Lycée Denis-de-Rougemont
Neuchâtel et Fleurier

Exercices de révision
Mathématiques niveau 2

NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes :

a) $z^4 = 8 - 8\sqrt{3} \cdot \mathrm{i}$

b) $z^2 + i(z-1) + \frac{7}{4} = 2z$

c) $z^4 = -8 - 8\sqrt{3} \cdot \mathrm{i}$

d) $z^6 + 1 = 0$

e) $z^6 + 19z^3 - 216 = 0$

f) $z^4 + (1+\mathrm{i})z^2 + \mathrm{i} = 0$

Exercice 2

a) Soit p un polynôme à coefficients réels : $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$.

1) Pour $z \in \mathbb{C}$, vérifier que $p(\overline{z}) = \overline{p(z)}$.

2) Déduire de 1) que si z est un zéro de $p(z)$, alors $\overline{z}$ est aussi un zéro de $p(z)$.

b) Soit $p(z) = z^4 + z^3 + z^2 + 2$

1) Vérifier que $z = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ est un zéro de $p(z)$.

2) Trouver tous les zéros de $p(z)$.

3) Décomposer $p(z)$ en produit de deux polynômes à coefficients réels.

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - (11 + 2\mathrm{i})z^2 + 2(17 + 7\mathrm{i})z - 42 = 0$ en montrant d'abord qu'elle admet une solution réelle.
Déterminer le module et l'argument des solutions.

Exercice 4

On donne la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par $z \mapsto w = f(z) = 2iz + 2$

a) Prouver que f est la composition d'une rotation de centre O et d'angle α, d'une homothétie de centre O et de facteur k et encore d'une translation t. Trouver α, k et t.

b) Quel est le point fixe de f?

c) Trouver les images de l'horizontale d'équation $y = 1$ et de la verticale d'équation $x = 2$.

Exercice 5

On donne la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par $z \mapsto f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$

a) Quelle est l'image de l'axe réel ?

b) Quelle est l'image de l'axe imaginaire ?

c) Quel est l'ensemble des z tels que $f(z)$ soit purement imaginaire ?

d) Quels sont les points fixes de f ?

e) Trouver l'expression de $f \circ f$.

Exercice 6

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 1 - 8i = 0$.

b) On considère l'application $f : z \mapsto w = 2z - i$

   1) Donner le point invariant de f, puis décrire l'application f en termes géométriques.

2) On pose $z_0 = 1 - \mathrm{i}$:
calculer $z_1 = f(z_0)$, $z_2 = f(z_1)$, $z_3 = f(z_2)$, $z_4 = f(z_3)$, ...
Trouver une expression pour z_n et démontrer la formule trouvée par récurrence.
Vérifier que dans le plan de Gauss, les nombres z_1, z_2, z_3, ... , z_n, ... sont situés sur une droite dont on donnera l'équation.

Exercice 7

On considère l'application $f : z \mapsto w = z^2 + z + 1$

a) Déterminer les nombres complexes dont l'image est $w = 6 + 5\mathrm{i}$.

b) Soit deux nombres différents z_1 et z_2 qui ont la même image.
Que peut-on dire de leur somme $z_1 + z_2$?

c) Où sont situés, dans le plan de Gauss, les nombres complexes z tels que $f(z)$ soit réel ?

d) Vérifier que, dans le plan de Gauss, les nombres $1, 2 + \mathrm{i}$ et $f(2 + \mathrm{i})$ sont alignés.

Exercice 8

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + (-1 + 12\mathrm{i})z^2 + (-87 - 9\mathrm{i})z + 18 - 306\mathrm{i} = 0$ sachant qu'elle admet une solution purement imaginaire $y\mathrm{i}$.

b) On considère la transformation $f : z \mapsto w = \dfrac{(-1+\mathrm{i})z + (3-\mathrm{i})\bar{z}}{2}$

1) Quels sont les points fixes de la transformation ?

2) On considère dans le plan de Gauss le triangle de sommets $z_1 = -6\mathrm{i}$, $z_2 = 7 - 3\mathrm{i}$ et $z_3 = -6 - 3i$.
Déterminer le triangle dont les sommets sont $f(z_1)$, $f(z_2)$ et $f(z_3)$.

Dessiner les deux triangles.

3) Quel que soit z, montrer que $f(z)-z$ est un multiple réel de $f(z_1)-z_1$.

4. Que représente géométriquement la transformation f ?

Exercice 9

a) On considère l'application $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ donnée par $f(z)=a\cdot z$. Déterminer le nombre complexe a de sorte que $f(\frac{9}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i})=\frac{9}{4}+\frac{9\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$.

b) Dans le plan de Gauss on considère la similitude $g:z\mapsto w=a\cdot z$ où $a=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$.

1. Calculer le rapport d'homothétie et l'angle de rotation de la similitude g.
2. On pose $z_0=6$, $z_1=g(z_0)$, $z_2=g(z_1)$, ..., $z_n=g(z_{n-1})$, ...
   Calculer z_1, z_2 et z_9 puis trouver une expression pour z_n.
3. Montrer que le triangle de sommet O, z_0, z_1 est rectangle en z_1.
   Expliquer pourquoi tout triangle O, z_{k-1}, z_k est rectangle en z_k.
4. En tirant profit de la question b)3 et en choisissant 1 cm comme unité, construire la ligne polygonale de sommets z_0, z_1, z_2, ..., z_9.
5. Calculer la longueur du segment d'extrémités z_0 et z_1
   Si on poursuivait indéfiniment la construction de la ligne polygonale de sommets z_0, z_1, z_2, z_3, ... quelle serait la longueur de la "spirale" ainsi obtenue ?

Exercice 10

On considère l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée par $z \mapsto f(z) = z^3 - 3iz^2 - 2z + 9i$

a) Résoudre l'équation $f(z) = 9i$ et montrer que les 3 solutions sont sur une même droite du plan de Gauss.

b) Calculer les 3 points fixes de f sachant que l'un d'eux est situé sur l'axe imaginaire. Vérifier que ces points sont les sommets d'un triangle équilatéral.

c) Montrer que l'axe imaginaire est une figure globalement invariante par f.

d) Trouver les points de l'axe réel dont les images sont sur l'axe imaginaire.

e) Calculer les parties réelle et imaginaire de l'image de $z = x + i$.
En déduire l'image de la droite d'équation $y = 1$.