Examens de fin de module Session de juin 2013

Mathématiques 2

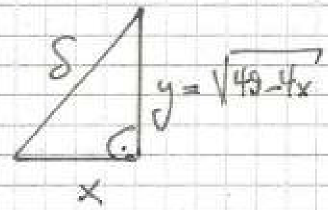
CORRIGE

Problème 1

a) En V, on a $x=0$ et, donc, $y=\sqrt{49-4\cdot 0}=\sqrt{49}=7$. Ainsi $\underline{V(0;7)}$.

En H, on a $y=0$ et, donc, $0=\sqrt{49-4x} \Longrightarrow 49-4x=0 \Longrightarrow 4x=49$
$\Longrightarrow x=\frac{49}{4}=12,25$. Ainsi $\underline{H(12,25;0)}$.

b) On a un triangle rectangle :



Par le théorème de Pythagore, on a $\delta^2=x^2+\left(\sqrt{49-4x}\right)^2=x^2+49-4x=$
$=x^2-4x+49$.

Ainsi, on a $C(x)=x^2-4x+49$.

c) On va résoudre $C'(x)=0$.
On a $C'(x)=2x-4$.
$C'(x)=0 \Longrightarrow 2x-4=0 \Longrightarrow 2x=4 \Longrightarrow x=2$.
Etablissons un tableau de variation entre $x=0$ (point V) et $x=12,25$ (point H) :

x	0	2	$12,25$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

en $x=0$,
$C'(x)=-4<0$

en $x=5$,
$C'(x)=2\cdot 5-4>0$

Ainsi, $\underline{\text{en } x=2,\ C(x) \text{ est minimale}}$.

Avec $x=2$, on a $y=\sqrt{49-4\cdot 2}=\sqrt{49-8}=\sqrt{41}\cong 6,4$.
Les coordonnées du point où la connexion a une longueur minimale est
$\underline{(2;6,4)}$.

d) La longueur minimale est alors $\delta=\sqrt{x^2-4x+49}=\sqrt{2^2-4\cdot 2+49}=\sqrt{45}\cong \underline{6,7}$.

Problème 2

On a $D(t) = -\frac{8}{3}t^3 + 50t^2 - 200t + 3000$, où t est le nb d'heures après minuit.

a) À 6h du matin, on a $t = 6$, et on a alors
$D(t) = -\frac{8}{3}\cdot 6^3 + 50\cdot 6^2 - 200\cdot t + 3000 = \underline{\underline{3024 \text{ mégaWatts}}}$.

b) On doit construire le tableau de variation de D.
On a $D'(t) = -\frac{8}{3}\cdot 3t^2 + 50\cdot 2t - 200\cdot 1 + 0 = -8t^2 + 100t - 200$.
$D'(t) = 0 \Rightarrow -8t^2 + 100t - 200 = 0$, équation du 2e degré de la forme
$at^2 + bt + c = 0$ avec $a = -8$, $b = 100$ et $c = -200$.
On a alors $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-100 \pm \sqrt{10'000 - 6400}}{-16} = \frac{-100 \pm 60}{-16}$

$$= \begin{cases} \frac{-100+60}{-16} = 2,5 \\ \frac{-100-60}{-16} = 10. \end{cases}$$

On peut alors établir le tableau de variation de D :

t	0		2,5		10		12
$D'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$D(t)$		↘		↗		↘	

avec $t = 0$,
$D'(t) = -200 < 0$

avec $t = 5$
$D'(t) = -8\cdot 5^2 + 100\cdot 5 - 200 = 100 > 0$

avec $t = 12$,
$D'(t) = -8\cdot 12^2 + 100\cdot 12 - 200 = -152 < 0$

Ainsi, la consommation a été décroissante entre $t = 0$ et $t = 2,5$, c'est-à-dire entre minuit et 2h30. Elle a été croissante entre $t = 2,5$ et $t = 10$, c'est-à-dire entre 2h30 et 10h. Elle a été décroissante entre $t = 10$ et $t = 12$, c'est-à-dire entre 10h et 12h.

c) D'après le tableau de variation de b), la demande minimale a été en $t = 2,5$, c'est-à-dire à <u>2h30</u>. La demande était alors $D(2,5) =$
$= -\frac{8}{3}\cdot 2,5^3 + 50\cdot 2,5^2 - 200\cdot 2,5 + 3000 = \underline{\underline{2770,83 \text{ mégaWatts}}}$.

d) D'après le tableau de variation de b), la demande maximale a été en $t = 10$, c'est-à-dire à <u>10h</u>. La demande était alors $D(10) =$
$= -\frac{8}{3}\cdot 10^3 + 50\cdot 10^2 - 200\cdot 10 + 3000 = \underline{\underline{3333,33 \text{ mégawatts}}}$.

e) Un point d'inflexion est un t tel que $D''(t)=0$.
On a $D'(t) = -8t^2+100t-200$.
Ainsi $D''(t) = (D'(t))' = -8\cdot 2t + 100\cdot 1 - 0 = -16t+100$.
$D''(t) = 0 \Rightarrow -16t+100=0 \Rightarrow 16t = 100 \Rightarrow t = 6{,}25$.
Par conséquent, il y a eu un point d'inflexion en $t = 6{,}25$, c'est-à-dire à <u>6h15</u>.
A cette heure-là, la demande était $D(6{,}25) =$
$= -\frac{8}{3}\cdot 6{,}25^3 + 50\cdot 6{,}25^2 - 200\cdot 6{,}25 + 3000 =$ <u>3052,08 mégawatts.</u>

Problème 3

On a $f(x)=\dfrac{8x}{x^2-4x+4}$

a) Les exclus du domaine de définition sont les x tels que $x^2-4x+4=0$.
C'est une équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=-4$ et $c=4$.
On a alors $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\dfrac{4}{2}=2$.
Ainsi, le seul exclu est $x=2$.
Par conséquent, il y a une asymptote verticale en $x=2$.

De plus, comme le degré du numérateur vaut 1, alors que le degré du dénominateur vaut $2>1$, on sait que $y=0$ est asymptote horizontale.

b) Intersection avec l'axe x : on résoud $f(x)=0$ $(y=0)$:

$$\frac{8x}{x^2-4x+4}=0 \Rightarrow 8x=0 \Rightarrow x=0$$

$\Rightarrow$ point $(0;0)$

Intersection avec l'axe y : on pose $x=0 \Rightarrow f(x)=\dfrac{8\cdot 0}{0^2-4\cdot 0+4}=0$

$\Rightarrow$ point $(0;0)$

c) On a $f(x)=\dfrac{u}{v}$ avec $u=8x$ et $v=x^2-4x+4$.

Comme $u'=8$ et $v'=2x-4$, on obtient

$$f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{8\cdot(x^2-4x+4)-8x\cdot(2x-4)}{(x^2-4x+4)^2}=$$

$$=\frac{8x^2-32x+32-16x^2+32x}{(x^2-4x+4)^2}=\frac{-8x^2+32}{(x^2-4x+4)^2}.$$

Les extremas de f sont les x solutions de $f'(x)=0$.

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-8x^2+32}{(x^2-4x+4)^2}=0 \Rightarrow -8x^2+32=0 \Rightarrow 8x^2=32$$

$$\Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=2 \text{ ou } x=-2.$$

Or, comme $x=2$ est un exclu, l'unique extrema de f est en $x=-2$.

Avec $x=-2$, on a $f(x)=\dfrac{8\cdot(-2)}{(-2)^2-4\cdot(-2)+4}=\dfrac{-16}{4+8+4}=\dfrac{-16}{16}=-1$

Ainsi, l'unique extrema de f est en $(-2;-1)$.

d) On peut construire le tableau de variation:

x		-2		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$/\!/\!/$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$/\!/\!/$	$\searrow$

avec $x=-3$, $f'(x) = \dfrac{-8\cdot(-3)^2+32}{(\quad)^2} < 0$

avec $x=0$, $f'(x) = \dfrac{32}{4^2} > 0$

avec $x=3$, $f'(x) = \dfrac{-8\cdot 3^2+32}{(\quad)^2} < 0$

e) De manière générale, l'équation de la tangente au graphe de f en $x=a$ est donnée par $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Ici, on a $a=4$, $f(a) = \dfrac{8\cdot 4}{4^2-4\cdot 4+4} = \dfrac{32}{4} = 8$ et

$$f'(4) = \frac{-8\cdot 4^2+32}{(4^2-4\cdot 4+4)^2} = \frac{-128+32}{4^2} = \frac{-96}{16} = -6.$$

Ainsi, l'équation de la tangente est $y = -6(x-4)+8$.

Comme $y = -6(x-4)+8 = -6x+24+8 = -6x+32$, on en conclut que l'équation de la tangente est $\underline{\underline{y = -6x+32}}$.