Série 1
Analyse
Fonctions réelles
Corrigés des exercices

Exercice 1

Pour qu'une relation $x \mapsto f(x)$ soit une fonction, il faut que chaque valeur de x ne donne qu'une seule valeur de $f(x)$. Autrement dit si $f(x_1) \neq f(x_2)$, on ne peut pas avoir $x_1 = x_2$. Ainsi, f_1, f_4 et f_6 sont des fonctions, alors que f_2, f_3 et f_5 n'en sont pas.

Exercice 2

1) $f(x) = 5$: domaine de définition $= \mathbb{R}$;
zéros: $f(x) = 0 \Rightarrow 5 = 0$ impossible $\Rightarrow$ pas de zéro.

2) $f(x) = \frac{-3}{2}x$: domaine de définition $= \mathbb{R}$;
zéro: $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{-3}{2}x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ zéro en $x = 0$.

3) $f(x) = 2x^3 - 4x$: domaine de définition $= \mathbb{R}$;
zéros: $f(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 4x = 0 \Rightarrow 2x(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow$ soit $2x = 0$, soit $x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow$ zéros en $x = -\sqrt{2}$, 0 et $\sqrt{2}$.

4) $f(x) = \frac{1}{x}$: on doit avoir $x \neq 0 \Rightarrow$ domaine de définition $= \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$;
zéros : $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow 1 = 0$ impossible $\Rightarrow$ pas de zéro.

5) $f(x) = \sqrt{x}$: on doit avoir $x \geqslant 0 \Rightarrow$ domaine de définition $= [0; +\infty[= \mathbb{R}_+$;
zéros: $f(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ zéro en $x = 0$.

6) $f(x) = \sqrt{x-1}$: on doit avoir $x - 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 1 \Rightarrow$ domaine de définition $= [1; +\infty[$;
zéros: $f(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$ zéro en $x = 1$.

7) $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 16}$: on doit avoir $x^2 - 16 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 4 \Rightarrow$ domaine de définition $= \mathbb{R} \setminus \{-4; 4\}$;
zéros: $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x}{x^2 - 16} = 0 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ zéro en $x = 0$.

8) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$: pour toute valeur de x, on a $x^2 + 1 \geqslant 0 \Rightarrow$ domaine de définition $= \mathbb{R}$;
zéros: $f(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$ impossible $\Rightarrow$ pas de zéro.

9) $f(x) = \frac{4x - 5}{\sqrt{2 - 3x}}$: on doit avoir $\sqrt{2 - 3x} \neq 0 \Rightarrow 2 - 3x \neq 0 \Rightarrow 3x \neq 2 \Rightarrow x \neq \frac{2}{3}$ et
$2 - 3x \geqslant 0 \Rightarrow 2 \geqslant 3x \Rightarrow x \leq \frac{2}{3} \Rightarrow$ domaine de définition $=]-\infty; \frac{2}{3}[$;
zéros: $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{4x - 5}{\sqrt{2 - 3x}} = 0 \Rightarrow 4x - 5 = 0 \Rightarrow 4x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$
$\Rightarrow$ zéro en $x = \frac{5}{4}$.

10) $f(x) = 1 + \sqrt{2x+5}$: on doit avoir $2x+5 \geqslant 0 \Rightarrow 2x \geqslant -5 \Rightarrow x \geqslant -\frac{5}{2}$

$\Rightarrow$ domaine de définition $= \left[-\frac{5}{2} ; +\infty\right[$;

zéro : $f(x) = 0 \Rightarrow 1 + \sqrt{2x+5} = 0 \Rightarrow \sqrt{2x+5} = -1$ impossible car $\sqrt{2x+5} \geqslant 0 \Rightarrow$ pas de zéro.

11) $f(x) = \frac{x-1}{(x-2)^2}$: on doit avoir $(x-2)^2 \neq 0 \Rightarrow x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \Rightarrow$ domaine de définition $=$
$= \mathbb{R} \setminus \{2\}$;

zéro : $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$ zéro en $x = 1$.

12) $f(x) = \frac{x+5}{x^3 - x^2 - 6x}$: on doit avoir $x^3 - x^2 - 6x \neq 0 \Rightarrow x(x^2 - x - 6) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ et $x^2 - x - 6 \neq 0$; on a $x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 3 \\ -2 \end{array} \right.$;

ainsi $x^3 - x^2 - 6x \neq 0$ si $x \neq 0$, $x \neq 3$ et $x \neq -2$

$\Rightarrow$ domaine de définition $= \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 0 ; 3\}$;

zéro : $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x+5}{x^3 - x^2 - 6x} = 0 \Rightarrow x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$

$\Rightarrow$ zéro en $x = -5$.

<u>Exercice 3</u>

1) $f(x) = x^3$: on a $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x) \Rightarrow$ impaire.

2) $f(x) = x^8$: on a $f(-x) = (-x)^8 = x^8 = f(x) \Rightarrow$ paire.

3) $f(x) = \frac{x^2+2}{x^4+x^2}$: on a $f(-x) = \frac{(-x)^2+2}{(-x)^4+(-x)^2} = \frac{x^2+2}{x^4+x^2} = f(x) \Rightarrow$ paire.

4) $f(x) = \frac{x^2}{x^3+x}$: on a $f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^3+(-x)} = \frac{x^2}{-x^3-x} = -\frac{x^2}{x^3+x} = -f(x) \Rightarrow$ impaire

5) $f(x) = |x|$: on a $f(-x) = |-x| = |x| = f(x) \Rightarrow$ paire.

6) $f(x) = x \cdot \sqrt{x^2+1}$: on a $f(-x) = (-x) \cdot \sqrt{(-x)^2+1} = -x \cdot \sqrt{x^2+1} = -f(x) \Rightarrow$ impaire.

7) $f(x) = 5x^7 - x^3 + \frac{1}{x}$: on a $f(-x) = 5(-x)^7 - (-x)^3 + \frac{1}{-x} = -5x^7 + x^3 - \frac{1}{x} = -\left(5x^7 - x^3 + \frac{1}{x}\right) =$
$= -f(x) \Rightarrow$ impaire.

8) $f(x) = \frac{x^3-1}{x}$: on a $f(-x) = \frac{(-x)^3-1}{-x} = \frac{-x^3-1}{-x} = \frac{x^3+1}{x} \neq \pm f(x) \Rightarrow$ ni paire, ni impaire.

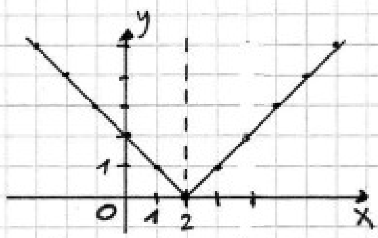
Exercice 4

1) $f(x) = 3x - 1$: avec $D = \mathbb{R}$ et $A = \mathbb{R}$, $f : D \to A$ est bijective ;
$y = 3x - 1 \Rightarrow y + 1 = 3x \Rightarrow \frac{1}{3}y + \frac{1}{3} = x \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.

2) $f(x) = x^2 - 4$: comme $f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = f(x)$, f est paire et donc symétrique par rapport à l'axe Oy ; il faut donc prendre $D = \mathbb{R}_+$ (car sinon f n'est pas injective puisque $f(-x) = f(x)$) ; comme $x^2 \geqslant 0$, on a $x^2 - 4 \geqslant -4$; on prend donc $A = [-4; +\infty[$;
avec $D = \mathbb{R}_+$ et $A = [-4; +\infty[$, $f : D \to A$ est bijective ;
$y = x^2 - 4 \Rightarrow x^2 = y + 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y+4}$; mais comme $x \in D = \mathbb{R}_+$, on a $x \geqslant 0$ et on prend le signe "+" : $x = \sqrt{y+4} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$.

3) $f(x) = 4x^3$: avec $D = \mathbb{R}$ et $A = \mathbb{R}$, $f : D \to A$ est bijective (f est impaire) ;
$y = 4x^3 \Rightarrow x^3 = \frac{y}{4} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{y}{4}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{4}}$.

4) $f(x) = |x - 2|$: le graphique de cette fonction est :



f est symétrique par rapport à la droite $x = 2$; on peut donc prendre $D = [2; +\infty[$ pour que f soit injective ; comme $|x - 2| \geqslant 0$, on a $A = [0; +\infty[= \mathbb{R}_+$;
avec $D = [2; +\infty[$ et $A = [0; +\infty[$, $f : D \to A$ est bijective ;
on a $x - 2 \geqslant 0$ si $x \in D$; ainsi $f(x) = |x - 2| = x - 2$
$\Rightarrow y = x - 2 \Rightarrow x = y + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = x + 2$.

Exercice 5

1) $f(x)=x^2+4$ et $g(x)=x-1$: $f\circ g(x)=f(g(x))=f(x-1)=(x-1)^2+4=x^2-2x+1+4=$
$=x^2-2x+5$;
$g\circ f(x)=g(f(x))=g(x^2+4)=x^2+4-1=x^2+3$.

2) $f(x)=3x+5$ et $g(x)=\frac{x-5}{2}$; $f\circ g(x)=f(g(x))=f\left(\frac{x-5}{2}\right)=3\cdot\frac{x-5}{2}+5=\frac{3x-15}{2}+\frac{10}{2}=$
$=\frac{3x-5}{2}$;
$g\circ f(x)=g(f(x))=g(3x+5)=\frac{3x+5-5}{2}=\frac{3x}{2}$.

Exercice 6

1) $f(x)=\frac{1}{3}x-3$: $f(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{3}x-3=0 \Rightarrow \frac{1}{3}x=3 \Rightarrow x=9$;
tableau de signes :

x		9	
$f(x)$	$-$	0	$+$

2) $f(x)=x^2-x$: $f(x)=0 \Rightarrow x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow$ soit $x=0$, soit $x-1=0 \Rightarrow x=1$;
tableau de signes :

x		0		1	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

3) $f(x)=-x^2+3x+4$: $f(x)=0 \Rightarrow -x^2+3x+4=0 \Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{-2}= \begin{cases}-1\\4\end{cases}$;
tableau de signes :

x		-1		4	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

4) $f(x)=\sqrt{x^2+4}$: $D=\mathbb{R}$ car $x^2+4\geq 0$; $f(x)=0 \Rightarrow \sqrt{x^2+4}=0 \Rightarrow x^2+4=0 \Rightarrow x^2=-4$,
impossible ;
tableau de signes :

x	
$f(x)$	$+$

5) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x$: $f(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{3}x^3-2x=0 \Rightarrow \frac{1}{3}x(x^2-6)=0 \Rightarrow$ soit $x=0$, soit
$x^2-6=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{6}$;
tableau de signes :

x		$-\sqrt{6}$		0		$\sqrt{6}$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

6) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$: $x^2-1\neq 0 \Rightarrow x\neq\pm 1 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$; $f(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2-1}=0$
$\Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$;
tableau de signes :

x		-1		0		1	
$f(x)$	$+$	//////	$-$		$-$	//////	$+$

7) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$: $x^2-4 \geqslant 0 \Rightarrow x^2 \geqslant 4 \Rightarrow$ soit $x \geqslant 2$, soit $x \leqslant -2 \Rightarrow D =]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[=$
$= \mathbb{R} \setminus]-2;2[$; $f(x)=0 \Rightarrow \sqrt{x^2-4}=0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2$;

tableau de signes:

x		-2		2	
$f(x)$	$+$	0	//////	0	$+$

8) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-2x-3}$: $x^2-2x-3=0 \Rightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{-1;3\}$;

$f(x)=0 \Rightarrow \dfrac{x^3}{x^2-2x-3}=0 \Rightarrow x^3=0 \Rightarrow x=0$;

tableau de signes:

x		-1		0		3	
$f(x)$	$-$	////	$+$	0	$-$	////	$+$

Exercice 7

On a $f(x)=\dfrac{3-2x}{x+1}$.

1) $x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow$ domaine de définition $= \mathbb{R}\setminus\{-1\}$;

$y=\dfrac{3-2x}{x+1} \Rightarrow y(x+1)=3-2x \Rightarrow xy+y=3-2x \Rightarrow xy+2x=3-y$
$\Rightarrow x(y+2)=3-y \Rightarrow x=\dfrac{3-y}{y+2}$: il faut que $y+2\neq 0 \Rightarrow y\neq -2$
$\Rightarrow$ domaine d'arrivée $= \mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

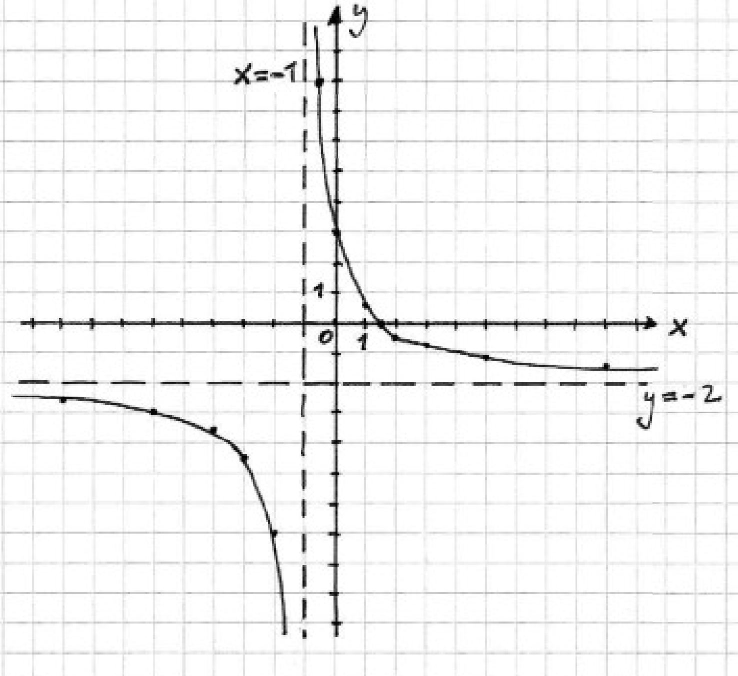
2) Avec l'axe x: $f(x)=0 \Rightarrow \dfrac{3-2x}{x+1}=0 \Rightarrow 3-2x=0 \Rightarrow x=\dfrac{3}{2} \Rightarrow \left(\dfrac{3}{2};0\right)$.
Avec l'axe y: $x=0 \Rightarrow f(x)=\dfrac{3}{1}=3 \Rightarrow (0;3)$.

3) $f(-x)=\dfrac{3-2(-x)}{-x+1}=\dfrac{3+2x}{-x+1}\neq \pm f(x) \Rightarrow$ ni paire, ni impaire.

4) Tableau de signes:

x		-1		$\frac{3}{2}$	
$f(x)$	$-$	////	$+$	0	$-$

5) Représentation graphique:



Exercice 8

On a $f(x) = \frac{x-1}{3x+5}$.

1) $f(1) = \frac{1-1}{3.1+5} = 0$; $f(0) = \frac{-1}{5} = -\frac{1}{5}$; $f\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{-\frac{5}{3}-1}{-5+5} = \frac{-\frac{8}{3}}{0}$ impossible ;

$f(5) = \frac{5-1}{3\cdot5+5} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.

2) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}-1}{3\cdot\frac{1}{x}+5} = \frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{3+5x}{x}} = \frac{1-x}{x} : \frac{3+5x}{x} = \frac{1-x}{x}\cdot\frac{x}{3+5x} = \frac{1-x}{3+5x}$.

$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{x-1}{3x+5}} = 1 : \frac{x-1}{3x+5} = 1\cdot\frac{3x+5}{x-1} = \frac{3x+5}{x-1}$.

On n'a pas $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$.

Exercice 9

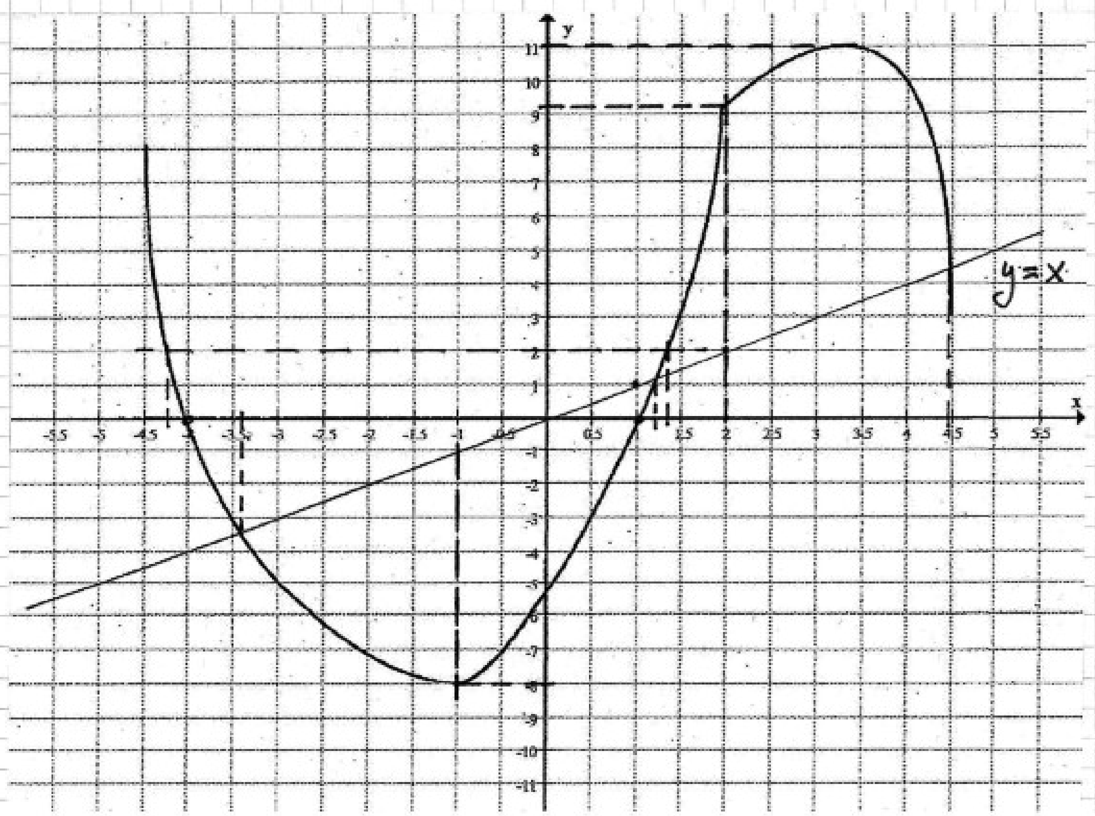
1) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$: $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} = \frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{1+x}{x}} = \frac{1-x}{x} : \frac{1+x}{x} = \frac{1-x}{x}\cdot\frac{x}{1+x} = \frac{1-x}{1+x} =$

$= -\frac{x-1}{x+1} = -f(x)$.

2) $f(x) = x^2 - x$: $f(x+1) = (x+1)^2 - (x+1) = x^2 + 2x - 1 - x - 1 = x^2 + x$;

$f(-x) = (-x)^2 - (-x) = x^2 + x \implies f(x+1) = f(-x)$

Exercice 10



1) $f(-1) = -8$.
2) $f(2) \cong 9{,}2$.
3) $x \cong -4{,}25$ et $x \cong 1{,}4$.
4) $x = -4$ et $x = 1$
5) $x \cong -3{,}4$, $x \cong 1{,}2$ et $x \cong 4{,}45$.
6) Domaine de définition $= [-4{,}5 \,;\, 4{,}5]$.
Ensemble des images $= [-8 \,;\, 11]$.