TRAVAIL D'UNE FORCE

La notion de **travail** est relativement abstraite, mais elle est tout à fait indispensable pour aborder une notion d'une énorme importance en physique: **l'énergie**, qui sera l'objet du chapitre suivant, nettement plus long que celui-ci.

1) Définitions

Une définition simple, peu abstraite et intuitive, quoique insuffisante mais bien utile, du travail serait:

Le travail d'une force est l'efficacité de cette force pour produire un déplacement.

Exemples d'utilisation de cette notion:

1°) Pour soulever une masse il faut lui communiquer une **force** verticale vers le haut, bien sûr. La masse est soulevée, donc fait un **déplacement.** On dit alors que cette force effectue un **travail** car son point d'application - un point de la masse soulevée - se déplace. Donc qui dit travail dit force <u>et</u> déplacement.

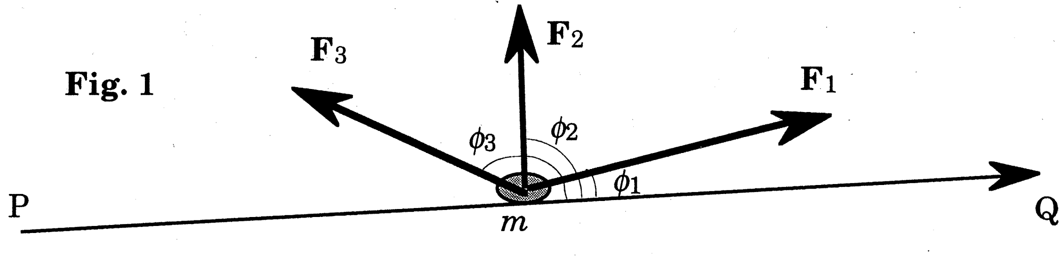
On attribue un signe au travail, c'est une grandeur algébrique:
La force qui soulève la masse effectue un travail **positif**, car le vecteur-force est dans le sens du déplacement.
Par contre le **poids** de cette masse effectue un travail **négatif** lorsqu'on soulève la masse, car le vecteur-poids est de sens opposé au déplacement à la montée.
Lorsque la masse retombe, le travail du poids est cette fois positif, le poids étant alors dans le même sens que le déplacement.

2°) Une masse m repose sur une surface horizontale. On veut la faire s'y déplacer. Les forces poids et force de soutien n'y parviennent manifestement pas, leur **efficacité** est nulle de ce point de vue. Presser verticalement sur la masse n'arrange pas les choses; soulever la masse non plus d'ailleurs. Toutes ces forces sont **perpendiculaires** au déplacement souhaité, leur efficacité, c-à-d leur **travail est nul.**

Ces exemples doivent montrer que la notion de **travail** fait intervenir le **vecteur-force**, le **déplacement**, qu'on peut vectorialiser facilement s'il est rectiligne, et aussi, de façon cruciale, **l'angle** entre ces deux vecteurs.

Considérons une masse m se déplaçant sur un parcours **rectiligne** de P à Q ; elle est soumise à diverses forces, toutes **constantes**. Cela pourrait s'illustrer par exemple par un cycliste pédalant à la montée par vent contraire... Restons abstrait: cette masse est soumise à des forces, on en considère trois typiques:

Fig. 1



Examinons l'efficacité de ces forces:

Certaines forces favorisent, voire provoquent le déplacement; c'est le cas ici de $\mathbf{F}_1$, dont l'angle ϕ_1 avec **PQ** est $< 90°$; son travail est alors positif. D'autres forces entravent le déplacement; c'est le cas de $\mathbf{F}_3$, dont l'angle ϕ_3 avec **PQ** est $> 90°$; son travail est alors négatif. D'autres encore n'ont pas d'effet sur le déplacement, c'est le cas de $\mathbf{F}_2$, dont l'angle ϕ_2 avec **PQ** est de 90°; son travail est alors nul.

On note A (comme "Arbeit" !) cette nouvelle grandeur nommée **travail**.
La notation: $A_{PQ}(\mathbf{F})$ indique le travail de la force **F** sur le parcours de P à Q, dans cet ordre. On a:

$0 \le \phi < 90°$: la force $\mathbf{F}_1$ favorise le déplacement: $A_{PQ}(\mathbf{F}_1) > 0$;

$90° < \phi \le 180°$: la force $\mathbf{F}_3$ entrave le déplacement: $A_{PQ}(\mathbf{F}_3) < 0$;

$\phi = 90°$: la force $\mathbf{F}_3$ n'a pas d'effet sur le déplacement: $A_{PQ}(\mathbf{F}_3) = 0$.

Ainsi, le travail fait intervenir **trois** éléments:
- l'intensité de la force, autrement dit la norme du vecteur **F**,
- la longueur d du déplacement, c-à-d la norme du vecteur **d = PQ**
- et l'angle ϕ entre ces deux vecteurs.

(On rappelle que l'angle entre deux vecteurs se défini lorsque les deux vecteurs ont même origine).

Pour une force **vectoriellement constante** et sur un **parcours rectiligne**, comme ici, l'efficacité d'une force se traduit par l'expression de son travail:

$$A_{PQ}(\mathbf{F}) = F\,d\cos\phi$$

car la fonction trigonométrique *cosinus* est le meilleur candidat pour décrire la dépendance angulaire: cos0° = 1, cos90° = 0, cos180° = -1; on voit ainsi que le signe de A est porté par $\cos\phi$, en accord avec les considérations d'efficacité évoquées ci-dessus.

Cette dernière expression ($F\,d\,\cos\phi$) doit faire immanquablement penser à un **produit scalaire**, celui des vecteurs **F** et **d**. En effet:

La **définition** du travail d'une **force vectoriellement constante** sur un **parcours rectiligne** est:

$$A_{PQ}(\mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$$

c'est un produit scalaire !

Unités:
Le travail étant le produit d'une force, en newton, par un déplacement, en mètre, ses unités sont donc des Nm qu'on baptise joules (J) ; on verra sous peu que c'est auusi l'unité, dans le système MKSA, de l'énergie, sous toutes ses formes.

$$[A] = \mathrm{Nm} = \mathrm{J}$$

Exemple de calcul:

Le travail *minimum* pour soulever une masse de 1 kg d'une hauteur de 1 m est de 9,81 J. De même pour une masse de 10 kg d'une hauteur de 0,1 m, etc.

Il s'agit du travail *minimum*, parce qu'il suffit d'une force égale et opposée au poids de la masse pour la soulever à v = const. Mais cette force peut être plus élevée, ce qui donnera une accélération non négligeable à la masse; le travail de la force sera plus élevé aussi puisqu'il fait intervenir le produit de la force par le déplacement.

2) Propriétés du travail

Elles résultent essentiellement des propriétés du *produit scalaire.*
On se permet tout d'abord d'en rappeler la plus fondamentale:
Le produit scalaire de deux **vecteurs** *est indépendant de la base*, du système de coordonnées dans lequel sont définis les deux vecteurs. C'est la définition même du mot *scalaire.* Dans ce cours, les vecteurs seront rarement exprimés par leurs composantes, mais par contre, ce sera toujours l'aspect géométrique, en l'occurence l'angle ϕ, entre les deux vecteurs qu'il faudra repérer et prendre en compte. Revenons au travail comme application du produit scalaire:

Première propriété:

Le travail d'une force d'un point P *à un point* Q (distance orientée **d**) *est égal au travail de cette même force de Q à P mais changé de signe:*

$$A_{PQ}(\mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}, \quad A_{QP}(\mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{d}) = -\mathbf{F}\cdot\mathbf{d} = -A_{PQ}(\mathbf{F})$$

Il est en effet assez évident que si la force favorise le déplacement dans un sens, cette même force l'entrave pour le parcours en sens inverse.

Deuxième propriété:

Le travail de la somme vectorielle (la **résultante***) de plusieurs forces est égal à la somme des travaux de chacune des forces:*

$$A(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n) = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n) \cdot \mathbf{d} = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{d} + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{d} + \ldots + \mathbf{F}_n \cdot \mathbf{d} =$$
$$= A(\mathbf{F}_1) + A(\mathbf{F}_2) + \ldots + A(\mathbf{F}_n).$$

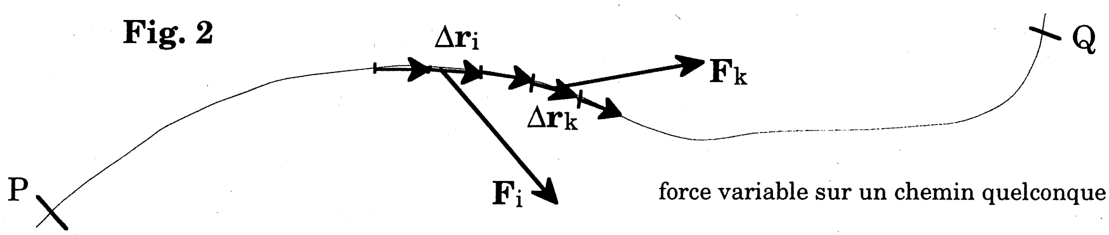
Ainsi par exemple, si la résultante des forces est nulle, le travail total est nul aussi, quels que soient les valeurs des travaux individuels. (Important, ça! La réciproque est pourtant fausse, pourquoi?).

3) Généralisation

Jusqu'ici, seul le cas très particulier d'une force vectoriellement constante sur un parcours rectiligne a été examiné. Bien qu'important, ce cas est plutôt rare.

Ne sachant que calculer le travail sur un chemin rectiligne, l'idée, plus que tricentenaire et toujours aussi performante est de décomposer un parcours quelconque en un nombre suffisant (infini) de tronçons rectilignes suffisamment courts pour "donner l'illusion", et pour que la force, a priori variable, varie assez peu pour pouvoir être considérée comme constante sur un tronçon. Il n'y a plus qu'à appliquer notre définition une infinité de fois!

Fig. 2



force variable sur un chemin quelconque

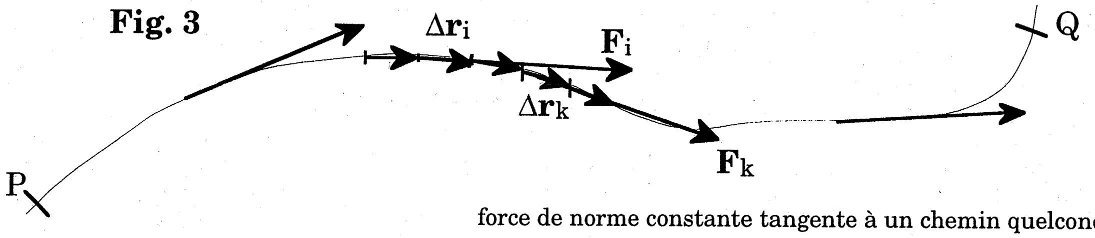
Le chemin de P à Q serait fragmenté en n tronçons orientés, vectoriels, et nommés (bizarrement?) $\Delta\mathbf{r}_i$, où $i = 1, 2, \ldots, n$. **F** agit différemment sur le tronçon i que sur le tronçon k.

Deux cas particuliers importants:

a) Force constante en grandeur et tangente à la trajectoire quelconque :

C'est l'exemple typique d'une **force de traction** pour un véhicule si la force est dans le sens du déplacement. Serait aussi l'exemple typique d'une **force de frottement** ou de freinage si la force est de sens opposé au déplacement. La fig. 3 montre le cas d'une force de traction de valeur constante pour un véhicule allant de P à Q.

Fig. 3



force de norme constante tangente à un chemin quelconque

On sait exprimer le travail (élémentaire) de **F** sur un petit tronçon (rectiligne):

$$A_i(\mathbf{F}_i) = \mathbf{F}_i \cdot \Delta\mathbf{r}_i$$

où $\mathbf{F}_i$ est ce que vaut **F** sur le tronçon numéroté i.

Le travail total sur tout le parcours est la somme de tous ces travaux élémentaires:

$$A_{PQ}(\mathbf{F}) = \sum A_i(\mathbf{F}_i) = \sum \mathbf{F}_i \cdot \Delta\mathbf{r}_i$$

Ceci n'est autre que l'expression très générale du travail d'une force quelconque sur un parcours quelconque. Or ici la force est tangente au chemin, les vecteurs $\mathbf{F}_i$ et $\Delta\mathbf{r}_i$ sont donc parallèles (ou antiparallèles), leur produit scalaire revient au produit de leur norme affecté d'un signe selon le sens de $\mathbf{F}_i$ ($\cos\phi = 1$ pour une force de traction et $\cos\phi = -1$ pour une force de frottement):

$$\sum \mathbf{F}_i \cdot \Delta\mathbf{r}_i = \sum(\pm F_i\, \Delta r_i) = \sum(\pm F\, \Delta r_i) = \pm F \sum \Delta r_i$$ (Noter la nuance entre r et $\mathbf{r}$!)

l'indice i de F_i a disparu puisque par hypothèse la force est de norme constante, ce qui permet de la mettre en évidence devant le signe somme.

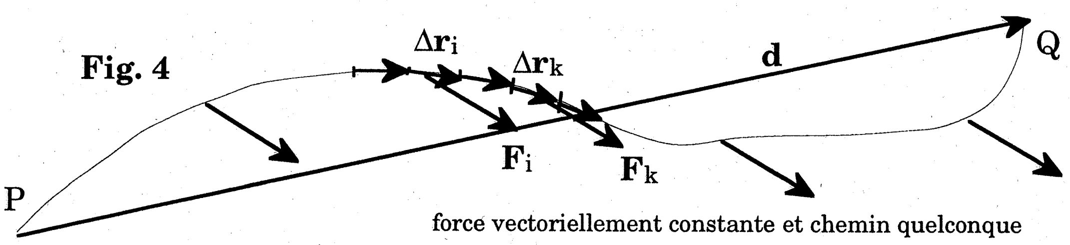
Or, la dernière somme n'est autre que la longueur totale L du chemin.

Finalement: $$A_{PQ}(\mathbf{F}) = \pm F\,L$$ si F = const. et **F** // à la trajectoire.

b) Force *vectoriellement* constante:

Il est **crucial** de ne pas confondre ce cas avec le précédent !!

Fig. 4



force vectoriellement constante et chemin quelconque

On part de l'expression générale: $A_{PQ}(\mathbf{F}) = \sum A_i(\mathbf{F}_i) = \sum \mathbf{F}_i \cdot \Delta\mathbf{r}_i$
mais **F** = **const**. par hypothèse, donc tous les $\mathbf{F}_i$ sont les mêmes: on pose alors $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}$, et on peut ainsi mettre le vecteur **F** en évidence dans la sommation:

$$A_{PQ}(\mathbf{F}) = \sum \mathbf{F}_i \cdot \Delta\mathbf{r}_i = \sum \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r}_i = \mathbf{F} \cdot \sum \Delta\mathbf{r}_i$$

or, $\sum \Delta\mathbf{r}_i$ n'est autre que le vecteur **d** allant de P à Q: $\sum \Delta\mathbf{r}_i = \mathbf{d}$ (mais oui !)

On obtient le résultat d'une extrême importance suivant : le travail d'une force *vectoriellement constante* ne dépend pas du chemin suivi mais seulement du vecteur joignant ses extémités :

$$A_{PQ}(\mathbf{F} = \text{const.}) = \mathbf{F}\cdot\mathbf{d} \qquad \text{où} \qquad \mathbf{d} = \mathbf{PQ}$$

Corollaire important :

le travail d'une force **vectoriellement constante** *sur un parcours fermé est nul.*

En effet, si le parcours est fermé, le vecteur joignant ses extrémités est évidemment le vecteur nul.

Un exemple typique d'une force ayant une telle propriété est le **poids** d'un corps. On en verra d'autres exemples en *gravitation* et en *électricité*, et on insistera sur ce genre de forces, fondamentales en physique, pour lesquelles le travail ne dépend pas du chemin. On verra qu'il n'est même souvent pas nécessaire qu'elles soient vectoriellement constantes pour que leur travail sur un parcours fermé soit nul. De telles forces, comme la force de gravitation, la force élastique et la force électrostatique, seront dites *conservatives*.

Remarque:

L'expression générale du travail d'une force quelconque sur un parcours quelconque telle qu'on l'a utilisée est donc:

$$A_{PQ}(\mathbf{F}) = \sum \mathbf{F}_i \cdot\Delta\mathbf{r}_i$$

Une telle expression n'est presque pas utilisable telle quelle. Le calcul différentiel et intégral permet beaucoup plus de rigueur et de souplesse. On donne ici l'expression tout à fait générale du travail, et manipulable dès qu'on connait les règles de l'intégration (elles sont au programme de 3ème année!)

$$A_{PQ}(\mathbf{F}) = \int_P^Q \mathbf{F}.\mathbf{dr}$$

le signe Δ est devenu "d" alors que Σ est changé en $\int$. Une intégrale est en fait une somme infinie d'éléments infiniments petits: les différentielles d..., ici **dr**.

Travail du poids :

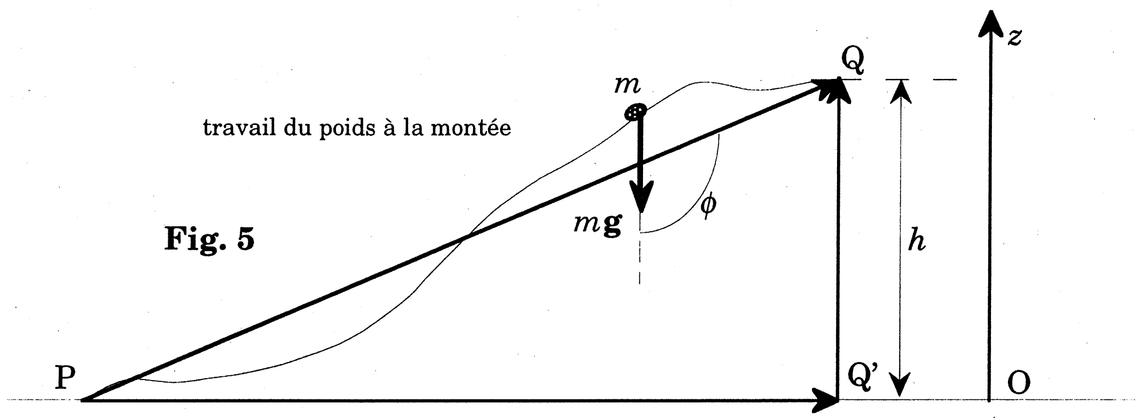


Fig. 5

Dans un domaine d'espace terrestre pas trop étendu, le **poids** peut être considéré avec une bonne approximation comme une **force vectoriellement constante**. Par conséquent, son travail d'un point à un autre ne dépend pas des détours du chemin suivi, comme on va encore le montrer ci-dessous:

Soit une masse m se déplaçant de P à Q le long d'un chemin non rectiligne. Le point Q se trouve à une altitude h au dessus du point P.

N.B. On veut calculer le travail du **poids** de m allant de P à Q, sachant bien qu'il doit y avoir d'autres forces pour permettre ce déplacement, mais on ne s'occupe que du poids dans cet exemple.

C'est une force vectoriellement constante, par conséquent: $A_{PQ}(m\mathbf{g}) = m\mathbf{g} \cdot \mathbf{PQ}$

avec $\mathbf{PQ} = \mathbf{PQ'} + \mathbf{Q'Q} \Rightarrow A_{PQ}(m\mathbf{g}) = m\mathbf{g} \cdot \mathbf{PQ'} + m\mathbf{g} \cdot \mathbf{Q'Q}$

le premier produit scalaire est nul puisque $m\mathbf{g}$ est perpendiculaire à $\mathbf{PQ'}$.

Il reste: $A_{PQ}(m\mathbf{g}) = m\mathbf{g} \cdot \mathbf{Q'Q}$

Comme $|\mathbf{Q'Q}| = h$ et que $\mathbf{Q'Q}$ est de sens opposé à $m\mathbf{g}$, ($\cos\phi = -1$), on peut écrire:

à la montée: $$A_{PQ}(m\mathbf{g}) = -\,mgh$$

à la descente: $$A_{QP}(m\mathbf{g}) = +\,mgh$$

Evitons deux formules en choisissant un axe z (Fig. 5) dont l'origine $z = 0$ est à l'altitude nulle et orienté naturellement vers le haut (sens opposé au vecteur-poids). Dans ce cas l'expression du travail du poids entre deux points 1 et 2 quelconques et indépendamment du sens de parcours devient:

$$A_{1,2}(m\mathbf{g}) = -\,mg\Delta z$$

Remarque: Ces diverses situations ont illustré le calcul du travail *d'un* type de force dans chaque cas. Mais il n'est nulle part dit que cette force est responsable du déplacement de P à Q. Il doit être évident qu'il doit y avoir *d'autres* forces en jeu, mais elles n'ont pas été dessinées et leur travail n'a simplement pas été examiné.

4) Machines simples

Par "machine simple" on entend un instrument - un outil - destiné à multiplier la force (par un facteur > 1 ou < 1) tout en *conservant* le travail. Un *levier* en est l'exemple le plus banal: aux deux extrémités du levier les forces sont différentes, mais les déplacements de ces forces aussi, de sorte que les travaux des deux forces sont égaux, aux frottements et autres déperditions près. D'autres exemples de machines simples: pinces, tournevis, poulies, engrenages, crics, freins hydrauliques...

Il faut comprendre (ou au moins admettre) qu'on ne peut pas augmenter l'énergie d'un système sans apport extérieur, mais que cette impuissance ne s'applique pas à la force. Multiplier une force ne tient ni du miracle ni ne fait intervenir du mouvement perpétuel. C'est à propos de l'énergie, en rapport avec le travail, que s'applique le principe de l'impossibilité du mouvement perpétuel.

Remarque idiote: Imaginons que le travail du poids ne soit pas nul sur un parcours fermé, de 1 à 2 sur un chemin puis de 2 à 1 par un autre chemin: $A_{1,1} = A_{1,2} + A_{2,1}$ où on aurait par exemple $A_{1,2} < -A_{2,1}$, ce qui ferait que $A_{1,1} \neq 0$ et surtout qu'on récupérerait du travail au retour! Il suffirait donc de bien choisir son parcours pour gagner de l'énergie. Comme (quasi-) personne n'est assez stupide pour penser que cela est possible, la conclusion s'impose: $A_{1,1} = 0$ quelle que soit la forme de la boucle. D'autres forces, en plus du poids, ont cette super-propriété, bien qu'elles ne soient généralement pas vectoriellement constantes; on les a citées plus haut. Elles sont dites *conservatives* parce qu'elles ne font pas varier l'*énergie mécanique* de la masse sur laquelle elles agissent. On en reparlera abondamment.

(La remarque n'était peut-être pas idiote, mais c'était pour attirer l'attention).

1. Calculer le travail fourni pour soulever (verticalement) une masse de 1 kg d'une hauteur de 1 m dans les trois cas suivants:
a) avec la force minimale (sans levier ou autre);
b) dans un temps de 0,2 s en appliquant une force constante;

Rép: b) env. 60 J.

2. Sur une piste circulaire horizontale de 500 m de rayon, une voiture de 800 kg roule à 180 km/h. La force de traction est de 2000 N.
Calculer le travail par tour de piste de chaque force agissant sur la voiture (il y en a cinq).

Rép:

3. Un funiculaire dont la masse est de 4 t relie deux stations P et Q distantes de 1 km. La dénivellation est de 250 m.
On supposera la vitesse constante et on négligera les frottements.
Calculer le travail des forces (lesquelles?) aussi bien à la montée qu'à la descente.

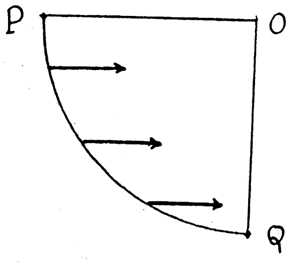
Rép:

4. Au démarrage sur une route horizontale une voiture de 1 t a un MRUA sur une distance de 100 m. On a calculé que le travail accompli par la force de traction est de 150 000 J. Les frottements sont négligés.
Quels ont été le temps de parcours, la vitesse en fin de parcours et la vitesse moyenne ?

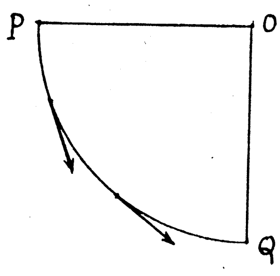
Rép: 11,5 s; 17,3 m/s; 8,7 m/s.

5. Un mobile est astreint à se déplacer sur une trajectoire en quart de cercle de rayon R = 5 m. Calculer le travail de **F** dans les trois cas (F = 10 N) :

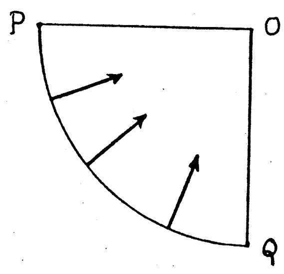
a) **F** // **OP**



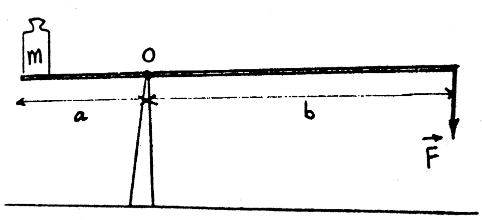
b) **F** est tangente



c) **F** est radiale



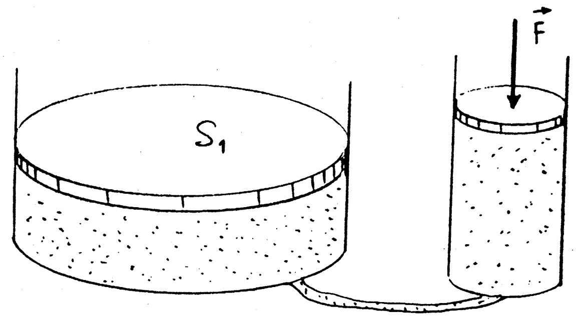
6. On agit avec une force **F** pour soulever m.
Montrer qu'un levier multiplie la force mais conserve le travail, c-à-d que le travail des forces aux bouts du levier est le même, aux frottements près, qu'on négligera.
Il faut considérer une faible rotation du levier au voisinage de la position horizontale.



7. Deux cylindres pleins d'un liquide incompressible sont reliés par un tuyau. Chaque cylindre est obturé par un piston coulissant (surfaces S_1 et S_2).

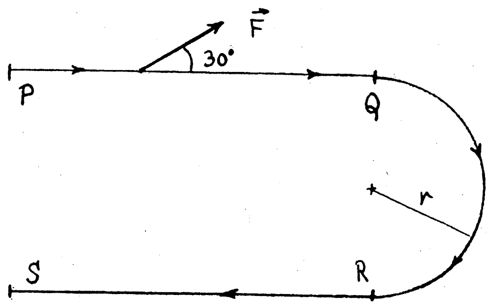
C'est le principe de la presse hydraulique, ou des freins hydrauliques.

Montrer qu'un tel système est un multiplicateur de force mais conserve le travail.



8. Sur tout le parcours PQRS un mobile est soumis (entre autres) à une force **F** = **cst.** faisant un angle de 30° avec le segment PQ dont la longueur est de 35 m; le rayon r du demi-cercle est de 10 m et la grandeur de la force est de 10 N.

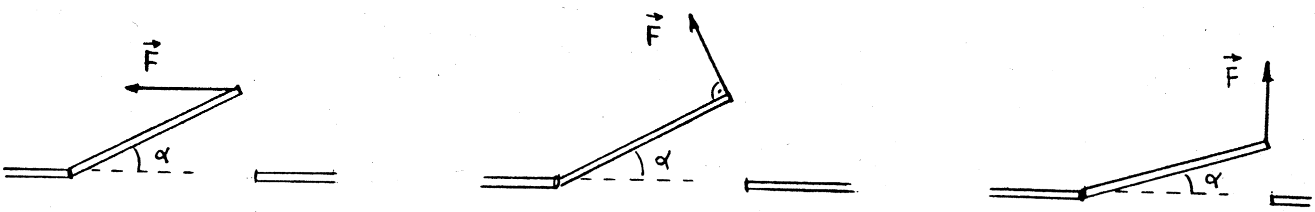
Calculer $A_{PS}(\mathbf{F})$



Rép: – 100 J.

9. Avec une force **F** , pas nécessairement constante, on veut soulever une trappe de la position quasi horizontale à la position quasi verticale dans les trois cas suivants, quel que soit α:

a) **F** horizontale; b) **F** perpend. à la trappe; c) **F** verticale.



Dans quel cas le travail nécessaire est-il le plus faible ? Et le plus élevé ?