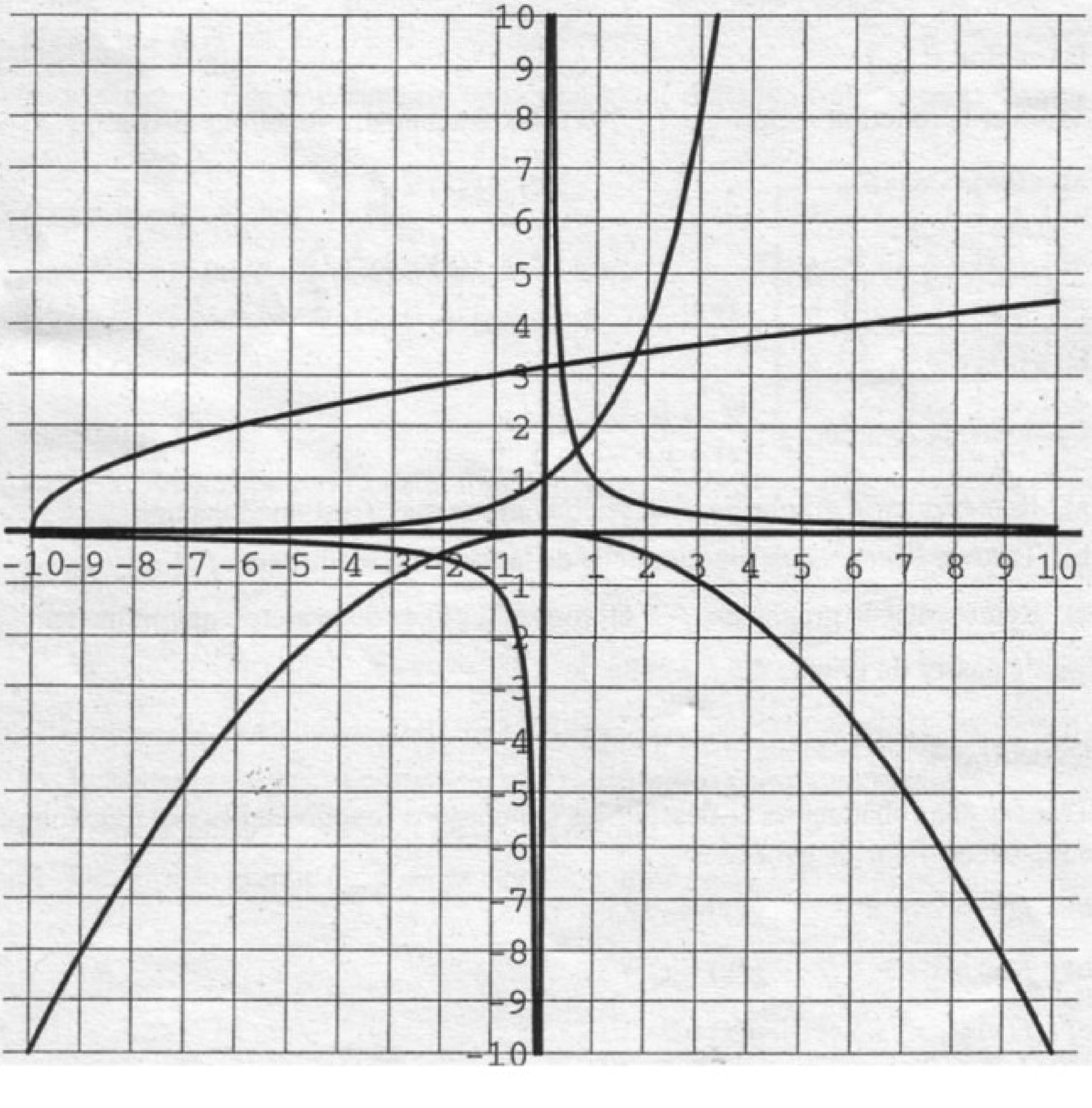
Lycée Denis-de-Rougemont

Mathématiques de niveau 1

Degré 10

FONCTIONS SIMPLES



Exercice 1

Pour les fonctions suivantes, $f: \begin{array}{l} D \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y = f(x) \end{array}$

1. Déterminer D (domaine de définition).
2. Dessiner le graphe de f.
3. Indiquer (avec justification) si la fonction est paire, impaire.
4. Donner les intervalles de croissance et de décroissance de f.

a) $y = \frac{1}{2}x + 3$

b) $y = -x^2 + 9$

c) $y = x^2 - 2x$

d) $y = \frac{2}{3x}$

e) $y = \frac{1}{3}x^3$

f) $y = \sqrt{x}$

g) $y = |x|$

h) $y = 2$

i) $y = [x]$

Exercice 2

Trouver la fonction réciproque ($f^{-1}(x)$) de chacune des fonctions ci-dessous :

a) $f(x) = 3x - 5$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x - 4$

c) $f(x) = \frac{2}{3x}$

d) $f(x) = 8x^3$

Exercice 3

On donne la fonction $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y = -2x + 6 \end{array}$

a) Représenter le graphe de f et se convaincre que f est une bijection.

b) Trouver l'expression fonctionnelle de la fonction réciproque f^{-1}.

c) Représenter le graphe de f^{-1} et trouver les axes de symétrie qui permettent de passer du graphe de f à celui de f^{-1}.

Exercice 4

Trouver dans chaque cas ci-dessous les expressions fonctionnelles des fonctions composées $f \circ g$ et $g \circ f$.

a) $f(x) = 2x - 2$ $\quad$ $g(x) = -3x + 4$

b) $f(x) = x - 3$ $\quad$ $g(x) = x^2 + 3x$

c) $f(x) = -x^2 + 5$ $\quad$ $g(x) = 2$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad$ $g(x) = \frac{1}{x}$

Exercice 5

Si f est une bijection, quelle est l'expression fonctionnelle de la fonction composée $f^{-1} \circ f$? Faire le calcul avec $f(x) = -2x+6$.

Exercice 6

Trouver deux fonctions qui sont égales à leur réciproque.

Exercice 7

On donne les fonctions homographiques $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+5}$ et $g(x) = \dfrac{x-1}{3x+2}$. Trouver les expressions fonctionnelles de $f \circ g$, f^{-1}, g^{-1}, $(f \circ g)^{-1}$ et $g^{-1} \circ f^{-1}$. Commenter les résultats.

Exercice 8

À quelle condition une fonction homographique coïncide-t-elle avec sa réciproque ?

Exercice 9

Compléter la table de composition des fonctions $i(x) = x$, $f(x) = -x$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ et $h(x) = \dfrac{-1}{x}$.

↗°	i	f	g	h
i	i			
f				
g				
h				

Exercice 10

Faire le tableau des signes de la fonction $y = -2x^2 + 3x + 2$.

Exercice 11

On donne la fonction $f : \begin{array}{l} D \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y = \dfrac{-1}{2x} \end{array}$

a) Trouver le domaine de définition de cette fonction.
b) Indiquer (avec justification) si cette fonction est paire, ou impaire.
c) Faire le tableau des signes de cette fonction.
d) Dessiner le graphe de f en prenant une unité égale à 4 carreaux.

Exercice 12

Pour les quatre fonctions ci-dessous, écrire $f(x)$ sans utiliser le symbole "valeur absolue", dessiner le graphe de f et préciser l'ensemble des images, $f(\mathbb{R})$.

1. $f(x)=|-2x+3|-7$
2. $f(x)=-\frac{1}{2}\cdot|x-2|-\frac{1}{2}x+3$
3. $f(x)=2\cdot|x-3|+x-8$
4. $f(x)=|-x^2+4x+5|$

Exercice 13 √

On donne la fonction $f(x)=|x^2-4|-x-2$.

a) Écrire $f(x)$ sans utiliser le symbole "valeur absolue".
b) Calculer les points d'intersection du graphe de f et des axes de référence.
c) Dessiner le graphe de f.
d) Déterminer l'ensemble des images, $f(\mathbb{R})$.

Exercice 14

Résoudre les équations suivantes :

a) $|x|=4$
b) $|-2x+7|=3$
c) $|x^2+3x-2|=2$
d) $|-x+5|=|2x+3|$
e) $|x^2+3x-4|=|3x+12|$
f) $3\cdot|x|-2=7$

Exercice 15

Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

a) $|x|>3$
b) $|x-5|<2$
c) $|-2x+5|<3$

Exercice 16

On donne la fonction $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x-6$.

a) Calculer les points d'intersection du graphe de f et des axes de référence puis déterminer le minimum de cette fonction.
b) Dessiner le graphe de f.
c) Déduire de ce graphe ceux des fonctions $g(x)=|f(x)|$ et $h(x)=f(|x|)$.

Exercice 17

Dans un même repère, dessiner les graphes des fonctions $f(x)=2^x$ et $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Exercice 18

Calculer sans machine : a) $9^{\frac{1}{2}}$ b) $16^{-\frac{1}{2}}$ c) $8^{\frac{2}{3}}$ d) $32^{\frac{4}{5}}$ e) $9^{\frac{5}{2}}$ f) $27^{-\frac{2}{3}}$

Exercice 19

Simplifier les expressions suivantes :

a) $\dfrac{a^m \cdot a^n}{a^2}$ b) $\dfrac{x^m \cdot x^{2m} \cdot x^{2m}}{x}$ c) $x^{m-n} \cdot x^{n-m}$

d) $\dfrac{(xy)^m \cdot (x^{m+1} \cdot y^{m-1})}{xy}$ e) $(x^{1-n} \cdot y^{n-1}) \cdot x^2 y^2$ f) $\dfrac{\left(x^2 \cdot y^3\right)^2}{xy^2}$

Exercice 20

Résoudre les équations suivantes :

a) $2 \cdot 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$ c) $2^{x^2-8} = \frac{1}{16}$

b) $9 \cdot 3^{2x} - 82 \cdot 3^x + 9 = 0$ d) $10^{3x+2} = \sqrt{10}$

Exercice 21

On donne la fonction $f(x) = \left(\frac{1}{2}x - 2\right) \cdot 2^x$

a) Trouver D, le domaine de définition de f et étudier la parité de cette fonction.
b) Calculer les points d'intersection du graphe de f et des axes de référence.
c) Faire le tableau des signes de f.
d) Dessiner le graphe de f après avoir calculé les images de $x = -3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 3.5,\ 4.5$.

Exercice 22

Dessiner dans un repère orthonormé les graphes des fonctions $f(x) = \log_2(x)$ et $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$.

Préciser le domaine de définition ainsi que l'ensemble des images.

Exercice 23

Résoudre les équations suivantes :

a) $2\log(x) = -4$ c) $\log(x^2 - 21) = 2$ e) $\log^2(x) - \log(x) - 2 = 0$

b) $3\log(2x) = 9$ d) $\log(\log(x)) = 1$ f) $\log^2(x) - 6\log(x) = 0$

Exercice 24

On donne les polynômes $P(x) = -\frac{7}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - \frac{1}{3}x - 4$,
$Q(x) = -5x^3 + 2x^2 + x + \frac{3}{7}$ et $R(x) = 2x^3 - x^2$.

a) Calculer $P+Q$, $Q+R$, $(P+Q)+R$ et $P+(Q+R)$. Constatation ?

b) Calculer $3P-7Q$.

Exercice 25

On donne les polynômes $P(x) = 2x - 5$ et $Q(x) = x^3 + 3$. Calculer :

a) $P \cdot Q$ b) $2P \cdot 3Q$ c) P^2 d) Q^2 e) $P \cdot Q^2$ f) P^3 g) Q^3

Exercice 26

Pour les polynômes $P(x)$ et $S(x)$ ci-dessous, effectuer la division euclidienne de P par S, c'est-à-dire trouver le quotient $Q(x)$ et le reste $R(x)$ tels que $P = Q \cdot S + R$.

a) $P(x) = x^3 - 7x^2 + 5x + 1$ et $S(x) = x^2 - 4x + 2$

b) $P(x) = x^2 - 5x + 3$ et $S(x) = x^6 + 2$

c) $P(x) = 8x^3 - 4x^2 - 10x - 3$ et $S(x) = 2x - 3$

d) $P(x) = 4x - 5$ et $S(x) = 3x + 4$

Exercice 27

a) On donne le polynôme $P(x) = (3x-5)(2x+3)$. Déterminer le degré de ce polynôme ainsi que ses zéros.

b) On donne le polynôme $P(x) = 10x^2 - x - 2$. Déterminer les zéros de ce polynôme puis l'écrire sous forme d'un produit de deux polynômes du premier degré à coefficients entiers.

Exercice 28

a) Trouver le polynôme du deuxième degré dont les zéros sont -2 et 3 et qui vaut 18 en $x = 0$.

b) Trouver le polynôme du troisième degré dont les zéros sont 1, 3 et -5 et qui vaut 14 en $x = 2$.

Exercice 29 (Relations de Viète)

Le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ s'annule en x_1 et x_2. Exprimer la somme $x_1 + x_2$ et le produit $x_1 \cdot x_2$ en fonction de a, b et c.

Exercice 30

On donne le polynôme $P(x) = 6x^3 - 13x^2 + x + 2$.

a) Évaluer $P(x)$ pour $x = -1, 0, 1, 2, 3$.

b) Calculer le quotient $Q(x)$ et le reste $R(x)$ obtenu en divisant $P(x)$ par $x+1$, x, $x-1$, $x-2$ et $x-3$. Établir un lien entre les résultats obtenus et la question précédente.

c) Trouver tous les zéros (toutes les racines) de $P(x)$, puis écrire $P(x)$ sous forme d'un produit de polynômes du premier degré à coefficients entiers.

Exercice 31

Décomposer les polynômes ci-dessous en produit de polynômes du premier degré à coefficients entiers.

a) $P(x) = 6x^3 + 5x^2 - 4x$

b) $P(x) = 7x^3 - 62x^2 + 89x + 14$ Indication : $P(7) = 0$

c) $P(x) = 105x^3 + 23x^2 - 16x - 4$ Indication : $P\left(\frac{2}{5}\right) = 0$

d) $P(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$ Indication : $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$