Lycée Denis-de-Rougemont

Exercice de révision

Mathématiques niveau 2

NOMBRES COMPLEXES

Corrigés des exercices

Exercice 1

a) $z^4 = 8-8\sqrt{3}i$: on doit chercher les racines 4^e de $8-8\sqrt{3}i$; on a $8-8\sqrt{3}i = r\operatorname{cis}\varphi$ avec $r=\sqrt{8^2+(-8\sqrt{3})^2} = \sqrt{64+192} = \sqrt{256} = 16$ et $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-8\sqrt{3}}{8}\right) = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -60°$; ainsi $8-8\sqrt{3}i = 16\operatorname{cis}(-60°) = 16\operatorname{cis}(300°)$; les racines 4^e de $8-8\sqrt{3}i$ sont alors :

$z_1 = \sqrt[4]{16}\operatorname{cis}\left(\frac{300°}{4}\right) = 2\operatorname{cis}(75°) = 2(\cos(75°)+i\sin(75°)) = 2\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i$;

$z_2 = \sqrt[4]{16}\operatorname{cis}\left(\frac{300°}{4}+\frac{1\cdot 360°}{4}\right) = \sqrt[4]{16}\operatorname{cis}(75°+90°) = \sqrt[4]{16}\operatorname{cis}(165°) = 2(\cos(165°)+i\sin(165°)) = 2\left(-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right) = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i$;

$z_3 = \sqrt[4]{16}\operatorname{cis}\left(\frac{300°}{4}+\frac{2\cdot 360°}{4}\right) = \sqrt[4]{16}\operatorname{cis}(75°+180°) = \sqrt[4]{16}\operatorname{cis}(255°) = 2(\cos(255°)+i\sin(255°)) = 2\left(-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i\right) = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i$;

$z_4 = \sqrt[4]{16}\operatorname{cis}\left(\frac{300°}{4}+\frac{3\cdot 360°}{4}\right) = \sqrt[4]{16}\operatorname{cis}(75°+270°) = \sqrt[4]{16}\operatorname{cis}(345°) = 2(\cos(345°)+i\sin(345°)) = 2\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i$.

Ainsi les solutions de $z^4 = 8-8\sqrt{3}i$ sont :

$z_1 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i = 0{,}52+1{,}93i$,

$z_2 = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i = -1{,}93+0{,}52i$,

$z_3 = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i = -0{,}52-1{,}93i$ et

$z_4 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i = 1{,}93-0{,}52i$.

b) $z^2+i(z-1)+\frac{7}{4} = 2z \Rightarrow z^2+zi-i+\frac{7}{4} = 2z \Rightarrow z^2-2z+zi+\frac{7}{4}-i = 0$

$\Rightarrow z^2+(-2+i)z+\frac{7}{4}-i = 0$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $az^2+bz+c=0$ avec $a=1$, $b=-2+i$ et $c=\frac{7}{4}-i$; on a

$\Delta = b^2-4ac = (-2+i)^2-4\cdot1\cdot\left(\frac{7}{4}-i\right) = (4-4i+i^2)-7+4i = 4\cancel{-4i}-i-7\cancel{+4i} = -3-i$; on doit chercher les racines carrés de Δ ;

on a $\Delta = -3-i = r\operatorname{cis}\varphi$ avec $r = \sqrt{(-3)^2+(-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ et

$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{-3}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 18{,}435°$; ainsi $\Delta = \sqrt{10}\operatorname{cis}(18{,}435°)$;

les racines carrées de Δ sont alors données par:

$\sqrt{\sqrt{10}}\ cis\left(\frac{18,435°}{2}\right) = \sqrt[4]{10}\ cis\,(9,22°) = \sqrt[4]{10}\left(\cos(9,22°) + i\sin(9,22°)\right) =$

$= 1,755 + 0,285i$ et

$\sqrt{\sqrt{10}}\ cis\left(\frac{18,435°}{2} + \frac{360°}{2}\right) = \sqrt[4]{10}\ cis\,(189,22°) =$

$= \sqrt[4]{10}\left(\cos(189,22°) + i\sin(189,22°)\right) = -1,755 - 0,285i$;

On peut donc prendre $\sqrt{\Delta} = 1,755 + 0,285i$;

les solutions de l'équation de départ sont alors:

$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-i+1,755+0,285i}{2} = \frac{3,755-0,715i}{2} = 1,878 - 0,358i$ et

$z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-i-1,755-0,285i}{2} = \frac{0,245-1,285i}{2} = 0,122 - 0,642i$.

c) $z^4 = -8-8\sqrt{3}i$: on doit chercher les racines 4^e de $-8-8\sqrt{3}i$; on a $-8-8\sqrt{3}i = r\,cis(\varphi)$

avec $r = \sqrt{(-8)^2 + (-8\sqrt{3})^2} = \sqrt{64+192} = \sqrt{256} = 16$ et

$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-8\sqrt{3}}{-8}\right) = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60°$; ainsi $-8-8\sqrt{3}i = 16\,cis\,(60°)$;

les racines 4^e de $-8-8\sqrt{3}i$ sont alors:

$z_1 = \sqrt[4]{16}\ cis\left(\frac{60°}{4}\right) = 2cis(15°) = 2\left(\cos(15°) + i\sin(15°)\right) =$

$= 2\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i$;

$z_2 = \sqrt[4]{16}\ cis\left(\frac{60°}{4} + \frac{1\cdot 360°}{4}\right) = 2cis\,(15°+90°) = 2cis\,(105°) =$

$= 2\left(\cos(105°) + i\sin(105°)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i\right) =$

$= -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i$;

$z_3 = \sqrt[4]{16}\ cis\left(\frac{60°}{4} + \frac{2\cdot 360°}{4}\right) = 2cis\,(15°+180°) = 2cis\,(195°) =$

$= 2\left(\cos(195°) + i\sin(195°)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right) =$

$= -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i$;

$z_4 = \sqrt[4]{16}\ cis\left(\frac{60°}{4} + \frac{3\cdot 360°}{4}\right) = 2cis\,(15°+270°) = 2cis\,(285°) =$

$= 2\left(\cos(285°) + i\sin(285°)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i\right) =$

$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i$.

Ainsi les solutions de $z^4 = -8-8\sqrt{3}i$ sont:

$z_1 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i = 1,93 + 0,52i$,

$z_2 = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i = -0,52 + 1,93i$,

$z_3 = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i = -1,93 - 0,52i$ et

$z_4 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i = 0,52 - 1,93i$.

d) $z^6 + 1 = 0 \implies z^6 = -1$: on doit chercher les racines 6^e de -1 ; on a $-1 = cis\,(180°)$,

les racines 6^e de -1 sont alors:

$z_1 = cis\left(\frac{180°}{6}\right) = cis\,(30°) = \cos(30°) + i\sin(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$;

$z_2 = cis\left(\frac{180°}{6} + 1\cdot\frac{360°}{6}\right) = cis\,(30°+60°) = cis\,(90°) = i$;

$z_3 = \text{cis}\left(\frac{180°}{6} + \frac{2 \cdot 360°}{6}\right) = \text{cis}(30° + 120°) = \text{cis}(150°) = \cos(150°) + i\sin(150°) =$
$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$;
$z_4 = \text{cis}\left(\frac{180°}{6} + \frac{3 \cdot 360°}{6}\right) = \text{cis}(30° + 180°) = \text{cis}(210°) = \cos(210°) + i\sin(210°) =$
$= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$;
$z_5 = \text{cis}\left(\frac{180°}{6} + \frac{4 \cdot 360°}{6}\right) = \text{cis}(30° + 240°) = \text{cis}(270°) = -i$;
$z_6 = \text{cis}\left(\frac{180°}{6} + \frac{5 \cdot 360°}{6}\right) = \text{cis}(30° + 300°) = \text{cis}(330°) = \cos(330°) + i\sin(330°) =$
$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.
Les solutions de $z^6 = -1$ sont donc:
$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_2 = i$, $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, $z_5 = -i$ et
$z_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

e) $z^6 + 19z^3 - 216 = 0$: en posant $w = z^3$, cette équation devient $w^2 + 19w - 216 = 0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $aw^2 + bw + c = 0$ avec $a = 1$, $b = 19$ et $c = -216$; on a $\Delta = b^2 - 4ac = 19^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-216) =$
$= 361 + 864 = 1225$ et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1225} = 35$; les solutions de $w^2 + 19w - 216 = 0$ sont donc $w_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-19 + 35}{2 \cdot 1} = \frac{16}{2} = 8$ et
$w_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-19 - 35}{2} = -\frac{54}{2} = -27$; les solutions de $z^6 + 19z^3 - 216 = 0$ seront alors les solutions de $z^3 = 8$ et de $z^3 = -27$;

$z^3 = 8$: on a $8 = 8\,\text{cis}(0°)$; ainsi les racines cubiques de 8 sont:
$z_1 = \sqrt[3]{8}\,\text{cis}\left(\frac{0°}{3}\right) = 2\,\text{cis}(0°) = 2$;
$z_2 = \sqrt[3]{8}\,\text{cis}\left(\frac{0°}{3} + \frac{1 \cdot 360°}{3}\right) = 2\,\text{cis}(120°) = 2(\cos(120°) + i\sin(120°)) =$
$= 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + \sqrt{3}i$;
$z_3 = \sqrt[3]{8}\,\text{cis}\left(\frac{0°}{3} + \frac{2 \cdot 360°}{3}\right) = 2\,\text{cis}(240°) = 2(\cos(240°) + i\sin(240°)) =$
$= 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 - \sqrt{3}i$.
$z^3 = -27$: on a $-27 = 27\,\text{cis}(180°)$; ainsi les racines cubiques de -27 sont:
$z_4 = \sqrt[3]{27}\,\text{cis}\left(\frac{180°}{3}\right) = 3\,\text{cis}(60°) = 3(\cos(60°) + i\sin(60°)) = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$
$= \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$;
$z_5 = \sqrt[3]{27}\,\text{cis}\left(\frac{180°}{3} + \frac{1 \cdot 360°}{3}\right) = 3\,\text{cis}(60° + 120°) = 3\,\text{cis}(180°) = -3$;
$z_6 = \sqrt[3]{27}\,\text{cis}\left(\frac{180°}{3} + \frac{2 \cdot 360°}{3}\right) = 3\,\text{cis}(60° + 240°) = 3\,\text{cis}(300°) =$
$= 3(\cos(300°) + i\sin(300°)) = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$;
ainsi les solutions de $z^6 + 19z^6 - 216 = 0$ sont:
$z_1 = 2$, $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$, $z_3 = -1 - \sqrt{3}i$, $z_4 = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$, $z_5 = -3$ et
$z_6 = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$.

f) $z^4+(1+i)z^2+i=0$: en posant $w=z^2$, cette équation s'écrit $w^2+(1+i)w+i=0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $aw^2+bw+c=0$ avec $a=1$, $b=1+i$ et $c=i$; on a $\Delta=b^2-4ac=(1+i)^2-4\cdot1\cdot i=$
$=1+2i+i^2-4i=1+2i-1-4i=-2i$; on doit chercher $\sqrt{\Delta}$, autrement dit les racines carrées de $-2i$; on a $-2i=2\,\text{cis}(270°)$;
ainsi les racines carrées de $-2i$ sont :

$\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{270°}{2}\right)=\sqrt{2}\,\text{cis}(135°)=\sqrt{2}\left(\cos(135°)+i\sin(135°)\right)=$
$=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-\frac{2}{2}+\frac{2}{2}i=-1+i$ et

$\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{270°}{2}+180°\right)=\sqrt{2}\,\text{cis}(135°+180°)=\sqrt{2}\,\text{cis}(315°)=$
$=\sqrt{2}\left(\cos(315°)+i\sin(315°)\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\frac{2}{2}-\frac{2}{2}i=$
$=1-i$;

on va prendre $\sqrt{\Delta}=1-i$; les solutions de $w^2+(1+i)w+i$ sont alors :

$w_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-i+1-i}{2\cdot1}=\frac{-2i}{2}=-i$ et
$w_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-i-1+i}{2}=\frac{-2}{2}=-1$;

les solutions de $z^4+(1+i)z^2+i=0$ seront alors les solutions de $z^2=-i$ et $z^2=-1$;

$z^2=-i$: on a $-i=\text{cis}(270°)$; ainsi les racines carrées de $-i$ sont

$z_1=\text{cis}\left(\frac{270°}{2}\right)=\text{cis}(135°)=\cos(135°)+i\sin(135°)=$
$=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ et

$z_2=\text{cis}\left(\frac{270°}{2}+180°\right)=\text{cis}(135°+180°)=\text{cis}(315°)=$
$=\cos(315°)+i\sin(315°)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$;

$z^2=-1$: on a $-1=\text{cis}(180°)$; ainsi les racines carrées de -1 sont

$z_3=\text{cis}\left(\frac{180°}{2}\right)=\text{cis}(90°)=i$ et
$z_4=\text{cis}\left(\frac{180°}{2}+180°\right)=\text{cis}(90°+180°)=\text{cis}(270°)=-i$;

ainsi les solutions de $z^4+(1+i)z^2+i=0$ sont :

$z_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_3=i$ et $z_4=-i$.

Exercice 2

a) On a $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ avec $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

1) On doit montrer que $p(\overline{z}) = \overline{p(z)}$.

On va tout d'abord montrer que : a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;

b) $\overline{az} = a\overline{z}$ avec $a \in \mathbb{R}$;

c) $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

a) Posons $z_1 = x_1 + y_1 i$ et $z_2 = x_2 + y_2 i$.

On a $\overline{z_1 + z_2} = \overline{x_1 + y_1 i + x_2 + y_2 i} = \overline{x_1 + x_2 + (y_1 + y_2) i} = x_1 + x_2 - (y_1 + y_2) i =$

$= x_1 - y_1 i + x_2 - y_2 i = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

b) Posons $z = x + yi$.

On a $\overline{az} = \overline{a(x+yi)} = \overline{ax + ayi} = ax - ayi = a(x - yi) = a\overline{z}$.

c) Montrons que $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ par récurrence.

Pour $n = 1$, on a clairement $\overline{z^1} = \overline{z} = \overline{z}^1$.

Supposons le résultat vrai pour n et montrons-le pour $n+1$.

On a $\overline{z}^{n+1} = \overline{z}^n \cdot \overline{z}$. Comme on suppose le résultat vrai pour n, autrement dit que $\overline{z}^n = \overline{z^n}$, on obtient $\overline{z}^{n+1} = \overline{z^n} \cdot \overline{z}$.

Posons $z = x + yi$ et $z^n = u + vi$. On a $\overline{z} = x - yi$ et $\overline{z^n} = u - vi$.

Ainsi $\overline{z}^{n+1} = (u - vi)(x - yi) = ux - uyi - vix + vyi^2 =$

$= ux - uyi - vix - vy = ux - vy - (uy + vx) i =$

$= \overline{ux - vy + (uy + vx) i} = \overline{ux + uyi + vxi - vy} =$

$= \overline{ux + uyi + vxi + vyi^2} = \overline{(u + vi)(x + yi)} = \overline{z^n \cdot z} = \overline{z^{n+1}}$.

On peut maintenant montrer que $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$:

$\overline{p(z)} = \overline{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_1} \overset{a)}{=} \overline{a_n z^n} + \dots + \overline{a_1 z} + \overline{a_1} \overset{b)}{=}$

$= a_n \overline{z^n} + \dots + a_1 \overline{z} + a_1$ ($\overline{a_1} = a_1$ puisque $a_1 \in \mathbb{R}$) $\overset{c)}{=}$

$= a_n \overline{z}^n + \dots + a_1 \overline{z} + a_1 = p(\overline{z})$.

2) Soit z_0 un zéro de $p(z)$. On a donc $p(z_0) = 0$.

Or, en utilisant 1), on a $p(\overline{z_0}) = \overline{p(z_0)} = \overline{0} = 0$.

Ainsi $\overline{z_0}$ est aussi un zéro de $p(z)$.

b) On a $p(z) = z^4 + z^3 + z^2 + 2$.

1) Vérifions que $z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ est un zéro de $p(z)$, autrement dit que $p(z_1) = 0$:

on a : $z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, $z_1^2 = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1 + 2i\sqrt{3} + 3i^2}{4} = \frac{1 + 2i\sqrt{3} - 3}{4} = \frac{-2 + 2\sqrt{3}i}{4} =$

$= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, $z_1^3 = z_1^2 \cdot z_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} = \frac{-1^2 + (\sqrt{3}i)^2}{4} = \frac{-1 - 3}{4} = -1$,

$z_1^4 = z_1^3 \cdot z_1 = -1 \cdot \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$; on a alors:

$p(z_1) = z_1^4 + z_1^3 + z_1^2 + 2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} - 1 + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} + 2 =$

$= \frac{-1-i\sqrt{3}-2-1+\sqrt{3}i+4}{2} = \frac{0}{2} = 0.$

Ainsi $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ est bien un zéro de $p(z)$.

2) D'après 1), si z_1 est un zéro de $p(z)$, alors $z_2 = \overline{z_1} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ est aussi un zéro de $p(z)$.

On peut donc écrire $p(z) = (z-z_1)(z-z_2)q(z) =$

$= \left(z - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) q(z)$ où $q(z)$ est un polynôme de degré 2.

On a $\left(z - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) = \left(z - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(z - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$

$= \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = z^2 - z + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}i^2 = z^2 - z + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} =$

$= z^2 - z + 1.$

Cherchons $q(z)$. $q(z)$ est le quotient de $p(z)$ par $z^2 - z + 1$:

$$
\begin{array}{r|l}
z^4 + z^3 + z^2 + 2 & z^2 - z + 1 \\
\hline
-(z^4 - z^3 + z^2) & z^2 + 2z + 2 \\
\hline
2z^3 + 2 & \\
-(2z^3 - 2z^2 + 2z) & \\
\hline
2z^2 - 2z + 2 & \\
-(2z^2 - 2z + 2) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

On obtient ainsi $p(z) = \left(z - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)(z^2 + 2z + 2)$.

Reste à factoriser $z^2 + 2z + 2$.

Cherchons les solutions de $z^2 + 2z + 2 = 0$, ce qui est une équation du 2^e de la forme $az^2 + bz + c = 0$ avec $a = 1$, $b = 2$ et $c = 2$; on a $\Delta = b^2 - 4ac =$ $= 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$ et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = 2i$; les solutions de $z^2 + 2z + 2 = 0$ sont ainsi $z_3 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+2i}{2 \cdot 1} = -1 + i$ et

$z_4 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-2i}{2 \cdot 1} = -1 - i.$

Les zéros de $p(z)$ sont donc:

$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = -1+i$ et $z_4 = -1-i$.

3) D'après 2), on obtient la décomposition suivante pour $p(z)$:

$$p(z) = \left(z - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)(z+1-i)(z+1+i)$$

(puisque $q(z) = (z-(-1+i))(z-(-1-i)) = (z+1-i)(z+1+i)$).

Exercice 3

On doit résoudre $z^3 - (11+2i)z^2 + 2(17+7i)z - 42 = 0$.

On commence par montrer qu'elle a une solution réelle z_1 : $z_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow z_1 = x$.

Avec $z_1 = x$, l'équation s'écrit $x^3 - (11+2i)x^2 + 2(17+7i)x - 42 = 0$

$\Rightarrow x^3 - 11x^2 - 2x^2 i + 34x + 14xi - 42 = 0$

$\Rightarrow x^3 - 11x^2 + 34x - 42 + (-2x^2 + 14x)i = 0$

On doit donc avoir $x^3 - 11x^2 + 34x - 42 = 0$ et $-2x^2 + 14x = 0$.

De la 2e relation, on obtient $x^2 - 7x = 0 \Rightarrow x(x-7) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 7$.

$x = 0$ n'est pas solution de $x^3 - 11x^2 + 34x - 42 = 0$.

$x = 7$ est solution de $x^3 - 11x^2 + 34x - 42 = 0$: $7^3 - 11.7^2 + 34.7 - 42 =$

$= 343 - 539 + 238 - 42 = 0$.

On en conclut que $z_1 = 7$ est solution de $z^3 - (11+2i)z^2 + 2(17+7i)z - 42 = 0$.

Divisons $z^3 - (11+2i)z^2 + 2(17+7i)z - 42$ par $z - 7$:

$$
\begin{array}{l|l}
z^3 - (11+2i)z^2 + (34+14i)z - 42 & z - 7 \\
\hline
-(z^3 - 7z^2) & z^2 - (4+2i)z + 6 \\
\quad -(4+2i)z^2 + (34+14i)z - 42 & \\
\quad -(-(4+2i)z^2 + (28+14i)z) & \\
\qquad 6z - 42 & \\
\qquad -(6z - 42) & \\
\qquad 0 &
\end{array}
$$

On a ainsi $z^3 - (11+2i)z^3 + (34+14i)z - 42 = (z-7)(z^2 - (4+2i)z + 6)$.

On doit encore chercher les solutions de $z^2 - (4+2i)z + 6 = 0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $az^2 + bz + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -(4+2i)$ et $c = 6$; on a $\Delta = b^2 - 4ac = (-(4+2i))^2 - 4.1.6 = 16 + 16i + 4i^2 - 24 =$

$= 16 + 16i - 4 - 24 = -12 + 16i$; on doit chercher $\sqrt{\Delta}$, autrement dit les racines carrées de Δ ; on a $\Delta = -12 + 16i = r \operatorname{cis} \varphi$ avec $r = \sqrt{(-12)^2 + 16^2} =$

$= \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20$ et $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{16}{-12}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right) = -53,13° + 180° =$

$= 126,87°$; les racines de Δ sont alors :

$\sqrt{20} \operatorname{cis}\left(\frac{126,87°}{2}\right) = 2\sqrt{5}\left(\cos(63,43°) + i\sin(63,43°)\right) = 2 + 4i$ et

$\sqrt{20} \operatorname{cis}\left(\frac{126,87°}{2} + 180°\right) = 2\sqrt{5}\left(\cos(243,43°) + i\sin(243,43°)\right) = -2 - 4i$;

on peut ainsi prendre $\sqrt{\Delta} = 2 + 4i$ et les solutions de $z^2 - (4+2i)z + 6 = 0$ sont :

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 2i + 2 + 4i}{2} = \frac{6 + 6i}{2} = 3 + 3i \text{ et}$$

$$z_3 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 2i - 2 - 4i}{2} = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i.$$

Par conséquent, les solutions de $z^3 - (11+2i)z^3 + 2(17+7i)z - 42 = 0$ sont :

$z_1 = 7$,

$z_2 = 3+3i$,

$z_3 = 1-i$.

Reste à calculer les modules et les arguments de ces solutions :

$z_1 = 7$: module $= r = 7$;

argument $= \varphi = 0°$;

$z_2 = 3+3i$: module $= r = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$;

argument $= \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{3}{3}\right) = \tan^{-1}(1) = 45°$;

$z_3 = 1-i$: module $= r = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$;

argument $= \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right) = \tan^{-1}(-1) = -45° = 315°$.

Exercice 4

On a $w = f(z) = 2iz + 2$.

a) Considérons tout d'abord la fonction $f_1(z) = iz$.

On a $i = cis(90°)$. Posons $z = r cis(\varphi)$.

Ainsi $iz = cis(90°) \cdot r cis(\varphi) = r\big(\cos(90°) + i\sin(90°)\big)\big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big) =$

$= r\big(\cos(90°)\cos(\varphi) + i\cos(90°)\sin(\varphi) + i\sin(90°)\cos(\varphi) - \sin(90°)\sin(\varphi)\big) =$

$= r\Big(\underbrace{\cos(90°)\cos(\varphi) - \sin(90°)\sin(\varphi)}_{\cos(90°+\varphi)} + i\big(\underbrace{\cos(90°)\sin(\varphi) + \sin(90°)\cos(\varphi)}_{\sin(90°+\varphi)}\big)\Big) =$

$= r\big(\cos(90°+\varphi) + i\sin(90°+\varphi)\big) = r cis(90°+\varphi)$.

Ainsi f_1 est une rotation de centre O et de $90°$.

Considérons la fonction $f_2(z) = 2z$.

En posant $z = r cis(\varphi)$, on a $f_2(z) = 2r cis(\varphi) = (2r) cis(\varphi)$.

Ainsi f_2 est une homothétie de centre O et de facteur 2.

Finalement, considérons la fonction $f_3(z) = z + 2$.

En posant $z = x + iy$, on a $f_3(z) = x + iy + 2 = (x+2) + iy$.

Ainsi f_3 est une translation de vecteur $\vec{t} = \binom{2}{0}$.

Comme f est la composition de f_1, f_2 et f_3 ($f_3 \circ f_2 \circ f_1$), on a bien que f est la composition d'une rotation de centre O et d'angle $\alpha = 90°$, d'une homothétie de centre O et de facteur $k = 2$ et encore d'une translation de vecteur $\vec{t} = \binom{2}{0}$.

b) Un point fixe de f est un z tel que $f(z) = z$.

$f(z) = z \Rightarrow 2iz + 2 = z \Rightarrow 2iz - z = -2 \Rightarrow (2i-1)z = -2$

$\Rightarrow z = \frac{-2}{2i-1} = \frac{-2(2i+1)}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{-4i-2}{4i^2-1^2} = \frac{-4i-2}{-4-1} = \frac{-4i-2}{-5} = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$.

Le point fixe de f est donc $z = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$.

c) Image de $y = 1$: On pose $z = x + iy$; avec $y = 1$, on a $z = x + i$; ainsi

$f(z) = 2iz + 2 = 2i(x+i) + 2 = 2ix + 2i^2 + 2 = 2ix - 2 + 2 = 2xi$;

ainsi l'image de $y = 1$ est la droite $2xi$, ce qui correspond à l'axe verticale.

Image de $x = 2$: on pose $z = x + iy$; avec $x = 2$, on a $z = 2 + iy$; ainsi

$f(z) = 2iz + 2 = 2i(2+iy) + 2 = 4i + 2i^2y + 2 = 4i - 2y + 2 =$

$= -2y + 2 + 4i$; en posant $f(z) = u + iv$, on a $u = -2y + 2$ et $v = 4$;

ainsi l'image de $x = 2$ est la droite horizontale d'ordonnée 4.

Exercice 5

On a $f(z)=\frac{z-1}{z+1}$.

a) L'axe réel s'écrit $y=0$. Posons $z=x+iy$. On a alors $z=x$. Ainsi

$f(z)=\frac{x-1}{x+1}$, ce qui est un nombre réel. Ainsi l'image de l'axe réel est l'axe réel.

b) L'axe imaginaire s'écrit $x=0$. Posons $z=x+iy$. On a alors $z=iy$. Ainsi

$$f(z)=\frac{iy-1}{iy+1}=\frac{(iy-1)^2}{(iy+1)(iy-1)}=\frac{-y^2-2yi+1}{-y^2-1}=\frac{-y^2+1}{-y^2-1}+\frac{-2y}{-y^2-1}i=\frac{y^2-1}{y^2+1}+\frac{2y}{y^2+1}i.$$

En posant $f(z)=u+iv$, on a $u=\frac{y^2-1}{y^2+1}$ et $v=\frac{2y}{y^2+1}$.

On a $u^2+v^2=\left(\frac{y^2-1}{y^2+1}\right)^2+\left(\frac{2y}{y^2+1}\right)^2=\frac{y^4-2y^2+1}{(y^2+1)^2}+\frac{4y^2}{(y^2+1)^2}=\frac{y^4+2y^2+1}{(y^2+1)^2}=\frac{(y^2+1)^2}{(y^2+1)^2}=1.$

On a donc $u^2+v^2=1$, ce qui est l'équation du cercle de centre 0 et de rayon 1.

Ainsi l'image de l'axe imaginaire est le cercle de centre 0 et de rayon 1.

c) En posant $f(z)=u+iv$, l'ensemble des z tels que $f(z)$ soit purement imaginaire est l'ensemble des z tels que $u=0$.

Posons $z=x+iy$, on a $f(z)=\frac{x+iy-1}{x+iy+1}=\frac{(x-1+iy)(x+1-iy)}{(x+1+iy)(x+1-iy)}=\frac{x^2\cancel{+x}-\cancel{ixy}\cancel{-x}-1+iy+\cancel{ixy}+iy+y^2}{(x+1)^2+y^2}=$

$$=\frac{x^2+y^2-1+2iy}{(x+1)^2+y^2}=\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}+\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}i.$$

Ainsi $u=\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}$ et $v=\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}$.

Comme on veut $u=0$, on a $\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}=0 \Longrightarrow x^2+y^2-1=0 \Longrightarrow x^2+y^2=1$, cercle de centre 0 et de rayon 1.

Ainsi l'ensemble des z tels que $f(z)$ soit purement imaginaire est le cercle de centre 0 et de rayon 1.

d) Les points fixes de f sont les z tels que $f(z)=z$.

$f(z)=z \Longrightarrow \frac{z-1}{z+1}=z \Longrightarrow z-1=z(z+1) \Longrightarrow z-1=z^2+z \Longrightarrow -1=z^2 \Longrightarrow z=\pm\sqrt{-1}=\pm i.$

Les points fixes de f sont donc $z=i$ et $z=-i$.

e) On a $f\circ f(z)=f(f(z))=f\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=\dfrac{\frac{z-1}{z+1}-1}{\frac{z-1}{z+1}+1}=\dfrac{\frac{z-1-z-1}{z+1}}{\frac{z-1+z+1}{z+1}}=\dfrac{\frac{-2}{z+1}}{\frac{2z}{z+1}}=$

$$=\frac{-2}{z+1}:\frac{2z}{z+1}=\frac{-\cancel{2}^{1}}{\cancel{z+1}_{1}}\cdot\frac{\cancel{z+1}^{1}}{\cancel{2}z_{1}}=-\frac{1}{z}.$$ Ainsi $f\circ f(z)=-\frac{1}{z}$.

Exercice 6

a) $z^2-2z+1-8i=0$ est une équation du 2e degré de la forme $az^2+bz+c=0$ avec $a=1$, $b=-2$ et $c=1-8i$.

On a $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot1\cdot(1-8i)=4-4+32i=32i$.

On doit chercher $\sqrt{\Delta}$, c'est-à-dire les racines carrées de $32i$.

On a $32i=32\operatorname{cis}(90°)$. Ainsi les racines carrées de $32i$ sont:

$\sqrt{32}\operatorname{cis}\left(\frac{90°}{2}\right)=4\sqrt{2}\operatorname{cis}(45°)=4\sqrt{2}\left(\cos(45°)+i\sin(45°)\right)=4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=$

$=\frac{4.2}{2}+\frac{4.2}{2}i=4+4i$ et

$\sqrt{32}\operatorname{cis}\left(\frac{90°}{2}+180°\right)=4\sqrt{2}\operatorname{cis}(225°)=4\sqrt{2}\left(\cos(225°)+i\sin(225°)\right)=4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=$

$=-\frac{4.2}{2}-\frac{4.2}{2}i=-4-4i$.

On peut donc prendre $\sqrt{\Delta}=4+4i$.

Les solutions de $z^2-2z+1-8i=0$ sont alors:

$$z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+4+4i}{2\cdot1}=\frac{6+4i}{2}=3+2i \quad \text{et}$$

$$z_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-4-4i}{2\cdot1}=\frac{-2-4i}{2}=-1-2i.$$

b) On a $f(z)=2z-i$.

1) Les points invariants (ou fixes) de f sont les z tels que $f(z)=z$.

$f(z)=z \implies 2z-i=0 \implies z-i=0 \implies z=i$.

Ainsi le point fixe de f est donc $z=i$.

La fonction $f_1(z)=2z$ est une homothétie de centre 0 et de facteur 2.

La fonction $f_2(z)=z-i$ est une translation de vecteur $\vec{t}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$.

Comme f est la composition de f_1 et f_2 $(f_2\circ f_1)$, on en conclut que f est une homothétie de centre 0 et de facteur 2 suivie d'une translation de vecteur $\vec{t}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$.

2) On pose $z_0=1-i$.

On a: $z_1=f(z_0)=2z_0-i=2(1-i)-i=2-2i-i=2-3i$;

$z_2=f(z_1)=2z_1-i=2(2-3i)-i=4-6i-i=4-7i$;

$z_3=f(z_2)=2z_2-i=2(4-7i)-i=8-14i-i=8-15i$;

$z_4=f(z_3)=2z_3-i=2(8-15i)-i=16-30i-i=16-31i$; etc.

Montrons par récurrence que $z_n=2^n-(2^{n+1}-1)i$, $n\in\mathbb{N}$.

Pour $n=1$, on a bien $z_1=2^1-(2^{1+1}-1)i=2-(2^2-1)i=2-(4-1)i=2-3i$.

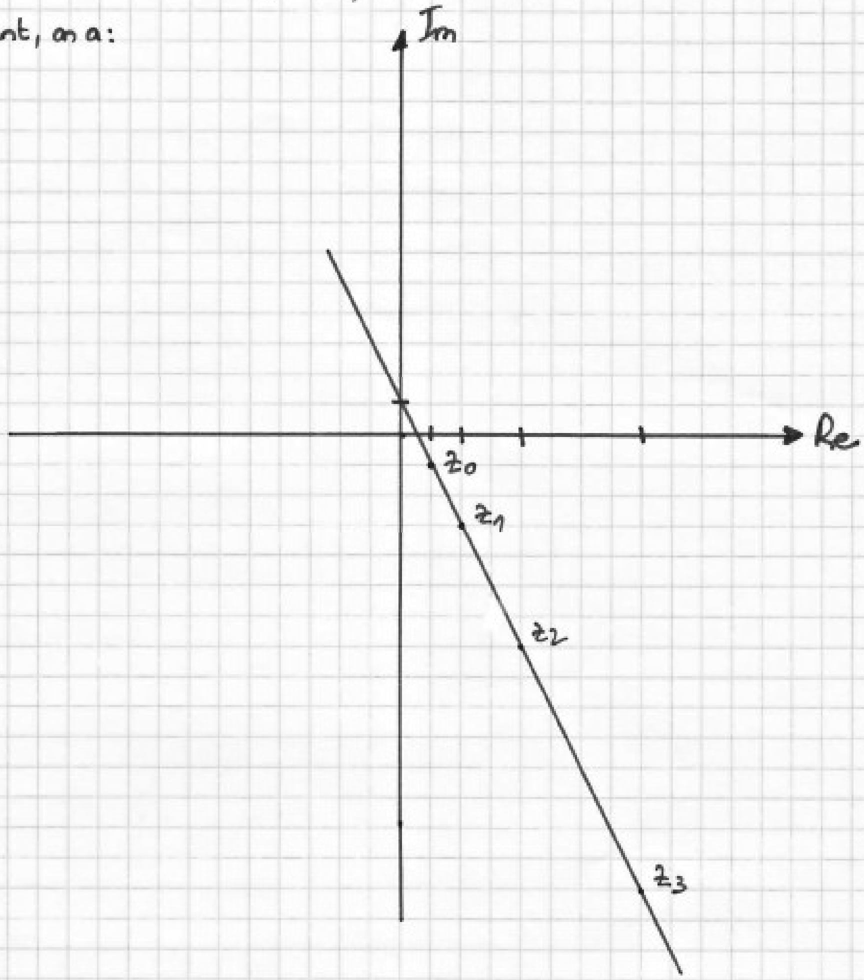
Supposons le résultat vrai pour n et montrons-le pour $n+1$:

On a $z_{n+1}=f(z_n)=2z_n-i$; par hypothèse de récurrence $z_n=2^n-(2^{n+1}-1)i$;

ainsi $z_{n+1} = 2\left(2^n - (2^{n+1}-1)i\right) - i = 2^{n+1} - (2^{n+2}-2)i - i =$
$= 2^{n+1} - (2^{n+2}-2+1)i = 2^{n+1} - (2^{(n+1)+1}-1)i.$

Ainsi, on a bien $z_n = 2^n - (2^{n+1}-1)i$.

Géométriquement, on a:



Algébriquement, on a : $z_0 = 1 - i$, $z_1 = 2 - 3i$ et $z_n = 2^n - (2^{n+1}-1)i$;
on va chercher l'équation de la droite passant par z_0 et z_1, puis montrer que z_n appartient à cette droite pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le point dans le plan euclidien correspondant à z_0 est $(1;-1)$.

Le point dans le plan euclidien correspondant à z_1 est $(2;-3)$.

La pente de la droite passant par $(1;-1)$ et $(2;-3)$ est $\frac{-3-(-1)}{2-1} = \frac{-3+1}{1} = -2$.

L'équation de la droite passant par $(1;-1)$ et $(2;-3)$ est donc $y = -2x + b$.

Avec le point $(1;-1)$, on obtient $-1 = -2\cdot 1 + b \Rightarrow -1 = -2 + b \Rightarrow b = 1$.

L'équation de la droite passant par z_0 et z_1 est donc $y = -2x+1$.

Le point dans le plan euclidien correspondant à z_n est $(2^n; -2^{n+1}+1)$.

On a, pour ce point, $-2x+1 = -2\cdot 2^n + 1 = -2^{n+1} + 1 = y$.

Ainsi, tous les nombres $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ appartiennent bien à une droite dont l'équation est $y = -2x+1$.

Exercice 7

On a $w = f(z) = z^2 + z + 1$.

a) Les nombres complexes dont l'image est $w = 6+5i$ sont les z tels que $f(z) = 6+5i$, c'est-à-dire $z^2+z+1 = 6+5i$, d'où $z^2+z+(-5-5i) = 0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $az^2+bz+c=0$ avec $a=1$, $b=1$ et $c=-5-5i$.
On a $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-5-5i) = 1+20+20i = 21+20i$.
On doit chercher $\sqrt{\Delta}$, autrement dit les racines carrées de $21+20i$.
On a $21+20i = r\,\text{cis}(\varphi)$ avec $r = \sqrt{21^2+20^2} = \sqrt{441+400} = \sqrt{841} = 29$ et $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{20}{21}\right) \cong 43{,}6°$. Les racines carrées de $21+20i$ sont alors:
$\sqrt{29}\,\text{cis}\left(\frac{43{,}6°}{2}\right) = \sqrt{29}\left(\cos(21{,}8°) + i\sin(21{,}8°)\right) = 5+2i$ et
$\sqrt{29}\,\text{cis}\left(\frac{43{,}6°}{2}+180°\right) = \sqrt{29}\left(\cos(201{,}8°)+i\sin(201{,}8°)\right) = -5-2i$.
On peut donc prendre $\sqrt{\Delta} = 5+2i$.
Ainsi les solutions de $z^2+z+(-5-5i)=0$ sont:

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+5+2i}{2\cdot 1} = \frac{4+2i}{2} = 2+i \quad \text{et}$$
$$z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-5-2i}{2\cdot 1} = \frac{-6-2i}{2} = -3-i.$$

Par conséquent, les nombres complexes dont l'image est $w = 6+5i$ sont:
$z_1 = 2+i$ et $z_2 = -3-i$.

b) On a $z_1 \neq z_2$ avec $f(z_1) = f(z_2)$ (z_1 et z_2 ne sont pas les mêmes que dans a)).
Posons $w = f(z)$. On a alors $z^2+z+1 = w \Rightarrow z^2+z+1-w = 0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $az^2+bz+c=0$ avec $a=1$, $b=1$ et $c=1-w$. On a $\Delta = b^2-4ac = 1^2 - 4\cdot 1(1-w) = 1-4+4w = 4w-3$. Ainsi les solutions de $z^2+z+1-w=0$ sont

$$z = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1\pm\sqrt{4w-3}}{2\cdot 1} = \frac{-1\pm\sqrt{4w-3}}{2}.$$

Ainsi pour avoir $f(z_1) = f(z_2)$ avec $z_1 \neq z_2$, on doit prendre une fois le + et une fois le moins : $z_1 = \frac{-1+\sqrt{4w-3}}{2}$ et $z_2 = \frac{-1-\sqrt{4w-3}}{2}$.

On a alors $z_1 + z_2 = \frac{-1+\sqrt{4w-3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{4w-3}}{2} = -1$.

c) On veut $f(z)$ réel. Si on pose $f(z) = u+iv$, cela signifie que $v=0$.
Posons $z = x+iy$, on a alors $f(z) = (x+iy)^2 + x+iy+1 = x^2+2xyi-y^2+x+yi+1 =$
$= x^2-y^2+x+1+(2xy+y)i$. Comme $f(z) = u+iv$, on doit avoir
$u = x^2-y^2+x+1$ et $v = 2xy+y$. Avec $v=0$, on obtient $2xy+y=0$.

$2xy+y=0 \Rightarrow y(2x+1)=0 \Rightarrow$ soit $y=0$, soit $2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$.
Ainsi les nombres complexes $z=x+iy$ tels que $f(z)$ soit réel sont les points des droites $y=0$ et $x=-\frac{1}{2}$.

d) On a $f(2+i)=(2+i)^2+2+i+1=4+4i-1+2+i+1=6+5i$.
On doit montrer que 1, $2+i$ et $6+5i$ sont alignés.
Dans le plan euclidien, 1 correspond au point $A(1;0)$, $2+i$ correspond au point $B(2;1)$ et $6+5i$ au point $C(6;5)$.
On a $\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}$.
De plus $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$.
Comme $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=5\overrightarrow{AB}$, on en déduit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont parallèles, ce qui signifie que A, B et C sont parallèles.
Par conséquent, 1, $2+i$ et $f(2+i)$ sont alignés.

Exercice 8

a) On a l'équation $z^3+(-1+12i)z^2+(-87-9i)z+18-306i=0$ et on sait qu'elle admet une solution purement imaginaire $z_1=yi$.

Avec $z_1=yi$ dans l'équation, on obtient :

$$(yi)^3+(-1+12i)(yi)^2+(-87-9i)yi+18-306i=0$$
$$\Rightarrow\ y^3i^3+(-1+12i)y^2i^2(-87-9i)yi+18-306i=0$$
$$\Rightarrow\ -y^3i-(-1+12i)y^2+(-87-9i)yi+18-306i=0$$
$$\Rightarrow\ -y^3i+y^2-12y^2i-87yi-9yi^2+18-306i=0$$
$$\Rightarrow\ -y^3i+y^2-12y^2i-87yi+9y+18-306i=0$$
$$\Rightarrow\ y^2+9y+18+(-y^3-12y^2-87y-306)i=0$$

On a donc $y^2+9y+18=0$ et $-y^3-12y^2-87y-306=0$.

La 1^e relation est une équation du 2^e degré de la forme $ay^2+by+c=0$ avec $a=1$, $b=9$ et $c=18$. On a $\Delta=b^2-4ac=9^2-4\cdot1\cdot18=81-72=9$ et $\sqrt{\Delta}=3$. Les solutions sont donc $y_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-9+3}{2\cdot1}=\frac{-6}{2}=-3$ et $y_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-9-3}{2\cdot1}=\frac{-12}{2}=-6$.

Avec $y_1=-3$, on a $-y_1^3-12y_1^2-87y_1-306=-(-3)^3-12(-3)^2-87\cdot(-3)-306=$
$=27-108+261-306=-126\neq0$.

Avec $y_2=-6$, on a $-y_2^3-12y_2^2-87y_2-306=-(-6)^3-12(-6)^2-87\cdot(-6)-306=$
$=216-432+522-306=0$.

Ainsi $z_1=y_2i=-6i$ est une solution de l'équation de départ.

Effectuons la division de $z^3+(-1+12i)z^2+(-87-9i)z+18-306i$ par $z+6i$:

$$\begin{array}{rl|l}
 & z^3+(-1+12i)z^2+(-87-9i)z+18-306i & z+6i \\ \hline
 -(& z^3+6iz^2) & z^2+(-1+6i)z-51-3i \\ \hline
 & (-1+6i)z^2+(-87-9i)z+18-306i & \\
 -(& (-1+6i)z^2+(-36-6i)z) & \\ \hline
 & (-51-3i)z+18-306i & \\
 -(& (-51-3i)z+18-306i) & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

Ainsi on a $z^3+(-1+12i)z^2+(-87-9i)z+18-306i=(z+6i)(z^2+(-1+6i)z-51-3i)$.

L'équation de départ peut donc s'écrire $(z+6i)(z^2+(-1+6i)z-51-3i)=0$ et il reste donc à trouver les solutions de $z^2+(-1+6i)z-51-3i=0$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $az^2+bz+c=0$ avec $a=1$, $b=-1+6i$ et $c=-51-3i$. On a $\Delta=b^2-4ac=$
$=(-1+6i)^2-4\cdot1\cdot(-51-3i)=1-12i-36+204+12i=169$ et $\sqrt{\Delta}=13$. Ainsi les solutions de $z^2+(-1+6i)z-51-3i=0$ sont :

$z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-6i+13}{2\cdot 1} = \frac{14-6i}{2} = 7-3i$ et $z_3 = \frac{1-6i-13}{2} = \frac{-12-6i}{2} = -6-3i.$

Ainsi les solutions de $z^3+(-1+12i)z^2+(-87-9i)z+18-306i=0$ sont $z_1=-6i$, $z_2=7-3i$ et $z_3=-6-3i$.

b) On a $f(z) = \frac{(-1+i)z+(3-i)\overline{z}}{2}$

1) les points fixes de f sont les z tels que $f(z)=z$: $\frac{(-1+i)z+(3-i)\overline{z}}{2} = z$

$\Rightarrow (-1+i)z+(3-i)\overline{z} = 2z.$

En posant $z=x+yi$, on a $\overline{z}=x-yi$, l'équation devient :

$(-1+i)(x+yi)+(3-i)(x-yi) = 2(x+yi)$

$\Rightarrow -x-yi+\cancel{xi}-y+3x-3yi-\cancel{xi}-y = 2x+2yi$

$\Rightarrow 2x-2y-4yi = 2x+2yi$

$\Rightarrow -2y-4yi = 2yi$

$\Rightarrow -2y-6yi = 0$

$\Rightarrow y(-2-6i)=0 \Rightarrow y=0.$

Ainsi les points fixes de f sont les $z\in\mathbb{R}$.

2) On a $z_1=-6i$, $z_2=7-3i$ et $z_3=-6-3i$.

On a $f(z_1) = \frac{(-1+i)(-6i)+(3-i)6i}{2} = \frac{6i+6+18i+6}{2} = \frac{12+24i}{2} = 6+12i,$

$f(z_2) = \frac{(-1+i)(7-3i)+(3-i)(7+3i)}{2} = \frac{-7+3i+7i+3+21+9i-7i+3}{2} =$

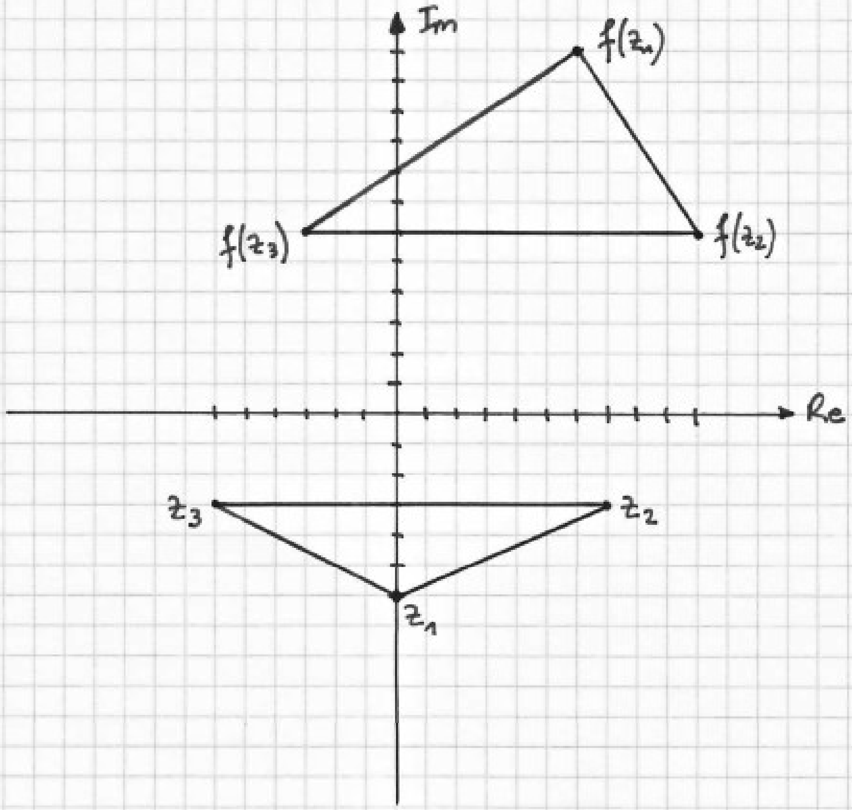
$= \frac{20+12i}{2} = 10+6i,$

$f(z_3) = \frac{(-1+i)(-6-3i)+(3-i)(-6+3i)}{2} = \frac{6+3i-6i+3-18+9i+6i+3}{2} =$

$= \frac{-6+12i}{2} = -3+6i.$

Les sommets du triangle obtenu sont donc $f(z_1)=6+12i$, $f(z_2)=10+6i$ et $f(z_3)=-3+6i$.

Dessin :



3) On a $z_1 = -6i$ et $f(z_1) = 6+12i$. Ainsi $f(z_1) - z_1 = 6+12i+6i = 6+18i$.
Posons $z = x+yi$. On a $\bar{z} = x-yi$.
On a $f(z) = \dfrac{(-1+i)z+(3-i)\bar{z}}{2} = \dfrac{(-1+i)(x+yi)+(3-i)(x-yi)}{2} =$

$$= \frac{-x-yi+\cancel{xi}-y+3x-3yi-\cancel{xi}-y}{2} = \frac{2x-2y-4yi}{2} = x-y-2yi.$$

Ainsi $f(z) - z = \cancel{x}-y-2yi-\cancel{x}-yi = -y-3yi = (-1-3i)y = -(1+3i)y = -\frac{1}{6}(6+18i)y =$

$$= -\frac{1}{6}y \cdot (6+18i).$$

Par conséquent $f(z)-z$ est bien un multiple de $6+18i = f(z_1)-z_1$.

4) Géométriquement, puisque les points fixes de f sont les $z \in \mathbb{R}$ (axe réel), f peut être vue comme une symétrie d'axe réel, suivie d'une translation de vecteur $\binom{3}{0}$ suivie d'une transformation affine de rapport 2 selon l'axe imaginaires.

Exercice 9

On a $f(z) = az$, $a \in \mathbb{C}$

a) $f\left(\frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{9}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4}i \implies a\left(\frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{9}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4}i$

$$\implies a = \frac{\frac{9}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4}i}{\frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i} = \frac{\left(\frac{9}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4}i\right)\left(\frac{9}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)}{\left(\frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{9}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)} =$$

$$= \frac{\frac{81}{8} - \frac{27\sqrt{3}}{8}i + \frac{81\sqrt{3}}{8}i - \frac{27\cdot 3}{8}i^2}{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 i^2} = \frac{\frac{81}{8} + \frac{54\sqrt{3}}{8}i + \frac{81}{8}}{\frac{81}{4} + \frac{9\cdot 3}{4}} =$$

$$= \frac{\frac{162}{8} + \frac{54\sqrt{3}}{8}i}{\frac{81}{4} + \frac{27}{4}} = \frac{\frac{81}{4} + \frac{27\sqrt{3}}{4}i}{\frac{108}{4}} = \frac{\frac{81}{4} + \frac{27\sqrt{3}}{4}i}{27} =$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i.$$

Ainsi $a = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$.

b) 1. Le rapport d'homothétie est module$(a) = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{12}{16}} =$

$= \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

L'angle de rotation est argument $(a) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}/4}{3/4}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 30°$.

On a $z_0 = 6$, $z_1 = g(z_0)$, $z_2 = g(z_1)$, ..., $z_n = g(z_{n-1})$, ...

2. $z_1 = g(z_0) = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\cdot z_0 = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\cdot 6 = \frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$;

$z_2 = g(z_1) = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\cdot z_1 = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\cdot\left(\frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{27}{8} + \frac{9\sqrt{3}}{8}i + \frac{9\sqrt{3}}{8}i + \frac{9}{8}i^2 =$

$= \frac{27}{8} + \frac{9\sqrt{3}}{4}i - \frac{9}{8} = \frac{9}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4}i$;

$z_3 = g(z_2) = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_2 = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\cdot\left(\frac{9}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4}i\right) = \frac{27}{16} + \frac{27\sqrt{3}}{16}i + \frac{9\sqrt{3}}{16}i + \frac{27}{16}i^2 =$

$= \frac{27}{16} + \frac{9\sqrt{3}}{4}i - \frac{27}{16} = \frac{9\sqrt{3}}{4}i$;

$z_4 = g(z_3) = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_3 = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\frac{9\sqrt{3}}{4}i = \frac{27\sqrt{3}}{16}i + \frac{27}{16}i^2 = -\frac{27}{16} + \frac{27\sqrt{3}}{16}i$; etc.

Regardons ce qu'il se passe avec les formes trigonométriques.

On a $a = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i = r\,\mathrm{cis}\,\varphi$ avec $r = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{12}{16}} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}/4}{3/4}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 30°$; ainsi $a = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{cis}\,(30°)$.

De plus $z_0 = 6 = 6\,\mathrm{cis}(0°)$.

Ainsi $z_1 = g(z_0) = a\cdot z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{cis}(30°)\cdot 6\operatorname{cis}(0°) = 6\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{cis}(30°)$;

$z_2 = g(z_1) = a\cdot z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{cis}(30°)\cdot 6\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{cis}(30°) = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\operatorname{cis}(2\cdot 30°)$;

$z_3 = g(z_2) = a\cdot z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{cis}(30°)\cdot 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\operatorname{cis}(2\cdot 30°) = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\operatorname{cis}(3\cdot 30°)$; etc.

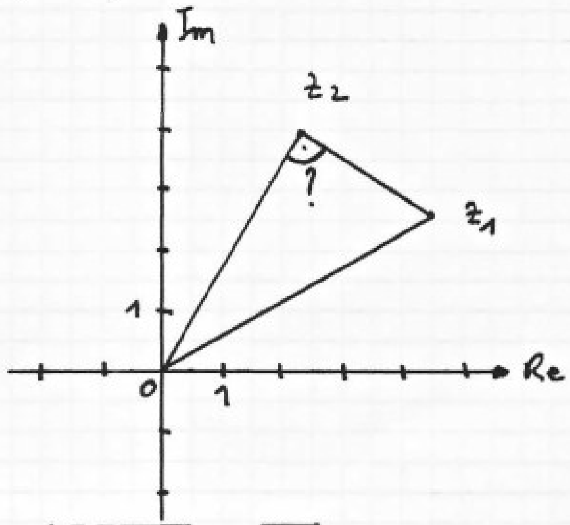
On en déduit que $z_9 = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^9\operatorname{cis}(9\cdot 30°) = 6\,\frac{((\sqrt{3})^2)^4\sqrt{3}}{512}\operatorname{cis}(270°) =$

$= 6\cdot\frac{81\sqrt{3}}{512}\left(\cos(270°)+i\sin(270°)\right) = \frac{243\sqrt{3}}{512}(0-i) = -i\,\frac{243\sqrt{3}}{512}$ et que

$z_n = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\operatorname{cis}(n\cdot 30°)$.

3. On a $z_1 = \frac{9}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$ et $z_2 = \frac{9}{4}+\frac{9\sqrt{3}}{4}i$.

Géométriquement:



On a: $|z_1| = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{4}+\frac{27}{4}} = \sqrt{\frac{108}{4}} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$;

$|z_2| = \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)+\left(\frac{9\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{16}+\frac{243}{16}} = \sqrt{\frac{324}{16}} = \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$;

$z_2 - z_1 = \frac{9}{4}+\frac{9\sqrt{3}}{4}i - \frac{9}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i = -\frac{9}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}i$;

$|z_2 - z_1| = \sqrt{\left(-\frac{9}{4}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{16}+\frac{27}{16}} = \sqrt{\frac{108}{16}} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$;

$|z_2|^2 + |z_2 - z_1|^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}+\frac{27}{4} = \frac{108}{4} = 27 = \left(\sqrt{27}\right)^2 =$

$= \left(3\sqrt{3}\right)^2 = |z_1|^2$.

Ainsi le triangle Oz_1z_2 est rectangle.

On a $z_{k-1} = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k-1}\operatorname{cis}((k-1)30°)$ et $z_k = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k\operatorname{cis}(k\cdot 30°)$.

L'angle entre z_1 et z_2 est de $30°$: $k\cdot 30° - (k-1)\cdot 30° = 30°$.

Montrons que l'angle en z_k est $90°$.

Pour cela, dans le plan, on va montrer que $\overrightarrow{Oz_k}$ et $\overrightarrow{Oz_k} - \overrightarrow{Oz_{k-1}}$ sont perpendiculaire, autrement dit que $\overrightarrow{Oz_k}\cdot\left(\overrightarrow{Oz_k} - \overrightarrow{Oz_{k-1}}\right) = 0$.

On a $\overrightarrow{Oz_k} = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k \begin{pmatrix} \cos(k30°) \\ \sin(k30°) \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{Oz_{k-1}} = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k-1} \begin{pmatrix} \cos((k-1)30°) \\ \sin((k-1)30°) \end{pmatrix}$.

Ainsi $\overrightarrow{Oz_k} - \overrightarrow{Oz_{k-1}} = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k-1} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(k30°) - \cos((k-1)30°) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(k30°) - \sin((k-1)30°) \end{pmatrix}$ et

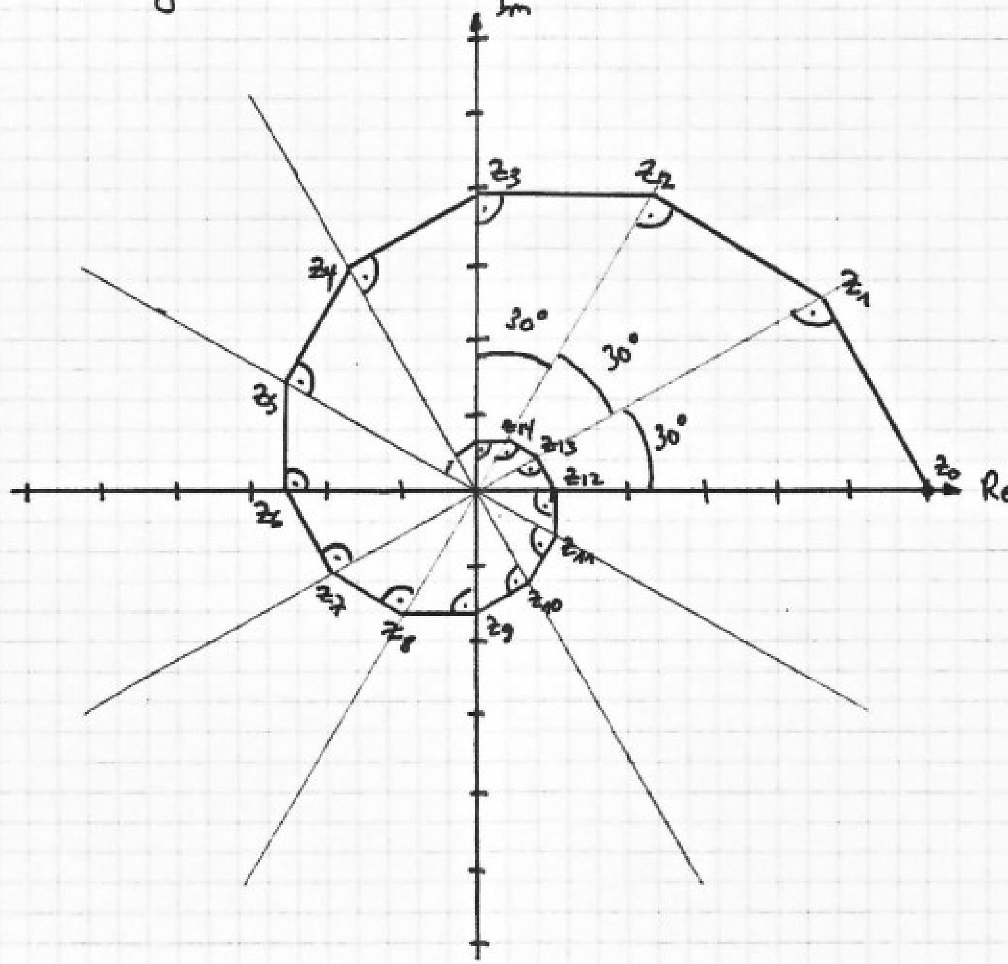
$$\overrightarrow{Oz_k} \cdot \overrightarrow{Oz_{k-1}} = 36\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2k-1} \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2(k30°) - \cos(k30°)\cos((k-1)30° + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2(k30°) - \sin(k30°)\sin((k-1)30°) \Big).$$

Or $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2(k30°) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2(k\cdot 30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos^2(k30°) + \sin^2(k\cdot 30°)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et

$$-\cos(k30°)\cos((k-1)30°) - \sin(k30°)\sin((k-1)30°) =$$
$$= -\left(\cos(k30°)\cos((k-1)30° + \sin(k30°)\sin((k-1)30°)\right) =$$
$$= -\cos(k\cdot 30° - (k-1)30°) = -\cos(30°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Par conséquent $\overrightarrow{Oz_k} \cdot \overrightarrow{Oz_{k-1}} = 36\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2k-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$ et le triangle Oz_kz_{k-1} est rectangle en z_k.

4.



5. On a $z_0 = 6$ et $z_1 = \frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$.

La longueur du segment d'extrémités z_0 et z_1 est

$$|z_1 - z_0| = \left|\frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i - 6\right| = \left|-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{27}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = \sqrt{9} = 3.$$

On doit calculer $L = \sum_{k=1}^{\infty} |z_k - z_{k-1}|$.

D'après e), dans le plan, on a $\overrightarrow{Oz_k} - \overrightarrow{Oz_{k-1}} = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k-1}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(k30°) - \cos((k-1)30°) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(k30°) - \sin((k-1)30°) \end{pmatrix}$.

On a alors: $|z_k - z_{k-1}|^2 = \|\overrightarrow{Oz_k} - \overrightarrow{Oz_{k-1}}\|^2 =$

$= \left(6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k-1}\right)^2\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(k30°) - \cos((k-1)30°)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(k30°) - \sin((k-1)30°)\right)^2\right) =$

$= 36\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^{k-1}\left(\frac{3}{4}\cos^2(k30°) - \sqrt{3}\cos(k30°)\cos((k-1)30°) + \cos^2((k-1)30°) + \right.$
$\left. + \frac{3}{4}\sin^2(k30°) - \sqrt{3}\sin(k30°)\sin((k-1)30°) + \sin^2((k-1)30°)\right) =$

$= 36\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{3}{4}(\cos^2(k30°) + \sin^2(k30°)) + \cos^2((k-1)30°) + \sin^2((k-1)30°)\right.$
$\left. - \sqrt{3}\left(\cos(k30°)\cos((k-1)30°) + \sin(k30°)\sin((k-1)30°)\right)\right) =$

$= 36\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{3}{4}\cdot 1 + 1 - \sqrt{3}\cos(k30° - (k-1)30°)\right) =$

$= 36\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{3}{4} + 1 - \sqrt{3}\cos(30°)\right) = 36\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{7}{4} - \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$= 36\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{7}{4} - \frac{3}{2}\right) = 36\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{4} = 9\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$.

Ainsi $|z_k - z_{k-1}| = \sqrt{9\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}} = 3\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k-1}{2}}$.

On obtient $L = \sum_{k=1}^{\infty} |z_k - z_{k-1}| = \sum_{k=1}^{\infty} 3\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k-1}{2}} = 3\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k-1}{2}}$.

On va séparer cette somme en 2 parties: pour k impairs et pour k pairs:

$L = 3\left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impairs}}}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k-1}{2}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pairs}}}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k-1}{2}}\right)$.

Si k est impairs, alors $\frac{k-1}{2}$ est la suite des nombres entiers naturels depuis 0.

Ainsi $\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impairs}}}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k-1}{2}} = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^i$.

Or, on sait que, si $|r| < 1$, $\sum_{i=0} r^i = \frac{1}{1-r}$.

Ici $r = \frac{3}{4} < 1$ et on a $\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impairs}}}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k-1}{2}} = \frac{1}{1 - 3/4} = \frac{1}{1/4} = 4$.

De plus $\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pairs}}}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k-1}{2}} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pairs}}}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k}{2}}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pairs}}}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k}{2}} =$

$= \left(\frac{4}{3}\right)^{1/2}\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pairs}}}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k}{2}} = \sqrt{\frac{4}{3}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k}{2}} =$

$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pairs}}}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^i$ puisque si k est pair, les $\frac{k}{2}$

forment la suite des entiers naturels depuis 1.

On a $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^i = \frac{1}{1-3/4} = 4$ (voir ci-dessus).

Ainsi $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^i = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^i - \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 4-1=3.$

On a donc $\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pairs}}}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k-1}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot 3 = 2\sqrt{3}.$

Finalement, on obtient $L = \sum_{k=1}^{\infty}|z_k - z_{k-1}| = 3\left(4+2\sqrt{3}\right) = 6(2+\sqrt{3}).$

Exercice 10

On a $f(z) = z^3 - 3iz^2 - 2z + 9i$

a) $f(z) = 9i \Rightarrow z^3 - 3iz^2 - 2z + 9i = 9i \Rightarrow z^3 - 3iz^2 - 2z = 0 \Rightarrow z(z^2 - 3iz - 2) = 0$
$\Rightarrow$ soit $z = 0$ (1^e solution), soit $z^2 - 3iz - 2 = 0$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $az^2 + bz + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -3i$ et $c = -2$. On a $\Delta =$
$= b^2 - 4ac = (-3i)^2 - 4.1.(-2) = 9i^2 + 8 = -9 + 8 = -1$ et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-1} = i$. Les solutions de $z^2 - 3iz - 2 = 0$ sont ainsi $z = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3i + i}{2 \cdot 1} = \frac{4i}{2} = 2i$ et
$z = \frac{3i - i}{2 \cdot 1} = \frac{2i}{2} = i$.
Ainsi les solutions de $f(z) = 9i$ sont $z = 0$, $z = i$ et $z = 2i$.
Les solutions sont clairement alignées puisqu'elles appartiennent les 3 à l'axe imaginaires.

b) Les points fixes de f sont les z tels que $f(z) = z$.
$f(z) = z \Rightarrow z^3 - 3iz^2 - 2z + 9i = z \Rightarrow z^3 - 3iz^2 - 3z + 9i = 0$.
On sait qu'un de ces z est sur l'axe imaginaire. Ainsi une des solutions de $z^3 - 3iz^2 - 3z + 9i = 0$ est de la forme $z_1 = yi$.
On doit alors avoir $(yi)^3 - 3i(yi)^2 - 3(yi) + 9i = 0$
$\Rightarrow y^3 i^3 - 3iy^2 i^2 - 3yi + 9i = 0$ avec $i^3 = i^2 \cdot i = -i$
$\Rightarrow -y^3 i + 3y^2 i - 3yi + 9i = 0 \Rightarrow -i(y^3 - 3y^2 + 3y - 9) = 0$
$\Rightarrow y^3 - 3y^2 + 3y - 9 = 0$.
Cherchons une première solution de cette dernière équation parmi les diviseurs positifs et négatifs de 9: $\pm 1, \pm 3, \pm 9$:
$y = 1$: $1^3 - 3.1^2 + 3.1 - 9 = 1 - 3 + 3 - 9 = -8 \neq 0$;
$y = -1$: $(-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 9 = -1 - 3 - 3 - 9 = -16 \neq 0$;
$y = 3$: $3^3 - 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - 9 = 27 - 27 + 9 - 9 = 0$.
Ainsi $y = 3$ est solution de $y^3 - 3y^2 + 3y - 9 = 0$ et, par conséquent $z_1 = 3i$ est solution de $z^3 - 3iz^2 - 3z + 9i = 0$.
Effectuons la division de $z^3 - 3iz^2 - 3z + 9i$ par $z - 3i$:

$$
\begin{array}{r|l}
z^3 - 3iz^2 - 3z + 9i & z - 3i \\
\hline
-(z^3 - 3iz^2) & z^2 - 3 \\
\hline
-3z + 9i & \\
-(-3z + 9i) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

On a ainsi $z^3 - 3iz^2 - 3z + 9i = (z - 3i)(z^2 - 3)$.

Il reste maintenant à chercher les zéros de z^2-3.

$z^2-3=0 \Rightarrow z^2=3 \Rightarrow z=\pm\sqrt{3}$.

On en conclut que les solutions de $f(z)=z$ (points fixes de f) sont:

$z_1=3i$, $z_2=\sqrt{3}$ et $z_3=-\sqrt{3}$.

Pour montrer que $z_1z_2z_3$ forme un triangle équilatéral, il faut montrer que

$|z_1-z_2|=|z_1-z_3|=|z_2-z_3|$.

On a: $|z_1-z_2|=|3i-\sqrt{3}|=\sqrt{3^2+3}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$,

$|z_1-z_3|=|3i+\sqrt{3}|=\sqrt{3^2+3}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$,

$|z_2-z_3|=|-\sqrt{3}-\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$.

Ainsi $z_1z_2z_3$ est bien un triangle équilatéral.

c) L'axe imaginaire est de la forme $x=0$ dans $z=x+yi$. On peut donc l'écrire $z=yi$.

Calculons $f(z)$ avec $z=yi$.

On a $f(yi)=(yi)^3-3i(yi)^2-2(yi)+9i=y^3i^3-3iy^2i^2-2yi+9i$ avec $i^3=i^2\cdot i=-i$.

Ainsi $f(yi)=-y^3i+3y^2i-2yi+9i=(-y^3+3y^2-2y+9)i$, qui est purement imaginaire, c'est-à-dire appartenant à l'axe imaginaire.

Par conséquent, l'axe imaginaire est une figure globalement invariante par f.

d) On cherche les points de l'axe réel dont les images par f sont sur l'axe imaginaire.

Les points de l'axe réel sont de la forme $z=x$ avec $x\in\mathbb{R}$.

On a $f(x)=x^3-3ix^2-2x+9i=x^3-2x+(-3x^2+9)i$.

Pour que $f(x)$ soit sur l'axe imaginaire, il faut que $x^3-2x=0$.

$x^3-2x=0 \Rightarrow x(x^2-2)=0 \Rightarrow$ soit $x=0$, soit $x^2-2=0 \Rightarrow x^2=2$

$\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$.

Les points de l'axe réel dont les images par f sont sur l'axe imaginaire sont

$z=0$, $z=\sqrt{2}$ et $z=-\sqrt{2}$

e) On doit trouver $f(z)$ avec $z=x+i$.

On a $f(x+i)=(x+i)^3-3i(x+i)^2-2(x+i)+9i=$

$=x^3+3x^2i+3xi^2+i^3-3i(x^2+2xi+i^2)-2x-2i+9i=$

$=x^3+\cancel{3x^2i}-3x-i-\cancel{3x^2i}-6xi^2-3i^3-2x+7i=$

$=x^3-3x-i+6x+3i-2x+7i=x^3-5x+9i$.

La partie réelle de $f(x+i)$ est donc x^3-5x et sa partie imaginaire est 9.

Cherchons l'image de la droite d'équation $y=1$.
Dans $z = x+yi$, $y=1$ donne $z = x+i$.
On a $f(x+i) = x^3 - 5x + 9i$.
Ainsi l'image de la droite d'équation $y=1$ est la droite d'équation $y=9$.