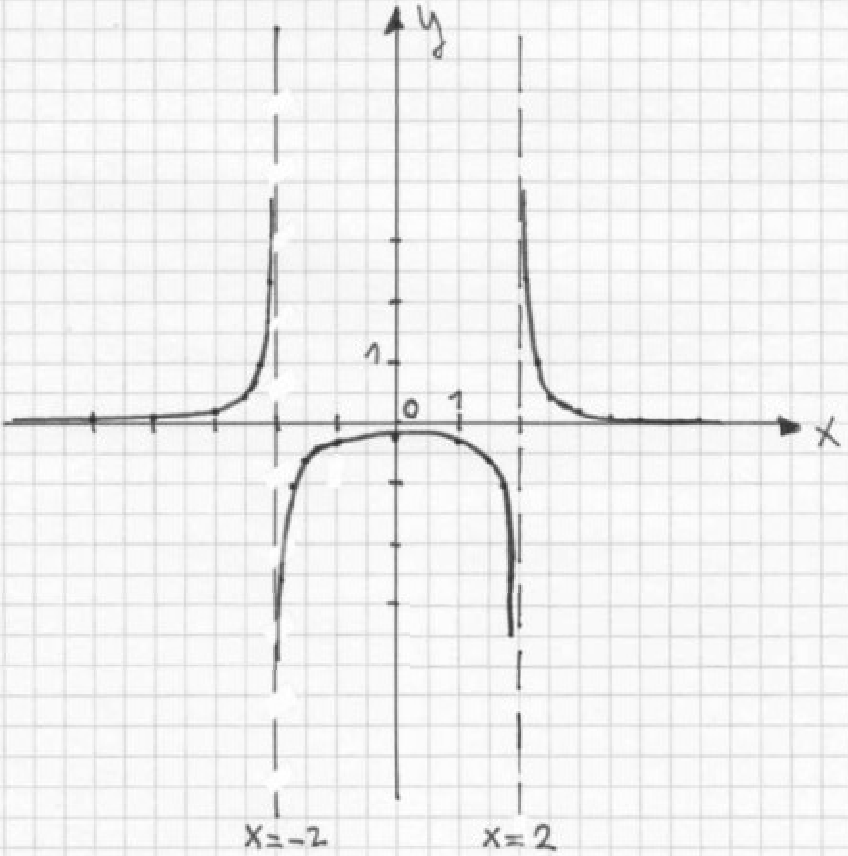
4) Tableau des signes :

x		-2		2	
$f(x)$	$+$	///	$-$	///	$+$

5) Tableau de valeurs :

x	-5	-4	-3	$-2{,}5$	$-1{,}5$	-1	0	1	$1{,}5$
$f(x)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{9}$	$-\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{7}$

x	$2{,}5$	3	4	5
$f(x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{21}$



Exercice 99

1. $f(x) = x - \frac{1}{x}$

1) Domaine de définition: $D = \mathbb{R} - \{0\}$ (on ne peut pas diviser par 0).
Image du domaine de définitions : $f(D) = \mathbb{R}$ (voir graphique).
Parité: $f(-x) = -x - \frac{1}{-x} = -x + \frac{1}{x} = -\left(x - \frac{1}{x}\right) = -f(x)$
$\Rightarrow$ f est impaire.

2) Intersections avec l'axe x: on pose $y = 0 \Rightarrow x - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{x}$
$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$
$\Rightarrow (1; 0)$ et $(-1; 0)$.
Intersection avec l'axe y : on devrait poser $x = 0$, mais $x = 0 \notin D$
$\Rightarrow$ pas d'intersection avec l'axe y.

3) $x = 0$ est un exclu $\Rightarrow$ $x = 0$ est une asymptote verticale.
Si $x \underset{<}{\rightarrow} 0$, $x - \frac{1}{x} \rightarrow 0 - (-\infty) = +\infty$.
Si $x \underset{>}{\rightarrow} 0$, $x - \frac{1}{x} \rightarrow 0 - (+\infty) = -\infty$.
Si $x \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0_+ \Rightarrow x - \frac{1}{x} \rightarrow x$ avec des valeurs inférieures.
Si $x \rightarrow -\infty$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0_- \Rightarrow x - \frac{1}{x} \rightarrow x$ avec des valeurs positives.

$\Rightarrow$ $y = x$ est une asymptote oblique.

4) Tableau des signes:

x		-1		0		1	
$f(x)$	$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$

5) Tableau de valeurs:

x	0,5	0,25	1,5	2	3
$f(x)$	-1,5	-3,75	0,83	1,5	2,7

6) Graphe: