Lycée Denis-de-Rougemont
Neuchâtel et Fleurier

Mathématiques de niveau 1

Exercices de révision - PROBABILITES
CORRIGÉ

Rappel théorique:

Définition de la probabilité:

On appelle événement le résultat d'une expérience à caractère aléatoire, i.e. où le hasard entre en jeu (par exemple le lancé d'une pièce de monnaie).
La probabilité d'un événement est le nombre de chances que l'on a que l'événement se produise par rapport au nombre total des événements possibles. Cette probabilité se calcule de la manière suivante:

$$\text{probabilité que E se produise} = \frac{\text{nb de cas où E se produit}}{\text{nb de cas possibles}}.$$

On résume souvent cette définition en disant que la probabilité est le nombre de cas favorable sur le nombre de cas possibles.

Calculs de probabilités par comptage des cas:

Lorsqu'on veut appliquer la définition de probabilité ci-dessus, on doit calculer le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles.
Dans les cas simples (comme le lancement d'une ou deux pièces de monnaie ou le lancement de un ou deux dés), on peut facilement faire la liste exhaustive de toutes les possibilités et les compter, ce qui nous donne le nombre de cas possibles.
Dans la liste ainsi faite, on peut alors mettre en évidence les cas favorables, i.e. les cas qui répondent à la question de la probabilité et compter ces cas, ce qui nous donne alors le nombre de cas favorables. On peut alors en déduire la probabilité cherchée.
Lorsque le nombre de cas possibles devient trop grand, on ne peut alors plus écrire toutes les possibilités. On utilise alors des techniques de dénombrement de cas qui s'appelle analyse combinatoire.

Analyse combinatoire:

Il y a 3 sortes de situations différentes:
1) les permutations;
2) les combinaisons;
3) les arrangements.

Les permutations correspondent au nombre de manière possible de classer tous les éléments que l'on a à disposition.
Les combinaisons et les arrangements correspondent au nombre de possibilités de choisir une partie des éléments du tout, les combinaisons ne tenant pas compte de l'ordre du choix (pile-face est la même chose que face-pile), alors que les arrangements tiennent compte de l'ordre du choix (pile-face n'est pas la même chose que face-pile).
Dans chacune de ces possibilités, on peut aussi différencier les cas où on remet l'objet en question après l'avoir tiré (on dit alors "avec remise" ou "avec répétition") ou les cas où on ne remet pas l'objet après l'avoir tiré (on dit alors "sans remise" ou "sans répétition").
On a alors 6 situations différentes:
1a) les permutations sans répétition;
1b) les permutations avec répétition;
2a) les combinaisons sans répétition;
2b) les combinaisons avec répétition;
3a) les arrangement avec répétition;
3b) les arrangements sans répétition.
Dans chacun de ces cas, il existe une formule pour calculer le nombre de cas. Certaines d'entre elles utilisent la notion de factorielle.

Factorielle:
La factorielle d'un nombre n est définie par $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ et se note $n!$.
Ainsi $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.
A noter que $0! = 1$.

Permutations sans répétitions:
Si on classe dans un ordre particulier n éléments distincts, on forme une permutation sans répétitions (puisque tous les éléments sont distincts) de ces n éléments.
Le nombre P_n de permutations sans répétitions est : $P_n = n!$.

Permutations avec répétitions:
Si on classe dans un ordre particulier n éléments dont n_1 sont identiques de type 1, n_2 identiques de type 2, ..., n_p identiques de type p (on doit avoir $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n$), on forme une permutation avec répétitions de ces n

éléments.

Le nombre $\overline{P}(n_1, n_2, \ldots, n_p)$ de permutations avec répétitions est :

$$\overline{P}(n_1, n_2, \ldots, n_p) = \frac{n!}{n_1! \, n_2! \cdot \ldots \cdot n_p!}.$$

Combinaisons sans répétitions :

Si, parmi n éléments distincts, on choisit k éléments distincts (on doit avoir $k \leq n$) sans les classer dans un ordre particulier, on forme une combinaison sans répétitions de k éléments choisis parmi n éléments.

Le nombre C_k^n de combinaisons sans répétitions est :

$$C_k^n = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Ces nombres sont souvent utilisés et on les appelle coefficients binomiaux et on les écrit $\binom{n}{k}$ plutôt que C_k^n. Ils seront utilisés dans la loi binomiale (voir ci-dessous).

Remarquons que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et que $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

On peut calculer ces coefficients directement à la machine à calculer en utilisant la touche "nCr" qui se trouve derrière le "8".

Par exemple, pour calculer $\binom{9}{5}$, on procède comme suit :

9	2nd	8	5	=

126.

Combinaisons avec répétitions :

Si, parmi n éléments distincts, on choisit k éléments distincts ou non (on peut choisir plusieurs fois le même) sans les classer dans un ordre particulier, on forme une combinaison avec répétitions de k éléments choisis parmi n éléments.

Le nombre $\overline{C_k^n}$ de combinaisons avec répétitions est :

$$\overline{C_k^n} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}.$$

On remarque que $\overline{C_k^n} = \binom{n+k-1}{k}$ (voir la définition des coefficients binomiaux ci-dessus).

Arrangements sans répétitions :

Si, parmi n éléments distincts, on choisit k éléments distincts ($k \leq n$) en les classant dans un ordre particulier, on forme un arrangement sans répétitions de k éléments choisis parmi n éléments.

Le nombre A_k^n d'arrangement sans répétitions est :

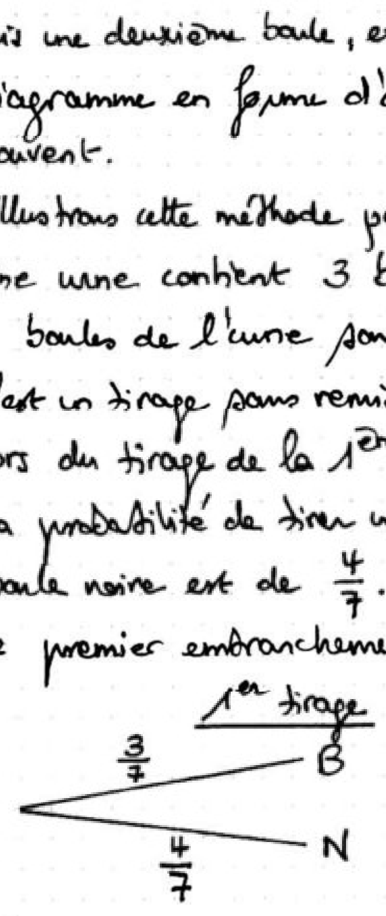
$$A_k^n = n\cdot(n-1)\cdot \ldots \cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Arrangements avec répétitions :

Si, parmi n éléments distincts, on choisit k éléments distincts ou non (on peut choisir plusieurs fois le même) en les classant dans un ordre particulier, on forme un arrangement avec répétitions de k éléments choisis parmi n éléments.
Le nombre $\overline{A_k^n}$ d'arrangements avec répétitions est : $\overline{A_k^n} = n^k$.

Arbres :

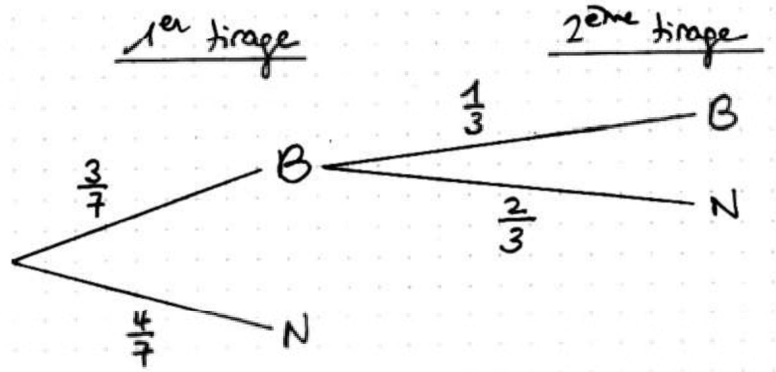
Quand on s'intéresse à des épreuves successives (on tire une boule d'une urne, puis une deuxième boule, etc.), on a avantage à représenter la situation par un diagramme en forme d'arbre. C'est une manière de faire que l'on utilise très souvent.
Illustrons cette méthode par un exemple :
Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On tire successivement 2 boules de l'urne sans les remettre dans l'urne une fois tirées (on dit que c'est un tirage sans remise).
Lors du tirage de la 1ère boule, on a 7 boules au total (3 blanches et 4 noires).
La probabilité de tirer une boule blanche est donc de $\frac{3}{7}$ et celle de tirer une boule noire est de $\frac{4}{7}$.
Le premier embranchement de l'arbre peut alors se symboliser comme suit :



B = boule blanche tirée
N = boule noire tirée

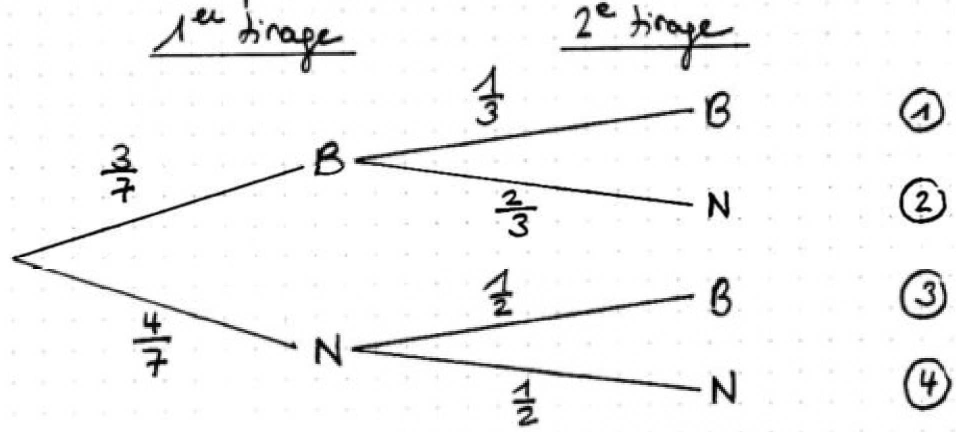
Passons maintenant au 2e tirage.
Si on a tiré une boule blanche au 1er tirage, il nous reste alors 6 boules (2 blanches et 4 noires), puisqu'on n'a pas remis la première boule tirée dans l'urne.
La probabilité de tirer alors une boule blanche est de $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
La probabilité de tirer une boule noire est de $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

L'arbre peut alors se continuer comme suit :



Si on a tiré une boule noire au 1er tirage, il nous reste alors 6 boules (3 blanches et 3 noires), puisqu'on n'a pas remis la première boule tirée dans l'urne.
La probabilité de tirer alors une boule blanche est de $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
La probabilité de tirer une boule noire est de $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

On peut alors compléter l'arbre:



On a alors 4 chemins différents:

chemin 1 : B – B
chemin 2 : B – N
chemin 3 : N – B
chemin 4 : N – N

Pour calculer la probabilité sur un de ces chemins, on va multiplier les nombres écrits le long de ses branches.
Par exemple, la probabilité d'obtenir 2 boules blanches (i.e. B-B), ce qui correspond au chemin 1, vaut $\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{7}$.

Lorsque la probabilité que l'on cherche concerne plusieurs chemins, on calcule la probabilité sur chaque chemin comme ci-dessus, puis on additionne les résultats obtenus.
Ainsi, par exemple, calculons la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur (soit B-B, soit N-N). Cela correspond aux

chemins 1 et 4 :

chemin 1 : $\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{7}$

chemin 4 : $\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{7}$.

Ainsi la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur est :

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}.$$

Probabilités conditionnelles :

Parfois on doit calculer une probabilité en sachant que quelque chose s'est produit. On utilisera cette technique à chaque fois que les termes "sachant que", "si on sait que", "si", etc., apparaissent.

On notera A l'événement dont on cherche la probabilité et B l'événement dont on sait qu'il s'est produit.

Par exemple, dans l'exemple décrit ci-dessus (§ Arbres), si on doit calculer la probabilité que la 1ère boule tirée soit blanche sachant que la deuxième boule tirée est noire, on a :

A = la 1ère boule tirée est blanche, et

B = la 2e boule tirée est noire.

Il faut toujours bien expliciter ces A et B avant d'aller plus loin.

En notant $p(\ldots)$ la probabilité et $p(A|B)$ la probabilité que A se passe sachant que B s'est passé, on a alors :

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)},$$

où $A \cap B$ est l'événement où A et B ont lieu ensemble.

Dans l'exemple, on a :

$A \cap B$ = la 1ère boule tirée est blanche et la 2e boule tirée est noire.

En utilisant l'arbre ci-dessus, cela correspond au chemin 2 et on a :

$$p(A \cap B) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{7}.$$

On calcule maintenant $P(B)$, i.e. la probabilité que la 2e boule tirée soit noire. Cela correspond aux chemins 2 et 4 dans l'arbre ci-dessus :

chemin 2 : $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{7}$

chemin 4 : $\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{7}$.

Ainsi $p(B) = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$.

On en déduit que $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/7}{4/7} = \frac{2}{7} : \frac{4}{7} = \frac{2}{7} \cdot \frac{7}{4} = \frac{1}{2}$.

Ainsi la probabilité que la $1^{ère}$ boule tirée soit blanche sachant que la deuxième boule tirée est noire est : $\frac{1}{2}$.

Remarques sur les probabilités:
La probabilité d'un événement est toujours supérieure ou égale à 0 et inférieure ou égale à 1.
Si la probabilité d'un événement est 0, alors l'événement ne se produit jamais (événement impossible).
Si la probabilité d'un événement est 1, alors l'événement se produit toujours (événement certain).

Loi binomiale:
Lorsqu'on répète n fois une expérience qui présente à chaque fois 2 issues possibles (l'événement A de probabilité p et l'événement contraire $\overline{A}$ de probabilité $q = 1-p$), la probabilité que l'événement A se produise k fois au cours des n épreuves est donnée par : $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ (où $q = 1-p$ et $\binom{n}{k}$ est un coefficient binomial). C'est la loi binomiale.

Premier exemple d'application de la loi binomiale:
On lance une pièce de monnaie 10 fois. Quelle est la probabilité que l'on obtienne 7 fois "face".
Ici A = obtenir face, $\overline{A}$ = obtenir pile, $p = \frac{1}{2}$, $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
Ainsi la probabilité d'obtenir 7 fois "face" est, selon la loi binomiale, donnée par: $\binom{10}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^{10-7} = \binom{10}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 120 \cdot \frac{1}{1024} = \frac{15}{128} \cong 0,117$.

Deuxième exemple d'application de la loi binomiale:
Combien de fois doit-on lancer un dé conventionnel à 6 faces pour que la probabilité d'obtenir à chaque fois autre chose que "1" soit supérieure à 99%.
La probabilité d'obtenir à chaque fois autre chose que "1" = 1 − la probabilité d'obtenir à chaque fois "1".
Ici A = obtenir 1, $\overline{A}$ = obtenir autre chose que "1", $p = \frac{1}{6}$, $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.
Donc la probabilité d'obtenir à chaque fois "1" est, selon la loi binomiale, donnée par: $\binom{n}{n}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-n} = \left(\frac{1}{6}\right)^n$, où n est le nombre de fois qu'on lance le dé.
Ainsi, la probabilité d'obtenir à chaque fois autre chose que "1" est donnée par $1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n$.
Cherchons n de telle manière que $1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0,99$ (= 99%).

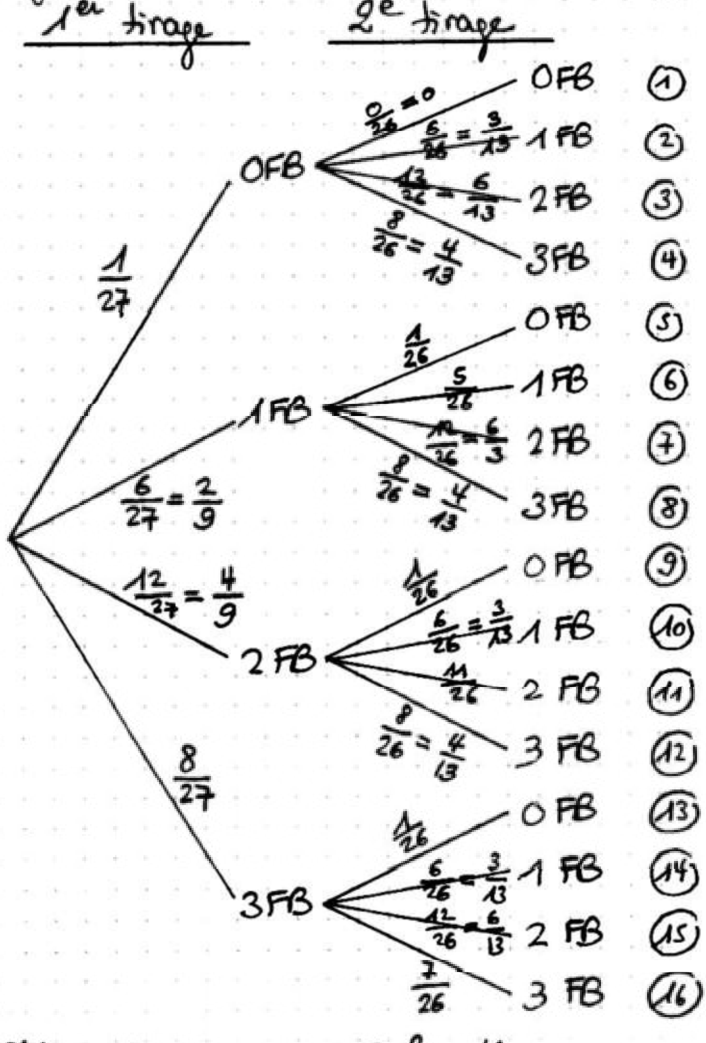
$1-\left(\frac{1}{6}\right)^n = 0{,}99$	$+\left(\frac{1}{6}\right)^n, -1$
$\left(\frac{1}{6}\right)^n = 0{,}01$	on applique log de chaque côté
$\log\left[\left(\frac{1}{6}\right)^n\right] = \log(0{,}01)$	propriété de log
$n \log\left(\frac{1}{6}\right) = \log(0{,}01)$	$: \log\left(\frac{1}{6}\right)$
$n = \dfrac{\log(0{,}01)}{\log(1/6)} \cong 2{,}57$	

Ainsi on doit lancer le dé au moins 3 fois (3 est l'entier immédiatement supérieur à 2,57).

Exercice 1

a) Le seul cube qui a zéro face bleue est celui du centre : 0 face bleue : 1 cube.
Les cubes ayant 1 face bleue sont ceux des milieux des faces, comme il y a 6 faces, on a :
1 face bleue : 6 cubes.
Les cubes ayant 2 faces bleues sont ceux des milieux des arêtes, comme il y a 12 arêtes, on a : 2 faces bleues : 12 cubes.
Les cubes ayant 3 faces bleues sont ceux des sommets, comme il y a 8 sommets, on a :
3 faces bleues : 8 cubes.
(On a bien au total : $1 + 6 + 12 + 8 = 27$ cubes).

b) On fait un arbre : FB = face(s) bleues



Obtenir 2 cubes ayant 3 faces bleues correspond à la ligne (16).
Ainsi la probabilité d'obtenir 2 cubes ayant 3 faces bleues est $\frac{8}{27} \cdot \frac{7}{26} = \frac{28}{351} \cong 0{,}0798 = 7{,}98\%$.

c) Pour obtenir un total des faces bleues égale à 2, on peut avoir :

1er tirage	2e tirage
0FB	2FB
1FB	1FB
2FB	0FB

ce qui correspond aux lignes 3, 6 et 9 de l'arbre ci-dessous.

Probabilité pour la ligne 3 $= \frac{1}{27} \cdot \frac{6}{13} = \frac{2}{117}$.

Probabilité pour la ligne 6 $= \frac{2}{9} \cdot \frac{5}{26} = \frac{5}{117}$.

Probabilité pour la ligne 9 $= \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{26} = \frac{2}{117}$.

Par conséquent, la probabilité d'obtenir un total de faces bleues égales à 6 est

$$\frac{2}{117} + \frac{5}{117} + \frac{2}{117} = \frac{9}{117} = \underline{\underline{\frac{1}{13}}} \cong 0,0769 = \underline{\underline{7,69\%}}.$$

d) Pour obtenir 18 faces bleues au cours de ces trois expériences, comme on a à chaque fois un maximum de 6 faces bleues possibles (3 + 3), on devra avoir à chaque fois 6 faces bleues (3 + 3).

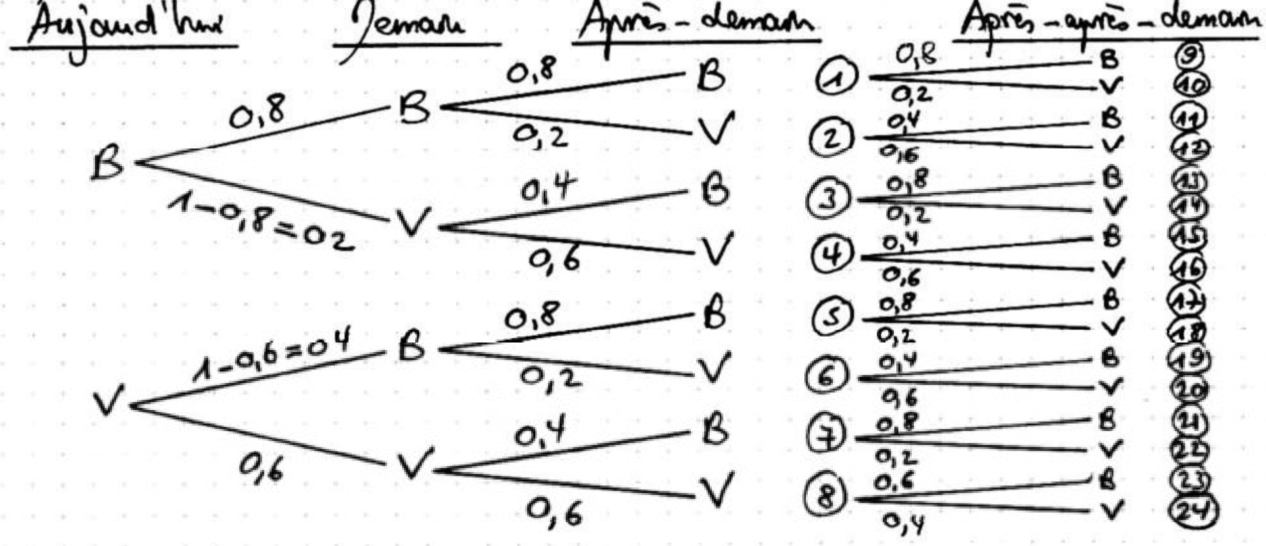
La probabilité d'obtenir 6 faces bleues (3+3) est, selon la question b), $\frac{28}{351}$.

La probabilité d'obtenir 18 faces bleues (6+6+6) est, donc,

$$\underbrace{\frac{28}{351}}_{\text{1ère expérience}} \cdot \underbrace{\frac{28}{351}}_{\text{2ème expérience}} \cdot \underbrace{\frac{28}{351}}_{\text{3ème expérience}} \cong 0,00051 = \underline{\underline{0,051\%}}.$$

Exercice 2

On peut construire l'arbre suivant : B = beau, V = vilain



a) S'il fait beau aujourd'hui, faire beau après-demain correspond aux lignes ① et ③.
Ainsi la probabilité qu'il fasse beau après-demain est :
$$0{,}8\cdot 0{,}8 + 0{,}2\cdot 0{,}4 = 0{,}64 + 0{,}08 = \underline{\underline{0{,}72 = 72\%}}.$$

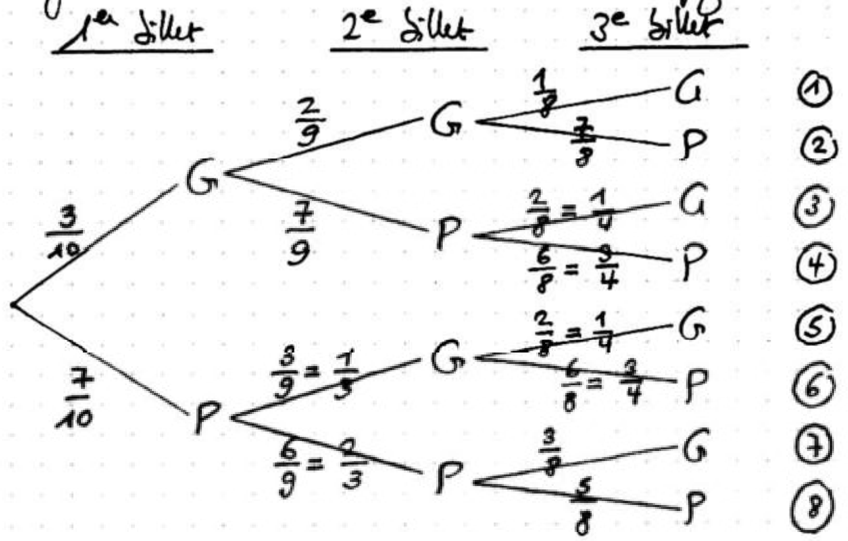
b) On sait qu'il fait vilain aujourd'hui.
La probabilité qu'il fasse beau au moins un des trois prochains jours vaudra $1 -$ la probabilité qu'il fasse mauvais les trois prochains jours.

On a : probabilité qu'il fasse mauvais les trois prochains jours =
$$= 0{,}6\cdot 0{,}6\cdot 0{,}6 = 0{,}216.$$

Ainsi : probabilité qu'il fasse beau au moins un des trois prochains jours =
$$= 1 - 0{,}216 = \underline{\underline{0{,}784 = 78{,}4\%}}.$$

Exercice 3

a) On fait un arbre : G = gagnant, P = perdant



Aucun billet gagnant : ligne ⑧ : probabilité $= \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} = \underline{\underline{\frac{7}{24}}}$.

Exactement un billet gagnant : lignes ④, ⑥ et ⑦ :

$$\text{probabilité} = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{4} + \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} =$$

$$= \frac{7}{40} + \frac{7}{40} + \frac{7}{40} = \underline{\underline{\frac{21}{40}}}.$$

Au moins un billet gagnant : tout sauf ligne ⑧ :

$$\text{probabilité} = 1 - \frac{7}{24} \quad \text{(voir question ci-dessus)}$$
$$= \underline{\underline{\frac{17}{24}}}$$

b) Dans une série de 10 billets, la probabilité de tirer 1 billet gagnant est de $\frac{3}{10}$, et la probabilité de tirer 1 billet perdant est de $\frac{7}{10}$.

On a probabilité, sur 3 billets achetés, on ait au moins 1 billet gagnant =

= 1 − probabilité, sur 3 billets achetés, on ait zéro billet gagnant =

$$= 1 - \underbrace{\frac{7}{10}}_{\text{1 billet dans une série}} \cdot \underbrace{\frac{7}{10}}_{\text{1 billet dans une autre série}} \cdot \underbrace{\frac{7}{10}}_{\text{1 billet dans une 3e série}} = 1 - \frac{343}{1000} = \underline{\underline{\frac{657}{1000} = 0,657 = 65,7\,\%}}.$$

Probabilité de gagner au moins une fois $\geq 99\% = 0,99$.

Comme probabilité de gagner au moins une fois =

= 1 − probabilité de gagner zéro fois,

on obtient 1 − probabilité de gagner zéro fois $\geq 0,99$,

d'où on trouve probabilité de gagner zéro fois $\leq 0,01$.

Si on achète n billets à chaque fois dans des séries différentes, on a :

probabilité de gagner zéro fois $= \underbrace{\frac{7}{10}\cdot\frac{7}{10}\cdot \ldots \cdot \frac{7}{10}}_{n \text{ facteurs}} = \left(\frac{7}{10}\right)^n$.

On doit donc trouver la plus petite valeur de n telle que $\left(\frac{7}{10}\right)^n \leq 0{,}01$.

Résolvons $\left(\frac{7}{10}\right)^n = 0{,}01$.

Dans ce genre d'équation, on va utiliser le logarithme (log ou ln) et la propriété du log (ou du ln) : $\log(x^m) = m\log(x)$.

On a :

$$\left(\frac{7}{10}\right)^n = 0{,}01 \quad \Big| \ \log$$

$$\log\left[\left(\frac{7}{10}\right)^n\right] = \log(0{,}01) \quad \Big| \ \text{propriété du log}$$

$$n\log\left(\frac{7}{10}\right) = \log(0{,}01) \quad \Big| \ : \log\left(\frac{7}{10}\right) = \log(0{,}7)$$

$$n = \frac{\log(0{,}01)}{\log(0{,}7)} = 12{,}91$$

Ainsi <u>à partir de 13</u>, on a $\left(\frac{7}{10}\right)^n \leq 0{,}01$.

c) On doit calculer la probabilité que le billet provienne de la série exceptionnelle sachant que le billet tiré est gagnant.

C'est donc une probabilité conditionnelle :

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Précisons ce que sont A et B :

A = billet provenant de la série exceptionnelle

B = billet tiré est gagnant.

$A\cap B$ = billet provenant de la série exceptionnelle et gagnant.

Comme tous les billets provenant de la série exceptionnelle sont gagnants, on a

$A\cap B$ = billet provenant de la série exceptionnelle.

Comme il y a au total 30 séries de billet dont 1 série exceptionnelle, on a

$p(A\cap B) = \frac{1}{30}$.

Calculons maintenant $p(B) = p$ (billet tiré est gagnant).

Au total, on a $30\cdot 10 = 300$ billets.

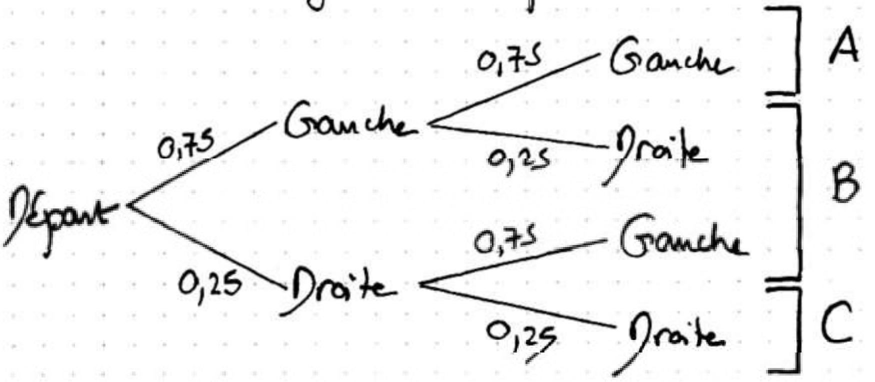
Il y a $29\cdot 3 + 10 = 97$ billets gagnants au total.

Ainsi $p(B) = \frac{97}{300}$.

Par conséquent $P(A|B) = \frac{1/30}{97/300} = \frac{10}{97}$.

Exercice 4

Le schéma du labyrinthe correspond à un arbre :



a) Probabilité d'arriver en A: $0{,}75 \cdot 0{,}75 = \underline{\underline{0{,}5625}}$

Probabilité d'arriver en B: $0{,}75 \cdot 0{,}25 + 0{,}75 \cdot 0{,}25 = 0{,}1875 + 0{,}1875 = \underline{\underline{0{,}375}}$

Probabilité d'arriver en C: $0{,}25 \cdot 0{,}25 = \underline{\underline{0{,}0625}}$

b) C'est une probabilité conditionnelle: $P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$.

On a X = la boule se dirige à gauche au premier carrefour et
Y = la boule arrive en B.

On trouve $X \cap Y$ = la boule se dirige à gauche au premier carrefour et arrive en B.

On a: $p(X \cap Y) = 0{,}75 \cdot 0{,}25 = 0{,}1875$ et
$p(Y) = 0{,}375$ (voir question a)).

Donc: $p(X|Y) = \frac{0{,}1875}{0{,}375} = \underline{\underline{0{,}5}}$.

c) Probabilité que les 2 boules arrivent en A: $\underbrace{0{,}5625}_{\text{1ère boule en A}} \cdot \underbrace{0{,}5625}_{\text{2e boule en A}} = 0{,}3164$.

(voir a))

Probabilité que les 2 boules arrivent en B: $0{,}375 \cdot 0{,}375 = 0{,}1406$.

Probabilité que les 2 boules arrivent en C: $0{,}0625 \cdot 0{,}0625 = 0{,}0039$.

Donc, probabilité que les 2 boules arrivent dans le même récipient est:

$$0{,}3164 + 0{,}1406 + 0{,}0039 = \underline{\underline{0{,}4609}}.$$

La probabilité qu'au moins une des 2 boules arrive en A =
= 1 − probabilité qu'aucune des 2 boules arrive en A.

Pour calculer la probabilité qu'aucune des 2 boules arrive en A, on a les choix suivants:

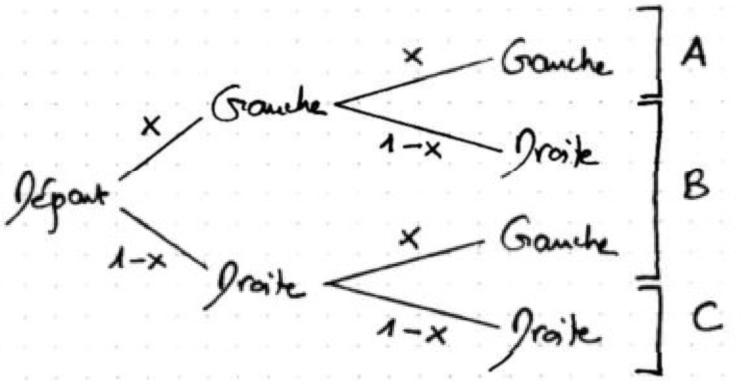
1ère boule	2e boule	
B	B	①
B	C	②
C	B	③
C	C	④

Probabilité de 1 : $0{,}375 \cdot 0{,}375 = 0{,}140625$
Probabilité de 2 : $0{,}375 \cdot 0{,}0625 = 0{,}0234375$
Probabilité de 3 : $0{,}0625 \cdot 0{,}375 = 0{,}0234375$
Probabilité de 4 : $0{,}0625 \cdot 0{,}0625 = 0{,}0039$.

Ainsi la probabilité qu'aucune des 2 boules arrive en A =
$= 0{,}140625 + 2 \cdot 0{,}0234375 + 0{,}0039 = 0{,}1914.$

Donc : probabilité qu'au moins une des 2 boules arrive en A =
$1 - 0{,}1914 = \underline{\underline{0{,}8086}}.$

d) L'arbre devient :



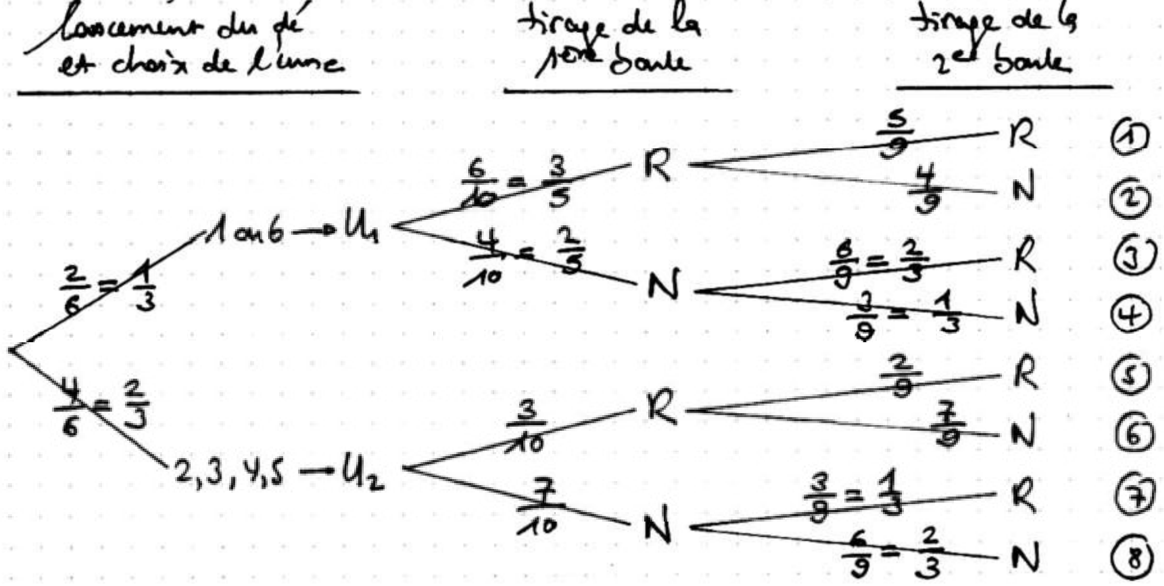
La probabilité que la bille arrive en B est :
$$x(1-x) + (1-x)x = 2x(1-x) = \underline{\underline{2x - 2x^2}}$$

Pour trouver pour quelle valeur de x est maximum, il faut trouver le maximum de la fonction $f(x) = 2x - 2x^2$ (qui est une parabole tournée vers le bas).
Calculons $f'(x)$: on a $f'(x) = 2 - 4x$.
Résolvons $f'(x) = 0$: $2 - 4x = 0$, i.e. $4x = 2$, i.e. $x = 0{,}5$.

Ainsi si $\underline{\underline{x = 0{,}5}}$, la probabilité d'arriver en B est maximum.

Exercice 5

L'arbre se présente comme suit :



a) La probabilité d'obtenir R au 1er tirage est :

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{10}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\underline{\underline{\frac{2}{5}}}.$$

b) On doit calculer une probabilité conditionnelle : $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

On a : A = 1ère boule tirée provient de U_1 et
B = 1ère boule tirée est rouge ;
$A\cap B$ = 1ère boule tirée provient de U_1 et est rouge.

On obtient : $p(A\cap B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$ et $p(B)=\frac{2}{5}$ (voir question a)).

Ainsi $P(A|B)=\dfrac{1/5}{2/5}=\underline{\underline{\dfrac{1}{2}}}.$

c) La probabilité de tirer 2 boules rouges correspond aux lignes ① et ⑤ :

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{9}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{1}{9}+\frac{2}{45}=\underline{\underline{\frac{7}{45}}}.$$

d) La probabilité de tirer au moins une boule noire =
= 1 − probabilité de tirer zéro boule noire =
= 1 − probabilité de tirer 2 boules rouges = $1-\frac{7}{45}=\underline{\underline{\frac{38}{45}}}.$

e) Dans U_1 on a 9 boules rouges et 11 boules noires.
On ajoute n boules rouges et m boules noires.
On a alors, au total, $9+n$ boules rouges et $11+m$ boules noires.

La probabilité de tirer une boule rouge dans U est

$$\frac{9+n}{9+n+11+m} = \frac{9+n}{20+n+m}.$$

Ce nombre doit valoir 0,4 :

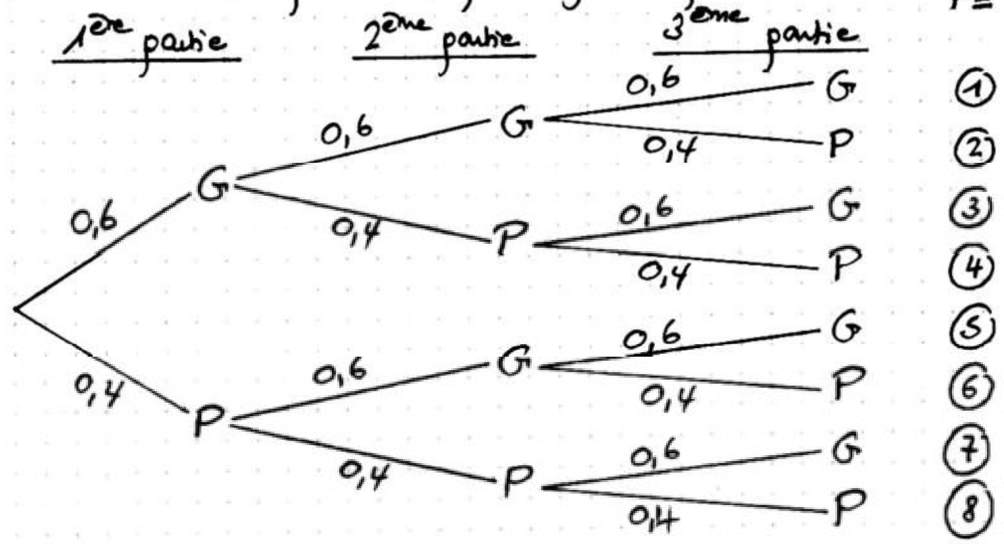
$$\begin{aligned}
\frac{9+n}{20+n+m} &= 0,4 && \mid \cdot(20+n+m) \\
9+n &= 0,4(20+n+m) && \mid \text{distributivité} \\
9+n &= 8+0,4n+0,4m && \mid -8 \\
1+n &= 0,4n+0,4m && \mid -0,4n \\
1+0,6n &= 0,4m && \mid :0,4 \\
2,5+1,5n &= m
\end{aligned}$$

Si $n=1$, on a $m = 2,5+1,5 = 4$

Par conséquent, il faut rajouter **1 boule rouge et 4 boules noires.**

Exercice 6

a) Etablissons un arbre pour les 3 parties jouées par Pierre: G = Pierre gagne, P = Pierre perd



La probabilité que Pierre perde les trois parties correspond au chemin 8 et vaut donc: $0,4^3 = \underline{0,064}$.

La probabilité que Pierre gagne au moins 2 parties (i.e. qu'il gagne 2 ou 3 parties) correspond aux chemins 1, 2, 3 et 5 :

chemin 1 : $0,6^3 = 0,216$

chemin 2 : $0,6^2 \cdot 0,4 = 0,144$

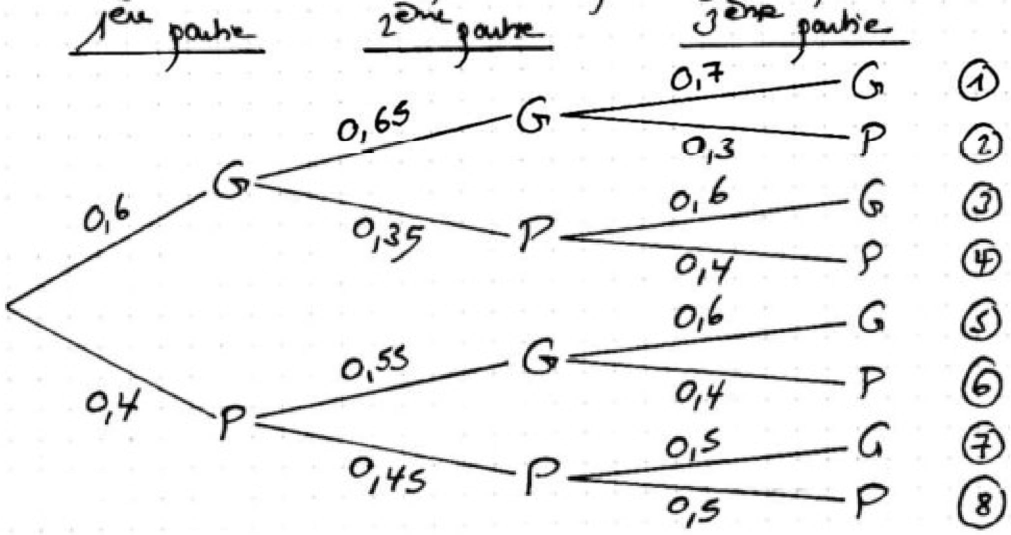
chemin 3 : $0,6^2 \cdot 0,4 = 0,144$

chemin 5 : $0,6^2 \cdot 0,4 = 0,144$.

La probabilité que Pierre gagne au moins 2 parties est donc:

$0,216 + 3 \cdot 0,144 = \underline{0,648}.$

b) Etablissons un autre arbre pour les 3 parties jouées par Marie: G = Marie gagne, P = Marie perd



La probabilité que Marie gagne les 3 parties correspond au chemin 1 et vaut donc: $0,6 \cdot 0,65 \cdot 0,7 = \underline{0,273}.$

La probabilité que Marie gagne la troisième partie correspond aux chemins ①, ③, ⑤ et ⑦ :

chemin ① : $0{,}273$ (voir ci-dessus)

chemin ③ : $0{,}6 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}6 = 0{,}126$

chemin ⑤ : $0{,}4 \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}6 = 0{,}132$

chemin ⑦ : $0{,}4 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}5 = 0{,}09$.

La probabilité que Marie gagne la troisième partie est donc :

$$0{,}273 + 0{,}126 + 0{,}132 + 0{,}09 = \underline{\underline{0{,}621}}.$$

c) C'est une probabilité conditionnelle : $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, où

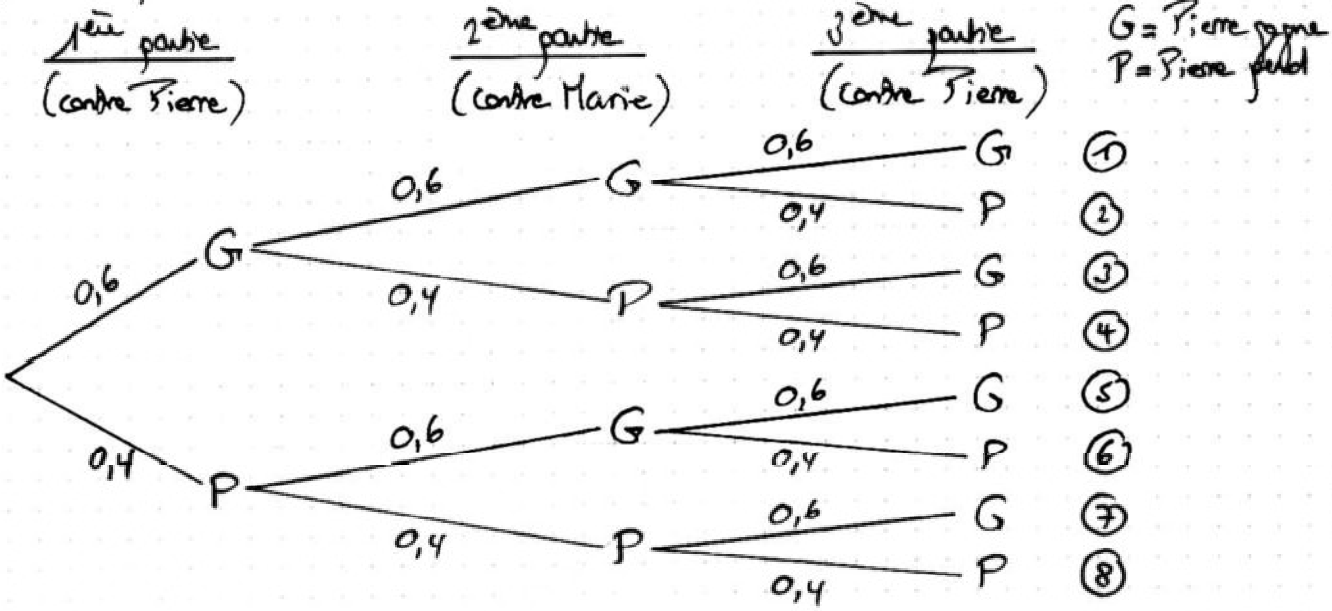
A = la machine est opposée à Pierre lors de la 3^e partie, et

B = la machine a perdu la 3^e partie

On a :

$A \cap B$ = la machine est opposée à Pierre lors de la 3^e partie et elle perd cette troisième partie

Comme Pierre et Marie jouent aussi souvent l'un que l'autre contre la machine, si Pierre joue la 3^e partie contre la machine, alors Sophie a joué la 2^e partie et Pierre la première partie. Cela nous donne l'arbre suivant :



La probabilité de $A \cap B$, i.e. la probabilité que la machine soit opposée à Pierre lors de la 3^e partie et qu'elle perde cette 3^e partie correspond aux chemins ①, ③, ⑤ et ⑦ :

chemin ① : $0{,}6^3 = 0{,}216$

chemin ③ : $0{,}6^2 \cdot 0{,}4 = 0{,}144$

chemin ⑤ : $0{,}6^2 \cdot 0{,}4 = 0{,}144$

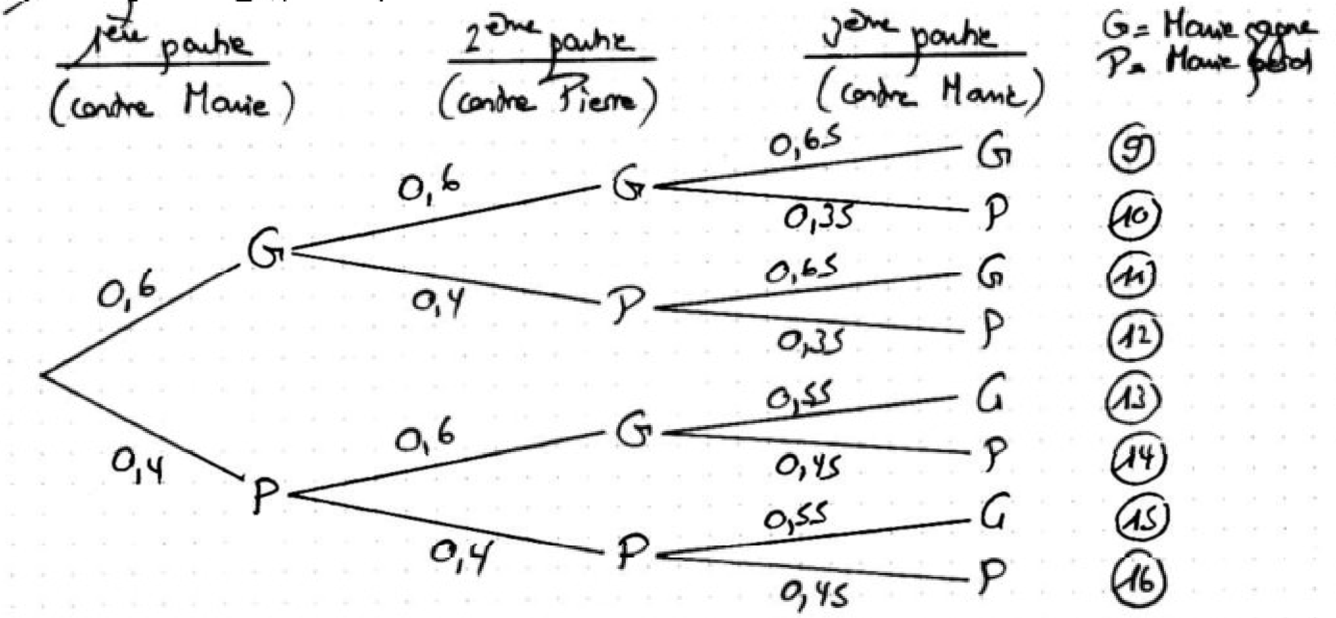
chemin 7 : $0{,}6 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}096$.

Ainsi $P(A \cap B) = 0{,}216 + 0{,}144 + 0{,}144 + 0{,}096 = 0{,}6$.

Calculons maintenant $P(B)$, i.e. la probabilité que la machine perde la 3e partie.

Si la 3e partie est contre Pierre, la probabilité est 0,6 (voir ci-dessus).

Si la 3e partie est contre Marie, il faut faire un nouvel arbre avec la 3e partie contre Marie, et donc la 2e partie contre Pierre et la 1ère partie contre Marie :



Dans ce cas (la 3e partie est contre Marie), la probabilité que la machine perde la 3e partie correspond aux chemins 9, 11, 13 et 15 :

chemin 9 : $0{,}6^2 \cdot 0{,}65 = 0{,}234$

chemin 11 : $0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}65 = 0{,}156$

chemin 13 : $0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}55 = 0{,}132$

chemin 15 : $0{,}4^2 \cdot 0{,}55 = 0{,}088$.

Ainsi la probabilité que la machine perde la 3e partie si elle joue contre Marie cette 3e partie est : $0{,}224 + 0{,}156 + 0{,}132 + 0{,}088 = 0{,}61$.

On obtient ainsi : $P(B) = 0{,}6 + 0{,}61 = 1{,}21$.

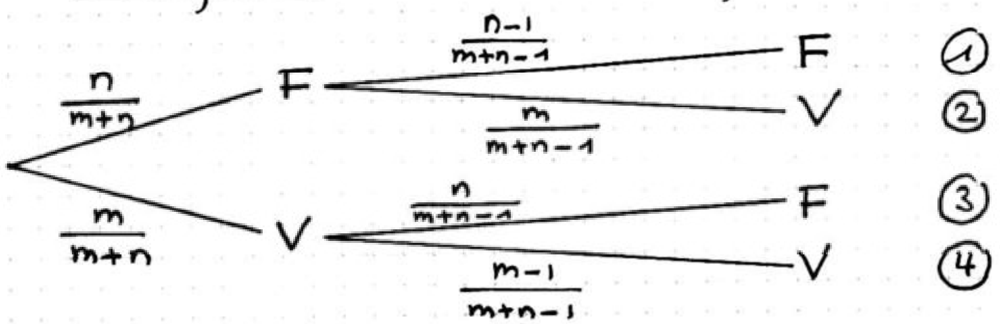
D'où $P(A|B) = \dfrac{0{,}6}{1{,}21} = \underline{\underline{0{,}4959}}$.

Exercice 7

a) Soient n le nombre de fausses perles et m le nombre de perles véritables.
On a au total $n+m$ perles.
La probabilité de tirer, parmi ces $n+m$ perles, une perle véritable vaut $0{,}4$.
Autrement dit, on doit avoir $\frac{m}{n+m} = 0{,}4$, i.e. $m = 0{,}4(n+m)$,
i.e. $m = 0{,}4n + 0{,}4m$, i.e. $0{,}4n = 0{,}6m$, i.e. $n = 1{,}5m$ ①.
Etablissons maintenant l'arbre correspond aux choix de 2 perles, successivement et sans remise:

Tirage de la 1ère perle — Tirage de la 2e perle

F = fausse perle
V = perle véritable



au 2e tirage, comme on ne remet pas la 1ère boule dans le coffret, il en reste $m+n-1$.

La probabilité que les 2 perles tirées soient véritables correspond au chemin ④ et vaut donc: $\frac{m}{m+n} \cdot \frac{m-1}{m+n-1}$.
Comme cette probabilité doit valoir $0{,}15$, on doit avoir:

$$\frac{m}{m+n} \cdot \frac{m-1}{m+n-1} = 0{,}15 \text{, i.e.}$$

$$\frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)} = 0{,}15 \text{, i.e.}$$

$$m(m-1) = 0{,}15\,(m+n)(m+n-1) \quad ②.$$

En remplaçant la relation ① $(n = 1{,}5m)$ dans la relation ②, on obtient:

$$\begin{aligned}
m(m-1) &= 0{,}15\,(m+1{,}5m)(m+1{,}5m-1) && \text{Calcul}\\
m(m-1) &= 0{,}15 \cdot 2{,}5m\,(2{,}5m-1) && \text{Calcul}\\
m(m-1) &= 0{,}375m\,(2{,}5m-1) && \text{Distributivité}\\
m^2 - m &= 0{,}9375m^2 - 0{,}375m && -0{,}9375m^2\\
0{,}0625m^2 - m &= -0{,}375m && +0{,}375m\\
0{,}0625m^2 - 0{,}625m &= 0 && \text{Factorisation}
\end{aligned}$$

$$0{,}0625m(m-10)=0$$

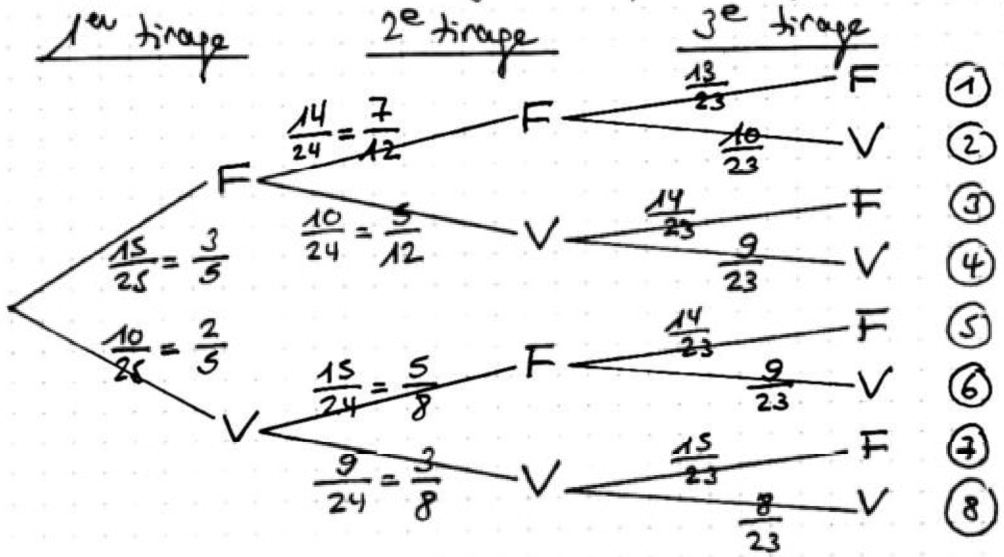
Un produit étant nul uniquement si un des 2 facteurs est nul, on a soit $0{,}0625\,m=0$, i.e. $m=0$ (ce qui est inintéressant, puisqu'alors $n=1{,}5m=0$, i.e. qu'il n'y aucune boule dans le coffret), soit $m-10=0$, i.e. $m=10$.

Avec $n=1{,}5m$, on obtient $n=1{,}5\cdot 10=15$.

Par conséquent, il y a <u>10 perles véritables et 15 fausses perles.</u>

b) On établit un arbre : Il y a au départ 25 perles.

F = fausse perle
V = perle véritable



La probabilité d'avoir au moins une perle véritable vaut :

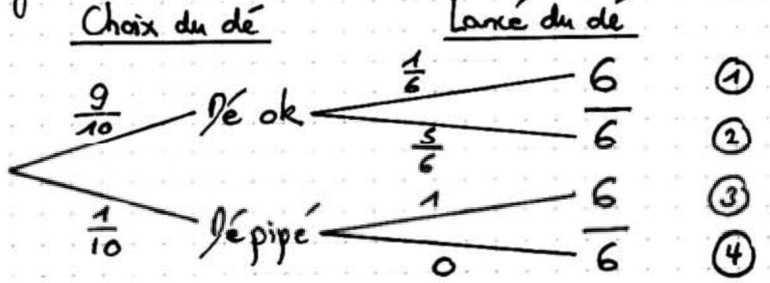
1 − probabilité que les 3 perles soient fausses =

$$=1-\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{13}{23}=1-\frac{91}{460}=\underline{\frac{369}{460}=0{,}802}.$$

Exercice 8

$\overline{6} = 1, 2, 3, 4$ ou 5

a) On fait un arbre :



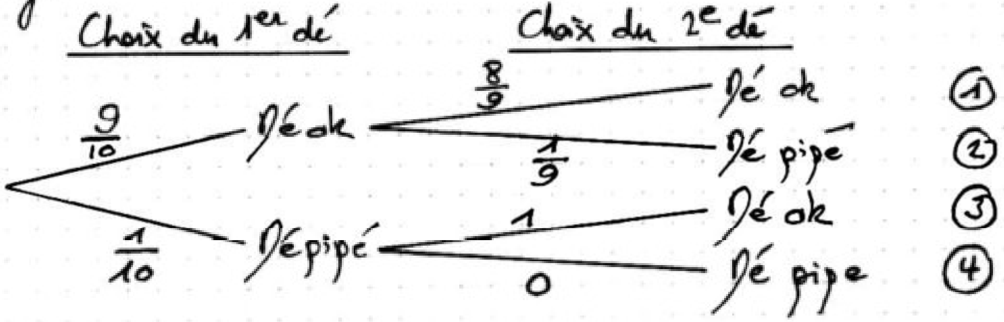
La probabilité d'obtenir un six correspond aux chemins ① et ③ :

chemin ① : $\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{20}$

chemin ③ : $\frac{1}{10} \cdot 1 = \frac{1}{10}$.

Ainsi la probabilité d'obtenir un six est : $\frac{3}{20} + \frac{1}{10} = \underline{\frac{1}{4}}$.

b) On fait un arbre :



La probabilité que le dé pipé figure parmi les dés choisis correspond aux chemins ② et ③ (la probabilité du chemin ④ est $\frac{1}{10} \cdot 0 = 0$) :

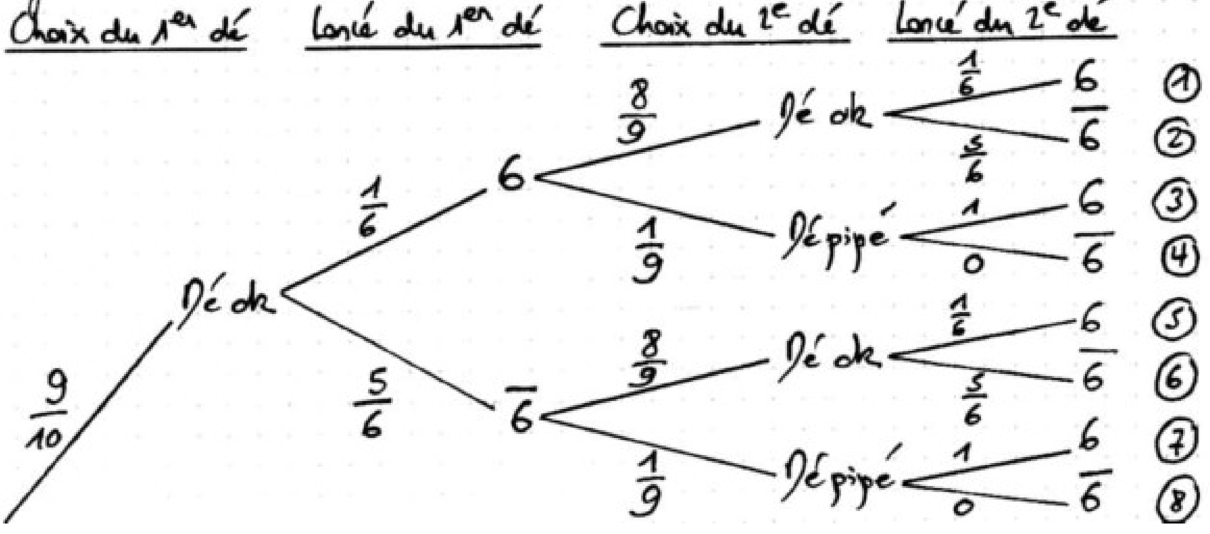
chemin ② : $\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{10}$

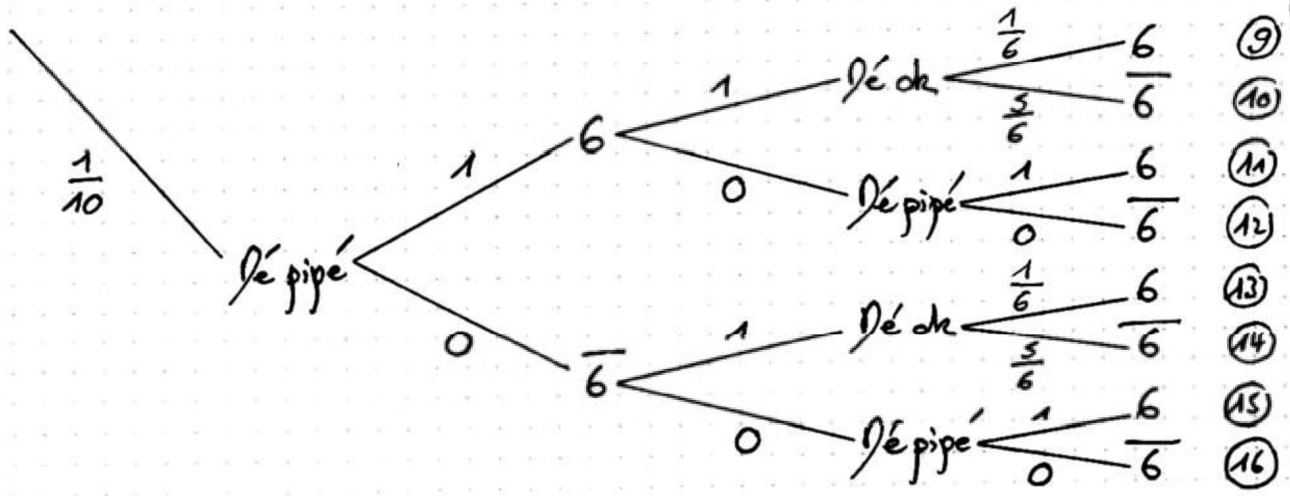
chemin ③ : $\frac{1}{10} \cdot 1 = \frac{1}{10}$.

Ainsi la probabilité que le dé pipé figure parmi les dés choisis est :

$\frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \underline{\frac{1}{5}}$.

c) On fait un arbre :





La probabilité d'obtenir un double-six correspond aux chemins ①, ③, ⑨ et ⑪ :

chemin ①: $\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{45}$

chemin ③: $\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{9} \cdot 1 = \frac{1}{60}$

chemin ⑨: $\frac{1}{10} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{60}$

chemin ⑪: $\frac{1}{10} \cdot 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0.$

Ainsi la probabilité d'obtenir un double-six vaut: $\frac{1}{45} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} = \underline{\underline{\frac{1}{18}}}$.

d) Si un seul six sort, c'est forcément celui du dé pipé.
Ainsi les autres dés ne donnent pas 6.
La probabilité qu'un de ces dés ne donne pas 6 est $\frac{5}{6}$.
La probabilité que les 6 dés ok donne autre chose que 6 est $\left(\frac{5}{6}\right)^9$.
Ainsi la probabilité d'obtenir un seul 6 est $1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 = \underline{\underline{0,1938.}}$

e) Si deux six sortent, un est forcément dû au dé pipé.
Un seul des 9 autres dés donne donc un 6. Les 8 autres donnent autre chose que 6.
Par la loi binomiale, la probabilité qu'un seul dé parmi les 9 dés ok donne un six est : $\binom{9}{1}\underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^1}_{\text{prob. d'obtenir un six avec un dé}}\underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^8}_{\text{prob d'obtenir autre chose que six avec un dé.}}$

Ainsi cette probabilité est : $9 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 = \underline{\underline{0,3489.}}$

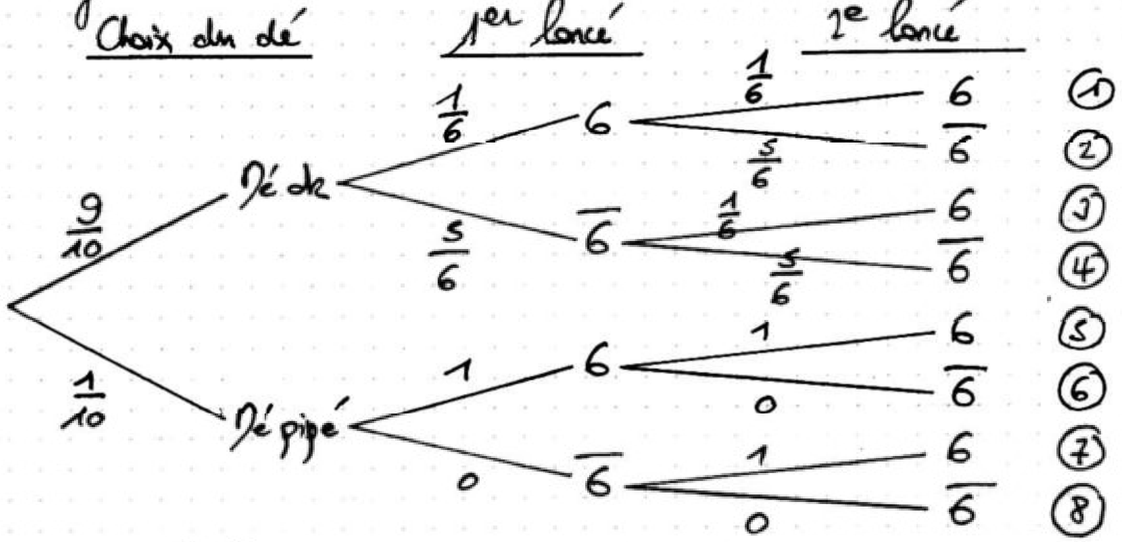
f) C'est une probabilité conditionnelle: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, où

A = avoir choisi le dé pipé, et
B = le six sort deux fois.
On a $A \cap B$ = choisir le dé pipé et sortir 2 fois le six.
Comme le six sort forcément avec le dé pipé, la probabilité de

$A \cap B$ revient à la probabilité d'avoir choisi le dé pipé.
Ainsi $p(A \cap B) = \frac{1}{10}$.

Calculons maintenant $p(B)$, c'est-à-dire la probabilité que le six sorte deux fois.

On fait un arbre :



La probabilité que le six sorte deux fois correspond aux chemins

1 et 5 : chemin 1 : $\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{40}$

Chemin 5 : $\frac{1}{10} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{10}$.

Ainsi la probabilité que le six sorte deux fois vaut $\frac{1}{40} + \frac{1}{10} = \frac{1}{8}$.

On en conclut donc que $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/10}{1/8} = \underline{\underline{\frac{4}{5}}}$.

Exercice 9

a) On utilise la loi binomiale:
la probabilité qu'une graine germe vaut $\frac{60}{100} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$;
la probabilité qu'une graine ne germe pas vaut $\frac{2}{5}$;
ainsi la probabilité qu'une seule graine sur les cinq germe vaut:

$$\binom{5}{1}\left(\frac{3}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 = 5 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 = 0{,}0768 = \underline{7{,}68\%}.$$

b) La probabilité de voir germer au moins un tournesol vaut
1 – la probabilité qu'aucun tournesol ne germe.
La probabilité qu'aucun tournesol ne germe est :

$$\binom{4}{0}\left(\frac{3}{5}\right)^0\left(\frac{2}{5}\right)^4 = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \left(\frac{2}{5}\right)^4 = 0{,}0256.$$

Ainsi la probabilité de voir germer au moins un tournesol vaut
$1 - 0{,}0256 = 0{,}9744 = \underline{97{,}44\%}.$

c) Pour un bac, Gaston veut qu'il y ait au moins une graine qui germe.
La probabilité que cela se passe est 1 – probabilité qu'aucune graine ne germe $= 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 1 - 0{,}16 = 0{,}84$.
La probabilité que cela se passe simultanément dans les 5 bacs est alors $0{,}84^5 = 0{,}4182 = \underline{41{,}82\%}.$

d) On va utiliser la loi binomiale afin de déterminer le nombre n de graines qu'il doit planter.
La probabilité d'obtenir au moins un tournesol avec ces n graines vaut
1 – la probabilité d'obtenir zéro tournesol avec ces n graines =

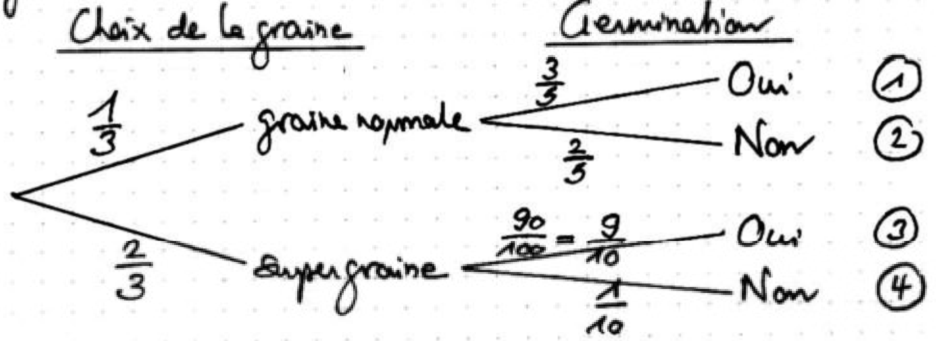
$$= 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{3}{5}\right)^0\left(\frac{2}{5}\right)^n = 1 - 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n.$$

Calculons n pour que cette probabilité soit égale à 0,999:

$1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0{,}999$	$+\left(\frac{2}{5}\right)^n, -1$
$\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0{,}001$	prendre le log des 2 côtés
$\log\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n\right] = \log(0{,}001)$	propriété du log
$n \log\left(\frac{2}{5}\right) = \log(0{,}001)$	$: \log\left(\frac{2}{5}\right)$
$n = \frac{\log(0{,}001)}{\log(2/5)} \cong 7{,}53$	

Il devra donc semer $\underline{8 \text{ graines}}$ (nb entier immédiatement supérieur à 7,53).

e) On fait un arbre :



La probabilité qu'une graine choisie au hasard germe correspond aux chemins 1 et 3 :

Chemin 1 : $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$

Chemin 3 : $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{10} = \frac{3}{5}$.

Ainsi la probabilité qu'une graine choisie au hasard germe est donc
$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5} = 0,8 = \underline{\underline{80\%}}$.

f) C'est une probabilité conditionnelle : $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, où

A = la graine est une supergraine, et
B = la graine germe.
On a $A \cap B$ = la graine est une supergraine et elle germe.
Sa probabilité est, en se référant à l'arbre ci-dessus,
$$p(A \cap B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{10} = \frac{3}{5}.$$
D'après e), $p(B)$, i.e. la probabilité que la graine germe, est $\frac{4}{5}$.
Ainsi $P(A|B) = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4} = 0,75 = \underline{\underline{75\%}}$.

Exercice 10

On va utiliser la loi binomiale dans cet exercice.

a) la probabilité d'obtenir au moins trois six =

= prob d'obtenir trois six + prob d'obtenir quatre six +
prob d'obtenir cinq six + prob d'obtenir six six =

$$= \binom{6}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^3 + \binom{6}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \binom{6}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^1 + \binom{6}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)^0 =$$

prob d'obtenir six   prob d'obtenir autre chose que 6

$$= 0{,}05358 + 0{,}00804 + 0{,}00064 + 0{,}00002 = 0{,}06228 = \underline{6{,}23\,\%}.$$

b) la probabilité d'obtenir une majorité de chiffres pairs =

= prob d'obtenir 4 chiffres pairs + prob d'obtenir 5 chiffres pairs
+ prob d'obtenir 6 chiffres pairs =

$$= \binom{6}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{6}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \binom{6}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^0 =$$

prob d'obtenir un chiffre pair (2, 4 ou 6)   prob d'obtenir un chiffre non pair (1, 3 ou 5)

$$= 15\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6 + 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 = (15+6+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 22\cdot\frac{1}{64} = \underline{\frac{11}{32}}.$$

c) la probabilité d'obtenir 3 multiples de 3 est

$$\binom{6}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 20\cdot\frac{1}{27}\cdot\frac{8}{27} = \underline{\frac{160}{729}}.$$

prob d'obtenir un multiple de 3 (3 ou 6)   prob d'obtenir un non multiple de 3 (1, 2, 4 ou 5)