2. $g(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$

1) Domaine de définition : il faut que $x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$
$\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Image du domaine de définition: $g(D) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (voir graphique).

Parité: $g(-x) = \dfrac{-x+2}{-x-3} \neq \pm g(x) \Rightarrow g$ n'est ni paire ni impaire.

2) Intersections avec l'axe x: on pose $y=0 \Rightarrow \dfrac{x+2}{x-3} = 0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$
$\Rightarrow (-2;0)$.

Intersection avec l'axe y: on pose $x=0 \Rightarrow y = \dfrac{2}{-3} = -\dfrac{2}{3} \Rightarrow (0; -\dfrac{2}{3})$.

3) $x=3$ est un exclu $\Rightarrow x=3$ est une asymptote verticale.

$x \underset{<}{\rightarrow} 3 \Rightarrow \dfrac{x+2}{x-3} \rightarrow -\infty$.

$x \underset{>}{\rightarrow} 3 \Rightarrow \dfrac{x+2}{x-3} \rightarrow +\infty$.

Si $x \rightarrow +\infty$, $\dfrac{x+2}{x-3} = \dfrac{x(1+\frac{2}{x})}{x(1-\frac{3}{x})} = \dfrac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}} \rightarrow \dfrac{1}{1} = 1$ avec des valeurs supérieures.

Si $x \rightarrow -\infty$, $\dfrac{x+2}{x-3} = \dfrac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}} \rightarrow \dfrac{1}{1} = 1$ avec des valeurs inférieures.

$\Rightarrow y=1$ est asymptote horizontale.

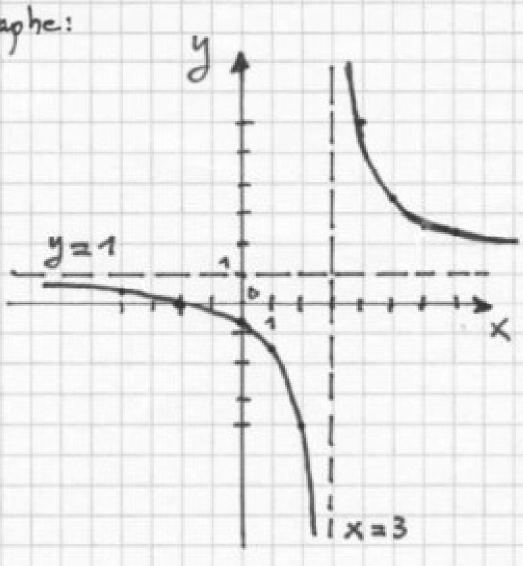
4) Tableau des signes:

x		-2		3	
$g(x)$	$+$	0	$-$	//////	$+$

5) Tableau de valeurs

x	1	2	-4	4	5	6	7
$g(x)$	-1,5	-4	0,3	6	3,5	2,7	2,25

6) Graphe:



3. $h(x) = \dfrac{x-3}{x^2+x-2}$

1) Domaine de définition: il faut que $x^2+x-2 \neq 0$; résolvons $x^2+x-2=0$:

on a $a=1$, $b=1$ et $c=-2$; $\Delta = b^2-4ac = 1^2-4.1.(-2) = 9$; $\sqrt{\Delta}=3$;

donc $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+3}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-3}{2} = -2$;

$\Longrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-2;1\}$

Image du domaine de définition : $h(D) =]-\infty; 0{,}0\bar{5}] \cup [1{,}5; +\infty[$ (voir graphique).

Parité: $h(-x) = \dfrac{-x-3}{(-x)^2+(-x)-2} = \dfrac{-x-3}{x^2-x-2} \neq \pm h(x) \Rightarrow$ h n'est ni paire, ni impaire.

2) Intersections avec l'axe x: on pose $y=0 \Rightarrow \dfrac{x-3}{x^2+x-2} = 0 \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3$

$\Rightarrow (3;0)$.

Intersection avec l'axe y: on pose $x=0 \Rightarrow y = \dfrac{-3}{-2} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow (0;\frac{3}{2})$.

3) $x=-2$ est un exclu $\Rightarrow$ $x=-2$ est une asymptote verticale.

Si $x \underset{<}{\to} -2$, $\dfrac{x-3}{x^2+x-2} \to -\infty$.

Si $x \underset{>}{\to} -2$, $\dfrac{x-3}{x^2+x-2} \to +\infty$.

$x=1$ est un exclu $\Rightarrow$ $x=1$ est une asymptote verticale.

Si $x \underset{<}{\to} 1$, $\dfrac{x-3}{x^2+x-2} \to +\infty$.

Si $x \underset{>}{\to} 1$, $\dfrac{x-3}{x^2+x-2} \to -\infty$.

Si $x \to +\infty$, $\dfrac{x-3}{x^2+x-2} = \dfrac{x(1-\frac{3}{x})}{x(x+1-\frac{2}{x})} = \dfrac{1-\frac{3}{x}}{x+1-\frac{2}{x}} \to \dfrac{1}{+\infty} = 0_+$.

Si $x \to -\infty$, $\dfrac{x-3}{x^2+x-2} = \dfrac{1-\frac{3}{x}}{x+1-\frac{2}{x}} \to \dfrac{1}{-\infty} = 0_-$.

$\Rightarrow y=0$ est une asymptote horizontale.

4) <u>Tableau des signes:</u>

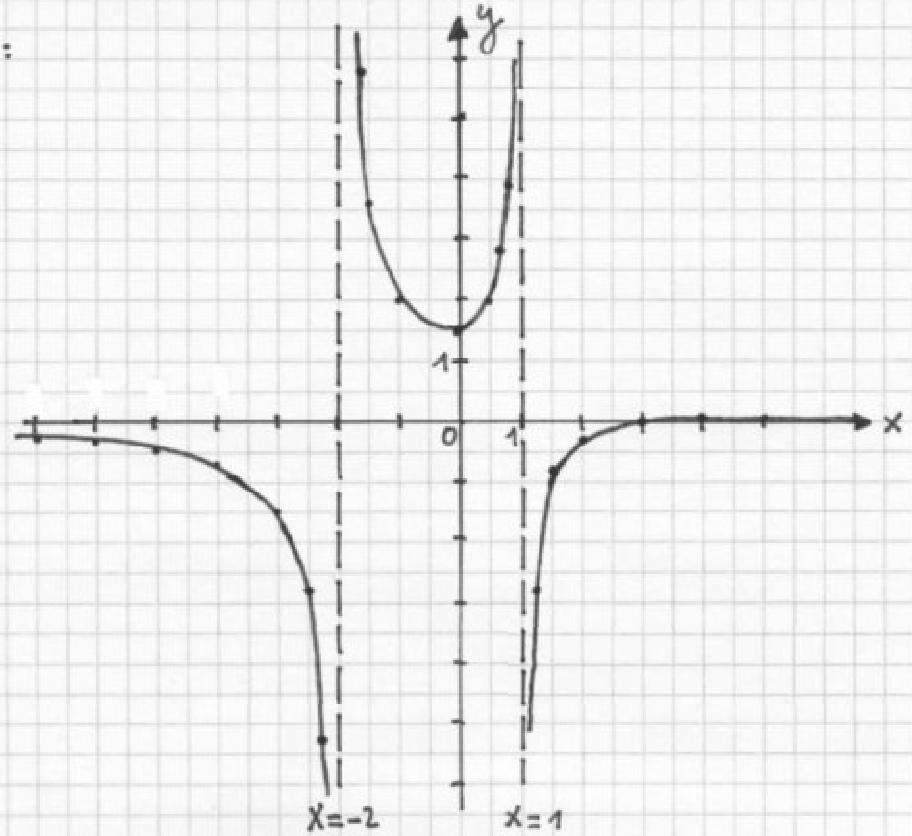
x		-2		1		3	
$h(x)$	$-$	////	$+$	////	$-$	0	$+$

5) <u>Tableau de valeurs:</u>

x	-7	-6	-5	-4	-3	$-2{,}5$	$-2{,}3$	$-1{,}7$
$h(x)$	$-0{,}25$	$-0{,}32$	$-0{,}44$	$-0{,}7$	$-1{,}5$	$-2{,}86$	$-5{,}36$	$5{,}8$

x	$-1{,}5$	-1	0	$0{,}5$	$0{,}7$	$0{,}8$	$1{,}2$	$1{,}5$	2
$h(x)$	$3{,}6$	2	$1{,}5$	2	$2{,}84$	$3{,}93$	$-2{,}81$	$-0{,}86$	$-0{,}25$

6) Graphe:



4. $i(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$

1) Domaine de définition : il faut que $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Image du domaine de définition: $i(D) =]-\infty;-10] \cup [-0{,}1;+\infty[$ (voir graphique).
Parité: $i(-x) = \dfrac{(-x)^2-3(-x)+2}{-x+1} = \dfrac{x^2+3x+2}{-x+1} \neq \pm i(x) \Rightarrow$ i n'est ni paire, ni impaire.

2) Intersections avec l'axe x: on pose $y=0 \Rightarrow \dfrac{x^2-3x+2}{x+1} = 0 \Rightarrow x^2-3x+2=0$:
on a $a=1$, $b=-3$ et $c=2$;
$\Delta = b^2-4ac = (-3)^2-4\cdot1\cdot2 = 9-8 = 1$; $\sqrt{\Delta} = 1$;
on trouve $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+1}{2\cdot1} = \dfrac{4}{2} = 2$ et
$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-1}{2\cdot1} = \dfrac{2}{2} = 1$.
$\Rightarrow (1;0)$ et $(2;0)$.
Intersection avec l'axe y: on pose $x=0 \Rightarrow y = \dfrac{2}{1} = 2 \Rightarrow (0;2)$.

3) $x=-1$ est un exclu $\Rightarrow x=-1$ est une asymptote verticale.
Si $x \underset{<}{\longrightarrow} -1$, $\dfrac{x^2-3x+2}{x+1} \longrightarrow \dfrac{6}{0_-} = -\infty$.
Si $x \underset{>}{\longrightarrow} -1$, $\dfrac{x^2-3x+2}{x+1} \longrightarrow \dfrac{6}{0_+} = +\infty$.

Effectuons la division euclidienne de x^2-3x+1 par $x+1$:

$$\begin{array}{r|l} x^2-3x+1 & x+1 \\ \cline{2-2} \underline{-(x^2+x)} & x-4 \\ -4x+1 & \\ \underline{-(-4x-4)} & \\ 5 & \end{array}$$

On a ainsi: $\frac{x^2-3x+1}{x+1} = x-4+\frac{1}{x+1}$.

Comme $\frac{1}{x+1} \to 0$ si $x \to \pm\infty$, on a que $y=x-4$ est une asymptote oblique.

Si $x \to +\infty$, $\frac{1}{x+1} \to 0_+$ et $\frac{x^2-3x+1}{x+1} \to x-4$ avec des valeurs supérieures.

Si $x \to -\infty$, $\frac{1}{x+1} \to 0_-$ et $\frac{x^2-3x+1}{x+1} \to x-4$ avec des valeurs négatives.

4) Tableau des signes:

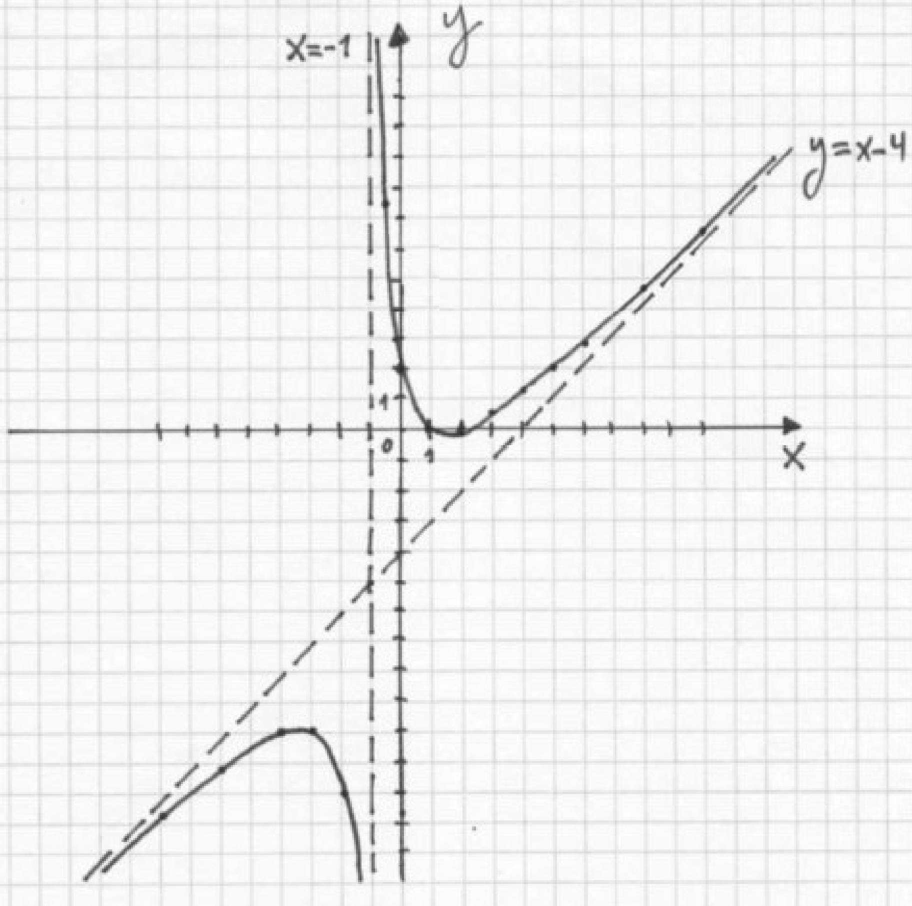
x		-1		1		2	
$i(x)$	$-$		$+$	0	$-$	0	$+$

5) Tableau de valeurs:

x	-8	-6	-4	-3	-2	$-0,5$	0	1	2	3	4
$i(x)$	$-12,86$	$-11,2$	-10	-10	-12	$7,5$	2	0	0	$0,5$	$1,2$

x	5	6	8	10
$i(x)$	2	$2,86$	$4,67$	$6,55$

6) Graphe:



5. $j(x) = \dfrac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2}$

1) Domaine de définition : on doit avoir $(x^2-4)^2 \neq 0 \Rightarrow x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 4$

$\Rightarrow x \neq \pm 2 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$.

Image du domaine de définition : $j(D) = \left]-\infty;1\right[$ (voir graphique).

Parité : $j(-x) = \dfrac{(-x)^4 - 12\cdot(-x)^2}{((-x)^2-4)^2} = \dfrac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2} = j(x) \Rightarrow j$ est paire.

2) Intersections avec l'axe x : on pose $y = 0 \Rightarrow \dfrac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2} = 0$

$\Rightarrow x^4 - 12x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2-12) = 0$

$\Rightarrow$ soit $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

soit $x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \pm\sqrt{12}$

$\Rightarrow (0;0), (\sqrt{12};0), (-\sqrt{12};0)$.

Intersection avec l'axe y : on pose $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0;0)$.

3) $x=-2$ est un exclu $\Rightarrow x = -2$ est une asymptote verticale.

Si $x \underset{<}{\longrightarrow} -2$, $\dfrac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2} \longrightarrow \dfrac{-32}{0+} \longrightarrow -\infty$.

Si $x \underset{>}{\longrightarrow} -2$, $\dfrac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2} \longrightarrow \dfrac{-32}{0+} \longrightarrow -\infty$.

$x = 2$ est un exclu $\Rightarrow x = 2$ est une asymptote verticale.

Si $x \underset{<}{\longrightarrow} 2$, $\dfrac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2} \longrightarrow \dfrac{-32}{0+} \longrightarrow -\infty$.

Si $x \underset{>}{\longrightarrow} 2$, $\dfrac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2} \longrightarrow \dfrac{-32}{0+} \longrightarrow -\infty$.

Si $x \longrightarrow +\infty$, $\dfrac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2} = \dfrac{x^4-12x^2}{x^4-8x^2+16} = \dfrac{x^4\left(1-\frac{12}{x^2}\right)}{x^4\left(1-\frac{8}{x^2}+\frac{16}{x^4}\right)} =$

$= \dfrac{1-\frac{12}{x^2}}{1-\frac{8}{x^2}+\frac{16}{x^4}} \longrightarrow \dfrac{1}{1} = 1$.

Si $x \longrightarrow -\infty$, $\dfrac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2} = \dfrac{1-\frac{12}{x^2}}{1-\frac{8}{x^2}+\frac{16}{x^4}} \longrightarrow \dfrac{1}{1} = 1$.

$\Rightarrow y = 1$ est une asymptote horizontale.

4) Tableau des signes :

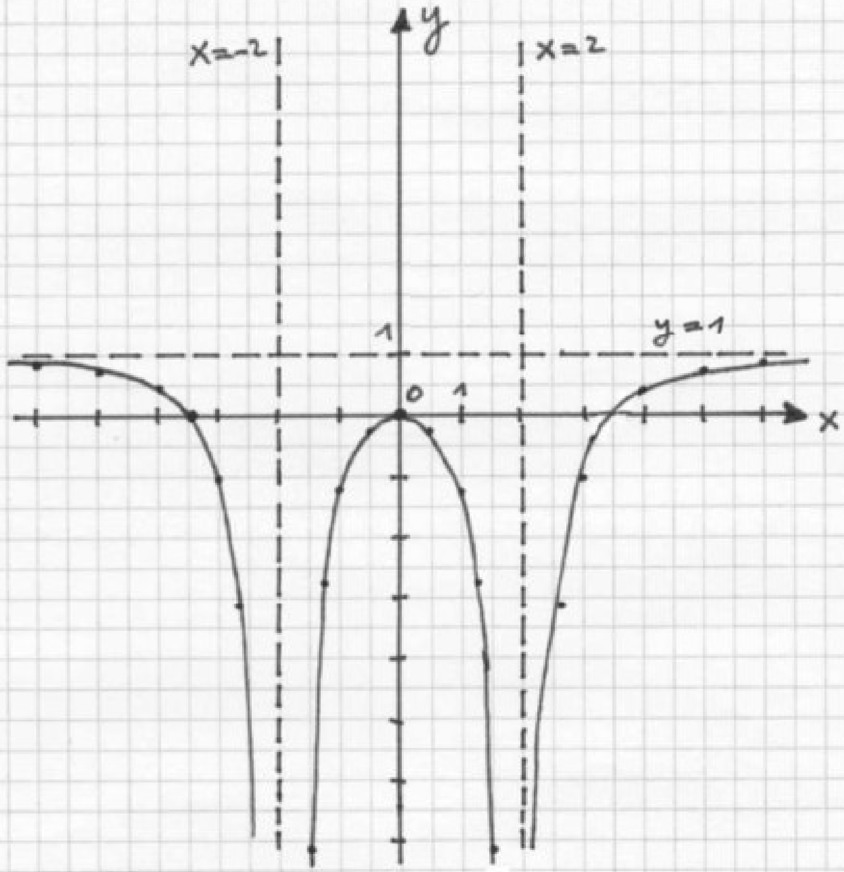
x		$-\sqrt{12}$		-2		0		2		$\sqrt{12}$	
$j(x)$	+	0	−	////	−	0	−	////	−	0	+

5) Tableau de valeurs:

x	-6	-5	-4	-3	$-2{,}7$	$-1{,}5$	$-1{,}25$
$j(x)$	$0{,}84$	$0{,}74$	$0{,}44$	$-1{,}08$	$-3{,}17$	$-7{,}16$	$-2{,}75$

x	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}25$	$1{,}5$	...
$j(x)$	$-1{,}22$	$-0{,}21$	0	$-0{,}21$	$-1{,}22$	$-2{,}75$	$-7{,}16$	...

6) Graphe:



6. $k(x) = \frac{2}{x^2+1}$

1) Domaine de définition : comme $x^2+1 > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $D = \mathbb{R}$.
Image du domaine de définition: $k(D) =]0;2]$ (voir graphique).
Parité: $k(-x) = \frac{2}{(-x)^2+1} = \frac{2}{x^2+1} = k(x) \Rightarrow k$ est paire.

2) Intersections avec l'axe x : on pose $y = 0 \Rightarrow \frac{2}{x^2+1} = 0 \Rightarrow 2 = 0$ exclu
$\Rightarrow$ il n'y a pas d'intersection avec l'axe x.
Intersection avec l'axe y: on pose $x = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow (0;2)$.

3) Il n'y a pas d'exclu et, donc, pas d'asymptote verticale.
Si $x \to +\infty$, $\frac{2}{x^2+1} \to 0_+$.
Si $x \to -\infty$, $\frac{2}{x^2+1} \to 0_+$.
Donc, $y = 0$ est une asymptote horizontale.

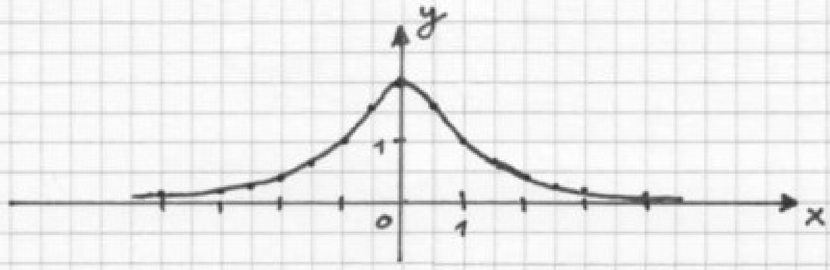
4) Tableau de signes:

x	
$k(x)$	$+$

5) Tableau de valeurs:

x	$\pm 0,5$	± 1	$\pm 1,5$	± 2	$\pm 2,5$	± 3	± 4
$k(x)$	1,6	1	0,62	0,4	0,28	0,2	0,12

6) Graphe:



7. $\ell(x) = 2|x^2-4| + 6x$

On a: $|x^2-4| = \begin{cases} x^2-4 & \text{si } x^2-4 \geqslant 0 \\ -(x^2-4) & \text{si } x^2-4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2-4 & \text{si } x^2 \geqslant 4 \\ -x^2+4 & \text{si } x^2 < 4 \end{cases} =$

$$= \begin{cases} x^2-4 & \text{si } x \leqslant -2 \\ -x^2+4 & \text{si } -2 < x < 2 \\ x^2-4 & \text{si } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Ainsi $\ell(x) = \begin{cases} 2(x^2-4)+6x & \text{si } x \leqslant -2 \\ 2(-x^2+4)+6x & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2(x^2-4)+6x & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases} = \begin{cases} 2x^2+6x-8 & \text{si } x \leqslant -2 \\ -2x^2+6x+8 & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x^2+6x-8 & \text{si } x \geqslant 2. \end{cases}$

1) Domaine de définition: $D = \mathbb{R}$.

Image du domaine de définition: $\ell(D) = [-12; +\infty[$ (voir graphique).

Parité: $\ell(-x) = 2|(-x)^2-4| + 6\cdot(-x) = 2|x^2-4| - 6x \neq \pm\, \ell(x)$

$\Rightarrow$ ℓ n'est ni paire, ni impaire.

2) Intersections avec l'axe x: on pose $y=0$:

si $x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 2$: $2x^2+6x-8=0 \Rightarrow x^2+3x-4=0$:

on a $a=1$, $b=3$ et $c=-4$;

$\Delta = b^2-4ac = 3^2-4\cdot1\cdot(-4) = 9+16 = 25$; $\sqrt{\Delta}=5$;

ainsi $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3+5}{2\cdot1} = \dfrac{2}{2} = 1$ et

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3-5}{2\cdot1} = \dfrac{-8}{2} = -4$;

or, $x_1 = 1$ ne satisfait pas à $x \leqslant -2$ et $x \geqslant 2$;

au contraire $x_1 = -4$ satisfait à $x \leqslant -2$;

$\Rightarrow$ on a le point $(-4; 0)$;

Si $-2<x<2$: $-2x^2+6x+8=0 \Longrightarrow -x^2+3x+4=0$:

on a $a=-1$, $b=3$ et $c=4$;

$\Delta = b^2-4ac = 3^2-4\cdot(-1)\cdot 4 = 9+16 = 25$; $\sqrt{\Delta}=5$;

ainsi $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+5}{2\cdot(-1)} = \frac{2}{-2} = -1$ et

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-5}{2\cdot(-1)} = \frac{-8}{-2} = 4$;

or, $x_2 = 4$ ne satisfait pas à $-2<x<2$; $x_1=-1$ si ;

$\Longrightarrow$ on a le point $(-1;0)$.

Intersection avec l'axe y : on pose $x=0 \Longrightarrow y = -2x^2+6x+8 = 8 \Longrightarrow (0;8)$.

3) Il n'y a pas d'exclu et, donc, il n'y a pas d'asymptote verticale.

Si $x \longrightarrow +\infty$, $2|x^2-4|+6x \longrightarrow +\infty$.

Si $x \longrightarrow -\infty$, $2|x^2-4|+6x = 2x^2+6x-8 \longrightarrow +\infty$.

Il n'y a donc pas d'asymptote horizontale non plus.

4) Tableau des signes :

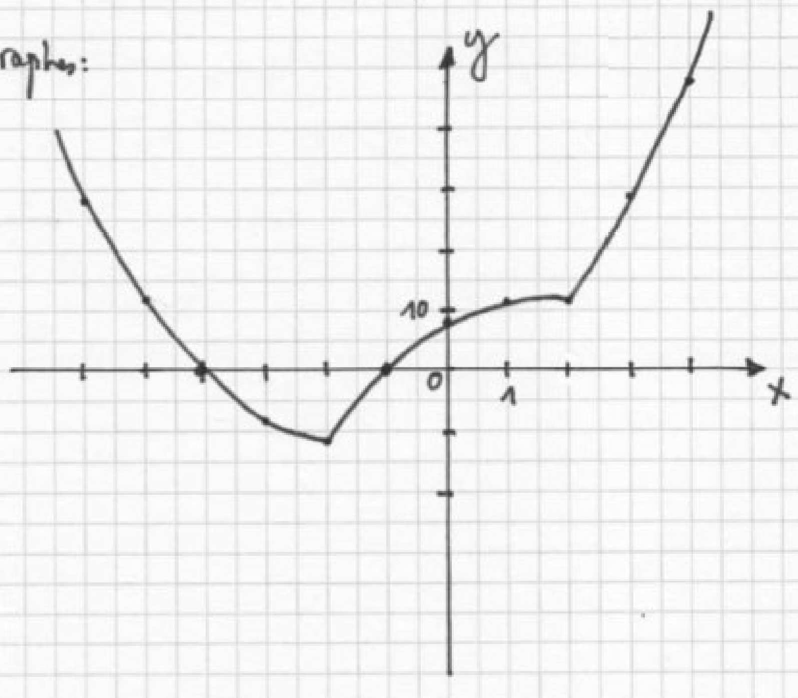
x		-4		-2		-1		2	
$\ell(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

5) Tableau de valeurs :

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
$\ell(x)$	28	12	0	-8	-12	0	8	12

x	2	3	4
$\ell(x)$	12	28	48

6) Graphes :



8. $m(x)=\dfrac{2x}{|x-1|}$.

1) Domaine de définition : on doit avoir $|x-1|\neq 0 \Rightarrow x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 1$

$\Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

m s'écrit alors :

$$m(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{x-1} & \text{si } x-1\geqslant 0\\ -\dfrac{2x}{x-1} & \text{si } x-1<0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2x}{x-1} & \text{si } x\geqslant 1\\ -\dfrac{2x}{x-1} & \text{si } x<1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2x}{x-1} & \text{si } x>1\\ -\dfrac{2x}{x-1} & \text{si } x<1.\end{cases}$$

Image du domaine de définition : $m(D)=]-2;+\infty[$ (voir graphique)

Parité : $m(-x)=\dfrac{2(-x)}{|-x-1|}=\dfrac{-2x}{|x+1|}\neq\pm m(x)\Rightarrow$ m n'est ni paire ni impaire.

2) Intersections avec l'axe x : on pose $y=0\Rightarrow\dfrac{2x}{|x-1|}=0\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0$

$\Rightarrow (0;0)$.

Intersection avec l'axe y : on pose $x=0\Rightarrow y=0\Rightarrow(0;0)$.

3) $x=1$ est un exclu $\Rightarrow x=1$ est une asymptote verticale.

Si $x\underset{>}{\longrightarrow}1$, $m(x)=\dfrac{2x}{x-1}=\dfrac{x\cdot 2}{x(1-\frac{1}{x})}=\dfrac{2}{1-\frac{1}{x}}\longrightarrow+\infty$.

Si $x\underset{<}{\longrightarrow}1$, $m(x)=-\dfrac{2}{1-\frac{1}{x}}\longrightarrow-(-\infty)=+\infty$.

Si $x\longrightarrow+\infty$, $\dfrac{2x}{x-1}=\dfrac{2}{1-\frac{1}{x}}\longrightarrow 2_+$.

Si $x\longrightarrow-\infty$, $-\dfrac{2x}{x-1}=-\dfrac{2}{1-\frac{1}{x}}\longrightarrow -2_+$.

Donc $y=2$ est une asymptote horizontale à droite et $y=-2$ à gauche.

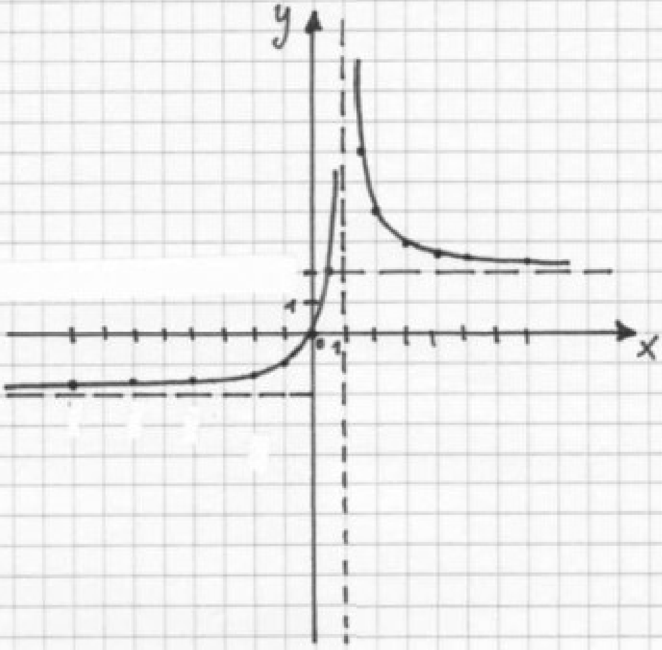
4) Tableau de signes :

x		0		1	
$m(x)$	$-$	0	$+$	‖	$+$

5) Tableau de valeurs :

x	-8	-6	-4	-2	-1	0,5	1,5	2
$m(x)$	$-1{,}78$	$-1{,}71$	$-1{,}6$	$-1{,}33$	-1	2	6	4

x	3	4	5	7
$m(x)$	3	2,67	2,5	2,33



9. $n(x) = x^2 - 2|x|$.

On a: $n(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 + 2x & \text{si } x < 0. \end{cases}$

1) Domaine de définition: $D = \mathbb{R}$

Image du domaine de définition: $n(D) = [-1; +\infty[$ (voir graphique).

Parité: $n(-x) = (-x)^2 - 2|-x| = x^2 - 2|x| = n(x) \Rightarrow n$ est paire.

2) Intersections avec l'axe x: on pose $y = 0$;

si $x \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$

$\Rightarrow$ soit $x = 0$, soit $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ (≥ 0);

si $x < 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0$

$\Rightarrow$ soit $x = 0$, soit $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ (< 0);

$\Rightarrow (0;0), (2;0), (-2;0)$.

Intersection avec l'axe y: on pose $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0;0)$.

3) Il n'y a pas d'exclu $\Rightarrow$ il n'y a pas d'asymptote verticale.

Si $x \to +\infty$, $n(x) = x^2 - 2x = x(x-2) \to +\infty \cdot +\infty = +\infty$.

Si $x \to -\infty$, $n(x) = x^2 + 2x = x(x+2) \to -\infty \cdot -\infty = +\infty$.

$\Rightarrow$ Il n'y a pas d'asymptote horizontale et, de plus, pas d'asymptote verticale de la forme $y = mx + h$.

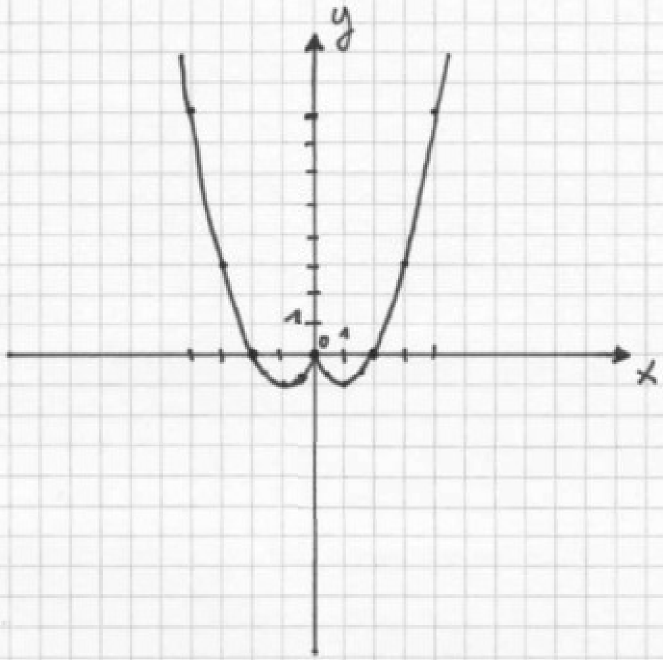
4) Tableau des signes:

x		-2		0		2	
$n(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

5) Tableau de valeurs :

x	± 4	± 3	± 2	± 1	0	$\pm 0{,}5$	$\pm 1{,}5$
$n(x)$	8	3	0	-1	0	$-0{,}75$	$-0{,}75$

6) Graphe :



10. $o(x) = \sqrt{1-x^2}$.

1) Domaine de définition : on doit avoir $1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow D = [-1 ; 1]$.

Image du domaine de définition : $o(D) = [0 ; 1]$ (voir graphique).

Parité : $o(-x) = \sqrt{1-(-x)^2} = \sqrt{1-x^2} = o(x) \Rightarrow o$ est paire.

2) Si $x \to -1$, $o(x) \to 0$.

Si $x \to 1$, $o(x) \to 0$.

$\Rightarrow$ o n'a aucune asymptote.

3) Intersections avec l'axe x : on pose $y = 0 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = 0 \Rightarrow 1-x^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -1$

$\Rightarrow (1 ; 0)$ et $(-1 ; 0)$.

Intersection avec l'axe y : on pose $x = 0 \Rightarrow o(x) = \sqrt{1} = 1 \Rightarrow (0 ; 1)$

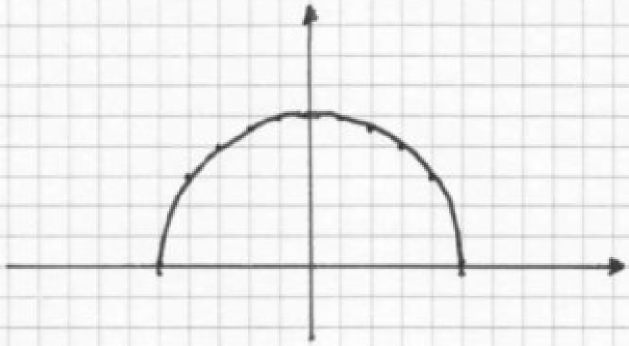
4) Tableau des signes :

x		-1		1	
$o(x)$		0	$+$	0	

5) Tableau de valeurs :

x	± 1	$\pm 0{,}8$	$\pm 0{,}6$	$\pm 0{,}4$	$\pm 0{,}2$
$o(x)$	0	$0{,}6$	$0{,}8$	$0{,}92$	$0{,}98$

6) Graphe:



Exercice 100

Intersections de la droite et du graphe de la fonction f :

$$\frac{x-3}{x^2+x-2} = k \Rightarrow x-3 = k(x^2+x-2) \Rightarrow x-3 = kx^2+kx-2k$$

$$\Rightarrow kx^2+kx-x+3-2k = 0 \Rightarrow kx^2+(k-1)x+3-2k = 0.$$

C'est une équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=k$, $b=k-1$ et $c=3-2k$.

Pour qu'il n'y ait qu'un seul point d'intersection, il faut que $\Delta = b^2-4ac = 0$.

On a : $\Delta = b^2-4ac = (k-1)^2-4\cdot k\cdot(3-2k) = k^2-2k+1-12k+8k^2 =$
$= 9k^2-14k+1.$

$\Delta = 0 \Rightarrow 9k^2-14k+1 = 0$: on a $A=9$, $B=-14$ et $C=1$;

$\Delta' = B^2-4AC = (-14)^2-4\cdot 9\cdot 1 = 196-36 = 160$;

$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{160} = \sqrt{16\cdot 10} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{10} = 4\sqrt{10}$;

ainsi $k_1 = \frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{14+4\sqrt{10}}{2\cdot 9} = \frac{14+4\sqrt{10}}{18} = \frac{7+2\sqrt{10}}{9}$

et $k_2 = \frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{14-4\sqrt{10}}{2\cdot 9} = \frac{14-4\sqrt{10}}{18} = \frac{7-2\sqrt{10}}{9}$.

Il n'y a donc qu'une intersection si $k = \frac{7+2\sqrt{10}}{9}$ ou $k = \frac{7-2\sqrt{10}}{9}$.

Exercice 101

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-2x}.$$

1) Domaine de définition : il faut que $x^2-2x \neq 0 \Rightarrow x(x-2) \neq 0$

$\Rightarrow x \neq 0$ et $x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

$\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{0;2\}$.

Image du domaine de définition : $f(D) = \mathbb{R}$ (voir graphique).

Parité : $f(-x) = \frac{(-x)^3+1}{(-x)^2-2(-x)} = \frac{-x^3+1}{x^2+2x} \neq \pm f(x) \Rightarrow f$ n'est ni paire, ni impaire.

2) Intersections avec l'axe x : on pose $y=0 \Rightarrow \frac{x^3+1}{x^2-2x} = 0 \Rightarrow x^3+1=0$

$\Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-1} = -1 \Rightarrow (-1;0)$.

Intersection avec l'axe y : on pose $x=0$; comme $x=0 \notin D$, il n'y a pas d'intersection avec l'axe y.

3) $x=0$ est un exclu $\Rightarrow x=0$ est une asymptote verticale.

Si $x \underset{<}{\longrightarrow} 0$, $\frac{x^3+1}{x^2-2x} \longrightarrow \frac{1}{0_+} = +\infty$.

Si $x \underset{>}{\longrightarrow} 0$, $\frac{x^3+1}{x^2-2x} \longrightarrow \frac{1}{0_-} = -\infty$.

$x=2$ est un exclu $\Rightarrow x=2$ est une asymptote verticale.

Si $x \underset{<}{\longrightarrow} 2$, $\frac{x^3+1}{x^2-2x} \longrightarrow \frac{1}{0_-} = -\infty$.

Si $x \underset{>}{\longrightarrow} 2$, $\frac{x^3+1}{x^2-2x} \longrightarrow \frac{1}{0_+} = +\infty$.

Le graphe de f ne peut pas couper ses asymptotes verticales.

Effectuons la division euclidienne de x^3+1 par x^2-2x :

$$\begin{array}{r|l} x^3+1 & x^2-2x \\ \cline{2-2} -(x^3-2x^2) & x+2 \\ \hline 2x^2+1 & \\ -(2x^2-4x) & \\ \hline 4x+1 & \end{array}$$

On a ainsi $f(x) = x+2+\frac{4x+1}{x^2-2x}$.

Comme $\frac{4x+1}{x^2-2x} = \frac{x(4+\frac{1}{x})}{x(x-2)} = \frac{4+\frac{1}{x}}{x-2} \longrightarrow 0_+$ si $x \longrightarrow +\infty$ et

$\frac{4x+1}{x^2-2x} = \frac{4+\frac{1}{x}}{x-2} \longrightarrow 0_-$ si $x \longrightarrow -\infty$, on en déduit que

$y = x+2$ est une asymptote oblique de f et on a :

Si $x \to +\infty$, $\frac{x^3+1}{x^2-2x} \to x+2$ avec des valeurs supérieures ;

Si $x \to -\infty$, $\frac{x^3+1}{x^2-2x} \to x+2$ avec des valeurs inférieures.

Cherchons les intersections de f avec son asymptote oblique $y = x+2$:

on doit avoir $\frac{x^3+1}{x^2-2x} = x+2 \Rightarrow x^3+1 = (x+2)(x^2-2x)$

$\Rightarrow x^3+1 = x^3-2x^2+2x^2-4x \Rightarrow x^3+1 = x^3-4x \Rightarrow 1 = -4x$

$\Rightarrow x = -\frac{1}{4}$.

Avec $x = -\frac{1}{4}$, on a $f(x) = \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^3+1}{\left(-\frac{1}{4}\right)^2-2\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{-\frac{1}{64}+1}{\frac{1}{16}+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{63}{64}}{\frac{9}{16}} =$

$= \frac{63}{64} : \frac{9}{16} = \frac{63}{64} \cdot \frac{16}{9} = \frac{7}{4}$.

Le point d'intersection de f avec son asymptote oblique est donc $\left(-\frac{1}{4} ; \frac{7}{4}\right)$.

4) Tableau des signes :

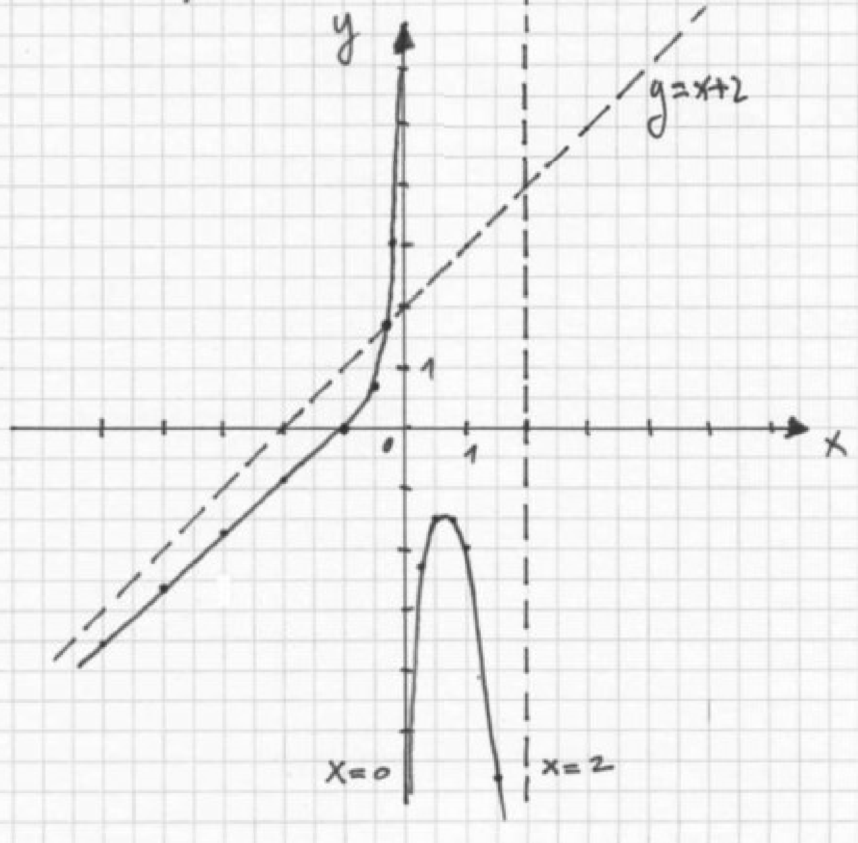
x		-1				0		2	
$f(x)$	$-$	0	$+$	‖	$-$		$-$	0	$+$

5) Tableaux de valeurs :

x	-5	-4	-3	-2	-1	$-0,5$	$-0,25$	$-0,15$	$0,25$
$f(x)$	$-3,34$	$-2,625$	$-1,73$	$-0,875$	0	$0,7$	$1,73$	$3,09$	$-2,32$

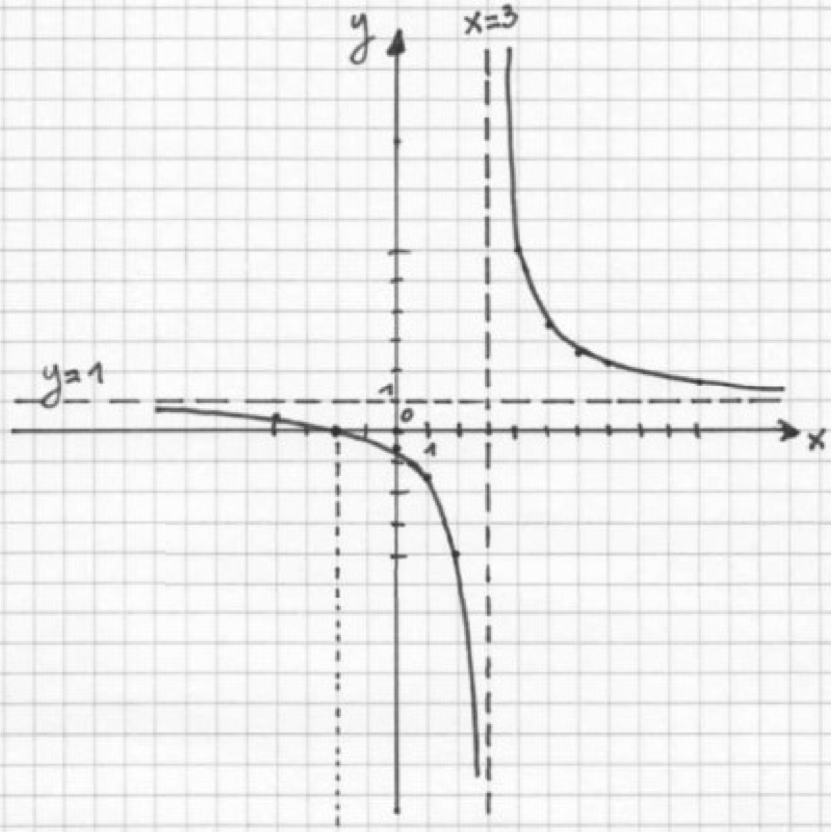
x	$f(x)$
$0,5$	$-1,5$
$0,75$	$-1,52$
1	-2
$1,5$	$-5,83$
$2,5$	$13,3$
3	$9,33$
4	$8,125$
5	$8,4$
6	$9,04$

6) Graphe :



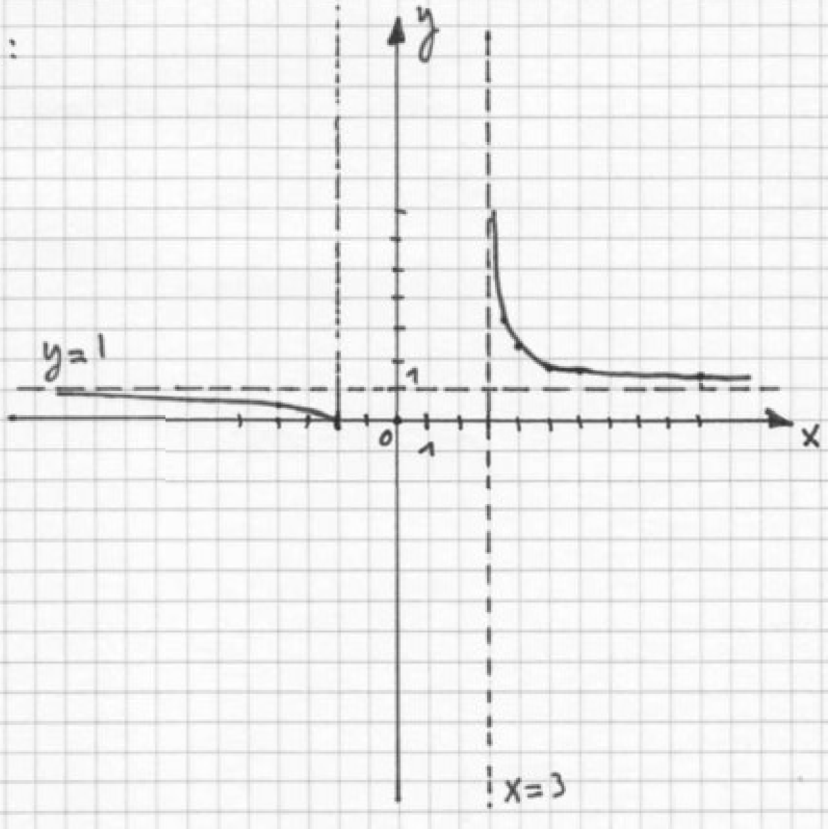
Exercice 102

Graphe de $g(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$:



Graphe de $h(x) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$:

$(D = \left]-\infty; -2\right] \cup \left[3; +\infty\right[)$.

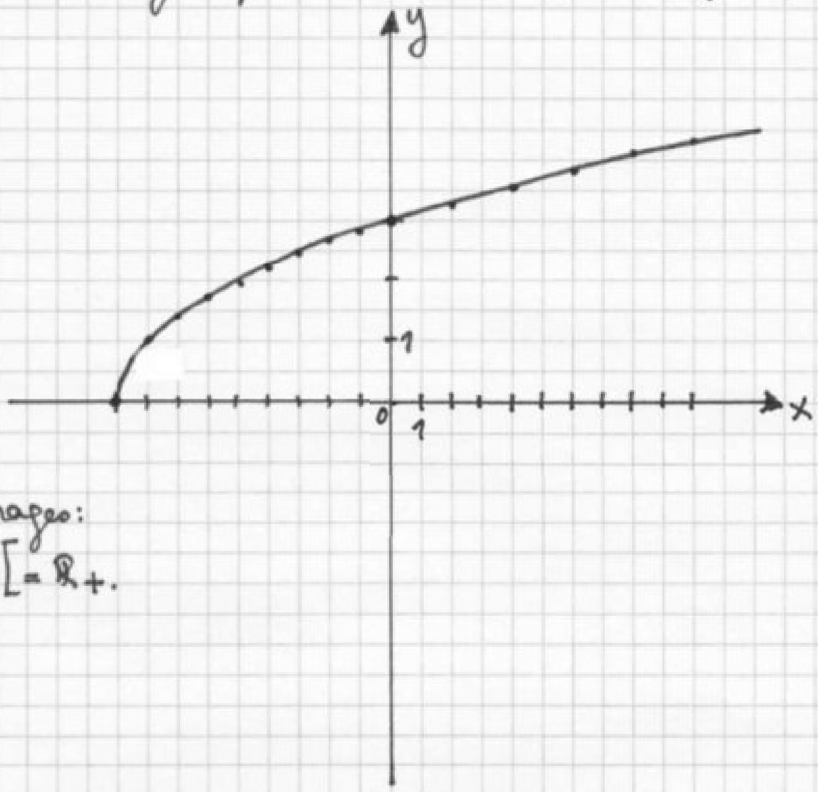


Exercice 103

a) $f(x) = \sqrt{x+9}$:

Domaine de définition : il faut que $x+9 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -9 \Rightarrow D = [-9; +\infty[$.

Graphe :



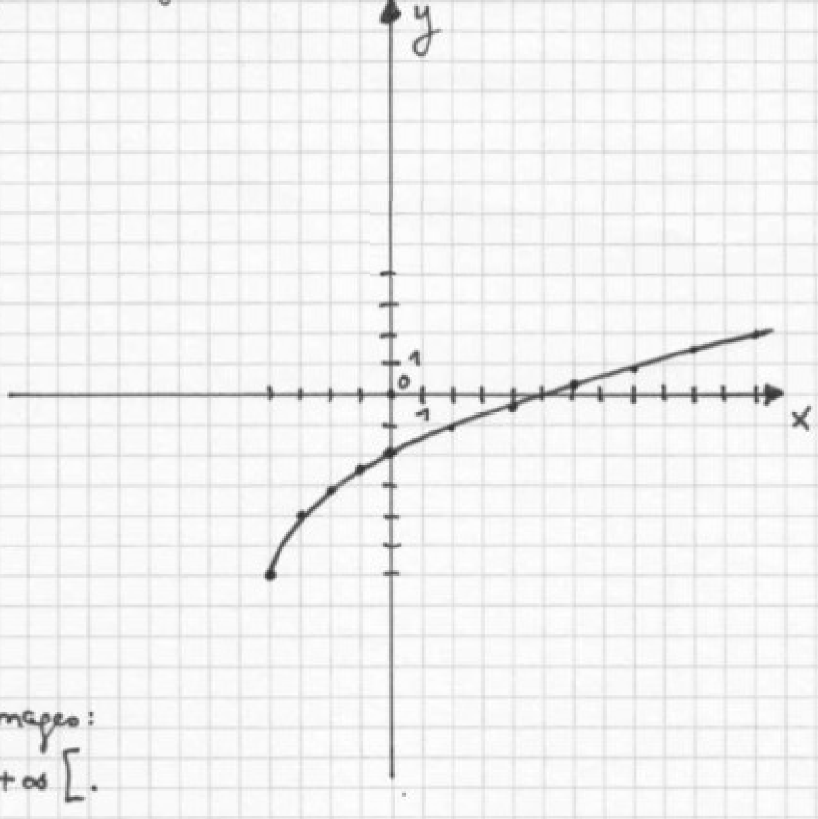
Ensemble des images :

$f(D) = [0; +\infty[= \mathbb{R}_+$.

b) $g(x) = 2\sqrt{x+4} - 6$:

Domaine de définition : il faut que $x+4 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -4 \Rightarrow D = [-4; +\infty[$.

Graphe :



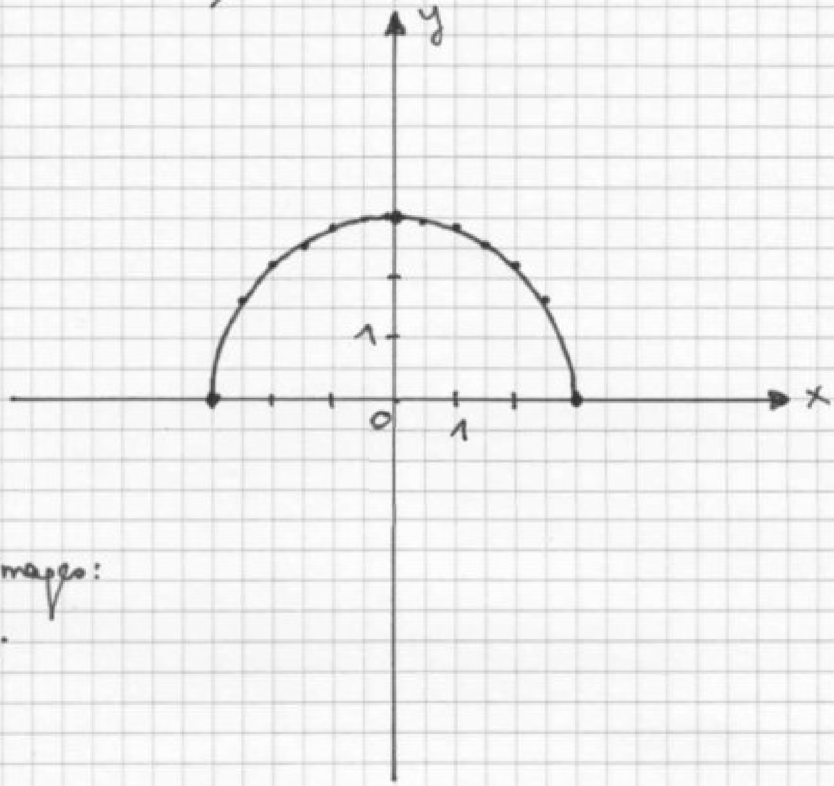
Ensembles des images :

$g(D) = [-6; +\infty[$.

c) $h(x)=\sqrt{9-x^2}$:

Domaine de définition : il faut que $9-x^2 \geqslant 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$
$\Rightarrow D = [-3\,;3]$.

Graphe :



Ensemble des images :
$h(D) = [0\,;3]$.

Exercice 104

$f(x)=\dfrac{x+b}{cx-3}$ admet une asymptote verticale $x=6$ et $x=6$ est un zéro du dénominateur, i.e. si $cx-3=0$ pour $x=6$: $c\cdot 6-3=0 \Rightarrow 6c=3$

$\Rightarrow c=\frac{1}{2}=0{,}5$.

Donc $f(x)=\dfrac{x+b}{0{,}5x-3}$.

Si f passe par le point $P(4;-2)$, par substitution, on doit avoir :

$$\frac{4+b}{0{,}5\cdot 4-3}=-2 \Rightarrow \frac{4+b}{2-3}=-2 \Rightarrow \frac{4+b}{-1}=-2 \Rightarrow 4+b=2 \Rightarrow b=-2.$$

Ainsi, $b=-2$ et $c=\frac{1}{2}$.

Exercice 105

$f(x) = \dfrac{2x+7}{x+3}$ et $g = -x + \dfrac{3}{2}$

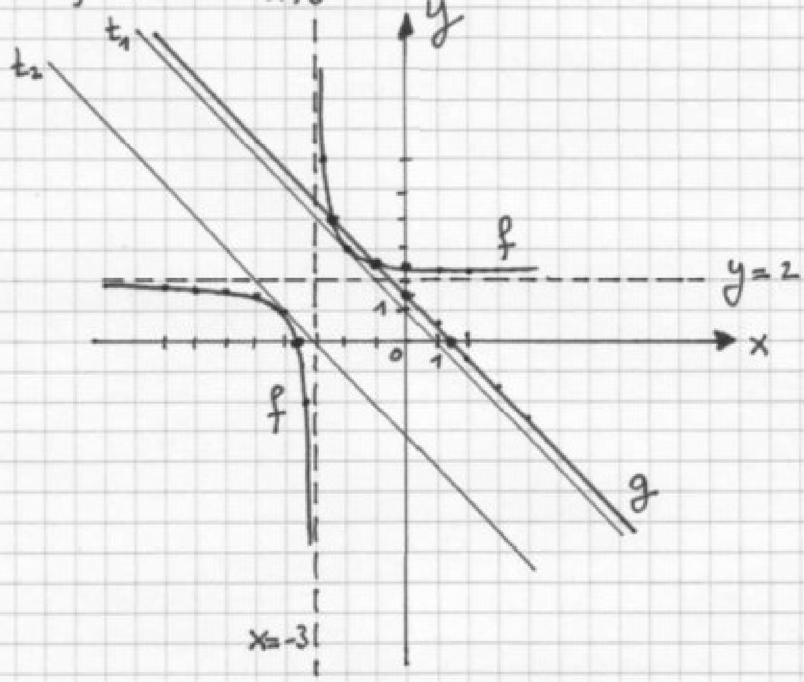
a) Domaine de définition de f : il faut que $x+3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3 \Rightarrow \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

Effectuons la division euclidienne de $2x+7$ par $x+3$:

$$\begin{array}{r|l} 2x+7 & x+3 \\ \hline -(2x+6) & 2 \\ \hline 1 & \end{array}$$

On a donc bien $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x+3}$.

b)



Points d'intersection de f et g : $\dfrac{2x+7}{x+3} = -x + \dfrac{3}{2} \Rightarrow 2x+7 = \left(-x+\frac{3}{2}\right)(x+3)$

$\Rightarrow 2x+7 = -x^2 - 3x + \frac{3}{2}x + \frac{9}{2} \Rightarrow 2x+7 = -x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{2} \Rightarrow 4x+14 = -2x^2 - 3x + 9$

$\Rightarrow 2x^2 + 7x + 5 = 0$: on a $a = 2$, $b = 7$ et $c = 5$;

$\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 49 - 40 = 9$; $\sqrt{\Delta} = 3$;

donc $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-7+3}{2 \cdot 2} = \dfrac{-4}{4} = -1$ et

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-7-3}{2 \cdot 2} = \dfrac{-10}{4} = -\dfrac{5}{2}$.

Avec $x_1 = -1$, on a $g(x_1) = -(-1) + \frac{3}{2} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.

Avec $x_2 = -\frac{5}{2}$, on a $g(x_2) = -\left(-\frac{5}{2}\right) + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4$.

Les points d'intersection de f et g sont donc $\left(-1 ; \frac{5}{2}\right)$ et $\left(-\frac{5}{2} ; 4\right)$.

<u>Intersections de f avec les axes:</u>

Avec l'axe x : on pose $y=0 \Rightarrow \frac{2x+7}{x+3}=0 \Rightarrow 2x+7=0 \Rightarrow 2x=-7$
$\Rightarrow x=-\frac{7}{2} \Rightarrow (-\frac{7}{2};0)$.

Avec l'axe y : on pose $x=0 \Rightarrow f(x)=\frac{7}{3} \Rightarrow (0;\frac{7}{3})$.

<u>Intersections de g avec les axes:</u>

Avec l'axe x : on pose $y=0 \Rightarrow -x+\frac{3}{2}=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \Rightarrow (\frac{3}{2};0)$.

Avec l'axe y : on pose $x=0 \Rightarrow y=\frac{3}{2} \Rightarrow (0;\frac{3}{2})$.

<u>Asymptotes:</u> g étant une droite, n'a pas d'asymptote.

$x=-3$ est un exclu de $f \Rightarrow x=-3$ est une asymptote verticale de f.

Si $x \xrightarrow[<]{} -3$, $\frac{2x+7}{x+3} \longrightarrow \frac{1}{0_-}=-\infty$.

Si $x \xrightarrow[>]{} -3$, $\frac{2x+7}{x+3} \longrightarrow \frac{1}{0_+}=-\infty$.

Si $x \to +\infty$, $f(x)=2+\frac{1}{x+3} \longrightarrow 2$ avec des valeurs supérieures $(\frac{1}{x+3} \to 0_+)$.

Si $x \to -\infty$, $f(x)=2+\frac{1}{x+3} \longrightarrow 2$ avec des valeurs inférieures $(\frac{1}{x+3} \to 0_-)$.

Ainsi $y=2$ est une asymptote horizontale de f.

<u>Intersections de f avec les asymptotes:</u>

Avec $x=-3$: il n'y en a pas puisque c'est une asymptote verticale.

Avec $y=2$: $\frac{2x+7}{x+3}=2 \Rightarrow 2x+7=2(x+3) \Rightarrow 2x+7=2x+6 \Rightarrow 7=6$
ce qui est exclu $\Rightarrow$ il n'y a pas non plus d'intersection.

<u>Intersections de g avec les asymptotes de f:</u>

Avec $x=-3$: $g(x)=-(-3)+\frac{3}{2}=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2} \longrightarrow (-3;\frac{9}{2})$.

Avec $y=2$: $-x+\frac{3}{2}=2 \Rightarrow -x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \Rightarrow (-\frac{1}{2};2)$.

c) Voir dessin en b).

d) Les tangentes t_1 et t_2 sont de la forme $y=ax+b$, où a est la pente.
Comme elles sont parallèles à g (qui est de pente -1), elles sont de pente -1. Elles s'écrivent donc $y=-x+b$.
Elles ont exactement un point d'intersection avec f.
Cherchons les intersections : on doit avoir $\frac{2x+7}{x+3}=-x+b$

$\Rightarrow 2x+7=(-x+b)(x+3) \Rightarrow 2x+7=-x^2-3x+bx+3b$

$\Rightarrow \quad x^2+2x+3x-bx+7-3b=0 \Rightarrow x^2+(5-b)x+7-3b=0$:

On a $A=1$, $B=5-b$ et $C=7-3b$.

Il n'y aura qu'une intersection si $\Delta=B^2-4AC=0$.

On a: $\Delta=B^2-4AC=(5-b)^2-4.1.(7-3b)=$
$=25-10b+b^2-28+12b=b^2+2b-3$.

$\Delta=0 \Rightarrow b^2+2b-3=0$: ici: $A'=1$, $B'=2$ et $C'=-3$;
$\Delta'=B'^2-4A'C'=2^2-4.1.(-3)=4+12=16$;
$\sqrt{\Delta'}=4$; donc:
$b_1=\dfrac{-B'+\sqrt{\Delta'}}{2A'}=\dfrac{-2+4}{2.1}=\dfrac{2}{2}=1$ et
$b_2=\dfrac{-B'-\sqrt{\Delta'}}{2A'}=\dfrac{-2-4}{2.1}=\dfrac{-6}{2}=-3$.

On obtient donc les deux tangentes suivantes: $t_1: y=-x+1$;
$t_2: y=-x-3$.

Les points de contacts sont:

t_1 et f: $b_1=1 \Rightarrow x=\dfrac{-B}{2A}=\dfrac{-(5-1)}{2.1}=\dfrac{-4}{2}=-2$;

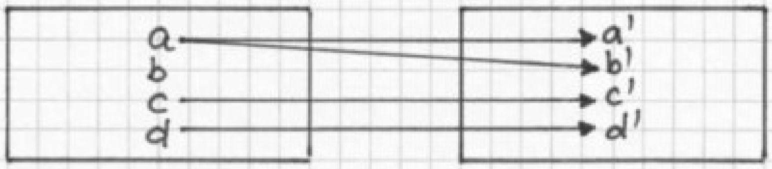
avec $x=-2$, $y=-(-2)+1=2+1=3 \Rightarrow (-2;3)$;

t_2 et f: $b_2=-3 \Rightarrow x=\dfrac{-B}{2A}=\dfrac{-(5-(-3))}{2.1}=\dfrac{-8}{2}=-4$;

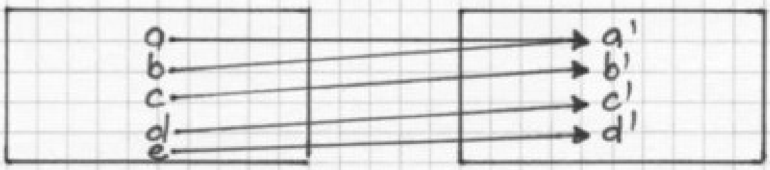
avec $x=-4$, $y=-(-4)-3=4-3=1 \Rightarrow (-4;1)$.

Exercice 106

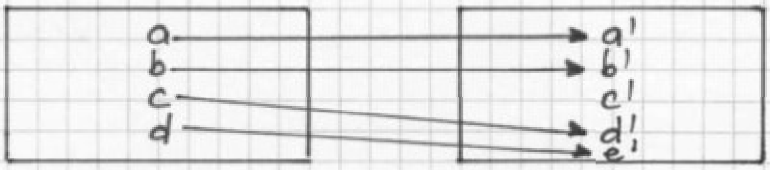
1)



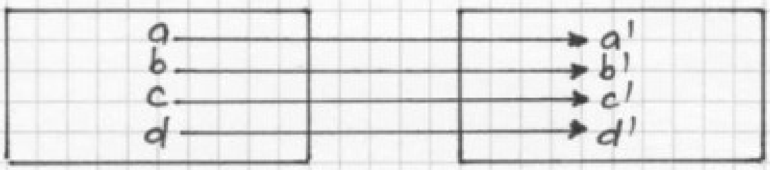
2)



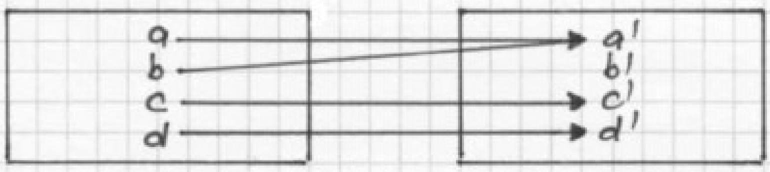
3)



4)

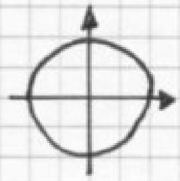


5)

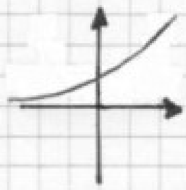


Exercice 107

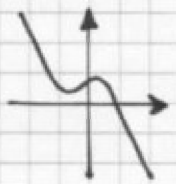
1)



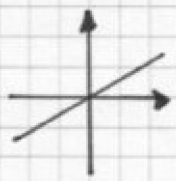
2)



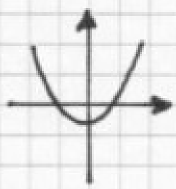
3)



4)



5)



Exercice 108

$f(x) = x^2 \;,\; g(x) = x+1$

a) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x+1) = \underline{\underline{(x+1)^2}}$

b) $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \underline{\underline{x^2+1}}$

Exercice 109

$f(x) = 2x$, $g(x) = x - 3$, $h(x) = x^2$

a) $h \circ g(x) = h(g(x)) = h(x-3) = (x-3)^2$

$(h \circ g) \circ f = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g)(2x) = \underline{\underline{(2x-3)^2}}.$

b) $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x) = 2x - 3$

$h \circ (g \circ f)(x) = h((g \circ f)(x)) = h(2x-3) = \underline{\underline{(2x-3)^2}}.$

Exercice 110

$f(x) = 2x - 3 \quad , \quad g(x) = \frac{x+3}{2}$

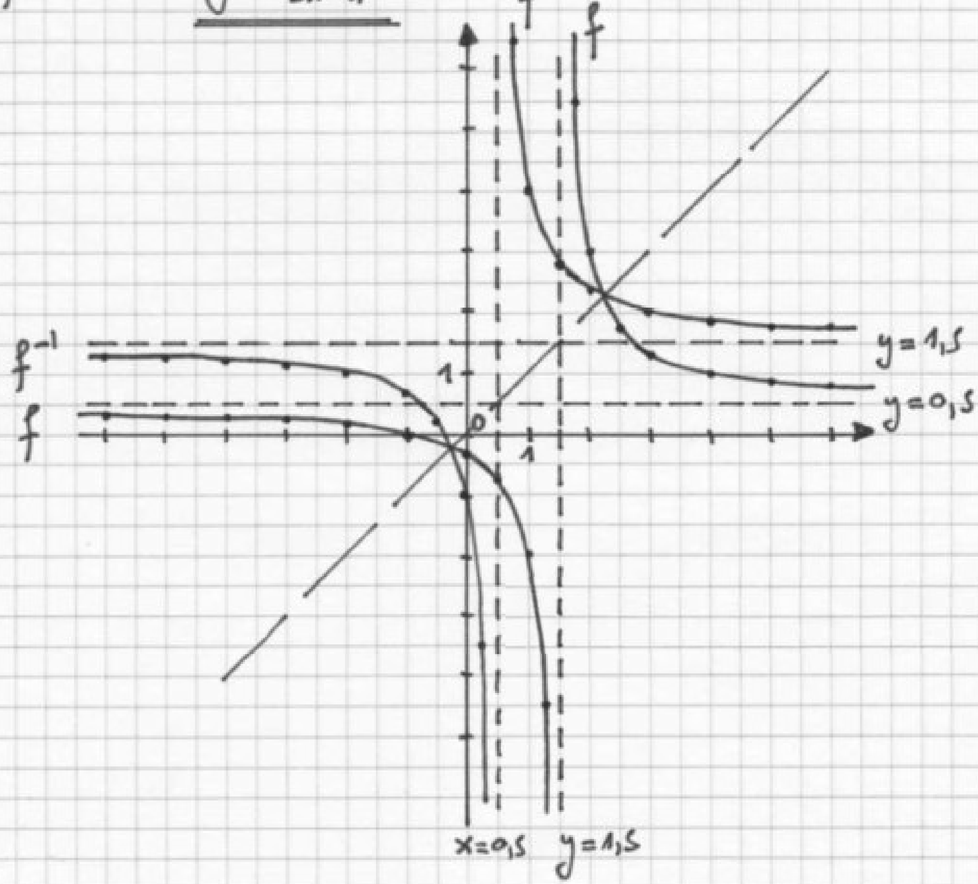
a) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x+3}{2}\right) = 2\,\frac{x+3}{2} - 3 = x + 3 - 3 = \underline{\underline{x}}.$

b) $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x-3) = \frac{2x-3+3}{2} = \frac{2x}{2} = \underline{\underline{x}}.$

Exercice 111

$y = \frac{x+1}{2x-3}$	$\cdot (2x-3)$
$y(2x-3) = x+1$	distributivité
$2xy - 3y = x+1$	$+3y$
$2xy = x+3y+1$	$-x$
$2xy - x = 3y+1$	mise en évidence
$(2y-1)x = 3y+1$	$:(2y-1)$
$x = \frac{3y+1}{2y-1}$	

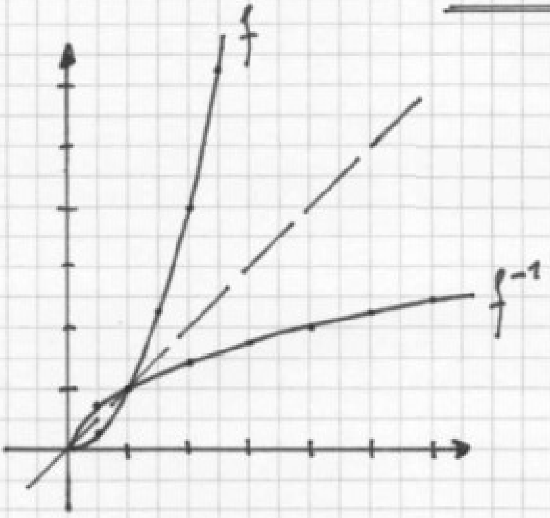
Ainsi $f^{-1} : x \longrightarrow \underline{y = \frac{3x+1}{2x-1}}$.



Exercice 112

$$f : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}_+$$
$$x \longmapsto y = x^2 \implies x = \sqrt{y} \implies f^{-1} : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}_+$$
$$x \longmapsto \sqrt{x}.$$

$$g : \mathbb{R}_- \longmapsto \mathbb{R}_-$$
$$x \longmapsto y = x^2 \implies x = -\sqrt{y} \implies g^{-1} : \mathbb{R}_- \longmapsto \mathbb{R}_-$$
$$x \longmapsto -\sqrt{x}.$$



Exercice 113

$$f(x)=\frac{2x-3}{x+5} \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{x-1}{3x+2}.$$

$$f\circ g(x)=f(g(x))=f\left(\frac{x-1}{3x+2}\right)=\left[2\,\frac{x-1}{3x+2}-3\right]:\left[\frac{x-1}{3x+2}+5\right]=$$

$$=\left[\frac{2x-2}{3x+2}-3\right]:\left[\frac{x-1}{3x+2}+5\right]=\frac{2x-2-3(3x+2)}{3x+2}:\frac{x-1+5(3x+2)}{3x+2}=$$

$$=\frac{2x-2-9x-6}{3x+2}:\frac{x-1+15x+10}{3x+2}=\frac{-7x-8}{3x+2}:\frac{16x+9}{3x+2}=\frac{-7x-8}{3x+2}\cdot\frac{3x+2}{16x+9}=\underline{\underline{\frac{-7x-8}{16x+9}}}.$$

$$\begin{array}{r|l}
y=\dfrac{2x-3}{x+5} & \cdot(x+5) \\
y(x+5)=2x-3 & \text{distributivité} \\
xy+5y=2x-3 & -2x \\
xy-2x+5y=-3 & -5y \\
xy-2x=-5y-3 & \text{mise en évidence} \\
(y-2)x=-5y-3 & :(y-2) \\
x=\dfrac{-5y-3}{y-2} &
\end{array}$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{f^{-1}(x)=\frac{-5x-3}{x-2}}}.$$

$$\begin{array}{r|l}
y=\dfrac{x-1}{3x+2} & \cdot(3x+2) \\
y(3x+2)=x-1 & \text{distributivité} \\
3xy+2y=x-1 & -x \\
3xy-x+2y=-1 & -2y \\
3xy-x=-2y-1 & \text{mise en évidence} \\
(3y-1)x=-2y-1 & :(3y-1) \\
x=\dfrac{-2y-1}{3y-1} &
\end{array}$$

$$\Longrightarrow g^{-1}(x)=\frac{-2x-1}{3x-1}$$

$$\begin{array}{r|l}
y=\dfrac{-7x-8}{16x+9} & \cdot(16x+9) \\
y(16x+9)=-7x-8 & \text{distributivité} \\
16xy+9y=-7x-8 & +7x \\
16xy+7x+9y=-8 & -9y \\
16xy+7x=-9y-8 & \text{mise en évidence} \\
(16y+7)x=-9y-8 & :(16y+7) \\
x=\dfrac{-9y-8}{16y+7} &
\end{array}$$

$$\Longrightarrow (f\circ g)^{-1}(x)=\frac{-9x-8}{16x+7}$$

$$g^{-1}\circ f^{-1}(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)) = g^{-1}\left(\frac{-5x-3}{x-2}\right) = \left[-2\,\frac{-5x-3}{x-2}-1\right] : \left[3\,\frac{-5x-3}{x-2}-1\right] =$$

$$= \left[\frac{10x+6}{x-2}-1\right] : \left[\frac{-15x-9}{x-2}-1\right] = \frac{10x+6-(x-2)}{x-2} : \frac{-15x-9-(x-2)}{x-2} =$$

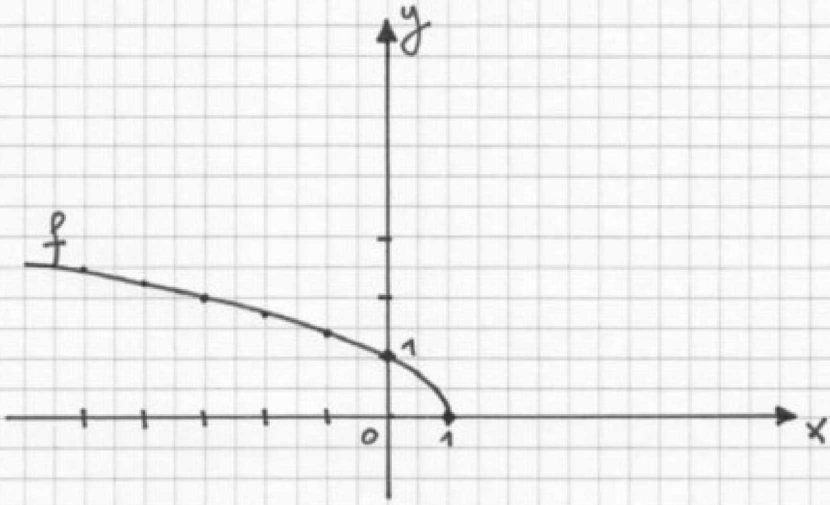
$$= \frac{10x+6-x+2}{x-2} : \frac{-15x-9-x+2}{x-2} = \frac{9x+8}{x-2} : \frac{-16x-7}{x-2} =$$

$$= \frac{9x+8}{x-2}\cdot\frac{x-2}{-16x-7} = \frac{9x+8}{-16x-7} = -\frac{9x+8}{16x+7} = \underline{\underline{\frac{-9x-8}{16x+7}}}.$$

On remarque que $(f\circ g)^{-1} = g^{-1}\circ f^{-1}$.

Exercice 114

$f(x) = \sqrt{1-x}$:

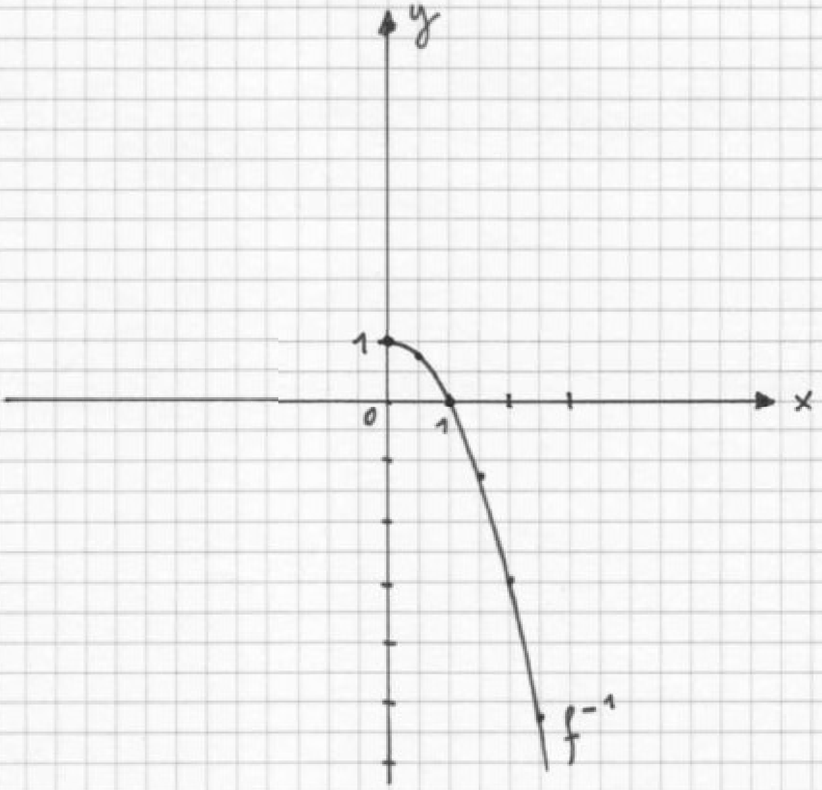


Pour que f soit bijective, on prend $D =]-\infty ; 1]$ et $f(D) = [0 ; +\infty[$.

$y = \sqrt{1-x}$	$(\quad)^2$
$y^2 = 1-x$	$+x$
$x + y^2 = 1$	$-y^2$
$x = 1 - y^2$	

$\Rightarrow f^{-1}(x) = 1 - x^2$

$f^{-1} : [0 ; +\infty[\longrightarrow]-\infty ; 1]$



Exercice 115

$y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $\qquad \cdot (cx+d)$

$y(cx+d) = ax+b$ $\qquad$ distributivité

$cxy + dy = ax+b$ $\qquad -ax$

$cxy - ax + dy = b$ $\qquad -dy$

$cxy - ax = -dy + b$ $\qquad$ mise en évidence

$(cy-a)x = -dy+b$ $\qquad : (cy-a)$

$x = \frac{-dy+b}{cy-a}$ $\qquad \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ $\qquad (\,{}^{r}f = f^{-1})$

Ainsi $f(x) = f^{-1}(x)$, i.e. $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{-dx+b}{cx-a}$ si $\underline{\underline{d = -a.}}$

Exercice 116

a) Cherchons le sommet de la parabole $y = x^2 - 2x - 3$.

On a : $a = 1$, $b = -2$ et $c = -3$.

Ainsi $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2\cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$ et

$$y_S = 1^2 - 2\cdot 1 - 3 = 1 - 2 - 3 = -4.$$

On a donc $S(1;-4)$.

Comme $y = x^2 - 2x - 3$ est une parabole tournée vers le haut ($\bigcup_S$), on peut prendre $D = [1;+\infty[$ et $f(D) = [-4;+\infty[$ pour que f soit bijective.

b) $y = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 - y = 0$:

On a : $a = 1$, $b = -2$ et $c = -3-y$;

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-3-y) = 4 + 12 + 4y = 4y + 16 = 4(y+4) ;$$

comme $y \in [-4;+\infty[$, on a $\Delta \geqslant 0$; on a alors :

soit $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+\sqrt{4(y+4)}}{2\cdot 1} = \frac{2+2\sqrt{y+4}}{2} = 1+\sqrt{y+4}$,

soit $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-\sqrt{4(y+4)}}{2\cdot 1} = \frac{2-2\sqrt{y+4}}{2} = 1-\sqrt{y+4}$.

Comme on veut que $x \in [1;+\infty[$, on exclu x_2 (≤ 1) et on conclut que $\underline{f^{-1}(x) = 1+\sqrt{x+4}}$.

Exercice 117

$f(x)=\sqrt{x+2} \implies y=\sqrt{x+2}$

a) $x-3y+2=0 \implies x-3\sqrt{x+2}+2=0 \implies 3\sqrt{x+2}=x+2$;

si $x+2\neq 0$, i.e. $x\neq -2$, on obtient $3=\dfrac{x+2}{\sqrt{x+2}} \implies 3=\sqrt{x+2}$

$\implies 9=x+2 \implies x=7$;

si $x+2=0$, i.e. $x=-2$, on a bien $3\sqrt{-2+2}=0=-2+2$;

avec $x=7$, on a $y=\sqrt{7+2}=\sqrt{9}=3$;

avec $x=-2$, on a $y=\sqrt{-2+2}=\sqrt{0}=0$.

Les points d'intersection sont donc $\underline{(7;3) \text{ et } (-2;0)}$.

b) $2x+y-6=0 \implies 2x+\sqrt{x+2}-6=0 \implies \sqrt{x+2}=-2x+6$

$\implies x+2=(-2x+6)^2 \implies x+2=4x^2-24x+36 \implies 4x^2-25x+34=0$:

on a : $a=4$, $b=-25$ et $c=34$;

$\Delta=b^2-4ac=(-25)^2-4.4.34=625-544=81$; $\sqrt{\Delta}=9$;

ainsi $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{25+9}{2\cdot 4}=\dfrac{34}{8}=\dfrac{17}{4}$ et

$x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{25-9}{2\cdot 4}=\dfrac{16}{8}=2$;

vérifions la validité de ces 2 solutions :

$x_1=\dfrac{17}{4}$: $2x+\sqrt{x+2}-6=2\cdot\dfrac{17}{4}+\sqrt{\dfrac{17}{4}+2}-6=\dfrac{17}{2}+\sqrt{\dfrac{25}{4}}-6=$

$=\dfrac{17}{2}+\dfrac{5}{2}-6=\dfrac{22}{2}-6=11-6=5\neq 0$;

$x_2=2$: $2x+\sqrt{x+2}-6=2\cdot 2+\sqrt{2+2}-6=4+\sqrt{4}-6=4+2-6=0$.

On a donc $x=2$.

Avec $x=2$, $y=\sqrt{x+2}=\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2$.

Le point d'intersection est donc $\underline{(2;2)}$.

c) $x+3y+4=0 \implies x+3\sqrt{x+2}+4=0 \implies 3\sqrt{x+2}=-x-4$.

On doit avoir $x+2\geqslant 0$, i.e. $-x\leqslant 2$.

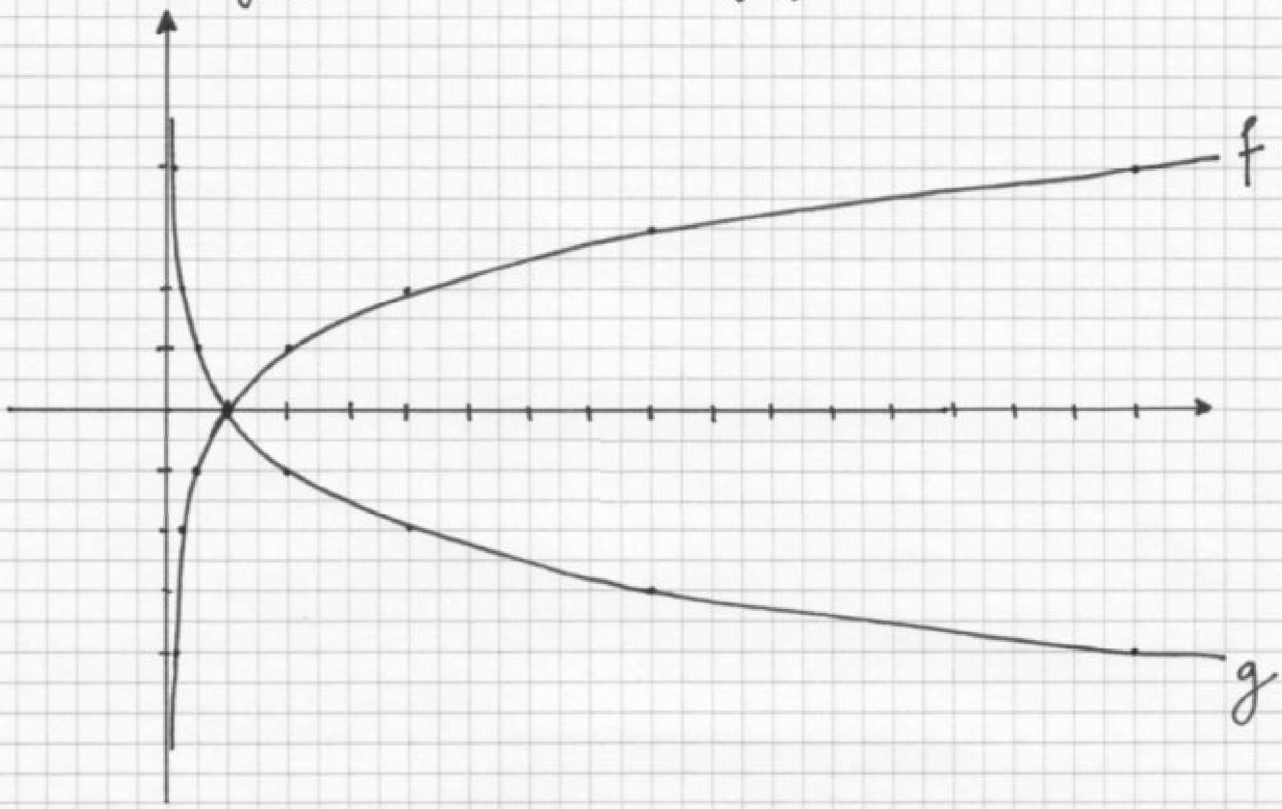
Ainsi on a $-x-4\leqslant 2-4\leqslant -2$.

Or $3\sqrt{x+2}\geqslant 0$.

On en conclut qu'il n'y a <u>pas de point d'intersection</u>.

Exercice 118

$f(x) = \log_2(x) = \dfrac{\log(x)}{\log(2)}$ et $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x) = \dfrac{\log(x)}{\log(\frac{1}{2})}$.



f: domaine de définition: $D =]0; +\infty[= \mathbb{R}_+^*$;
image du domaine de définition: $f(D) = \mathbb{R}$.

g: domaine de définition: $D =]0; +\infty[= \mathbb{R}_+^*$;
image du domaine de définition: $g(D) = \mathbb{R}$.

Exercice 119

1. $f_1(x) = 10^x$.

   1) Domaine de définition: $D = \mathbb{R}$.

   Ensemble des images: $f_1(D) =]0;+\infty[= \mathbb{R}_+^*$.

   Parité: $f_1(-x) = 10^{-x} \neq \pm f_1(x) \Rightarrow f_1$ n'est ni paire ni impaire.

   2) Intersections avec l'axe x : on pose $y=0 \Rightarrow 10^x = 0 \Rightarrow$ aucune solution car $10^x > 0$ pour tout valeur de $x \in D = \mathbb{R}$
   $\Rightarrow$ pas d'intersection avec l'axe x.

   Intersection avec l'axe y: on pose $x=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow (0;1)$.

   3) Il n'y a pas d'exclu, donc il n'y a pas d'asymptote verticale.

   Si $x \to +\infty$, $10^x \to +\infty$.

   Si $x \to -\infty$, $10^x \to 0_+$.

   Ainsi $y=0$ est une asymptote horizontale à gauche (lorsque $x \to -\infty$).

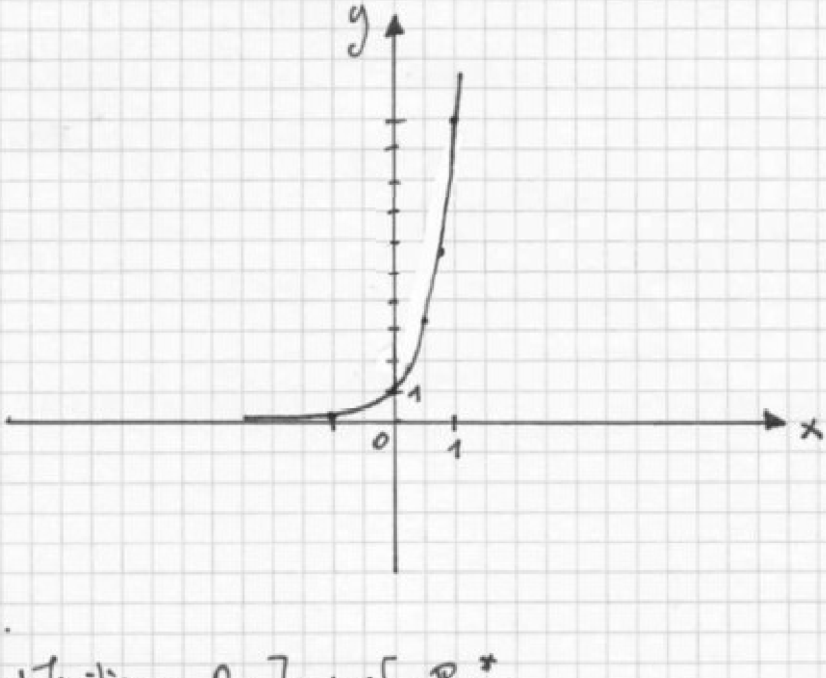
   4) Tableau des signes:

x	
$f_1(x)$	+

   5) Tableau de valeurs:

x	-2	-1	0	$0,25$	$0,5$	$0,75$	1
$f_1(x)$	$0,01$	$0,1$	1	$1,78$	$3,16$	$5,62$	10

   6) Graphe:



2. $f_2(x) = \log(x)$.

   1) Domaine de définition: $D =]0;+\infty[= \mathbb{R}_+^*$.

   Ensemble des images: $f_2(D) = \mathbb{R}$.

   Parité: comme $D = \mathbb{R}_+^*$, f_2 ne peut être ni paire, ni impaire.

   2) Intersections avec l'axe x: on pose $y=0 \Rightarrow \log(x) = 0 \Rightarrow x = 10^0 = 1$

$\Rightarrow (1;0)$

Intersection avec l'axe y : on devrait poser $x=0$, mais $x=0 \notin D$

$\Rightarrow$ pas d'intersection avec l'axe y.

3) Tableau des signes :

x		1	
$f_2(x)$	$-$	0	$+$

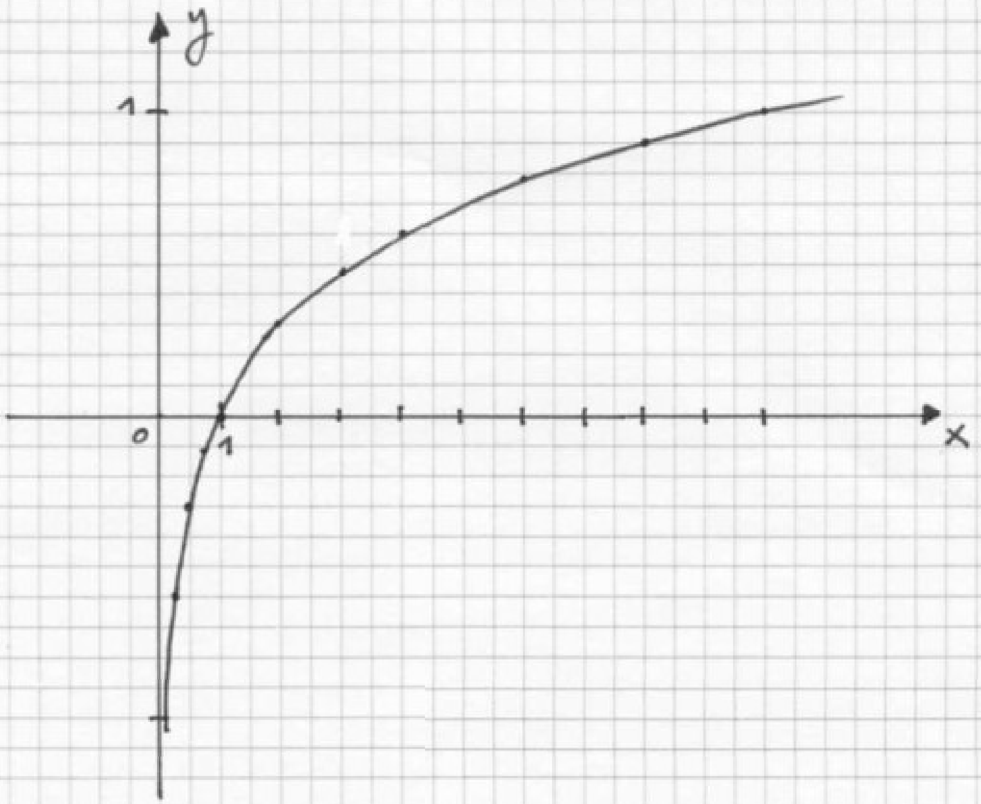
4) Si $x \underset{>}{\to} 0$, $\log(x) \to -\infty \Rightarrow x=0$ est une asymptote verticale lorsque $x \underset{>}{\to} 0$

Si $x \to +\infty$, $\log(x) \to +\infty \Rightarrow$ il n'y a pas d'autres asymptotes.

5) Tableau de valeurs :

x	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4	6	8	10
$f_2(x)$	-0,6	-0,3	-0,12	0	0,3	0,48	0,6	0,78	0,9	1

6) Graphe :



Exercice 120

$\log_2(4)=y \Leftrightarrow 2^y=4 \Leftrightarrow y=2 \Rightarrow \log_2(4)=2.$
$\log_2(32)=y \Leftrightarrow 2^y=32 \Leftrightarrow y=5 \Rightarrow \log_2(32)=5.$
$\log_2(128)=y \Leftrightarrow 2^y=128 \Leftrightarrow y=7 \Rightarrow \log_2(128)=7.$
$\log_{10}(20)=y \Leftrightarrow 10^y=20 \Leftrightarrow 10^y=2\cdot 10^1=10^{\log(2)}\cdot 10^1=10^{\log(2)+1}$
$\Leftrightarrow y=\log(2)+1 \Rightarrow \log_{10}(20)=\log_{10}(2)+1=0{,}301+1=1{,}301$
$\log_{10}(2)=y \Leftrightarrow 10^y=2 \Leftrightarrow 10^y=10^{\log(2)} \Rightarrow y=\log_{10}(2)=0{,}301$
$\log_{10}(40)=y \Leftrightarrow 10^y=40 \Leftrightarrow 10^y=4\cdot 10^1=10^{\log(4)}\cdot 10^1=10^{\log(4)+1}$
$\Leftrightarrow y=\log(4)+1 \Rightarrow \log_{10}(40)=\log_{10}(4)+1=1{,}602$

Ainsi $\log_2(128)=\log_2(2^7)=7$ et $\log_{10}(40)=\log_{10}(4)+\underbrace{\log_{10}(10)}_{=1}$.

On en conclut que $\underline{\log(x\cdot y)=\log(x)+\log(y)}$.

$\log_{\sqrt2}(4)=\log_{\sqrt2}(2^2)=\log_{\sqrt2}(((\sqrt2)^2)^2)=\log_{\sqrt2}((\sqrt2)^4)=4.$
$\log_3(10)=\log_3(3^{\log_3(10)})=2{,}096.$
$\log_{\sqrt2}(64)=\log_{\sqrt2}(2^6)=\log_{\sqrt2}((\sqrt2)^{12})=12.$
$\log_{10}(27)=\log_{10}(3\cdot3\cdot3)=\log_{10}(3)+\log_{10}(3)+\log_{10}(3)=3\log_{10}(3)=1{,}431.$

Ainsi $\log_{\sqrt2}(64)=\log_{\sqrt2}((\sqrt2)^{12})=12$ et $\log_{10}(27)=3\log_{10}(3)$.

On en conclut que $\underline{\log(x^p)=p\log(x)}$.

$\log_8(64)=\log_8(8^2)=2.$
$\log_{100}(1'000'000)=\log_{100}(100^3)=3$
$\log_{10}(1'000'000)=\log_{10}(10^6)=6$
$\log_2(64)=\log_2(2^6)=6.$
$\log_2(8)=\log_2(2^3)=3.$
$\log_{10}(100)=\log_{10}(10^2)=2.$

Ainsi $\log_8(64)=\log_8(8^2)=2$ et $\log_{100}(1'000'000)=\log_{100}(100^3)=3.$

On en conclut que $\log_a(x)=\dfrac{\log(x)}{\log(a)}$.

$\log_2(16)=\log_2(2^4)=4.$
$\log_2(8)=\log_2(2^3)=3.$
$\log_2(128)=\log_2(2^7)=7.$
$\log_{10}(75)=1{,}875.$

$\log_{10}(3) = 0,477.$
$\log_{10}(25) = 1,398.$

Ainsi $\log_2(16) = \log_2(2^4) = 4$ et $\log_{10}(25) = \log_{10}\left(\frac{100}{4}\right) = \log_{10}(100) - \log_{10}(4) =$
$= \log_{10}(10^2) - \log_{10}(4) = 2 - 0,602 = 1,398.$

On en conclut que $\underline{\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y).}$

Exercice 121

$\log_2(16) = \log_2(2^4) = \underline{\underline{4}}.$

$\log_5(5) = \log_5(5^1) = \underline{\underline{1}}.$

$\log_7\left(\frac{1}{49}\right) = \log_7\left(\frac{1}{7^2}\right) = \log_7(7^{-2}) = \underline{\underline{-2}}.$

$\log_{27}\left(\frac{1}{3}\right) = \log_{27}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{27}}\right) = \log_{27}\left(\frac{1}{27^{1/3}}\right) = \log_{27}\left(27^{-\frac{1}{3}}\right) = \underline{\underline{-\frac{1}{3}}}.$

$\log_4(1) = \log_4(4^0) = 0.$

$\log_{16}(8) = \log_{16}(2^3) = 3\log_{16}(2) = 3\log_{16}(\sqrt[4]{16}) = 3\log_{16}\left(16^{\frac{1}{4}}\right) = 3\cdot\frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$

$\log_3(-9)$ n'existe pas car le domaine de définition de $\log_a$ est $]0;+\infty[$.

$\log_{\sqrt{2}}(4) = \log_{\sqrt{2}}(2^2) = \log_{\sqrt{2}}\left(\left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^2\right) = \log_{\sqrt{2}}\left(\left(\sqrt{2}\right)^4\right) = \underline{\underline{4}}.$

Exercice 122

$$\log(pqr) = \underline{\log(p)+\log(q)+\log(r)}.$$

$$\log(pq^2r^3) = \log(p)+\log(q^2)+\log(r^3) = \underline{\log(p)+2\log(q)+3\log(r)}.$$

$$\log(100pr^5) = \log(\underbrace{100}_{10^2})+\log(p)+\log(r^5) = \underline{2+\log(p)+5\log(r)}.$$

$$\log\left(\sqrt{\frac{p}{q^2r}}\right) = \log\left(\left(\frac{p}{q^2r}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{p}{q^2r}\right) = \frac{1}{2}\left(\log(p)-\log(q^2r)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\log(p)-\left(\log(q^2)+\log(r)\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\log(p)-2\log(q)-\log(r)\right) =$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\log(p)-\log(q)-\frac{1}{2}\log(r)}.$$

$$\log\left(\frac{qr^7p}{10}\right) = \log(qr^7p)-\underbrace{\log(10)}_{1} = \log(q)+\log(r^7)+\log(p)-1 =$$

$$= \underline{\log(q)+7\log(r)+\log(p)-1}.$$

$$\log\left(\sqrt{\frac{10p^{10}r}{q}}\right) = \log\left(\left(\frac{10p^{10}r}{q}\right)^{1/2}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{10p^{10}r}{q}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\log(10p^{10}r)-\log(q)\right) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\log(10)}_{1}+\log(p^{10})+\log(r)-\log(q)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+10\log(p)+\log(r)-\log(q)\right) = \underline{\frac{1}{2}+5\log(p)+\frac{1}{2}\log(r)-\frac{1}{2}\log(q)}.$$

Exercice 123

$$A = \ln\left(\left(a^5\sqrt[3]{b}\right)/c\right) = \ln\left(a^5\sqrt[3]{b}\right) - \ln(c) = \ln\left(a^5\right) + \ln\left(\sqrt[3]{b}\right) - \ln(c) =$$
$$= 5\ln(a) + \ln\left(b^{\frac{1}{3}}\right) - \ln(c) = \underline{5\ln(a) + \frac{1}{3}\ln(b) - \ln(c).}$$

$$B = \ln(x+1) - \ln(x-1) = \underline{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).}$$

$$C = 2\ln(a) - \frac{1}{2}\ln(b) + 3\ln(c) = \ln(a^2) - \ln\left(b^{\frac{1}{2}}\right) + \ln(c^3) =$$
$$= \ln(a^2) + \ln(c^3) - \ln\left(\sqrt{b}\right) = \ln\left(a^2c^3\right) - \ln\left(\sqrt{b}\right) = \underline{\ln\left(\frac{a^2c^3}{\sqrt{b}}\right).}$$

$$D = \ln\left(\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{b}}\right) = \ln\left(\left(a\cdot\sqrt[3]{b}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(a\cdot\sqrt[3]{b}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\ln(a) + \ln\left(\sqrt[3]{b}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\ln(a) + \ln\left(b^{1/3}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\ln(a) + \frac{1}{3}\ln(b)\right) =$$
$$= \underline{\frac{1}{2}\ln(a) + \frac{1}{6}\ln(b).}$$

Exercice 124

1. $10^{x} = 9{,}56 \Rightarrow \underline{x = \log(9{,}56) \cong 0{,}98.}$

2. $10^{3x} = -5 \Rightarrow 3x = \log(-5)$ exclu $\Rightarrow$ <u>pas de solution.</u>

3. $\log(x) = 2{,}5 \Rightarrow \underline{x = 10^{2,5} \cong 316{,}27.}$

4. $\log(4x-1) = -2 \Rightarrow 4x-1 = 10^{-2} \Rightarrow 4x-1 = 0{,}01 \Rightarrow 4x = 1{,}01 \Rightarrow x = \frac{1{,}01}{4} = \underline{\frac{101}{400}}.$

5. $2\log(x) = -4 \Rightarrow \log(x) = -2 \Rightarrow \underline{x = 10^{-2} = 0{,}01.}$

6. $\log(x^2-21) = 2 \Rightarrow x^2 - 21 = 10^2 \Rightarrow x^2 - 21 = 100 \Rightarrow x^2 = 121 \Rightarrow$ <u>$x = 11$ ou -11.</u>

7. $10^{3x+2} = \sqrt{10} \Rightarrow 10^{3x+2} = 10^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3x+2 = \frac{1}{2} \Rightarrow 3x = -\frac{3}{2} \Rightarrow \underline{x = -\frac{1}{2}.}$

8. $\log(\log(x)) = 1 \Rightarrow \log(x) = 10^1 = 10 \Rightarrow \underline{x = 10^{10} = 10'000'000'000.}$

9. $2\cdot 2^{2x} - 9\cdot 2^{x} + 4 = 0 \Rightarrow 2(2^x)^2 - 9\cdot 2^x + 4 = 0;$

   en posant $y = 2^x$, on obtient $2y^2 - 9y + 4 = 0$: on a $a=2$, $b=-9$ et $c=4$;

   $\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4\cdot 2\cdot 4 = 81 - 32 = 49$; $\sqrt{\Delta} = 7$; ainsi :

   $y_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9+7}{2\cdot 2} = \frac{16}{4} = 4$ et $y_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9-7}{2\cdot 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$;

   avec $y_1 = 4$ et $y = 2^x$, on trouve $x_1 = 2$;

   avec $y_2 = \frac{1}{2}$ et $y = 2^x$, on trouve $x_2 = -1$;

   $\Rightarrow$ les solutions sont <u>$x = 2$ et $x = -1$.</u>

10. $2^x = 10 \Rightarrow x = \log_2(10) = \frac{\log(10)}{\log(2)} = \underline{\frac{1}{\log(2)} \cong 3{,}322.}$

11. $1{,}03^x = 2 \Rightarrow x = \log_{1,03}(2) = \frac{\log(2)}{\log(1{,}03)} \cong \underline{23{,}45.}$

12. $\log(0{,}5x-3) = -1 \Rightarrow 0{,}5x - 3 = 10^{-1} \Rightarrow 0{,}5x - 3 = 0{,}1 \Rightarrow 0{,}5x = 3{,}1 \Rightarrow \underline{x = 6{,}2.}$

13. $2{,}8^x = 5 \Rightarrow x = \log_{2,8}(5) = \frac{\log(5)}{\log(2{,}8)} \cong \underline{1{,}563.}$

14. $3\log(2x) = 9 \Rightarrow \log(2x) = 3 \Rightarrow 2x = 10^3 \Rightarrow 2x = 1000 \Rightarrow \underline{x = 500}.$

15. $1000^{x+2} = 10^{5x+8} \Rightarrow (10^3)^{x+2} = 10^{5x+8} \Rightarrow 10^{3(x+2)} = 10^{5x+8} \Rightarrow 3(x+2) = 5x+8$

    $\Rightarrow 3x + 6 = 5x + 8 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow \underline{x = -1.}$

16. $\log^2(x) - \log(x) - 2 = 0 \Rightarrow (\log(x))^2 - \log(x) - 2 = 0$:

    on pose $y = \log(x)$: on obtient $y^2 - y - 2 = 0$: on a $a=1$, $b=-1$ et $c=-2$;

    $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 1 + 8 = 9$; $\sqrt{\Delta} = 3$; ainsi :

$y_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+3}{2\cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$ et $y_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-3}{2\cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$;

avec $y_1 = 2$ et $y = \log(x)$, on trouve $\log(x) = 2 \Rightarrow x = 10^2 = 100$;

avec $y_2 = -1$ et $y = \log(x)$, on trouve $\log(x) = -1 \Rightarrow x = 10^{-1} = 0,1$;

$\Rightarrow$ les solutions sont $\underline{\underline{x = 100 \text{ et } x = 0,1.}}$

17. $9\cdot 3^{2x} - 82\cdot 3^x + 9 = 0 \Rightarrow 9\cdot(3^x)^2 - 82\cdot 3^x + 9 = 0$:

on pose $y = 3^x$: on obtient $9y^2 - 82y + 9 = 0$: $a = 9$, $b = -82$ et $c = 9$;

$\Delta = b^2 - 4ac = (-82)^2 - 4\cdot 9\cdot 9 = 6724 - 324 = 6400$; $\sqrt{\Delta} = 80$; ainsi :

$y_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{82+80}{2\cdot 9} = \frac{162}{18} = 9$ et $y_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{82-80}{2\cdot 9} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$;

avec $y_1 = 9$ et $y = 3^x$, on trouve $x = 2$;

avec $y_2 = \frac{1}{9}$ et $y = 3^x$, on trouve $x = -2$;

$\Rightarrow$ les solutions sont $\underline{\underline{x = 2 \text{ et } x = -2.}}$

18. $2^{x^2-8} = \frac{1}{16} \Rightarrow 2^{x^2-8} = \frac{1}{2^4} \Rightarrow 2^{x^2-8} = 2^{-4} \Rightarrow x^2 - 8 = -4 \Rightarrow x^2 = 4$

$\Rightarrow \underline{\underline{x = 2 \text{ et } x = -2.}}$

Exercice 125

1. $3e^x+2=2e^x+5 \Rightarrow e^x=3 \Rightarrow \underline{\underline{x=\ln(3)}}.$

2. $e^{2x}+e^x-6=0 \Rightarrow (e^x)^2+e^x-6=0$:
on pose $y=e^x$: on obtient $y^2+y-6=0$: on a $a=1$, $b=1$ et $c=-6$;
$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\cdot1\cdot(-6)=1+24=25$; $\sqrt{\Delta}=5$; ainsi:
$y_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1+5}{2\cdot1}=\dfrac{4}{2}=2$ et $y_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1-5}{2\cdot1}=\dfrac{-6}{2}=-3$;
avec $y_1=2$ et $y=e^x$: $e^x=2 \Rightarrow x=\ln(2)$;
avec $y_2=-3$ et $y=e^x$: $e^x=-3$ exclu;
$\Rightarrow$ la solution est $\underline{\underline{x=\ln(2)}}$.

3. $8e^x-\dfrac{1}{e^x}=6 \Rightarrow 8(e^x)^2-1=6e^x \Rightarrow 8(e^x)^2-6e^x-1=0$:
on pose $y=e^x$: on obtient $8y^2-6y+1=0$: on a $a=8$, $b=-6$ et $c=1$;
$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\cdot8\cdot1=36-32=4$; $\sqrt{\Delta}=2$; ainsi:
$y_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{6+2}{2\cdot8}=\dfrac{10}{16}=\dfrac{5}{8}$ et $y_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{6-2}{2\cdot8}=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$;
avec $y_1=\dfrac{5}{8}$ et $y=e^x$: $e^x=\dfrac{5}{8} \Rightarrow x=\ln\left(\dfrac{5}{8}\right)$;
avec $y_2=\dfrac{1}{4}$ et $y=e^x$: $e^x=\dfrac{1}{4} \Rightarrow x=\ln\left(\dfrac{1}{4}\right)=\underbrace{\ln(1)}_{0}-\ln(4)=-\ln(4)$;
les solutions sont $\underline{\underline{x=\ln\left(\frac{5}{8}\right) \text{ et } x=-\ln(4)}}$.

4. $3\log_a(x)=2\log_a(8) \Rightarrow \log_a(x^3)=\log_a(8^2) \Rightarrow x^3=8^2 \Rightarrow x^3=64 \Rightarrow \underline{\underline{x=4}}.$

5. $\log_x(125)=3 \Rightarrow 125=x^3 \Rightarrow \underline{\underline{x=5}}.$

6. $\ln(x+1)+\ln(x+5)=\ln 96 \Rightarrow \ln\big((x+1)(x+5)\big)=\ln 96$
$\Rightarrow (x+1)(x+5)=96 \Rightarrow x^2+5x+x+5=96 \Rightarrow x^2+6x-91=0$:
on a : $a=1$, $b=6$ et $c=-91$; $\Delta=b^2-4ac=6^2-4\cdot1\cdot(-91)=36+364=400$;
$\sqrt{400}=20$; ainsi $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-6+20}{2\cdot1}=\dfrac{14}{2}=7$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-6-20}{2\cdot1}=\dfrac{-26}{2}=-13$;
avec $x_2=-13$, on ne peut pas calculer $\ln(x+1)$ et $\ln(x+5)$;
$\Rightarrow$ la solution est $\underline{\underline{x=7}}$.

7. $\ln|x+1|+\ln|x+5|=\ln 96 \Rightarrow \ln\big(|x+1|\cdot|x+5|\big)=\ln 96$
$\Rightarrow |x+1|\cdot|x+5|=96 \Rightarrow$ soit $(x+1)\cdot(x+5)=96$ ①
soit $(x+1)\cdot(x+5)=-96$ ②;
① $\Rightarrow x=7$ et $x=-13$ (voir 6.);
② $\Rightarrow x^2+5x+x+5=-96 \Rightarrow x^2+6x+101=0$: on a: $a=1$, $b=6$ et $c=101$;
$\Delta=b^2-4ac=6^2-4\cdot1\cdot101=36-404<0 \Rightarrow$ pas de solution;

$\Rightarrow$ les solutions sont $\underline{x = 7 \text{ et } x = -13}$.

8. $\log(12x+40) - \log(x-4) = 2 \Rightarrow \log\left(\frac{12x+40}{x-4}\right) = 2$

$\Rightarrow \frac{12x+40}{x-2} = 10^2 \Rightarrow \frac{12x+40}{x-2} = 100 \Rightarrow 12x+40 = 100(x-2)$

$\Rightarrow 12x+40 = 100x - 200 \Rightarrow 88x = 240 \Rightarrow x = \frac{240}{88} = \underline{\underline{\frac{30}{11}}}.$

9. $\log(99 + \log(8 + \log(x-1))) = 2 \Rightarrow 99 + \log(8 + \log(x-1)) = 10^2$

$\Rightarrow 99 + \log(8 + \log(x-1)) = 100 \Rightarrow \log(8 + \log(x-1)) = 1$

$\Rightarrow 8 + \log(x-1) = 10^1 \Rightarrow \log(x-1) = 2 \Rightarrow x - 1 = 10^2 \Rightarrow x - 1 = 100$

$\Rightarrow \underline{\underline{x = 101}}.$

10. $\log_x(0{,}0025) = 2 \Rightarrow 0{,}0025 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{0{,}0025} = \underline{\underline{0{,}05}}$

(pour que $\log_x$ existe, il faut que $x > 0$).

Exercice 126

$f(x) = \log(x^3+2x^2-3)$: il faut que $x^3+2x^2-3>0$;

cherchons les x tels que $x^3+2x^2-3=0$;

une solution est $x=1$; divisons x^3+2x^2-3 par $x-1$:

$$\begin{array}{r|l} x^3+2x^2-3 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{-(x^3-x^2)} & x^2+3x+3 \\ 3x^2-3 & \\ \underline{-(3x^2-3x)} & \\ 3x-3 & \\ \underline{-(3x-3)} & \\ 0 & \end{array}$$

on a donc $x^3+2x^2-3=(x-1)(x^2+3x+3)$;

les solutions de $x^3+2x^2-3=0$ sont donc les solutions de $x-1=0 \Rightarrow x=1$ et de $x^2+3x+3=0$;

pour cette dernière équation, on a : $a=1$, $b=3$ et $c=3$;

$\Delta = b^2-4ac = 3^2-4\cdot1\cdot3 = 9-12<0 \Rightarrow$ pas de solution ;

ainsi la seule solution de $x^3+2x^2-3=0$ est $x=1$;

un tableau des signes pour la fonction x^3+2x^2-3 est :

x		1	
x^3+2x^2-3	$-$	0	$+$

ainsi, pour que $x^3+2x^2-3>0$, il faut que $x\in\,]1;+\infty[$;

on en conclut que le domaine de définition de f est $]1;+\infty[$.

$g(x)=\dfrac{1}{\log(x^2-1)}$: il faut : ① $\log(x^2-1)\neq 0$;

② $x^2-1>0$;

①: $\log(x^2-1)\neq 0 \Rightarrow x^2-1\neq 1 \Rightarrow x^2\neq 2 \Rightarrow x\neq\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$;

②: $x^2-1>0 \Rightarrow x^2>1 \Rightarrow x<-1$ et $x>1$;

on en déduit que le domaine de définition de g est :

$D = \,]-\infty;-\sqrt{2}[\,\cup\,]-\sqrt{2};-1[\,\cup\,]1;\sqrt{2}[\,\cup\,]\sqrt{2};+\infty[$.

Exercice 127

$f(x) = \log_2\left(\frac{2x}{x-1}\right)$:

Commençons par déterminer le domaine de définition de f : on doit avoir :

① $x-1 \neq 0$;

② $\frac{2x}{x-1} > 0$;

① $\Rightarrow x \neq 1$;

② $\frac{2x}{x-1} > 0 \Rightarrow$ soit $2x > 0$ et $x-1 > 0$ ③ ;

soit $2x < 0$ et $x-1 < 0$ ④ ;

③ $\Rightarrow x > 0$ et $x > 1$ $\Rightarrow x > 1$;

④ $\Rightarrow x < 0$ et $x < 1$ $\Rightarrow x < 0$;

ainsi $\frac{2x}{x-1} > 0$ si $x < 0$ et $x > 1$;

on en conclut que le domaine de définition de f est $\mathcal{D} =]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$.

Cherchons maintenant les zéros de f, i.e. les x tels que $\log_2\left(\frac{2x}{x-1}\right) = 0$:

$\log_2\left(\frac{2x}{x-1}\right) = 0 \Rightarrow \frac{2x}{x-1} = 1 \Rightarrow 2x = x-1 \Rightarrow x = -1$.

On peut alors établir le tableau des signes de f :

x		-1		0		1	
$f(x)$	$+$	0	$-$		//////		$+$

Exercice 128

Posons $y = 87^{97}$. On a $\log_{87}(y) = 97$.

Or $\log_{87}(y) = \dfrac{\log(y)}{\log(87)}$. On obtient $\dfrac{\log(y)}{\log(87)} = 97 \Rightarrow \log(y) = \log(87) \cdot 97$

$\Rightarrow y = 10^{\log(87) \cdot 97}$.

On a $\log(87) \cong 1,939519253$ et $\log(87) \cdot 97 = 188,1333675$.

Ainsi $y = 10^{188,1333675}$ et, donc $y = 87^{97}$ à **188 chiffres.**

De plus $y = 10^{188 + 0,1333675} = 10^{888} \cdot 10^{0,1333675} = 10^{888} \cdot 1,35946335$.

Donc les 5 premiers chiffres de $y = 87^{97}$ sont **13594.**

Exercice 129

Questions préliminaires:

intérêt reçu = 1,25% de 1200.– = $\frac{1,25}{100} \cdot 1200 = 1,25 \cdot 12 = \underline{\underline{15.-}}$;

a. $1200 + 15 = \underline{\underline{1215.-}}$;

b. 2e année: 1,25% de 1215 = $\frac{1,25}{100} \cdot 1215 = 1,25 \cdot 12,15 = 15,1875$;

$\Rightarrow$ capital $= 1215 + 15,1875 = \underline{\underline{1230,1875}}$;

3e année: 1,25% de 1230,1875 = $\frac{1,25}{100} \cdot 1230,1875 = 15,37734375$;

$\Rightarrow$ capital $= 1230,1875 + 15,37734375 = \underline{\underline{1245,564844}}$.

Autres questions:

1. $C_0 = 700.-$, $n = 10$, $t = 0,5\% = 0,005$

$\Rightarrow C = 700 \cdot (1 + 0,005)^{10} = \underline{\underline{735,798 \text{ frs.}}}$

2. $C = 3780$, $n = 6$, $t = 2,15\% = 0,0215$

$\Rightarrow 3780 = C_0 (1 + 0,0215)^6 \Rightarrow 3780 = C_0 \cdot 1,13613575$

$\Rightarrow \underline{\underline{C_0 = 3327,067209 \text{ frs.}}}$

3. $C = 12'932$, $C_0 = 11'580$, $n = 3$

$\Rightarrow 12'932 = 11'580 (1+t)^3 \Rightarrow (1+t)^3 = 1,116753022 \Rightarrow 1+t = 1,037494283$

$\Rightarrow t = 0,0375 \Rightarrow \underline{\underline{3,75\%}}$.

4. $C = 982$, $C_0 = 790$, $t = 1\% = 0,01$

$\Rightarrow 982 = 790 (1 + 0,01)^n \Rightarrow 1,01^n = 1,243037975$

$\Rightarrow n = \log_{1,01}(1,243037975) = \frac{\log(1,243037975)}{\log(1,01)} = 21,86443507$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{22 \text{ ans.}}}$

5. $C_0 = x$, $C = 2x$, $t = 1,5\% = 0,015$

$\Rightarrow 2x = x(1 + 0,015)^n \Rightarrow 1,015^n = 2 \Rightarrow n = \log_{1,015}(2) =$

$= \frac{\log(2)}{\log(1,015)} = 46,55552563 \Rightarrow \underline{\underline{47 \text{ ans.}}}$