EQUATIONS ET PARABOLES

TE - CORRIGE

Exercice 1

Une équation quadratique de la forme $ax^2+bx+c=0$ n'admet aucune solution réelle si $\Delta = b^2-4ac < 0$.

Ici: $a=3$, $b=2$, $c=-4m+6$.

On a: $\Delta = b^2-4ac = 2^2-4\cdot 3\cdot(-4m+6) = 4-12(-4m+6) =$
$= 4+48m-72 = 48m-68$.

Ainsi $\Delta < 0 \Rightarrow 48m-68<0 \Rightarrow 48m<68 \Rightarrow m < \frac{68}{48} = \frac{17}{12}$.

$\Rightarrow$ il faut donc que $m < \frac{17}{12}$.

Exercice 2

Commençons par résoudre l'équation $-2x^2+7x-5=0$.

On a: $a=-2$, $b=7$ et $c=-5$;

$\Delta = b^2-4ac = 7^2-4\cdot(-2)\cdot(-5) = 49-40 = 9$; $\sqrt{\Delta} = 3$;

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7+3}{2\cdot(-2)} = \frac{-4}{-4} = 1$; $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7-3}{2\cdot(-2)} = \frac{-10}{-4} = \frac{5}{2}$.

Faisons maintenant un tableau de signe pour la parabole $y=-2x^2+7x-5$:

x		$\frac{5}{2}$		3	
$y=-2x^2+7x-5$	$-$	0	$+$	0	$-$

Ainsi $y<0$ si $x \in \left]-\infty; \frac{5}{2}\right[\cup \left]3;+\infty\right[$.

$\Rightarrow$ les solutions de l'inéquation sont $x \in \left]-\infty; \frac{5}{2}\right[\cup \left]3;+\infty\right[$.

Exercice 3

a) $9x^4 - 37x^2 + 4 = 0$: $a = 9$, $b = -37$, $c = 4$;

$\Delta = b^2 - 4ac = (-37)^2 - 4.9.4 = 1369 - 144 = 1225$; $\sqrt{\Delta} = 35$;

donc $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{37+35}{2.9} = \dfrac{72}{18} = 4$ et

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{37-35}{2.9} = \dfrac{2}{18} = \dfrac{1}{9}$.

Les solutions sont donc $x = 4$ et $x = \dfrac{1}{9}$.

b) $x^5 - 15x^3 - 16x = 0 \Rightarrow x(x^4 - 15x^2 - 16) = 0$

$\Rightarrow$ soit $x = 0$ ($1^{ère}$ solution), soit $x^4 - 15x^2 - 16 = 0$.

$x^4 - 15x^2 - 16 = 0$: on pose $y = x^2$; on obtient $y^2 - 15y - 16 = 0$;

on a : $a = 1$, $b = -15$ et $c = -16$;

$\Delta = b^2 - 4ac = (-15)^2 - 4.1.(-16) = 225 + 64 = 289$; $\sqrt{\Delta} = 17$;

ainsi $y_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{15+17}{2.1} = \dfrac{32}{2} = 16$ et

$y_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{15-17}{2.1} = \dfrac{-2}{2} = -1$;

avec $y_1 = 16$ et $y = x^2$, on obtient $x = 4$ et $x = -2$;

avec $y_1 = -1$ et $y = x^2$, il n'y a aucun x correspondant.

Les solutions sont donc $x = 0$, $x = 4$ et $x = -4$.

Exercice 4

a) Les coordonnées du sommet d'une parabole $y = ax^2 + bx + c$ sont données par $(x_S ; y_S)$ où $x_S = -\dfrac{b}{2a}$.

Ici $a = 1$, $b = -4$ et $c = 3$.

On a donc $x_S = -\dfrac{-4}{2.1} = \dfrac{4}{2} = 2$.

Avec $x_S = 2$, on a $y_S = x_S^2 - 4.x_S + 3 = 2^2 - 4.2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$.

Les coordonnées du sommet sont donc $(2 ; -1)$.

Les intersections de la parabole avec l'axe des abscisses sont données par $(x_{1,2} ; 0)$, où $x_{1,2}$ sont les solutions de $x^2 - 4x + 3 = 0$ (si elles existent).

$x^2 - 4x + 3 = 0$: on a : $a = 1$, $b = -4$ et $c = 3$;

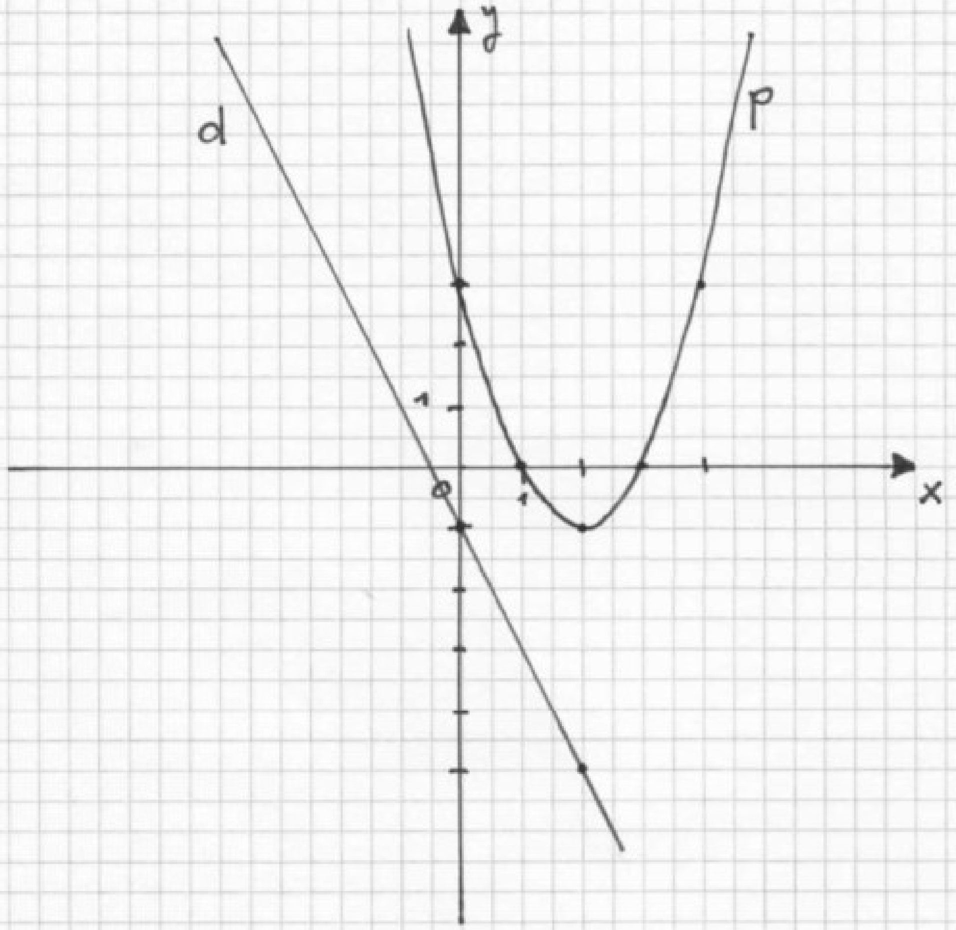
$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4.1.3 = 16 - 12 = 4$; $\sqrt{\Delta} = 2$;

donc $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4+2}{2.1} = \dfrac{6}{2} = 3$ et

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4-2}{2.1} = \dfrac{2}{2} = 1$.

Les intersections de la parabole avec l'axe des abscisses sont donc $\underline{(3;0) \text{ et } (1;0)}$.

b)



c) Cherchons si la parabole et la droite ont un ou des points d'intersection.

Pour cela, on cherche la ou les solutions du système : $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = -2x - 1. \end{cases}$

On doit avoir $x^2 - 4x + 3 = -2x - 1$, i.e. $x^2 - 2x + 4 = 0$.

$x^2 - 2x + 4 = 0$: on a $a = 1$, $b = -2$ et $c = 4$;

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 4 - 16 < 0.$$

Ainsi $x^2 - 2x + 4 = 0$ n'a pas de solution.

Le système d'équation n'a donc pas de solution non plus, et la droite ne coupe pas la parabole.

d) La tangente t est parallèle à d. Elle a donc la même pente que d.

La pente de d : $y = -2x - 1$ est -2 (coefficient de x).

Ainsi la pente de t est aussi -2.

On a donc t : $y = -2x + k$, où k est tel que t et p n'ont qu'un point d'intersection (puisque t doit être tangente à p).

On cherche donc k tel que le système $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = -2x + k \end{cases}$ n'a qu'une solution.

L'équation $x^2-4x+3=-2x+k$ ne doit donc avoir qu'une solution.

$x^2-4x+3=-2x+k \Rightarrow x^2-2x+3-k=0$;

on a: $a=1, b=-2$ et $c=3-k$;

$\Delta=b^2-4ac$; $(-2)^2-4\cdot1\cdot(3-k)=4-12+4k=4k-8$.

Une seule solution signifie $\Delta=0 \Rightarrow 4k-8=0 \Rightarrow 4k=8 \Rightarrow k=2$.

L'équation de la tangente est donc $\underline{\underline{t: y=-2x+2}}$.

e) On doit chercher la solution de $\begin{cases} y=x^2-4x+3 \\ y=-2x+2. \end{cases}$

On a: $x^2-4x+3=-2x+2 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0$

$\Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1.$

Avec $x=1$, on a $y=-2\cdot1+2=0$.

Le point de tangence est donc $\underline{\underline{(1;0)}}$.