

DYNAMIQUE DU CORPS SOLIDE

Dans les chapitres de **mécanique** traités jusqu'ici, il s'agissait d'étudier la **dynamique du point matériel**, le corps de masse m ayant des dimensions négligeables vis-à-vis des distances considérées, comme souvent en gravitation. Quoi qu'il en soit, et du point de vue pratique, le point d'application des diverses forces était indifférent, on ne se préoccupait pas des rotations du corps. Le point d'application des forces a pris toute son importance en **statique du corps solide**, lorsqu'il s'agissait d'examiner l'équilibre d'un corps solide soumis à des forces susceptibles de lui provoquer une rotation. Cela a fait apparaître la notion de **moment de force**.

Dans le présent chapitre seront étudiées des situations où un corps **tourne autour d'un axe de direction fixe**, effectue donc une **rotation**. Tout ce qui a été vu précédemment reste naturellement valable, mais se révélera parfois insuffisant pour décrire un corps en rotation, tel une sphère roulant librement sur un plan incliné. Pour cette étude, une seule grandeur physique nouvelle suffira, en plus de celles déjà connues: la notion de **moment d'inertie**.

Typographie

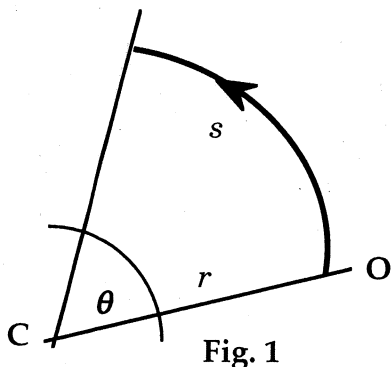
Ce cours est écrit en respectant les conventions typographiques d'écriture des textes scientifiques comportant des symboles mathématiques. Cela signifie que:

- * les grandeurs physiques scalaires (non vectorielles) sont en *italique*: x, m, T , etc.
- * les unités ne sont *pas* en italique: m, kg, s, etc.
- * les vecteurs sont en **standard gras** sans flèche dessus: $\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{a}, \mathbf{F}$, etc.
- * les composantes d'un vecteur étant des scalaires sont en *italique*: v_x, a_t , etc.
- * La norme (grandeur, longueur, module...) d'un vecteur est en *italique* puisqu'il s'agit d'un scalaire. Cette convention simplificatrice ne peut pourtant pas s'appliquer lorsqu'il s'agit de la **différence** de deux vecteurs; en effet, par exemple:

$$\Delta v \neq \|\Delta \mathbf{v}\| \Leftrightarrow v_2 - v_1 \neq \|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1\|$$

1) Rappel et compléments de cinématique

Notations: Qui dit rotation dit angle θ (ou ϕ , mais pas α), vitesse angulaire ω et accélération angulaire α .



L'unité naturelle d'angle est le **radian**.

Il se définit comme le rapport de l'arc sur le rayon:

$$\theta = s/r \text{ ou: } s = \theta r.$$

Pour passer des grandeurs linéaires aux grandeurs angulaires correspondantes, il suffit donc de diviser par le rayon de courbure r :

$$\text{vitesse angulaire } \omega = v/r$$

$$\text{accélération angulaire } \alpha = a_t/r$$

où a_t est l'accélération tangentielle.

Un corps solide qui tourne autour d'un axe fixe a tous ses points qui ont même vitesse angulaire ω et accélération angulaire α , bien que les vitesses v et les accélérations a_t et a_n puissent être différentes d'un point à un autre si ces points ne sont pas à la même distance r de l'axe.

En résumé, en utilisant la définition de l'angle θ ci-dessus:

$$a_t = \dot{v} = \ddot{s} = \alpha r = \dot{\omega} r = \ddot{\theta} r$$

Vecteur-vitesse angulaire

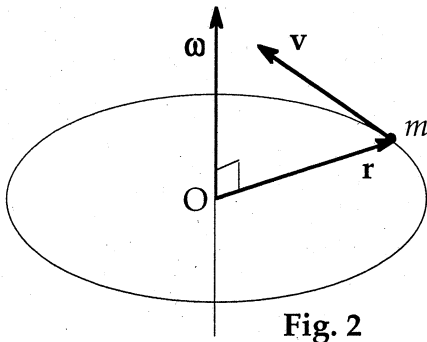


Fig. 2

Une masse m tourne à la vitesse v à la distance r d'un axe fixe. On sait que la vitesse angulaire ω se définit comme: $\omega = v/r$, c-à-d $v = \omega r$.

On définit le **vecteur** vitesse angulaire ω par:

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}$$

On retrouve en effet la relation scalaire $v = \omega r$ puisque ω est perpendiculaire à \mathbf{r} .

Les trois vecteurs sont perpendiculaires entre eux et, par la règle de multiplication vectorielle (règle du tire-bouchon), le vecteur ω indique aussi le **sens** de la rotation.

Roulement sans glissement

Lorsque l'homme inventa la roue, il ne la regarda pas longtemps tourner sur son établi, il la fit rouler et inventa ainsi le véhicule.

Examinons la vitesse instantanée de divers points d'un corps rond (cylindre, sphère, etc.) en train de rouler sans glisser sur une surface plane.

La trajectoire d'un point de la circonférence est une courbe périodique; la distance entre deux points de contact avec le plan est évidemment de $2\pi r$ si r est le rayon du corps qui roule. Une telle courbe s'appelle une cycloïde:

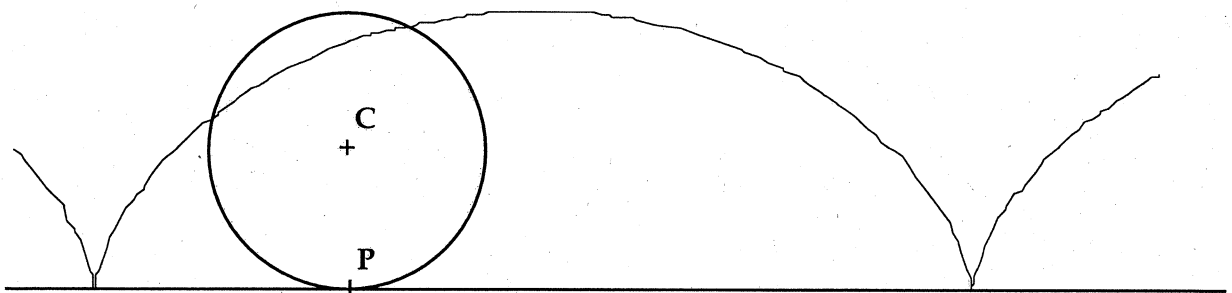


Fig. 3

Il est commode de décomposer un roulement sans glissement en une **translation** pure et une **rotation** pure (fig, 4). Pour la translation, tous les points ont le même vecteur-vitesse \mathbf{v}_c , celui du centre C; pour la rotation, tous les points ont la même vitesse angulaire ω et ceux de la circonférence ont une vitesse $v = \omega r = v_c$, puisqu'il n'y a pas de glissement:

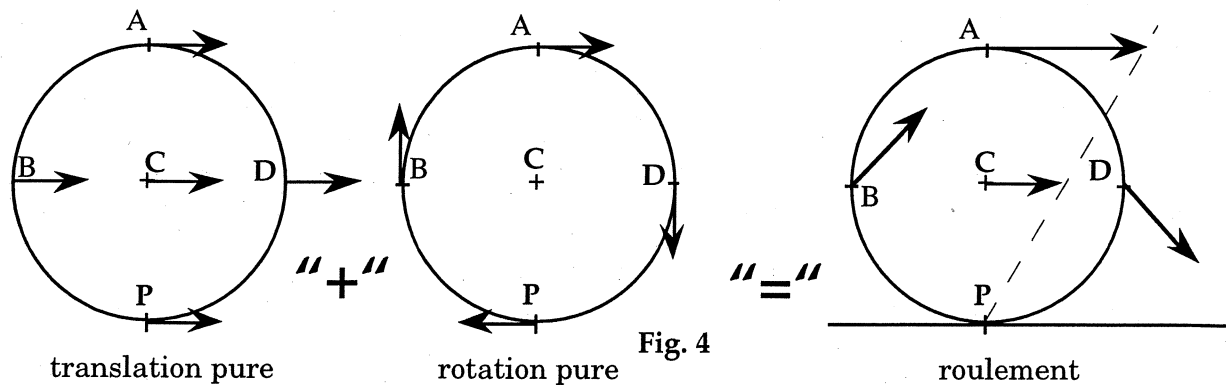


Fig. 4

Pour trouver le vecteur-vitesse de chacun des cinq points A, B, D, C et P lors du roulement il suffit d'additionner **vectorellement** les vecteurs-vitesse de translation à ceux de rotation. On remarque en particulier que:

- $\mathbf{v}_C(\text{roul}) = \mathbf{v}_C(\text{trans})$ puisque $\mathbf{v}_C(\text{rot}) = 0$
- $\mathbf{v}_A(\text{roul}) = \mathbf{v}_A(\text{trans}) + \mathbf{v}_A(\text{rot}) = 2\mathbf{v}_C(\text{roul})$ puisque $\mathbf{v}_C(\text{trans}) = \mathbf{v}_A(\text{trans}) = \mathbf{v}_A(\text{rot})$
- $\mathbf{v}_P(\text{roul}) = 0$ puisque $\mathbf{v}_P(\text{trans}) = -\mathbf{v}_P(\text{rot})$.

Le point de contact P est important car il est **immobile**. On désigne alors P comme **centre instantané de rotation**. On l'utilisera par la suite. Constatons que, vue de ce point, la vitesse angulaire est la même que celle vue du centre C. En effet, pour le point A par exemple:

$\omega_A(\text{vue de P}) = v_A(\text{roul})/2r = 2v_C/2r = v_C/r = \omega_A(\text{vue de C})$. Ainsi, la vitesse angulaire lors du roulement **est** la vitesse angulaire de rotation pure.

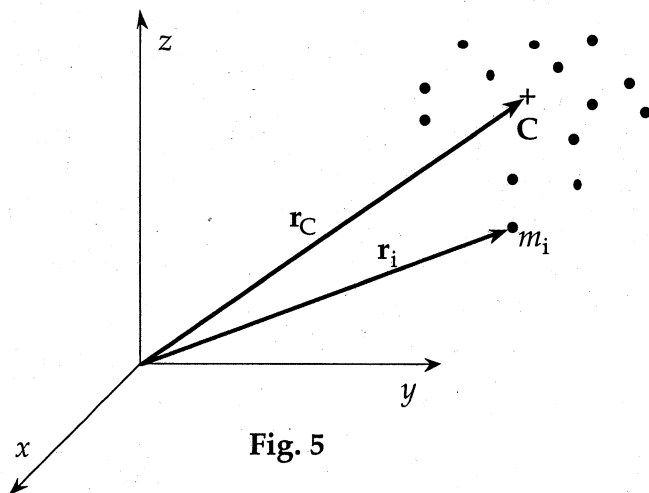
Exercices:

1. Montrer que le résultat établi ci-dessus est valable pour les points B et D.
2. Un point E est sur la circonférence du corps rond de la figure 4. Il est entre B et A et sa position est repérée par le rayon CE qui fait un angle $\theta = 60^\circ$ avec la verticale CA.
 - a) Le corps roule sans glisser; construire le vecteur \mathbf{v}_E . Montrer qu'il est normal à PE où P est le point de contact avec le plan de roulement.
 - b) Calculer v_E en utilisant la vitesse angulaire vue de P. ($v_C = 1 \text{ m/s}$, $r = 1 \text{ m}$).
 - c) Contrôler b) en mesurant v_E sur le dessin.
3. Montrer que, pour un roulement sans glissement, l'accélération angulaire α est la même, qu'elle soit vue du point de contact P ou du centre C.

2) Centre de masse et centre de gravité

A moins que le champ de gravitation ou de pesanteur \mathbf{g} ne soit pas homogène, on ne distinguera pas ces deux points: ils coïncident si \mathbf{g} est homogène.

Soit un ensemble de points matériels de masses m_i et repérés par les vecteurs \mathbf{r}_i :



Déf.: Il existe un point C désigné par le vecteur \mathbf{r}_C tel que:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}$$

C'est le **centre de masse** du système matériel que constituent les m_i .

On constate que c'est la moyenne pondérée des \mathbf{r}_i , les m_i ayant le rôle de "poids".

Si les m_i sont liés rigidement entre eux, le système forme un **solide rigide** de masse

$$m = \sum m_i$$

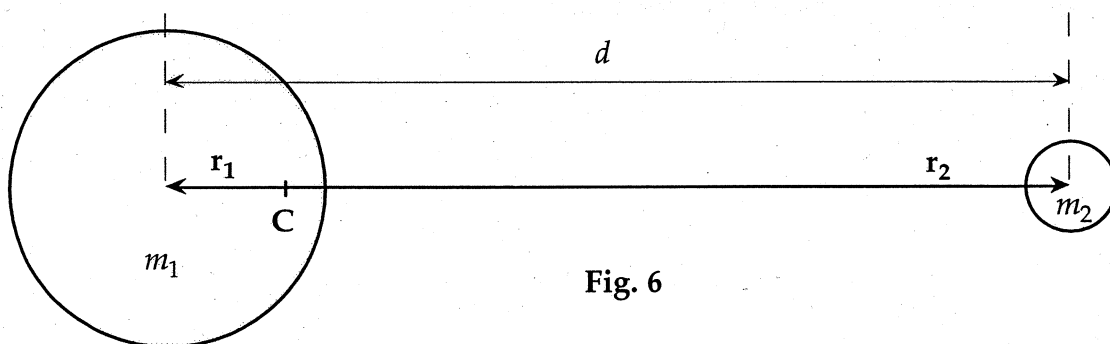
et la position du centre de masse du solide est donnée par :

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{m} \sum m_i \mathbf{r}_i \quad (1)$$

Si l'origine du repère coïncide avec le centre de masse, alors $\mathbf{r}_C = \mathbf{0}$. Dans ce cas important:

$$\sum m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{0} \quad (2)$$

Exemple: Où se trouve le centre de masse C du système Terre-Lune ?



$$\sum m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{0} \Rightarrow m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow m_1 r_1 = m_2 (d - r_1) \Rightarrow r_1 = \frac{m_2 d}{m_1 + m_2}$$

Remplaçant par les valeurs numériques connues, on trouve: $r_1 \approx 4660$ km, donc à l'intérieur de la Terre puisque son rayon est de 6370 km. Notons que c'est ce point-là qui décrit l'orbite elliptique conforme aux lois de Képler autour du Soleil.

Restons sur Terre et considérons un corps solide de masse m dans le champ de pesanteur terrestre \mathbf{g} . Le corps est supposé bien plus petit que la Terre elle-même pour que \mathbf{g} puisse être considéré comme homogène sur le volume du corps. Prenons la relation (1) définissant le vecteur-position du centre de masse et multiplions vectoriellement à droite cette équation vectorielle par le vecteur poids total $m\mathbf{g}$:

$$\mathbf{r}_C \wedge m\mathbf{g} = \frac{1}{m} (\sum m_i \mathbf{r}_i) \wedge m\mathbf{g} = \sum \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{g} \quad (3)$$

On n'a écrit rien d'autre que: le **moment** du poids total $\mathbf{r}_G \wedge m\mathbf{g}$ est égal à la somme des moments des poids individuels $\mathbf{r}_i \wedge m_i\mathbf{g}$. Voilà qui devrait rendre, si besoin est, moins abstraite la relation (1). Le poids total est un vecteur dont le point d'application est appelé **centre de gravité** G, repéré depuis l'origine par un vecteur \mathbf{r}_G qui n'est autre que le vecteur \mathbf{r}_G , comme le montre la relation (3).

Si de plus on choisit de placer l'origine en ce point G, alors $\mathbf{r}_G = 0$ et on a :

$$\sum \mathbf{r}_i \wedge m_i\mathbf{g} = 0 \quad (4)$$

Cette dernière relation a été démontrée et utilisée au chapitre de STATIQUE DU CORPS SOLIDE pour calculer la position du centre de gravité (cdg) de quelques objets.

Illustration:

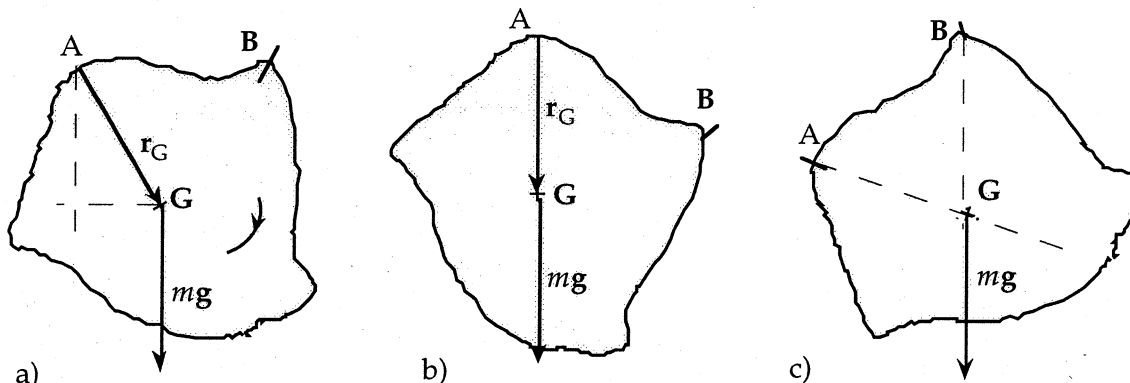


Fig. 7

La fig. 7a) montre un corps de masse m et de forme quelconque suspendu par l'un de ses points, par exemple A. Tant que le cdg G ne sera pas à la verticale de A, le corps ne sera pas en équilibre statique stable, puisque le moment du poids total $m\mathbf{g}$, appliqué en G, ne sera pas nul. L'équilibre est atteint en b) puisque \mathbf{r}_G est parallèle à $m\mathbf{g}$, le produit vectoriel est nul comme l'est alors le moment du poids. En c), le corps est suspendu par un autre point (B). Suspendre un corps par deux points est une méthode simple et rapide pour déterminer la position de G, à l'intersection des deux verticales successives. Ceci est valable pour un corps plan, mais il faudra trois points de suspension si le corps n'est pas plan.

Exemple de calcul:

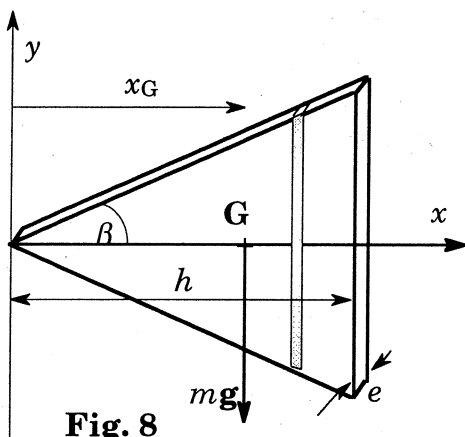


Fig. 8

Trouver la position du centre de gravité G d'une plaque en forme de triangle isocèle d'épaisseur e et de masse volumique ρ uniformes.

On part de la relation:
$$\mathbf{r}_G = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}$$

Les sommes deviennent des intégrales:

$$x_G = \frac{\int_0^h x \, dm}{\int_0^h dm}$$

Chaque vecteur-position \mathbf{r}_i est devenu la coordonnée x et chaque masse m_i est devenue l'élément infinitésimal dm :

$$dm = \rho \, dV = 2\rho e y \, dx = 2\rho e x \tan\beta \, dx \quad \text{car } y = x \tan\beta. \text{ On a ainsi:}$$

$$x_G = \frac{\int_0^h x^2 dx}{\int_0^h x dx} = \frac{\frac{h^3}{3}}{\frac{h^2}{2}} = \frac{2h}{3} \quad \text{résultat bien connu.}$$

3) Energie cinétique et moment d'inertie

Examinons un cas simple: celui d'un disque de rayon R dont la masse m est répartie uniformément. Il tourne à la vitesse angulaire ω (pas forcément constante) autour d'un axe passant par son centre G et perpendiculaire à son plan. Tous les points du disque ont le même ω ; ceux qui sont à la distance r_i de l'axe ont alors la vitesse $v_i = \omega r_i$.

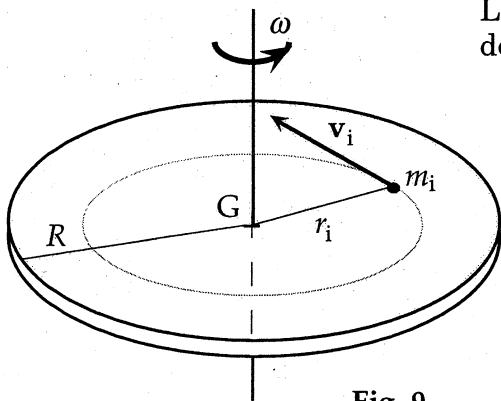


Fig. 9

L'énergie cinétique totale du disque est la somme des énergies cinétiques des masses individuelles m_i :

$$\begin{aligned} E_c &= \sum E_{c,i} = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i \omega^2 r_i^2 \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i r_i^2 \quad (*) \end{aligned}$$

Il apparaît l'expression $\sum m_i r_i^2$. C'est, par définition, le **moment d'inertie** I du disque pour l'axe en question:

$$I_G = \sum m_i r_i^2$$

Le moment d'inertie d'un corps ne représente pas seulement la masse de ce corps mais surtout **la répartition de la masse** autour d'un axe; plus la matière du corps est éloignée de l'axe, plus le moment d'inertie sera grand et plus il sera difficile d'en faire varier la vitesse de rotation. Le mot *inertie* prend ici tout son sens.

Pour l'illustrer simplement, on laisse rouler, sans vitesse initiale sur un plan incliné, deux cylindres, l'un plein, disons en bois, et l'autre, de même masse et de même diamètre, mais creux, donc un tube, et plutôt alors en métal. Si on les libère en même temps, on observe dès le départ que le tube prend du retard et arrive nettement après le cylindre de bois au bas de la pente.

Explication sommaire: le tube a sa masse répartie plus loin de l'axe de symétrie que celle du cylindre plein, son moment d'inertie est donc plus important et il a ainsi plus de peine à accélérer lorsqu'il est libéré. On calculera sous peu vitesse et accélération de corps ronds en roulement.

Remarquons qu'il est extrêmement important de spécifier, par l'indice inférieur de I , pour quel axe de rotation le moment d'inertie est calculé. Pour un axe ne passant pas par G , la répartition de la masse est différente, donc le moment d'inertie l'est aussi. **L'énergie cinétique de rotation** du disque autour de cet axe passant par G est ainsi, en vertu de (*):

$$E_c^{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_G \omega^2$$

Calculs de moment d'inertie

Lorsque le système matériel est constitué d'un nombre fini de m_i , on pourra utiliser la définition ci-dessus: $I_G = \sum m_i r_i^2$; mais lorsqu'il s'agit, comme dans la plupart des cas d'un corps solide rigide, il faut le décomposer par la pensée en une infinité de masses infinitésimales dm , se trouvant à la distance r de l'axe de rotation. La somme finie devient ainsi une intégrale où la distance r devient la variable d'intégration.

1) Tube à paroi mince

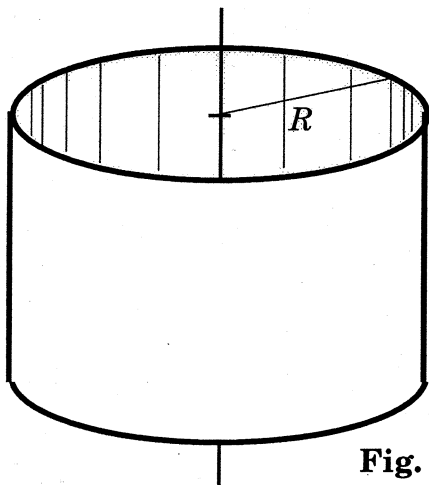


Fig. 10

Toute la masse est à la même distance R de l'axe passant par G (à l'intérieur du tube):

$$I_G = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i R^2 = R^2 \sum m_i = mR^2$$

2) Cylindre plein

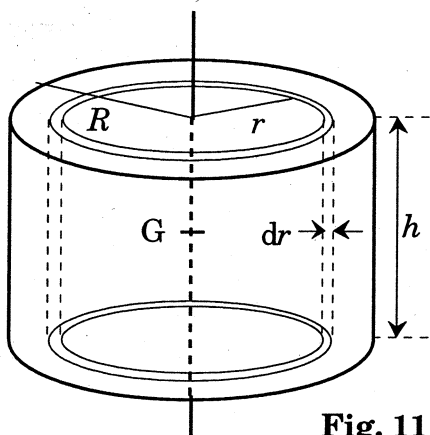


Fig. 11

La somme devient une intégrale:

$$\sum m_i r_i^2 \rightarrow \int r^2 dm$$

On décompose le cylindre en tubes concentriques de rayon r variant de 0 à R et d'épaisseur dr , donc de masse: $dm = \rho 2\pi r h dr$.

On cherche ensuite à sortir la masse $m = \rho \pi R^2 h$.

Le moment d'inertie I_G est ainsi:

$$I_G = \int r^2 dm = \rho 2\pi h \int_0^R r^3 dr = \rho 2\pi h \frac{R^4}{4} = \rho \pi R^2 h \frac{R^2}{2} = m \frac{R^2}{2}$$

Par ces deux exemples on constate que deux cylindres de même masse et de même diamètre, mais l'un creux et l'autre plein, n'ont pas le même moment d'inertie, ce qui doit leur conférer un comportement dynamique différent. On l'a déjà brièvement évoqué, on y reviendra plus en détail.

3) Tige mince

Par "mince", on entend que son diamètre est beaucoup plus faible que sa longueur L . Elle est de section s et de masse volumique ρ tous deux uniformes. On se propose de calculer son moment d'inertie pour deux axes de rotation différents, tous deux perpendiculaires à la tige, l'un passant par son centre G , l'autre passant par son extrémité P .

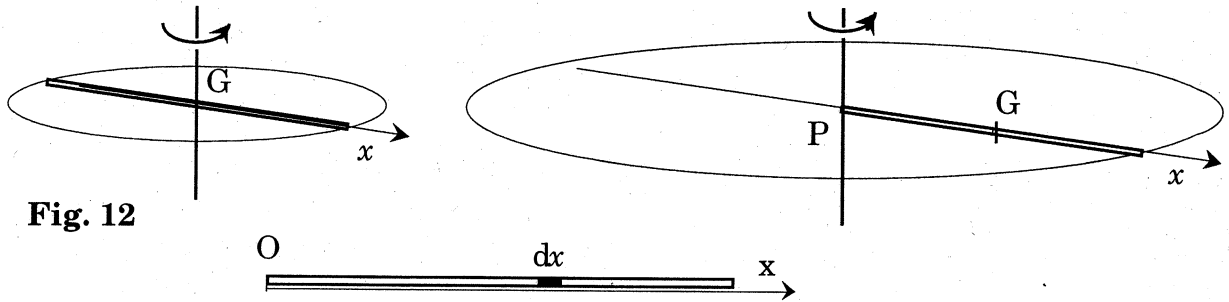


Fig. 12

La tige est de masse $m = \rho s L$. On la décompose en éléments dm de longueur dx , tels que : $dm = \rho s dx$ et on calcule l'intégrale:

$$I_G = \int x^2 dm = \rho s \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx = \rho s \left[\frac{1}{3} \left(\frac{L}{2} \right)^3 - \frac{1}{3} \left(-\frac{L}{2} \right)^3 \right] = \rho s \frac{L^3}{12} = m \frac{L^2}{12}$$

pour l'axe passant par G . De même, ne changeant que les bornes d'intégration:

$$I_P = \int x^2 dm = \rho s \int_0^L x^2 dx = \rho s \frac{L^3}{3} = m \frac{L^2}{3} \quad \text{pour l'axe passant par } P.$$

4) Sphère pleine

Elle est de masse volumique ρ uniforme et de rayon R .

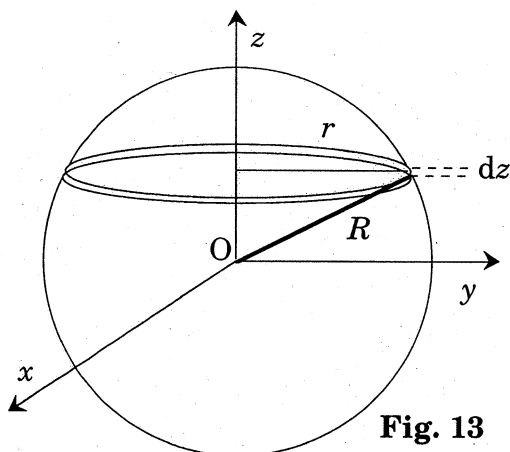


Fig. 13

Elle a une masse $m = \frac{4}{3} \rho \pi R^3$

On calcule le moment d'inertie pour un axe de rotation confondu avec l'axe Oz .

On découpe alors la sphère en tranches d'épaisseur dz et de rayon $0 \leq r \leq R$.

Chaque tranche est un cylindre de moment d'inertie $\frac{1}{2} r^2 dm$ par l'exemple 2), avec $dm = \rho \pi r^2 dz$.

Le moment d'inertie de la sphère est donc:

$$I_O = \frac{1}{2} \int r^2 dm = \frac{1}{2} \rho \pi \int_{-R}^R r^4 dz \quad \text{où } r^2 = R^2 - z^2 \Rightarrow I_O = \frac{1}{2} \rho \pi \int_{-R}^R (R^4 - 2R^2 z^2 + z^4) dz$$

l'intégrale comprend trois termes, faciles à calculer. On arrive à:

$$I_O = 2 \frac{1}{2} \rho \pi \left(R^5 - 2R^2 \frac{R^3}{3} + \frac{R^5}{5} \right) = \rho \pi R^5 \left(\frac{15-10+3}{15} \right) = \rho \pi R^5 \frac{8}{15} = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{2}{5} R^2 = \frac{2}{5} m R^2$$

4) Roulement d'un corps rond

Un cylindre, un tube ou une sphère roule sans glissement et librement le long d'un plan incliné. On suppose que les frottements sont négligeables, ce qui permet d'utiliser la **conservation de l'énergie mécanique**.

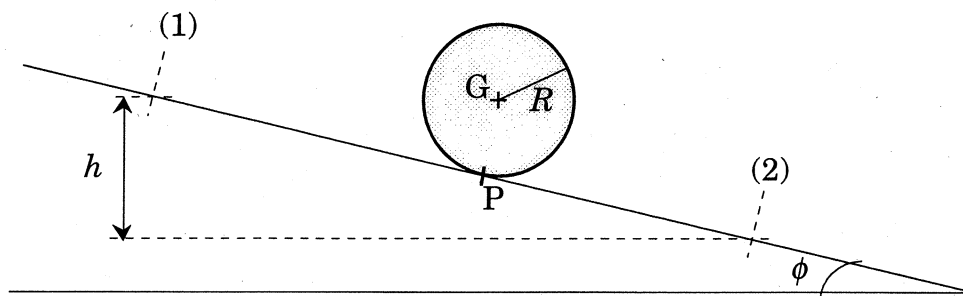


Fig. 14

Calculons la vitesse du cdg G en (2) dans la situation où le corps a été libéré sans vitesse initiale en (1). On place le zéro de l'énergie potentielle au niveau de (2).

$$E_m^{(1)} = E_m^{(2)} \Leftrightarrow E_p^{(1)} + E_c^{(1)} = E_p^{(2)} + E_c^{(2)} \Rightarrow mgh + 0 = 0 + E_c^{(2)}$$

Deux points de vue:

a) On considère le roulement comme la combinaison d'une translation de G et d'une rotation pure du corps, autour de G; l'énergie cinétique est alors formée de deux termes:

$$E_c = E_c(\text{trans}) + E_c(\text{rot}, G) = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 \quad \text{où } \omega = \frac{v_G}{R} \Rightarrow E_c = \frac{1}{2} \left(m + \frac{I_G}{R^2} \right) v_G^2$$

$$E_p^{(1)} = E_c^{(2)} \Rightarrow v_G^{(2)} = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{I_G}{R^2}}}$$

b) On considère le roulement comme une rotation instantanée autour du point de contact P. L'énergie cinétique n'a alors qu'un terme. De plus, on a calculé que la vitesse angulaire est la même, vue de G ou vue de P.

$$E_c = E_c(\text{rot}, P) = \frac{1}{2} I_P \omega^2 = \frac{1}{2} I_P \frac{v_G^2}{R^2}; \quad E_p^{(1)} = E_c^{(2)} \Rightarrow v_G^{(2)} = \sqrt{\frac{2mgh R^2}{I_P}}$$

Il s'agit de la même vitesse qu'en a), donc: $\frac{I_P}{R^2} = m + \frac{I_G}{R^2} \Rightarrow I_P = mR^2 + I_G$

Cette constatation montre comment change le moment d'inertie lorsque l'axe de rotation est décalé. Ici, le décalage ajoute le terme mR^2 à I_G .

Pour de tels corps ronds, le moment d'inertie I_G peut, de façon générale s'écrire sous la forme: $I_G = kmR^2$ où k est un facteur géométrique ($k = 1$ pour un tube, $k = 0,5$ pour un cylindre plein, $k = 0,4$ pour une sphère, etc.). Ainsi:

$$v_G^{(2)} = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{I_G}{R^2}}} = \sqrt{\frac{2mgh}{m + km}} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + k}}$$

S'il n'y a pas de rotation alors $k = 0$ et on retrouve l'expression bien connue.

Règle de Steiner : axes parallèles

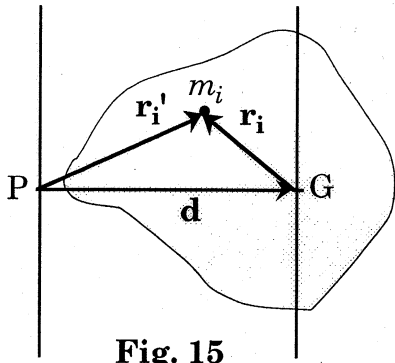


Fig. 15

Si le moment d'inertie d'un corps, pour un axe passant par son c.d.g., est connu, cette règle permet très facilement de le trouver pour un axe quelconque parallèle au premier.

Soit d la distance entre les deux axes et soit un point m_i quelconque du corps, repéré par les vecteurs \mathbf{r}_i et \mathbf{r}_i' tels que $\mathbf{r}_i' = \mathbf{d} + \mathbf{r}_i$.

Par définition: $I_P = \sum m_i r_i'^2 = \sum m_i (\mathbf{d} + \mathbf{r}_i)^2$

où $(\mathbf{d} + \mathbf{r}_i)^2 = d^2 + 2\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}_i + r_i^2$, ce qui donne:

$$I_P = d^2 \sum m_i + 2 \mathbf{d} \cdot \sum m_i \mathbf{r}_i + \sum m_i r_i^2 = m d^2 + I_G \text{ car } \sum m_i \mathbf{r}_i = 0 \text{ par déf. de G.}$$

Ainsi:

$$I_P = m d^2 + I_G$$

C'est une généralisation des deux cas particuliers calculés précédemment: la tige mince et le roulement d'un corps rond.

5) La loi fondamentale...

... de la dynamique des rotations.

Etablissement

Au chapitre de "Gravitation" on avait défini le **moment cinétique** d'un point matériel de masse m se déplaçant à une vitesse \mathbf{v} variable à une distance \mathbf{r} variable d'un point fixe O : $\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \wedge m \mathbf{v}$. En dérivant par rapport au temps ce vecteur moment cinétique \mathbf{L} on a obtenu $\mathbf{r} \wedge \mathbf{F}$ qui est nul en gravitation puisque la force est centrale, ce qui a fait surgir la conservation de \mathbf{L} . Il n'en reste pas moins que ce calcul de dérivée reste valable, c-à-d qu'on a toujours:

$$\dot{\mathbf{L}}_O = \frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{M}_O(\mathbf{F})$$

On appelle cette relation le **théorème du moment cinétique**.

Voyons que cela s'applique aussi, et de façon particulièrement efficace, au solide. Commençons pourtant par un **point matériel** (fig. 16 a)) tournant à distance fixe r autour d'un axe fixe. Cette masse est soumise à une force résultante qui a une composante tangentielle \mathbf{F} , ce qui lui communique une accélération tangentielle et donc une accélération angulaire. A cette force est associé un **moment** relativement à l'axe.

Ainsi:

$$M_O^z(\mathbf{F}) = r F = r m a_t = r m \alpha r = m r^2 \alpha \quad (*)$$

ce qu'on obtient aussi avec le théorème du moment cinétique:

$$L_O^z = r m v = r m \omega r = m \omega r^2 \Rightarrow \frac{dL_O^z}{dt} = m r^2 \frac{d\omega}{dt} = m r^2 \alpha$$

Le moment d'inertie d'un point matériel n'est nul que si l'axe considéré passe par le point. Par contre, si celui-ci est à la distance r de l'axe, alors $I_0 = mr^2$ et on a que :

$$\frac{dL_0^z}{dt} = I_0 \alpha .$$

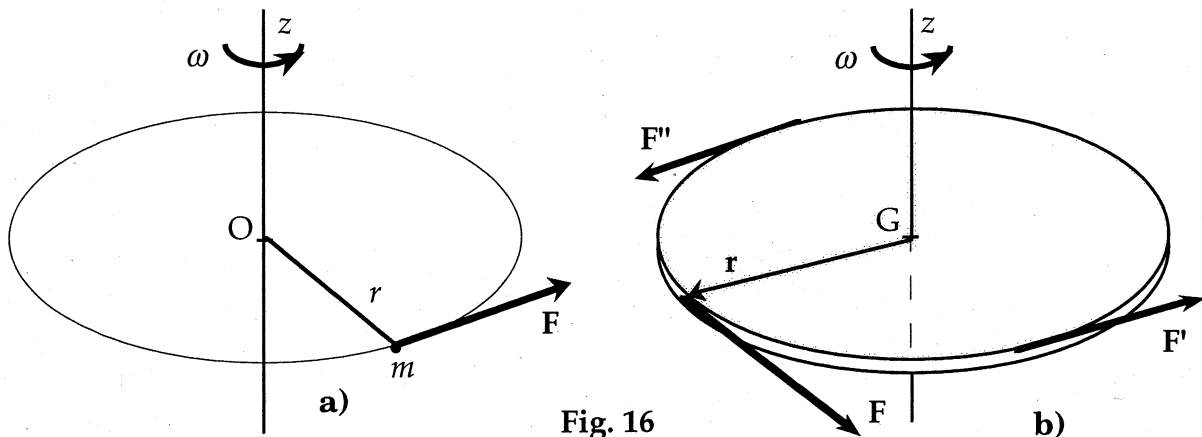


Fig. 16

Comme solide, prenons un disque de masse m et de rayon r (fig. 16 b). Il est soumis à des forces tangentielles \mathbf{F} , \mathbf{F}' , \mathbf{F}'' ... à chacune desquelles correspond un moment de force dont on peut exprimer la somme $M_G^z = \sum M_{G,i}^z$. D'autre part, tous les m_i du disque ont la même accélération angulaire α et la relation (*) ci-dessus devient:

$$\sum M_{G,i}^z = \sum m_i r_i^2 \alpha = \alpha \sum m_i r_i^2 = I_G \alpha$$

C'est la loi fondamentale de la dynamique des rotations.

La démonstration a été faite dans le cas particulier simple où l'axe passe par le cdg G et où tous les vecteurs sont soit parallèles soit perpendiculaires entre eux. Si l'axe passe par un point P quelconque et de façon générale, la loi reste valable et s'écrit:

$$\sum M_{P,i}^z = I_P \alpha$$

Elle est fondamentale parce que très générale. C'est le pendant de la fameuse deuxième loi de Newton $\sum \mathbf{F} = m \mathbf{a}$ de la dynamique du point matériel ou pour les translations. Il y a correspondance entre ces deux lois en ce sens que la masse m dans $\sum \mathbf{F} = m \mathbf{a}$ devient le moment d'inertie I , les forces deviennent les moments de force et l'accélération devient l'accélération angulaire.

Exemple de calcul

Reprenons la situation d'un corps rond (masse m , rayon R) roulant sur un plan incliné et calculons la valeur de l'accélération a de son cdg.

On va de nouveau prendre deux points de vue: celui du point de contact P d'abord et celui du point G ensuite. Au dessin de la fig. 14, on ajoute les forces et on a la fig. 17 :

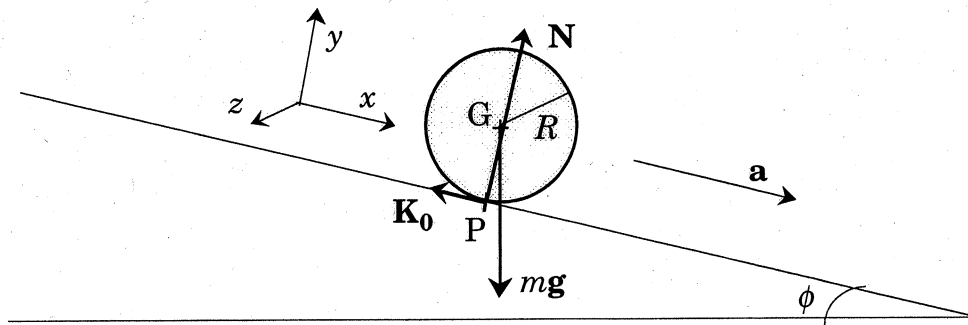


Fig. 17

En dynamique du point matériel, le point d'application des forces n'avait pas d'importance. On n'a plus du tout cette liberté en dynamique des rotations puisque chaque force peut avoir un **moment de force** et que ce moment fait intervenir le **bras de levier** de la force. C'est donc au moins la **droite-support** de la force qu'il faut placer avec rigueur sur le dessin.

a) vu de P:

Seul le poids mg a un moment non nul: $M_P(mg) = mg R \sin \phi$

L'accélération est: $a = \alpha R$ et le moment d'inertie pour P est: $I_P = I_G + mR^2$.

Pour un corps rond on peut écrire $I_G = kmR^2$ où k est un facteur géométrique.

L'application de la loi fondamentale fait écrire:

$$mg R \sin \phi = (kmR^2 + mR^2) \frac{a}{R} \Rightarrow a = \frac{g \sin \phi}{k + 1}$$

Pour un point matériel, $k = 0$ et on retrouve le cas connu: $a = g \sin \phi$, qu'on obtient aussi si le corps ne fait que glisser sur le plan.

b) vu de G:

Seule la force d'adhérence K_0 a un moment non nul: $M_G(K_0) = K_0 R$

L'accélération est aussi $a = \alpha R$ et le moment d'inertie est $I_G = kmR^2$.

L'application de la loi fondamentale fait écrire:

$$K_0 R = kmR^2 \frac{a}{R} \Rightarrow K_0 = kma \quad (*)$$

mais on ne sait à priori rien sur la force d'adhérence. Pour en savoir plus, il faut examiner aussi l'aspect *translation*, et c'est évidemment la bonne vieille deuxième loi de Newton qui nous vient en aide. On l'écrit pour les deux axes:

(x): $-K_0 + mg \sin \phi = ma$

(y): $N + mg \cos \phi = 0$

Remplaçant (*) dans (x) on obtient: $a = \frac{g \sin \phi}{k + 1}$, comme pour le 1^{er} point de vue.

Remarque:

Le calcul par le deuxième point de vue montre que la force d'adhérence est indispensable pour le roulement. Pourtant, elle ne provoque aucune déperdition d'énergie, aucune diminution de l'accélération, car elle ne travaille pas. En effet, si on revient à la figure 3 (page 2), on observe que cette force est constamment perpendiculaire à la trajectoire au point de contact. On voit sur cette figure qu'au voisinage du point de contact, la cycloïde a un point de rebroussement à tangente perpendiculaire à la surface de roulement.

Regardons cela d'un peu plus près:

On sait bien que si le plan est très incliné, le corps va spontanément non seulement

rouler mais aussi glisser. Il y a donc un angle ϕ maximum d'inclinaison pour lequel le corps roule sans glisser. Calculons cet angle ϕ_{\max} .

L'interaction de contact entre la surface du plan et le corps qui y roule est caractérisée par un coefficient d'adhérence μ_0 qui doit être suffisant, ce qui s'exprime par $\mu_0 N \geq K_0$. A la limite de non glissement: $\mu_0 N = K_0^{\max}$. On examine ce cas limite qui va faire apparaître l'angle limite ϕ_{\max} . Il faut secouer les quatre relations :

- 1) (x) : $-K_0^{\max} + mg \sin \phi_{\max} = ma$
- 2) (y) : $N = mg \cos \phi_{\max}$
- 3) (z) : $K_0^{\max} R = kmR^2 \alpha$ avec $a = \alpha R$
- 4) $K_0^{\max} = \mu_0 N$

On remplace a tiré de 3) dans 1), puis on prend N de 2) qu'on met dans 4) et on remplace K_0^{\max} dans 1). Après simplification par mg , on arrive à :

$$\tan \phi_{\max} = \mu_0 \left(1 + \frac{1}{k} \right)$$

Entre 0 et 90° la fonction \tan est monotone croissante, la croissance de ϕ est donc celle de $\tan \phi$. La relation trouvée montre qu'un cylindre plein, par exemple, roulera sans glissement pour une inclinaison plus importante qu'un tube puisque $k_{\text{cyl. plein}} < k_{\text{tube}}$, toutes conditions égales par ailleurs (mêmes m , R et μ_0).

6) Moment cinétique

Sa conservation a été abondamment exploitée en gravitation où le moment de la force de gravitation, qui est centrale, est constamment nul. C'est bien là le critère d'application de la conservation du moment cinétique: il peut y avoir de nombreuses forces, mais si la somme des moments de ces forces est nulle alors le moment cinétique est constant, donc est le même en deux instants et situations différentes.

$$M_{0,i}^z = \frac{dL_0^z}{dt} = 0 \Rightarrow L_0^z = \text{const.}$$

En gravitation il a été fait usage du moment cinétique d'un point matériel essentiellement. Montrons encore une fois que cette notion s'applique aussi à un solide. Pour cela prenons le cas d'un corps quelconque de masse m et tournant autour d'un axe fixe.

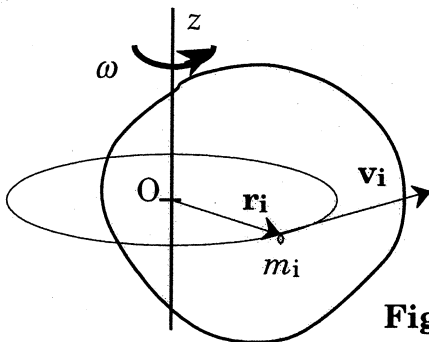


Fig. 18

Les vecteurs \mathbf{r}_i et \mathbf{v}_i sont dans un plan perpendiculaire à l'axe. Ils sont naturellement perpendiculaires entre eux, ce qui permet d'écrire de façon simple le moment cinétique d'un élément m_i :

$$L_{0,i}^z = r_i m_i v_i = r_i m_i \omega r_i = \omega m_i r_i^2$$

Le moment cinétique total du corps sera la somme:

$$L_0^z = \sum \omega m_i r_i^2 = \omega \sum m_i r_i^2 = I_0 \omega$$

Moralité:

Moment de force nul \Leftrightarrow moment cinétique constant $\Leftrightarrow I_0 \omega = \text{const.}$

... à méditer...

Exemples:

- Une patineuse tournoie de plus en plus vite sur elle-même. Elle diminue ainsi son moment d'inertie ce qui lui fait augmenter sa vitesse angulaire puisque le produit reste constant.

- Un chat retombe sur ses pattes. Lors de sa chute, il fait tourner sa queue dans un sens pour faire tourner le reste de son corps dans l'autre sens. Pas si bête !

- Un hélicoptère possède une deuxième hélice à l'arrière et tournant dans un plan vertical. Le rotor principal tournant dans sens a un moment cinétique qu'il faut compenser, sinon toute la carlingue de l'appareil tournerait dans l'autre sens.

- Une étoile s'effondre sur elle-même. Par suite de l'épuisement de son combustible nucléaire, sa pression interne diminue fortement et les forces de gravitation l'emportent. Comme initialement elle tournait lentement sur elle-même, sa vitesse de rotation peut devenir extrêmement rapide après le dramatique effondrement. C'est ce qui s'est produit pour les pulsars, entre autres.

- etc..., comme s'asseoir sur une chaise de bureau pivotante, de se faire tourner jambes et bras écartés, et même lestés, puis de les ramener vers soi.

Exemple de calcul

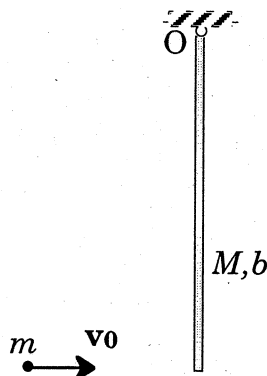


Fig. 19

Un projectile ponctuel de masse m vient percuter à la vitesse v_0 une barre mince homogène de masse M et de longueur b initialement immobile et pouvant pivoter librement en O . Le projectile reste collé sur l'extrémité inférieure de la barre.

Quelle sera la vitesse de l'extrémité inférieure de la barre juste après le choc ?

Solution:

On considère le système formé de m et de M . Ce système ne subit pas de moment de force qui lui soit extérieur avant (1) et juste après le choc (2). Le moment cinétique total est donc conservé.

Avant le choc, il n'y a que le moment cinétique du projectile: $L^z_o(1) = mv_0b$.

Après le choc, la barre lestée acquiert une vitesse angulaire à laquelle correspond une vitesse $v_1 = \omega_1 b$ de l'extrémité inférieure; le moment cinétique du système est, juste après le choc: $L^z_o(2) = I_o \omega_1$ où I_o est le moment d'inertie du système, c-à-d $I_o(\text{barre}) + mb^2 = Mb^2/3 + mb^2$. L'égalité des moments cinétiques conduit à :

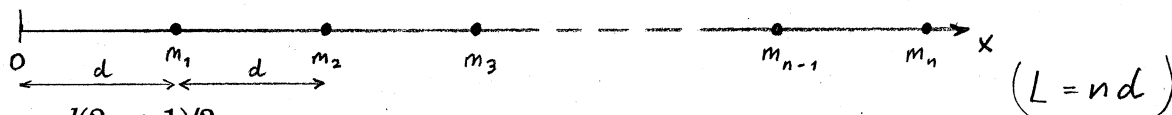
$$mv_0b = \left(M \frac{b^2}{3} + mb^2 \right) \frac{v_1}{b} \Rightarrow v_1 = \frac{3m}{3m + M} v_0$$

1. Un corps rond roule sans glissement sur une surface plane. La vitesse v_C de son centre C est constante. On mesure la vitesse d'un point A de la circonférence et on trouve que $v_A = 1,7 v_C$.

Déterminer les deux positions possibles de ce point en le repérant par l'angle ϕ que fait le rayon CA avec la surface de roulement.

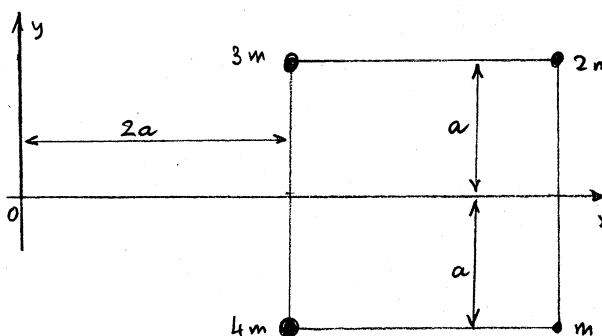
Rép: $26,4^\circ$ et $153,6^\circ$.

2. Sur une tige de longueur L et de masse négligeable sont alignées des masses ponctuelles également espacées: $m_1 = m, m_2 = 2m, m_3 = 3m, \dots, m_n = nm$. Déterminer la position du centre de masse du système. (Indic: TN p. 93).



Rép: $x_G = d(2n + 1)/3$.

3. Quatre masses inégales sont fixées aux sommets d'un carré de côté $2a$. Trouver la position du centre de masse. Pour cela, disposer un repère Oxy , ce n'est ici qu'une proposition.

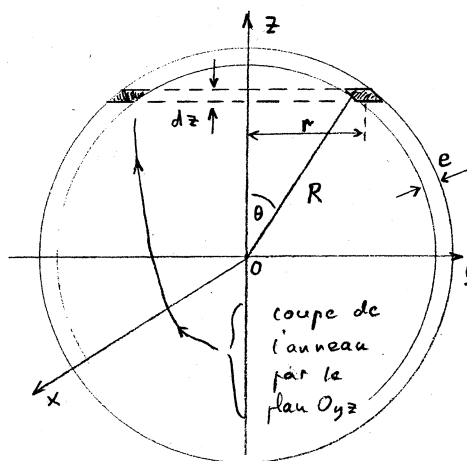


Rép: $G(2,6a ; 0)$

4. Calculer le moment d'inertie d'une sphère de rayon R et de masse m : Elle est creuse et l'épaisseur e de la matière qui la constitue est faible vis à vis de R . Elle est susceptible de tourner autour de l'axe z .

Le problème est moins simple que pour une sphère pleine. On décompose naturellement la sphère en anneaux de rayons $0 \leq r \leq R$ et on exprime l'élément de volume (ou de masse) correspondant à un anneau. On intègre ensuite les $r^2 dm$, ce qui n'est non plus pas immédiat.

Le résultat est: $I = (2/3)mR^2$.



5. Du haut d'un plan incliné on fait partir sans vitesse initiale deux corps solides. L'un glisse sans frottements et l'autre, qui est un corps rond, roule sans glisser. L'un des deux arrive au bas du plan avec une vitesse qui est racine de deux fois plus grande que l'autre.

Lequel ? Et que peut-on dire du corps rond ?

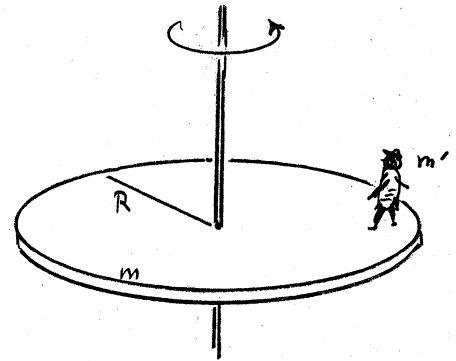
6. Une tige mince de longueur b et de masse m est fixée par un pivot O à l'une de ses extrémités. Elle est tenue horizontalement puis lâchée. Quelle est la vitesse maximum de son extrémité libre ? (Indic.: utiliser Steiner).

Rép: $(3gh)^{1/2}$.

7. Un disque de grandes dimensions (masse m , rayon R), horizontal, est capable de tourner sans frottements notables autour de son axe de symétrie (vertical). Un personnage (point matériel de masse m') se tient sur la circonférence du disque, en $r = R$ lorsque celui-ci tourne à ω_1 . Le personnage s'approche alors radialement de l'axe pendant la rotation.

Quel doit être le rapport m'/m , lorsque m' est en $r = 0$, pour que $\omega_2 = 2\omega_1$?

Rép: $1/2$.



8. Une tige mince (masse m , longueur b) est suspendue, immobile, par une de ses extrémités (point de rotation O). Un projectile de masse m' ($\ll m$) est lancé horizontalement et vient percuter élastiquement l'extrémité inférieure de la tige.

Quel doit être la vitesse minimum de m' pour que la tige puisse faire un tour autour de l'axe horizontal passant par O ? Les frottements sont négligés.

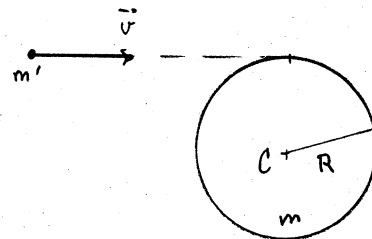
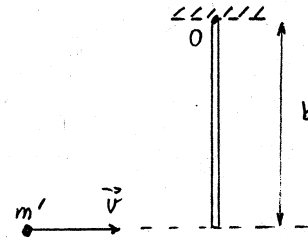
Rép: $(m^2gb/6m'^2)^{1/2}$.

9. Ce projectile (masse $m' \ll m$) est maintenant lancé dans la direction d'un disque (cylindre plein, masse m , rayon R) initialement immobile et pouvant tourner librement autour de son axe de symétrie. Le projectile arrivant tangentiellement au disque, il y reste fiché sur la circonférence, ce qui met le disque en rotation.

a) Calculer cette vitesse angulaire en fonction de m , m' , R et de la vitesse initiale de m' .

b) Examiner la conservation (ou la non-) de l'énergie avant et après le choc.

Rép: a) $m'v/\{R(m' + m/2)\}$



10. Soit une étoile, immense sphère qui tourne sur elle-même; elle a un rayon R_1 , une masse m et une vitesse angulaire de rotation ω_1 . A la suite de l'épuisement de son combustible nucléaire, sa pression interne diminue dramatiquement et elle s'effondre sur elle-même pour atteindre un rayon R_2 mille fois plus faible.

a) Calculer sa nouvelle vitesse angulaire.

b) Montrer que si le moment cinétique est conservé, par contre l'énergie cinétique ne l'est pas du tout, qu'elle a diablement augmenté. De combien? Au détriment de quelle forme d'énergie?

Pour a): application au Soleil dont la période de rotation actuelle est de 25 j.

Rép: a) $\omega_2 = 10^6 \omega_1$; $T_{\text{Soleil}} = 2$ s; b) fact. 10^6 .

11. Une tige mince (masse m , longueur b) est maintenue par un pivot à l'une de ses extrémités (point O). Elle est tenue dans une position horizontale puis lâchée. Les frottements étant négligés, calculer:

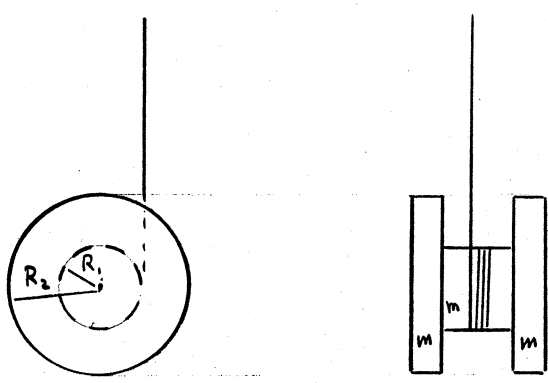
- a) l'accélération initiale de son extrémité libre;
- b) la vitesse de ce point lorsqu'il passe à la verticale.
- c) l'accélération et la vitesse de l'extrémité pour tout angle.

Rép: a) $a = 2g/3$; b) $v = (3gb)^{1/2}$.

12. Leyoyo. Il est lâché sans vitesse initiale. Calculer (frottements négligés):

- a) L'accélération de son cdg;
- b) sa vitesse après une hauteur h .
- c) le temps pour un aller et retour si la ficelle a une longueur l ($> h$).
- d) Le mouvement est périodique mais pas harmonique, pourquoi?

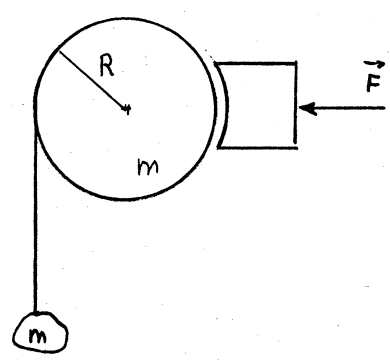
Rép: a) $a_G = 3g/(7/2 + (R_2/R_1)^2)$;



13. Une corde (masse négligeable) est enroulée sur un cylindre (plein, masse m , rayon R). Il peut tourner sans frottements notables autour de son axe. Un corps de masse m aussi est attaché à la corde et la déroule en faisant tourner le cylindre.

- a) Calculer l'accélération de la masse pendue.
- b) Partant sans vitesse initiale la masse descend une hauteur h , moment où le frein est appliqué contre le cylindre avec une force F constante. Le coefficient de frottement entre frein et cylindre est μ . Quelle devra être cette force pour arrêter le cylindre sur une hauteur h encore?

Rép: a) $a_G = 2g/3$; b) $F = 2mg/\mu$.



14. Un tube à paroi mince (masse m , rayon R) roule sans glissement sur un plan horizontal. Il est lancé avec une vitesse initiale v_0 . Les frottements secs représentent les 2 % du poids du cylindre.

Calculer la distance qu'il met pour s'immobiliser. Comparer cette distance à la distance d'arrêt d'un corps qui ne ferait que glisser, les frottements étant les mêmes.

Rép:

Solide: exercices supplémentaires

1. Une sphère pleine roule sans glisser et sans frottement le long d'un plan incliné faisant un angle β avec l'horizontale.

Calculer l'accélération de son centre de gravité G.

2. Un corps rond de rayon R roule sans glisser sur une surface plane; son centre C a une vitesse $v_c = 2$ m/s.

Quelles sont les vitesses, mesurées par un observateur fixe, des points A, B et D ?

3. Un cylindre plein (masse M , rayon R , centre G) peut tourner librement autour de son axe de symétrie qui est horizontal. Initialement, le cylindre est immobile; on dépose à son sommet une masse ponctuelle m qui y reste collée mais provoque une rotation du système.

a) Quelle est l'accélération tangentielle de m lorsqu'elle passe à la hauteur de G ?

b) Quelle est son accélération en ce même endroit ?

4. Deux cosmonautes de même masse $m = 120$ kg sont sortis de leur capsule et flottent dans l'espace. On les considérera comme deux points matériels. Ils se sont mutuellement attachés aux deux extrémités d'une corde qui est tendue et a initialement une longueur de 20 m. Le système qu'ils forment, eux et la corde, tourne avec une période de 180 s autour du centre de la corde. $180 \text{ s} = 3 \text{ min}$

Ils veulent se rapprocher l'un de l'autre en tirant chacun sur la corde. Lorsque la distance qui les sépare n'est plus que de 2 m, calculer:

a) la nouvelle période de rotation;

b) la nouvelle énergie cinétique de chacun; commentaire svp (est-elle conservée? a-t-elle augmenté ou diminué, et alors au profit ou au détriment de quelle énergie?);

c) la nouvelle force centripète qu'ils subissent chacun.

5. Une barre mince, (masse m , longueur b) est fixée par l'une de ses extrémités à un pivot O. La barre peut alors tourner librement dans un plan vertical, donc autour d'un axe horizontal passant par O.

Elle est initialement maintenue verticalement, son extrémité libre P au dessus de O, puis libérée sans vitesse initiale. Calculer la norme du vecteur accélération (totale) du point P :

a) au passage à l'horizontale (après 1/4 de tour)

b) au passage à la verticale (après 1/2 tour).