ENERGIES

cinétique, potentielle, mécanique

ENERGIE CINETIQUE

La notion de *force* telle que l'a définie très précisément Newton vers la fin du $17^{ème}$ siècle s'est révélée très féconde, comme on a pu le voir et comme on le verra encore dans un chapitre consacré spécialement à la force de gravitation et à l'astronomie. Vers la fin du $18^{ème}$ et le début du siècle suivant fut mis en place un nouveau concept, encore plus performant, celui *d'énergie*. Cette notion peut prendre des formes très diverses parce qu'on l'a construite pour qu'elle intervienne efficacement dans tous les domaines de la physique. En effet, un phénomène est, par essence, quelque chose qui se passe, où des grandeurs physiques (positions, vitesses, forces, etc.) changent, évoluent. Mais l'énergie, sous certaines conditions qu'on précisera, reste constante; on dit qu'elle est conservée. Et c'est là que réside son efficacité car si elle reste la même à deux instants différents, le physicien est content parce qu'il peut écrire un signe "=" entre deux expressions apparemment différentes. On a fabriqué ce concept pour qu'il ait cette propriété.

Dans ce cours de mécanique, on ne verra que la forme mécanique de l'énergie, dans d'autres parties du cours sont examinés et utilisés ses aspects électriques et thermiques mais aussi les transformations d'une forme dans une autre.

Commençons abruptement et sans ambages:

Définition:

Une masse ponctuelle m animée d'une vitesse v possède alors une énergie de mouvement dite *énergie cinétique* qui s'écrit:

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} m v^2$$

C'est une définition et rien de plus, il n'y a rien à y *comprendre* pour l'instant. Mais elle n'a pas été établie de façon fantaisiste ou au hasard. On avait une idée derrière la tête, on cherchait une relation, un théorème simplifiant des calculs. Voyons cela.

Remarques préalables:

- Dans le chapitre précédent, on a appris à calculer le travail *d'une* force, ou de plusieurs, sans nécessairement se préoccuper de sa responsabilité dans la forme de trajectoire. Maintenant, on va s'intéresser au travail de la **résultante** des forces, celle, et la seule, pour laquelle $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.
- De nouveau, on fragmente le chemin sinueux en portions rectilignes assez courtes pour que $\mathbf{F}$ n'y varie pas sensiblement. On va très bientôt voir qu'une telle restriction sera inutile.

Soit donc une masse ponctuelle effectuant une certaine trajectoire, a priori quelconque. Soit alors $\mathbf{F}$ la force **résultante** agissant sur m et calculons son travail sur un tout petit élément de chemin $\Delta\mathbf{r}$ entre les points 1 et 2:

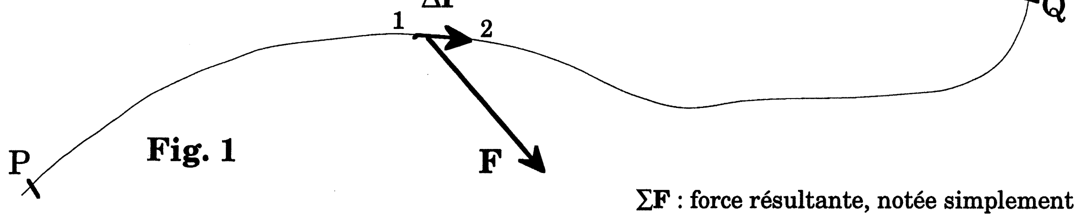


Fig. 1

ΣF : force résultante, notée simplement F

Travail élémentaire $\delta A(\mathbf{F})$ entre 1 et 2 : $\delta A_{1,2} = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r}$

Or, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ d'une part, et $\mathbf{a} = \Delta\mathbf{v}/\Delta t$ par définition de $\mathbf{a}$ d'autre part. Il s'ensuit :

$$\delta A_{1,2} = m \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} \,.\, \Delta\mathbf{r} = m\, \Delta\mathbf{v} \,.\, \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

or, $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ et $\dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \mathbf{v}_m = \dfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$: vitesse moyenne entre 1 et 2.

Ainsi : $\delta A_{1,2} = \dfrac{1}{2} m(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1).(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1) = \dfrac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2)$, qu'on écrit:

$$\delta A_{1,2}(\mathbf{F}_{\text{résult.}}) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Voilà déjà un résultat qui montre que le travail de la force résultante est donné par la variation de l'énergie cinétique. Mais c'est loin d'être tout, parce que franchement, ce résultat n'a rien d'ébouriffant tant qu'il n'est valable que pour une toute petite fraction de la trajectoire. Prenons-la alors en entier et essayons d'exprimer le travail total, du début à la fin en calculant le travail élémentaire δA pour chaque tronçon et en faisant tout simplement la *somme* A_{PQ}:

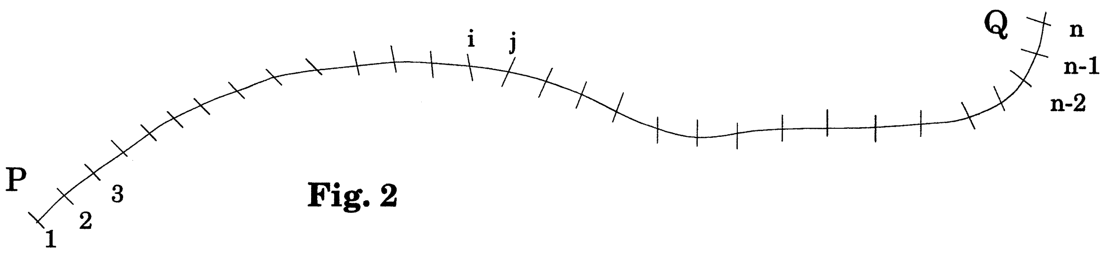


Fig. 2

$$\delta A_{1,2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\delta A_{2,3} = \frac{1}{2}mv_3^2 - \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\delta A_{3,4} = \frac{1}{2}mv_4^2 - \frac{1}{2}mv_3^2$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\;\ldots\ldots$$

$$\delta A_{n-2,n-1} = \frac{1}{2}mv_{n-1}^2 - \frac{1}{2}mv_{n-2}^2$$

$$\delta A_{n-1,n} = \frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{1}{2}mv_{n-1}^2$$

Il est très facile de voir que presque tous les termes disparaissent lors de la sommation sauf deux: le premier et le dernier ! C'est-à-dire:

$$A_{P,Q} = A_{1,n} = \frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Un tel résultat mérite le nom de

Théorème de l'énergie cinétique :

il dit: “Entre deux points quelconques 1 et 2 d'une trajectoire quelconque, le travail de la résultante des forces agissant sur un point matériel de masse m est égal à *la variation de l'énergie cinétique* de cette masse”:

$$A_{1,2}(\mathbf{F}_{\text{résult.}}) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

plus brièvement: $$A_{1,2}(\mathbf{F}_{\text{résult.}}) = \Delta E_{\text{cin}}$$

Commentaires:

- On a vu que si la force résultante favorise le déplacement, son travail est positif et on en voit maintenant une conséquence très logique: l'énergie cinétique de m augmente: $E_{cin}(2) > E_{cin}(1)$.

- On voit aussi que par exemple pour un MCU, le travail de la force centripète est nul et l'énergie cinétique est constante, ce qu'on savait puisque la *grandeur* de la vitesse est constante dans un MCU.

- Mis à part l'hypothèse de point matériel, ce théorème ne souffre d'aucune restriction sur la trajectoire, la force résultante ou autre; son applicabilité est très générale.

- Dans certaines situations, ce théorème peut remplacer avantageusement la deuxième loi de Newton, comme on va le montrer.
Ce théorème est en effet "plus simple" que la loi de Newton car il est *global*, en ce sens qu'il prend en compte *toute* la trajectoire, alors que la loi de Newton est *locale*: la force doit être connue en *chaque point* de la trajectoire.

- Il va de soi que l'unité de l'énergie cinétique est la même que celle du travail, c'est le joule. L'énergie sous toutes ses formes se mesure en J dans le système MKSA, on ne l'oubliera pas.

Exemples de calcul:

1) Calcul de la distance d'arrêt d'une masse lancée du bas d'un plan incliné à la vitesse initiale v_1. Les frottements sont négligés.

a) Par la dynamique et la cinématique, comme on sait le faire depuis longtemps:

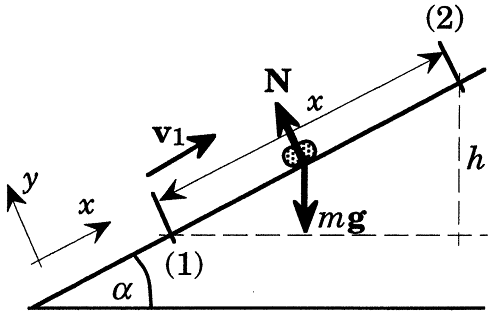


Fig. 3

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} = m\mathbf{a}$$

(x): $-mg\sin\alpha = ma_x = ma$

(y): $-mg\cos\alpha + N = 0$

$\Rightarrow\ a = -g\sin\alpha$

cinématique: $x = \frac{1}{2}at^2 + v_1 t$

et: $v = at + v_1 \ \Rightarrow\ t^* = -\frac{v_1}{a}$ car $v_2 = 0$

on remplace a et t^* dans l'équation pour x, ce qui donne:

$$x^* = \frac{1}{2}g\sin\alpha\frac{v_1^2}{(g\sin\alpha)^2} = \frac{v_1^2}{2g\sin\alpha}$$

b) et maintenant par le théorème de l'énergie cinétique:

$A_{1,2}(\mathbf{N}) = 0 \Rightarrow A_{1,2}(\mathbf{F}) = A_{1,2}(m\mathbf{g}) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -\frac{1}{2}mv_1^2$ car $v_2 = 0$

$A_{1,2}(m\mathbf{g}) = -mg\,h = -mg\,x\sin\alpha$

$$\Rightarrow -mg\,x\sin\alpha = -\frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow x = \frac{v_1^2}{2g\sin\alpha}$$, comme attendu.

Le calcul est plus rapide; il serait aussi valable pour un parcours non rectiligne.

2) Calcul de la vitesse de la masse (ponctuelle) m d'un pendule en tout point de son oscillation, cela en fonction de la longueur L du fil, de l'angle de départ ϕ_1 (pour lequel $v_1 = 0$) et de l'angle ϕ_2 qu'ils forment avec la verticale.

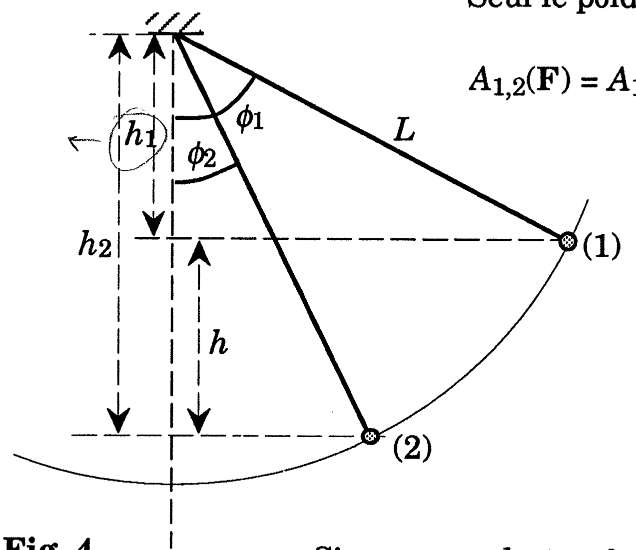


Fig. 4

Seul le poids de m travaille (s'en persuader), donc:

$$A_{1,2}(\mathbf{F}) = A_{1,2}(m\mathbf{g}) = mgh = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2$$

d'où on tire : $v_2 = \sqrt{2gh}$

On remplace ensuite h par les positions angulaires:

$$h = L\cos\phi_2 - L\cos\phi_1 = L(\cos\phi_2 - \cos\phi_1)$$

Finalement:

$$v_2 = \sqrt{2gL(\cos\phi_2 - \cos\phi_1)}$$

Si par exemple $\phi_2 = 0$ et $\phi_1 = \pi/2$, alors $v_2 = \sqrt{2gL}$ comme une chute libre d'une hauteur L.

Rappelons que ce **théorème de l'énergie cinétique** s'applique sans restriction, ni sur la trajectoire ni sur le genre de forces.

Voyons comment aller plus loin et faire usage de ce fameux principe de **conservation de l'énergie.**

C'est la première loi de conservation que nous rencontrons dans ce cours de mécanique. Nous en verrons encore deux autres. Et les trois ensemble constituent les pilliers de la physique. En physique moléculaire, atomique et nucléaire, la notion de force est pratiquement inutile, elle a été supplantée par celle d'*énergie*, par celle de *quantité de mouvement* et par celle de *moment cinétique*. A ces trois concepts correspond une loi de conservation fondamentale. Nous verrons cela.

ENERGIE POTENTIELLE ET ENERGIE MECANIQUE

L'énergie cinétique est donc l'*énergie de mouvement* puisqu'elle fait intervenir la vitesse. La pensée humaine a conçu aussi une *énergie de position*, qu'on va introduire sur un exemple de situation banale:

Une masse m a été lancée, elle suit fidèlement sa trajectoire parabolique. Elle va immanquablement retomber sur le sol, c-à-d en h = 0. Comme on le sait, il n'y a que le poids $m\mathbf{g}$ qui travaille dans cette situation si les frottements sont négligés. On applique le théorème de l'E_{cin} entre les points (1) et (2):

$$A_{1,2}(m\mathbf{g}) = mgh = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

on peut ici écrire (fig. 5 ci-dessous) que $h = h_1 - h_2$, ainsi: $mgh = mgh_1 - mgh_2$; par conséquent:

$$mgh_1 - mgh_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \qquad (*)$$

Dans les deux termes du membre de gauche ci-dessus apparaissent les positions successives h_1 puis h_2 ; chacun de ces termes est nommé **énergie potentielle** de m.

La relation (*) peut alors s'écrire:

$E_{\text{pot}}(1) - E_{\text{pot}}(2) = E_{\text{cin}}(2) - E_{\text{cin}}(1)$, ou bien, ce qui revient au même:

$$E_{\text{pot}}(1) + E_{\text{cin}}(1) = E_{\text{pot}}(2) + E_{\text{cin}}(2) \qquad (**)$$

autrement dit, la **somme** de l'E_{pot} et de l'E_{cin} ne varie pas. Cette somme, constante, est nommée **énergie mécanique**. Soit alors sa *définition*:

$$E_{\text{mec}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{cin}}$$

on l'utilisera souvent sous la forme (**) : $E_{\text{mec}}(1) = E_{\text{mec}}(2) = E_{\text{mec}}(3) = \ldots = const.$

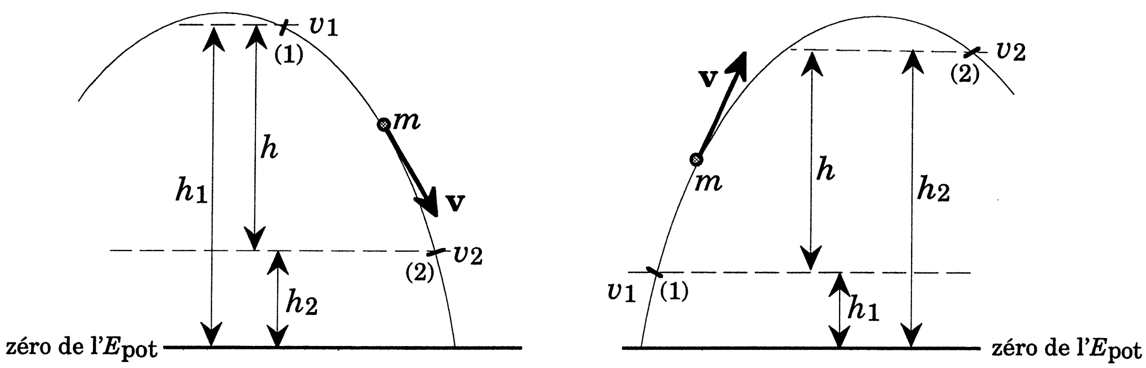


Fig. 5. Quelles que soient les positions de deux points de la trajectoire et quel que soit le sens du mouvement: $E_{\text{pot}} + E_{\text{cin}} = const.$ si la seule force qui travaille est le poids.

Tout devient alors très simple avec l'énergie potentielle: il n'y a plus de vecteurs et il n'y a même plus de travail A à calculer!

L'énergie potentielle est donc une énergie relative à la position de m seulement. Le mot "potentielle" dit bien que c'est de l'énergie *en puissance*, qui ne se manifeste pas mais qui pourrait le faire. Lorsqu'un pot de fleurs est posé sur le rebord de la fenêtre du 4ème étage, il a une énergie potentielle positive relativement au trottoir et tout va bien. Une bourrasque survient et cette énergie potentielle se transforme progressivement en énergie cinétique au cours de la chute: E_{pot} diminue et E_{cin}

augmente, la somme, c-à-d E_{mec}, reste la même tout au long du parcours. La conservation de l'E_{mec} se termine dès que le pot de fleurs s'écrase sur le macadam, aux pieds de l'agent de police médusé.

Qu'en est-il de l'E_{pot} de ce pot relativement au 6ème étage? Elle est alors à tout instant négative mais c'est sans importance pour la raison évidente qu'il n'apparaît jamais autre chose que des *différences* d'énergies potentielles: la ligne au dessus de (**) s'écrit aussi: $-\ \Delta E_{\text{pot}} = \ \Delta E_{\text{cin}}$. Cela doit rappeler le cours de thermique avec les différences de températures dans les deux échelles, en degés Celsius ou en kelvin: $\Delta\theta = \Delta T$: la position du zéro ne joue pas de rôle. En pratique, cela signifie qu'on peut placer le zéro de l'énergie potentielle au niveau du sol ou ailleurs, comme cela nous arrange. Mais il est **nécessaire de faire un choix et de l'indiquer**.

Définissons un peu mieux cette E_{pot} :

On a donc $-\Delta E_{\text{pot}} = \Delta E_{\text{cin}}$ or, $\Delta E_{\text{cin}} = A_{1,2}(m\mathbf{g})$ dans notre exemple. Il s'ensuit:

$-\Delta E_{\text{pot}} = A_{1,2}(m\mathbf{g}) \iff \Delta E_{\text{pot}} = E_{\text{pot}}(2) - E_{\text{pot}}(1) = A_{2,1}(m\mathbf{g})$.

Choisissons le point de référence en (1), alors $E_{\text{pot}}(1) = 0$. L'énergie potentielle en tout point P est ainsi: $E_{\text{pot}}(\text{P}) = A_{\text{P,R}}(m\mathbf{g})$: travail du poids entre ce point P et le point de référence choisi, noté R. On reviendra sous peu sur cette définition, qui se généralise à toute "bonne force".

Les bonnes forces et les autres

On se souvient, n'est-ce-pas, que le travail de certaines forces est indépendant du chemin suivi pour aller d'un point à un autre, et que par conséquent, ce travail est nul sur tout parcours fermé. Le poids est une telle force, c'est même la seule qu'on ait évoqué ayant cette propriété dans ce chapitre; c'est une bonne force, une force pour laquelle on peut définir une énergie potentielle, comme on vient de le faire. Ces forces-là sont les plus importantes de la physique et les moins difficiles à manier. Nous en verrons quelques autres: la force élastique dans ce chapitre, la force de gravitation dans peu de temps et la force électrostatique dans le cours d'électricité. Et franchement, il n'y en existe pas vraiment d'autres, à moins de faire de la physique sub-nucléaire, ce qu'on ne fera pas. Et puis il y a toutes les autres, les "mauvaises" forces, celles pour lesquelles on ne peut hélas pas définir une énergie potentielle. On les connait ces gredines, ce sont les forces de frottement et les forces motrices; à cause d'elles l'énergie mécanique ne reste pas constante; les premières la transforment en chaleur alors que les secondent transforment une forme d'énergie (électrique, chimique, thermique, ...) en énergie mécanique.

"Bonnes" ou "mauvaises" ne sont pas les appellations contrôlées, on doit dire *conservatives* et *non-conservatives*. Le poids est une force qui ne fait pas varier l'énergie mécanique, c'est une force conservative, on dit que **l'énergie mécanique est conservée**. C'est là la première loi de conservation que nous rencontrons. Nous en verrons deux autres dans ce cours de mécanique, et au risque d'être radoteur, on répète que les lois de conservation sont les plus fondamentales et interviennent dans tous les domaines de la physique, aussi ésotérique soient-ils.

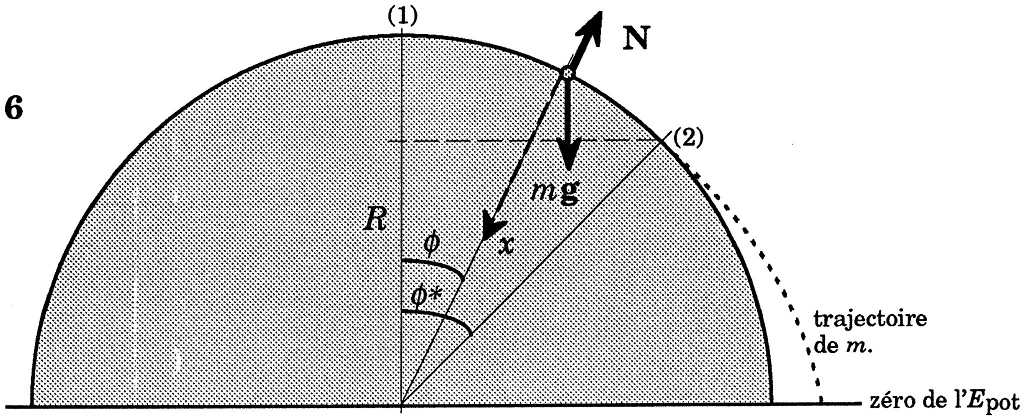
S'il arrive qu'on se demande, au détour de la préparation d'un TE par exemple: *mais à quoi sert donc cette énergie potentielle?* Qu'on se souvienne alors qu'elle permet de se simplifier la vie dans l'utilisation du théorème de l'énergie cinétique. En effet, ce théorème met en cause le travail des forces, ce qui n'est facile à calculer que dans certains cas simples, comme pour le poids, mais pour les autres forces conservatives qu'on va rencontrer, ce sera moins simple. Mais cela sera inutile à partir du moment où on aura pu leur associer une énergie potentielle.

A vrai dire, l'énergie potentielle pour le poids n'est pas d'une grande aide puisque son travail est on ne peut plus simple; le poids nous aura pourtant été utile pour introduire cette notion d'énergie potentielle; elle va devenir indispensable.

Exemple de calcul

Posée sur un plan horizontal se trouve une hémisphère de rayon R. On dépose sur son sommet une petite masse m. Comme on suppose que les frottements sont négligeables, l'équilibre est instable et m glisse puis tombe sur tombe sur le plan. La masse m reste-t-elle en contact sur tout son parcours avec la surface de l'hémisphère? Sinon, à quel angle ϕ^* la quitte-t-elle?

Fig. 6



Solution:

1°) On examine la dynamique du problème pour un angle $\phi < \phi^*$ en écrivant la 2ème loi de Newton projetée traditionnellement sur l'axe x centripète :

(x): $mg \cos\phi - N = ma_x = ma_c = mv^2/R$

La condition de décollement en $\phi = \phi^*$ au point (2) est $\mathbf{N} = 0$. Ainsi:

$$gR \cos\phi^* = v_2^2 \qquad (*)$$

2°) L'absence de frottement permet d'utiliser la conservation de l'E_{mec} :

$$E_{pot}(1) + E_{cin}(1) = E_{pot}(2) + E_{cin}(2) \qquad \text{où:}$$

$E_{pot}(1) = mgR$; $E_{cin}(1) = 0$; $E_{pot}(2) = mgR \cos\phi^*$; $E_{cin}(2) = 1/2\, mv_2^2$ =>

$mgR = mgR \cos\phi^* + 1/2\, mv_2^2$ => $2gR(1 - \cos\phi^*) = v_2^2 \qquad (**)$

égalant (*) et (**) on arrive à : $gR \cos\phi^* = 2gR(1 - \cos\phi^*)$, c'est-à-dire:

$$\cos\phi^* = 2/3 \quad => \phi^* \approx 48°.$$

On s'aperçoit que cet angle a un parfum d'universel: il ne dépend de rien, ni de m, ni de g ni de R, pour autant qu'il n'y ait pas de frottements.

Que faire avec les mauvaises forces?

Elles existent, pas moyen de les oublier. Regardons ce que deviennent les énergies lorsque ces forces non-conservatives viennent troubler la paisible constance de l'énergie mécanique. Etablissons deux relations et comparons-les.

Séparons d'abord la résultante de toutes les forces possibles en deux groupes:

$\Sigma\mathbf{F} = \Sigma\mathbf{F}_{n\text{-}cons} + \Sigma\mathbf{F}_{cons}$ et exprimons leur travail entre deux points:

$A_{1,2}(\Sigma\mathbf{F}) = A_{1,2}(\Sigma\mathbf{F}_{n\text{-}cons}) + A_{1,2}(\Sigma\mathbf{F}_{cons})$, c'est notre 1ère relation.

Reprenons ensuite la définition de l'énergie mécanique:

$E_{mec} = E_{pot} + E_{cin}$, ce qui donne: $\Delta E_{mec} = \Delta E_{pot} + \Delta E_{cin}$ ou bien:

$\Delta E_{cin} = \Delta E_{mec} - \Delta E_{pot}$, c'est notre 2ème relation.

Les membres de gauche de nos deux relations sont égaux par le théorème de l'énergie cinétique, il en est donc de même pour les membres de droite:

$$A_{1,2}\,(\Sigma \mathbf{F}_{n\text{-}cons}) + A_{1,2}\,(\Sigma \mathbf{F}_{cons}) = \Delta E_{mec} - \Delta E_{pot}$$

Or, on retrouve ici la *définition* de la variation de l'E_{pot} dans les 2èmes termes des deux membres: $A_{1,2}\,(\Sigma \mathbf{F}_{cons}) = -\,\Delta E_{pot}$. Il reste donc que les 1ers termes des deux membres sont égaux: $A_{1,2}\,(\Sigma \mathbf{F}_{n\text{-}cons}) = \Delta E_{mec}$, ce qui dit que: *le travail des forces non-conservatives n'est autre que la variation de l'énergie mécanique*. Cela ne doit pas surprendre puisque par définition, les forces conservatives ne la font pas varier.

Réécrivons cette relation utile: $A_{1,2}\,(\Sigma \mathbf{F}_{n\text{-}cons}) = \Delta E_{mec}$.

Exemple de calcul

Un véhicule descend une rue en pente. Sa vitesse passe de v_1 = 10 m/s en haut à v_2 = 20 m/s en bas; une dénivellation h = 12 m sépare ces deux points. Y avait-il des frottements?

Solution:

Sans forces non-conservatives, on doit avoir : $\Delta E_{pot} + \Delta E_{cin} = 0$.

S'il y en a, alors: $\Delta E_{pot} + \Delta E_{cin} = \Delta E_{mec} \neq 0$. Calculons cela:

$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 + mgh_2 - mgh_1 = \Delta E_{mec}$, qu'on transforme un peu:

$v_2^2 - v_1^2 + 2g(h_2 - h_1) = \frac{2\Delta E_{mec}}{m}$, qu'on calcule numériquement; on trouve que:

$\frac{2\Delta E_{mec}}{m} \approx 60$ J/kg (ou m²/s²), donc > 0.

Il était important de remarquer que $h_2 - h_1 = -h$ puisque h_2 est plus bas, et plus tard, que h_1 .

Conclusion: on ne sait pas s'il y a des frottements, mais s'il y en a, ils sont plus faibles qu'*une force motrice* puisque $\Delta E_{mec} > 0$. Sans forces non conservatives, on calculerait facilement que v_2 devrait valoir 18,3 m/s et non pas 20 m/s.

Energie potentielle élastique

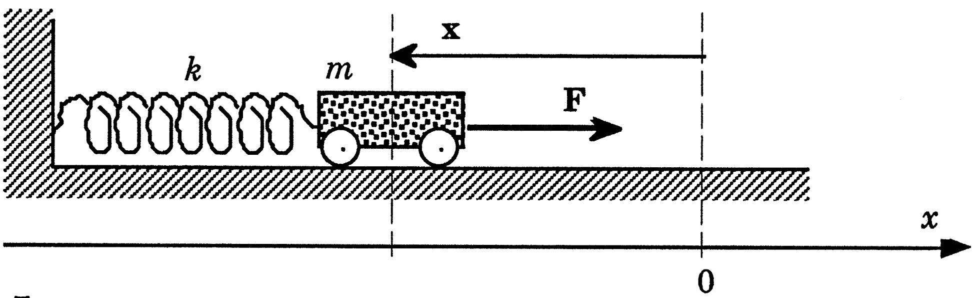


Fig. 7. Ressort comprimé puis libéré. Le vecteur-force **F** agissant sur *m* de la part du ressort est toujours de sens opposé au vecteur-position **x** de *m*. Il en serait de même si le ressort était d'abord détendu puis libéré.

Une masse m est accrochée à un ressort de rigidité k. Imaginons qu'on déforme le ressort (compression, allongement, torsion, etc.) puis on le libère. Le système masse + ressort va se mettre en mouvement, en particulier la masse va acquérir de l'énergie cinétique. C'est le ressort qui la lui fournit parce qu'il possède de l'énergie potentielle en étant déformé, sa *position* - la position de m qui lui est accrochée - n'est pas celle qu'il a au repos. Lorsque la masse oscille librement (frottements négligés) au bout de son ressort, il y a échange périodique entre énergie potentielle - ressort déformé - et énergie cinétique.

Une condition nécessaire pour associer une énergie potentielle à la force élastique est qu'elle doit être conservative. L'est-elle? Oui, puisque la masse oscillante passe et repasse par le même point en ayant chaque fois la même valeur de vitesse, donc la même énergie cinétique; le travail de la force élastique sur un chemin fermé est ainsi bien nul.

Pour établir l'expression de l'énergie potentielle élastique il nous faut reprendre la définition générale de l'énergie potentielle esquissée plus haut pour trouver que les forces non-conservatives font varier l'énergie mécanique. Il n'est pas forcément inutile de se répéter. On avait écrit (page précédente): $A_{1,2}\ (\Sigma\mathbf{F}_{\text{cons}}) = -\ \Delta E_{\text{pot}} = E_{\text{pot}}(1) - E_{\text{pot}}(2)$. Nommons différemment les deux points; on écrit: $A_{\text{P,R}}\ (\Sigma\mathbf{F}_{\text{cons}}) = E_{\text{pot}}(\text{P}) - E_{\text{pot}}(\text{R})$ et décidons que le point R est le point de référence où l'énergie potentielle est nulle. La *définition générale de l'énergie potentielle* associée à une force conservative est alors:

$$E_{\text{pot}}(\text{P}) = A_{\text{P,R}}\ (\mathbf{F}_{\text{cons}})$$

l'énergie potentielle d'une force conservative en un point P est le travail de cette force de ce point au point de référence R où l'énergie potentielle est nulle.

Rappelons encore une fois l'utilité de l'énergie potentielle: dès qu'on aura pu calculer le travail de cette force, on n'aura plus jamais besoin de le faire, ce sera fait une fois pour toutes, il suffira de prendre l'expression de l'énergie potentielle. Allons-y.

Le vecteur-force élastique s'écrit $\mathbf{F} = -k\mathbf{x}$ *quelle que soit la position de m*. Le point de référence R est naturellement choisi là où le ressort est au repos, en $x = 0$. Il faut alors calculer le travail de $\mathbf{F}$ d'un point P, donc de coordonnée x_{P} jusqu'à l'origine O. Il est bien plus simple de regarder les choses sur un graphique:

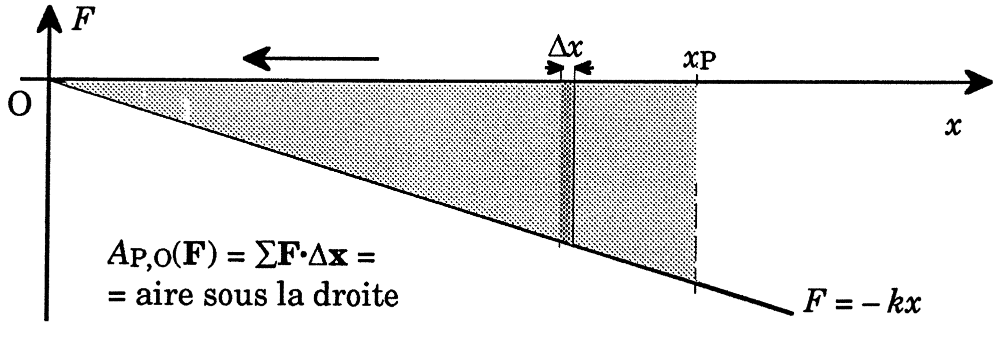


Fig. 8. Le travail de $F = -kx$ est positif pour deux raisons: **F** est de sens opposé à **x** d'une part et le travail se calcule dans le sens *négatif* (de x_{P} à O) d'autre part.

Le travail est donc représenté par l'aire du *triangle* mesurée dans le bon sens, c'est à dire: $1/2\ (0 - x_{\text{P}})(-kx_{\text{P}}) = 1/2\ k(x_{\text{P}})^2$. Finalement, l'énergie potentielle élastique - qui est donc une énergie de position - a l'expression, pour toute position x :

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}\,kx^2$$

Exemple de calcul

Soit un ressort hélicoïdal (à boudin) de rigidité k qu'on comprime horizontalement d'une longueur d. Une masse m est appuyée (non fixée) contre le ressort. On libère le système, ce qui propulse la masse. A quelle vitesse l'est-elle ?

Solution:

L'énergie mécanique est conservée: $E_{mec}(1) = E_{mec}(2)$; le point (1) est à la position où le ressort est maintenu comprimé de $x = d$, le point (2) est quelque part où la masse a quitté le ressort. Donc: $E_{pot}(1) + E_{cin}(1) = E_{pot}(2) + E_{cin}(2)$

avec: $E_{pot}(1) = \frac{1}{2}kd^2$; $E_{cin}(1) = \frac{1}{2}mv_1^2 = 0$; $E_{pot}(2) = 0$; $E_{cin}(2) = \frac{1}{2}mv_2^2$

$$\text{ainsi: } \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = d\sqrt{\frac{k}{m}}$$

On remarque que si la valeur de la masse est par exemple 4 fois plus élevée, la vitesse avec laquelle elle sera propulsée ne sera que 2 fois plus faible.

Diagramme d'énergie

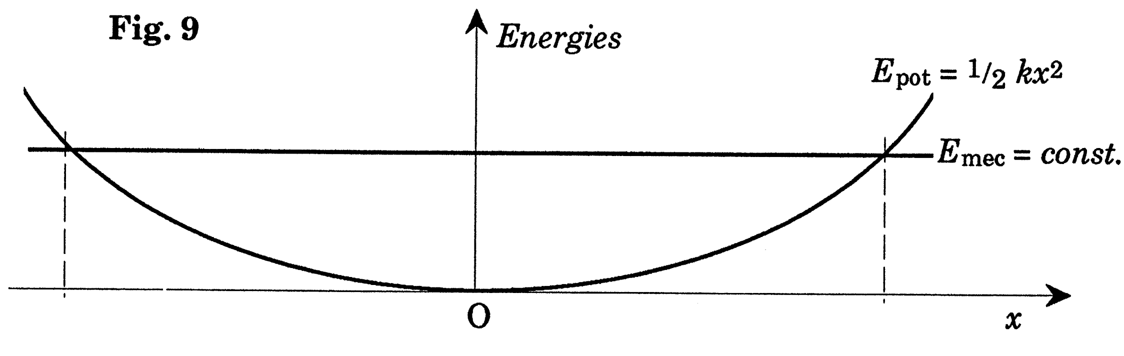
Considérons maintenant que la masse reste accrochée à son ressort. Elle oscille alors indéfiniment s'il n'y a pas de frottement. Son énergie potentielle élastique varie périodiquement, de même que son énergie cinétique, la diminution de l'une valant à tout instant l'augmentation de l'autre. Mais là n'est pas encore notre problème. Nous étudierons les oscillations dans un chapitre ultérieur. Nous voulons simplement voir quelle est l'allure des trois énergies en fonction de la position x de la masse m.

L'énergie mécanique est conservée, elle se représente par une droite horizontale.

L'énergie potentielle $\frac{1}{2}kx^2$ est représentée par une parabole ouverte vers le haut et dont le minimum coïncide avec l'origine.

Question: Quelle est l'allure de l'énergie cinétique? Compléter le graphe cidessous en y représentant convenablement $E_{cin} = f(x)$.

Fig. 9



Il faut savoir lire les informations qui se trouvent sur une représentation graphique. Lisons.

A part l'origine il y a deux points particuliers, symétriques par rapport à l'axe des énergies, ce sont ceux aux intersections de la droite d'E_{mec} et de la parabole d'E_{pot}. Que nous indiquent-ils?

... ...

PUISSANCE

Il est plus facile de gravir 23 étages lentement qu'au pas de course. Chacun est capable de soulever une grosse voiture au moyen d'un cric. Le travail est le même, il faut lutter contre le poids dans les deux cas, il faut dépenser la même énergie mais on sent bien qu'il doit y avoir le *temps* nécessaire à effectuer ce travail qui intervient: plus le temps à disposition est bref, plus ce sera difficile, plus il faudra développer de *puissance* pour y arriver.

On définit alors la puissance P par :

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

l'intervalle de temps est Δt au dénominateur, donc plus il est court, plus la puissance est importante pour une énergie ΔE à dépenser ou à produire. La puissance représente la *vitesse* avec laquelle un travail est effectué, une énergie est dépensée ou fournie.

De quelle énergie s'agit-il, maintenant qu'on en connait trois? De l'énergie mécanique le plus souvent, mais il peut s'agir que de sa partie potentielle ou que de sa partie cinétique, selon les cas. Or, très souvent, il y a en cause une autre forme d'énergie, pensons à un moteur, électrique ou thermique; ce sera de la puissance électrique ou thermique qui sera fournie au moteur, lequel la transformera, avec d'inévitables pertes, en puissance mécanique.

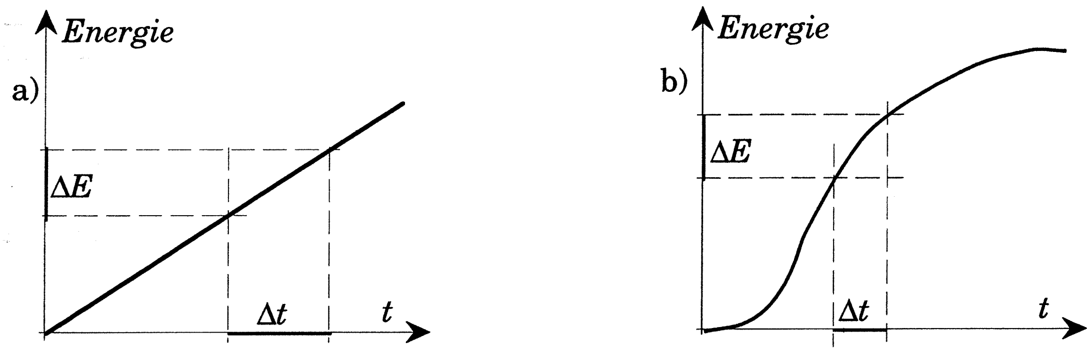


Fig. 10. En a), l'énergie varie à un taux constant, la puissance $P = \Delta E/\Delta t$ est constante, elle peut même s'écrire ici $P = E/t$.
En b), elle n'est pas constante, on peut définir une puissance *instantanée* comme:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{dE}{dt} = \dot{E}$$

Unité de la puissance:

De la définition de P, il découle que dans le système MKSA, la puissance est en J/s, ce qui porte le nom de *watt*, avec tous ses multiples ou sous-multiples:

$$[P] = W\text{, le watt}$$

Une autre unité de puissance est encore couramment, quoique illégalement utilisée, c'est le cheval-vapeur (CV):

$$1 \text{ CV} \approx 735{,}5 \text{ W} = 0{,}7355 \text{ kW} \iff 1 \text{ kW} \approx 1{,}360 \text{ CV}.$$

Les anglo-saxons font un peu autrement (!): ils utilisent le hp (*horse-power*) qui vaut à peine plus qu'un CV: 1 hp ≈ 745,7 W. C'est ainsi.

Une unité *d'énergie* très commune, surtout pour la consommation d'énergie électrique (lorsqu'il faut payer la facture!) est fabriquée à partir de celle de puissance, c'est le kilowatt-heure (kWh):

$$1 \text{ kWh} = 1000 \text{ W} \times 3600 \text{ s} = 3\,600\,000 \text{ W.s} = 3{,}6 \text{ MJ}$$

(1 kWh électrique coûte moins de 30 ct, ce qui rend le joule bien bon marché!).

Puissance associée à une force:

La puissance fait donc intervenir la vitesse avec laquelle une énergie est dépensée; cela se voit explicitement en utilisant la notion de travail, celui de la force dont on veut connaître la puissance associée:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\delta A}{\Delta t} = \frac{\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}}{\Delta \mathrm{t}} = \mathbf{F} \cdot \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta \mathrm{t}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

c'est le produit scalaire de la force par la vitesse. Le signe du résultat indique aussi s'il s'agit d'une force qui favorise ou entrave le déplacement, d'une puissance motrice ou d'une puissance de freinage.

Puissance associée à un moment de force:

Pour provoquer la *rotation* d'un solide (tournevis, volant d'une voiture, moteur, etc, etc.), il faut une force (ou un couple de forces) et un *bras de levier* .

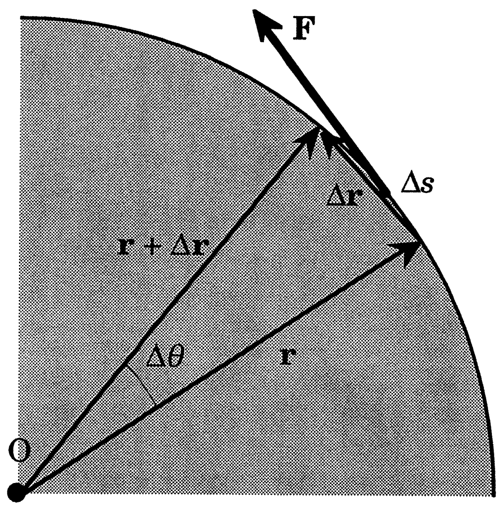


Fig. 11.
Prenons le cas simple d'une force *normale* au rayon, son bras de levier est alors le rayon lui-même. La grandeur du moment de cette force est simplement $M_0 = rF$.
D'autre part, pendant l'intervalle Δt, le point d'application de la force tourne d'un angle $\Delta\theta$, ce qui correspond à un arc de cercle $\Delta s = r\Delta\theta$.
Il faut encore se souvenir de la *définition de la vitesse angulaire* ω : $\omega = \Delta\theta/\Delta t$. OK?
Ceci étant posé, calculons la puissance associée à cette force (motrice?) comme étant son travail élémentaire pendant Δt. On écrit alors:

$$P = \frac{\delta A}{\Delta t} = \frac{\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{F \Delta r}{\Delta \mathrm{t}} \approx \frac{F \Delta s}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{F r \Delta \theta}{\Delta \mathrm{t}} = F r \frac{\Delta \theta}{\Delta \mathrm{t}} = M_0 \omega$$

elle apparaît comme le produit du moment de la force par la vitesse angulaire; le signe de cette puissance se trouve dans le signe du moment, lequel est déjà dans le signe du travail.

Remarque: l'approximation $\Delta r \approx \Delta s$ faite ci-dessus est d'autant plus justifiée que l'intervalle de temps Δt est petit. Un passage à la limite serait même bienvenu.

Exemple de calcul:

Quel est le moment de force du moteur d'une voiture tournant à 3600 tours par minute et développant une puissance de 75 kW (≈ 100 CV) ?

Solution:
$P = M\omega \Rightarrow M = P/\omega$ où $\omega = 2\pi f = 2\pi\, 3600/60 \approx 377$ rad/s $\Rightarrow M \approx 200$ N.m.

1. L'énergie contenue dans une plaque de chocolat est d'environ 600 kcal, c'est à dire 2500 kJ (c'est écrit dessus!). Si toute cette énergie *pouvait* être communiquée sous forme cinétique à une voiture de 1 tonne, quelle serait sa vitesse?

   Rép: env. 250 km/h.

2. Un train de 600 t roule à 108 km/h. Calculer son énergie cinétique et celle d'un modèle réduit de ce train à l'échelle de 1/87$^{\text{ème}}$ pour les dimensions linéaires, toutes proportions gardées.

   Rép: 270 MJ; 0,054 J.

3. Une goutte de pluie arrive au sol à la vitesse de 20 m/s. Si on admet que la moitié de l'énergie cinétique de la goutte est transformée en chaleur servant à la chauffer lors de l'impact, calculer son élévation de température, sachant qu'il faut une énergie de 4190 J pour élever 1 kg d'eau de 1 °C.

   Rép: 0,024 °C.

4. Une tuile de 2 kg tombe d'une hauteur de 12 m au dessus du sol. Calculer sa vitesse et son énergie cinétique lorsqu'elle arrive au sol (frottements de l'air négligés).

   Rép: 15,3 m/s; 234 J.

5. Quelle est la vitesse d'arrivée au sol de cette tuile qui est cette fois lancée de la même hauteur avec une vitesse de 5 m/s dans trois cas: verticalement vers le haut, horizontalement et verticalement vers le bas.

   Rép: 16,1 m/s.

6. Une voiture descend une route à v = const. Calculer quelle fut la force de freinage+frottement, en % du poids, si la pente de la route était de: a) 6 %; b) 15 %.

   Rép: a) 6,0 %; b) 14,8 %.

7. Sur une route en pente, un cycliste se laisse rouler. En un 1$^{\text{er}}$ point, sa vitesse est de 2 m/s. Au 2$^{\text{ème}}$ point la vitesse est de 6 m/s (la vitesse étant faible, on néglige les frottements entre ces 2 points). Entre le 2$^{\text{ème}}$ et le 3$^{\text{ème}}$ point, où la vitesse est de 10 m/s, les frottements représentent 6 % du poids en moyenne.
   Calculer la distance entre ces points si la pente de la route est de 8 % (sin ≈ tan).

   Rép: $d_{1,2} = 20{,}4$ m; $d_{2,3} = 163$ m.

8. Un véhicule tire une remorque et démarre avec une accélération de 1 m/s^2. Quelle est la vitesse après 18 m? (frottements?,pente??...).

   Rép: 6 m/s.

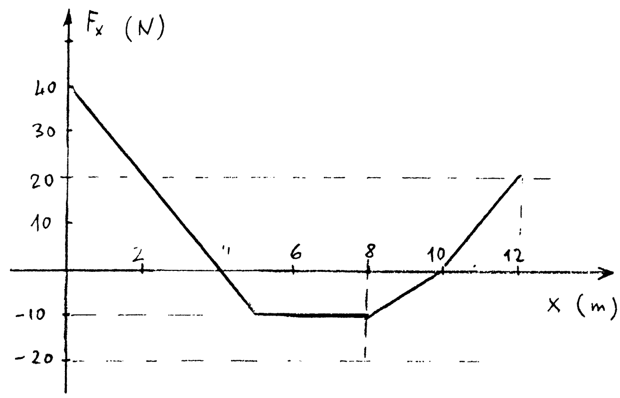
9. Une balle de masse m = 3 g sort d'une arme à feu à la vitesse de 300 m/s. A bout portant, elle pénètre dans une pièce de bois et s'y enfonce de 10 cm.
   Quelle fut la force de freinage (moyenne) dans le bois ?

   Rép: env. 1350 N.

10. On sait que le travail d'une force de frottement est négatif. Qu'en est-il de celui d'une force d'adhérence sur les roues d'un véhicule qui roule?
Pour le voir, il faut examiner de près la trajectoire d'un point d'une roue au voisinage de son point de contact avec le sol.

11. Une masse m de 3 kg se déplace le long de l'axe x. Elle est soumise à une force résultante dont la composante x varie comme ci-contre sur une distance de 12 m.
a) Cette force possède-t-elle une composante y non nulle ? Justifier la réponse.
b) Déterminer la variation d'énergie cinétique de m sur cette distance.

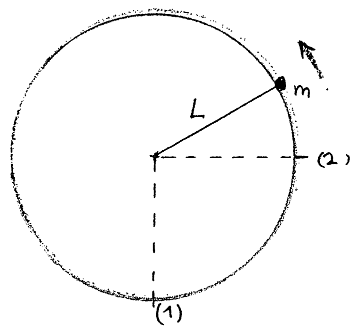
Rép: a) non; b) 55 J.



12. La réglementation routière a imposé une réduction de la vitesse sur les autoroutes pour diminuer la consommation d'essence (de 130 à 120 km/h il y a qques années). Est-ce judicieux ? Car le travail de la force motrice dépend de la distance. De plus, plus on va vite, moins on roule longtemps, n'est-ce pas? Discuter le cas.

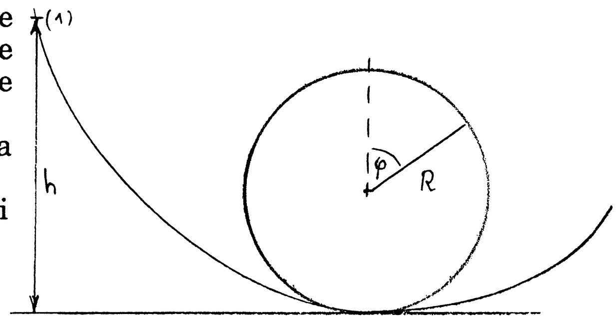
13. Un caillou de masse m est attaché à une ficelle de longueur L et tourne dans un plan vertical.
a) Quelle vitesse faut-il lui donner en (1) pour que la ficelle reste toujours tendue ?
b) Quelle est l'accélération centripète du caillou en (2) ?

Rép: a) $(5gL)^{1/2}$; b) $3g$.



14. Une masse ponctuelle est lâchée sans vitesse initiale en (1). Le rail est en forme de boucle circulaire dans un plan vertical. On suppose qu'il n'y a aucun frottement.
a) Calculer la hauteur h minimale pour que la masse ne décolle jamais du rail.
b) A quel angle ϕ^* la masse quitte-t-elle le rail si $h = 2R$?

Rép: a) 2,5 R; b) env. 48°.



15. Un chariot de masse m = 0,5 kg se déplace sans frottement sur un plan horizontal à la vitesse de 1,2 m/s. Il vient buter contre un ressort horizontal qui se comprime de 2 cm par le choc. Calculer la constante k (raideur) du ressort.

Rép: 1800 N/m.

16. Une masse oscille librement en étant fixée à un ressort à boudin. Représenter graphiquement l'allure de son énergie cinétique en fonction de sa position x, la position de repos étant en x = 0. Le mouvement est selon l'axe du ressort.

17. Si on connait la variation d'énergie cinétique d'une masse m (dont on connait la valeur), connait-on alors par conséquent sa variation de vitesse?

Dans les exercices comportant des frottements aérodynamiques, on ne prendra en compte que des frottements proportionnels au carré de la vitesse.

1. Quel doit être la puissance mécanique du moteur d'un ascenseur pour élever 640 kg à la vitesse de 1 étage toutes les 3 s, la hauteur d'un étage étant de 3,5 m?

Rép: 7,33 kW.

2. Admettons qu'un cycliste qui se donne à fond arrive à monter une pente de 20 % à la vitesse constante de 9 km/h. Calculer sa puissance musculaire (en W et en CV). Masse totale m = 70 kg. Tous les frottements sont négligés.
Ce même cycliste pédale ensuite comme un sourd (c-à-d comme ci-dessus) sur une route horizontale et arrive à la vitesse de 60 km/h (frott. aérod. non négl.). Calculer le terme C_xS et *estimer* le facteur de forme C_x.

Rép: 336 W, 0,46 CV; 0,15 m^2 env.

3. Une voiture consomme 12 l d'essence aux 100 km à sa vitesse maximum de 150 km/h. Le moteur a une puissance de 80 CV et le pouvoir énergétique de l'essence est de 5.10^7 J/l. Calculer le rendement du moteur et la puissance perdue.

Rép: 23,5 %; 260 CV.

4. Calculer la vitesse maximale sur route horizontale d'une voiture dont la puissance est de 60 CV, la section apparente de 2 m^2 et le C_x de 0,4.

Rép: 158 km/h.

5. Se convaincre que $P \propto v^3$ c'-à-d que si on veut par exemple doubler la vitesse maximale d'une voiture, il faut multiplier par huit la puissance de son moteur.

6. a) Calculer de quel pourcentage diminue la consommation d'essence si la vitesse diminue de 1 %. b) Appliquer à une réduction de 130 à 120 km/h et à une voiture qui consomme 10,5 l aux 100 km à 130 km/h. Que consommera-t-elle?

Rép: a) 2 %; b) 8,9 l.

7. Calculer la puissance totale émise par le Soleil. On a pu mesurer que chaque m^2 de la surface *terrestre* perpendiculaire aux rayons solaires reçoit une puissance rayonnante de 1,39 kW, abstraction faite de l'absorption atmosphérique.
Distance (moyenne) Terre-Soleil: d = 150 millions de km.

Rép: $3{,}9.10^{26}$ W.