Lycée Denis-de-Rougemont
Degré 10

Mathématiques de niveau 1

FONCTIONS SIMPLES

CORRIGE DES EXERCICES

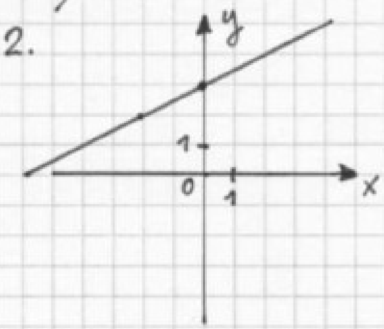


## Exercice 1

1. Le domaine de définition $D$ d'une fonction $x \mapsto y = f(x)$ est l'ensemble des valeurs de $x$ pour lesquelles on peut calculer la fonction.
3. Une fonction $x \mapsto y = f(x)$ est paire si $f(-x) = f(x)$ pour toutes les valeurs de $x$.
Une fonction $x \mapsto y = f(x)$ est impaire si $f(-x) = -f(x)$ pour toutes les valeurs de $x$.

a) $y = \frac{1}{2}x + 3$.

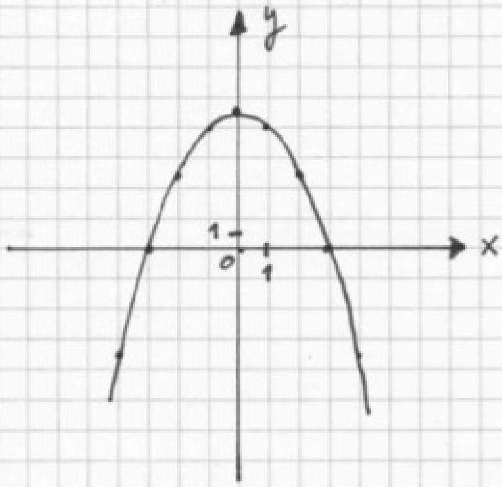
1. $D = \mathbb{R}$
2.




3. $f(-x) = \frac{1}{2}(-x) + 3 = -\frac{1}{2}x + 3 \neq \pm f(x) \Rightarrow f$ n'est ni paire, ni impaire.
4. $f$ est croissante sur tout $\mathbb{R}$.

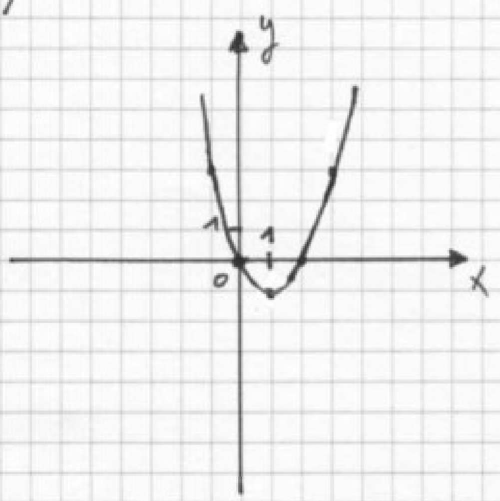
b) $y = -x^2 + 9$

1. $D = \mathbb{R}$
2.



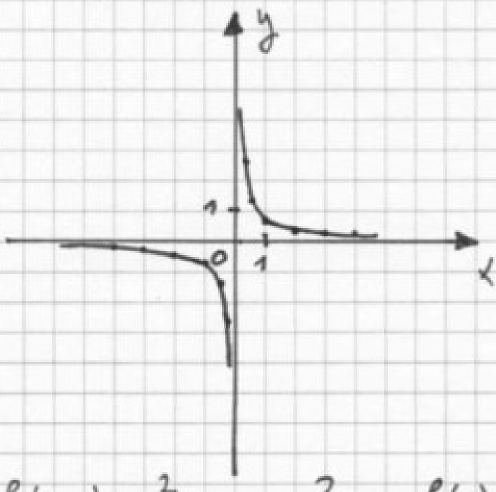

3. $f(-x) = -(-x)^2 + 9 = -x^2 + 9 \Rightarrow f$ est paire.
4. $f$ est croissante sur $]-\infty; 0[$ et décroissante sur $]0; +\infty[$.

c) $y = x^2 - 2x$

1. $D = \mathbb{R}$
2. 

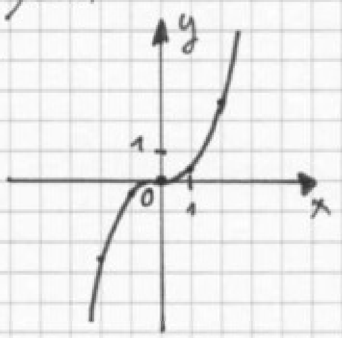

3. $f(-x) = (-x)^2 - 2\cdot(-x) = x^2 + 2x \neq \pm f(x) \Rightarrow f$ n'est ni paire, ni impaire.
4. $f$ est décroissante sur $]-\infty;1[$ et croissante sur $]1;+\infty[$.

d) $y = \dfrac{2}{3x}$

1. On doit avoir $3x \neq 0$, i.e. $x \neq 0$, pour pouvoir calculer $f$.
   Ainsi $D = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$.
2. 

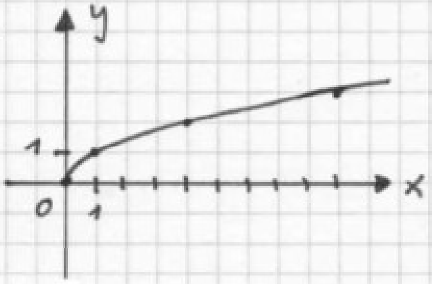

3. $f(-x) = \dfrac{2}{3\cdot(-x)} = -\dfrac{2}{3x} = -f(x) \Rightarrow f$ est impaire.
4. $f$ est décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

e) $y = \frac{1}{3}x^3$

1. $D = \mathbb{R}$
2. 

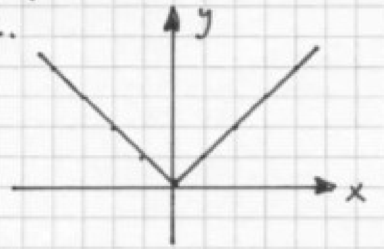
3. $f(-x) = \frac{1}{3}(-x)^3 = -\frac{1}{3}x^3 = -f(x) \Rightarrow f$ est impaire
4. $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

f) $y = \sqrt{x}$

1. On doit avoir $x \geqslant 0$ pour pouvoir calculer $f$.
   Ainsi $D = [0; +\infty[ = \mathbb{R}_+$
2. 

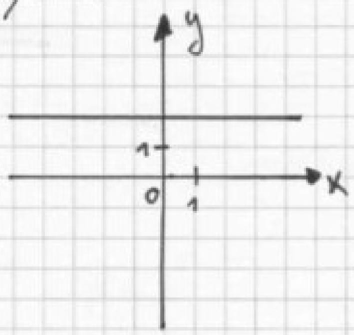
3. Comme $D = [0; +\infty[$, si $x \geqslant 0$, on ne peut pas calculer $f(-x)$.
   Donc $f$ n'est ni paire, ni impaire.
4. $f$ est croissante sur $D = [0; +\infty[$.

g) $y = |x|$ (Rappel : $|x|$ = valeur absolue de $x$ $= \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ )

1. $D = \mathbb{R}$
2. 

3. $f(-x) = |-x| = |x| = f(x) \Rightarrow f$ est paire.
4. $f$ est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

h) $y = 2$

1. $D = \mathbb{R}$
2. 

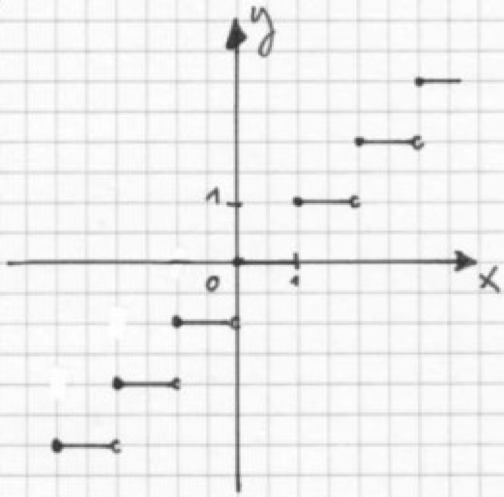
3. $f(-x) = 2 = f(x) \Rightarrow f$ est paire.
4. $f$ n'est ni croissante, ni décroissante.

i) $y = [x]$

(Rappel : $[x]$ est l'entier inférieur ou égal à $x$ ; par exemple $[3,2] = 3$ ; $[-1,6] = -2$).

1. $D = \mathbb{R}$

2.




3. $f(-x) = [-x] \neq \pm [x]$ (par exemple $[-1,6] = -2$ et $[1,6] = 1$)
$\Rightarrow$ $f$ n'est ni paire ni impaire.

4. $f$ n'est ni croissante ni décroissante entre 2 entiers.
Globalement, elle est croissante (mais au sens large).

Exercice 2

a) $y = 3x - 5 \Rightarrow 3x = y + 5 \Rightarrow x = \frac{y+5}{3} \Rightarrow y = \frac{x+5}{3}$

$\Rightarrow \underline{f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}}.$

b) $y = \frac{1}{2}x - 4 \Rightarrow 2y = x - 8 \Rightarrow x = 2y + 8 \Rightarrow y = 2x + 8$

$\Rightarrow \underline{f^{-1}(x) = 2x + 8}.$

c) $y = \frac{2}{3x} \Rightarrow 3xy = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3y} \Rightarrow y = \frac{2}{3x}$

$\Rightarrow \underline{f^{-1}(x) = \frac{2}{3x}}.$

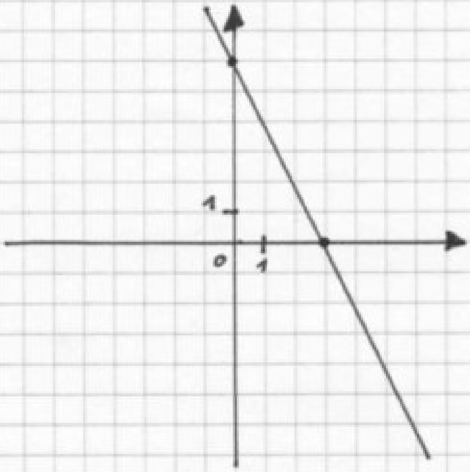
d) $y = 8x^3 \Rightarrow \frac{y}{8} = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{y}{8}} = \frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{y}}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt[3]{x}}{2}$

$\Rightarrow \underline{f^{-1}(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{2}}.$

## Exercice 3

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = -2x+6$$

a)

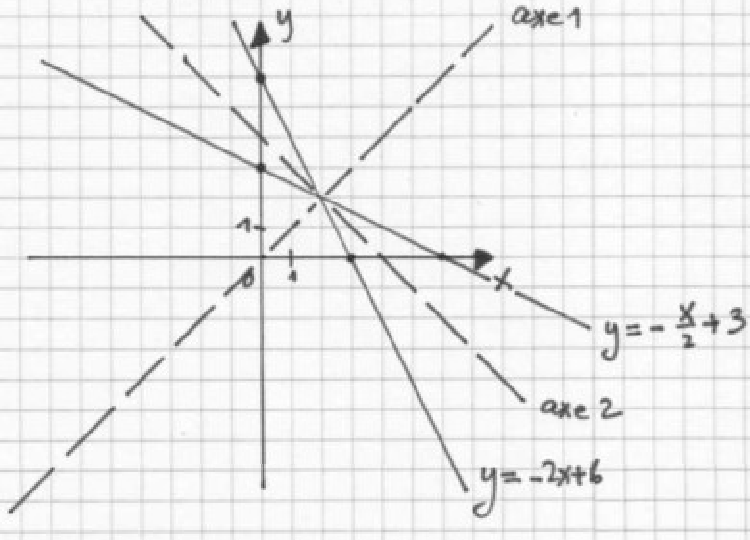



$f$ est une bijection car tout nombre de $\mathbb{R}$ est l'image d'un nb par $x$, $D = \mathbb{R}$, et il n'existe aucune paire de nombre donnant le même résultat.

b) $y = -2x+6 \Rightarrow 2x = -y+6 \Rightarrow x = -\frac{y}{2}+3 \Rightarrow y = -\frac{x}{2}+3$

$\Rightarrow \underline{f^{-1}(x) = -\frac{x}{2}+3.}$

c)




axes de symétrie: axe 1: $y = x$

axe 2: $y = -x+4$.

## Exercice 4

a) $f(x) = 2x-2$, $g(x) = -3x+4$.

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(-3x+4) = 2(-3x+4) - 2 = -6x+8-2 = \underline{\underline{-6x+6}}$.

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x-2) = -3(2x-2)+4 = -6x+6+4 = \underline{\underline{-6x+10}}$.

b) $f(x) = x-3$, $g(x) = x^2+3x$.

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2+3x) = \underline{\underline{x^2+3x-3}}$.

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x-3) = (x-3)^2+3(x-3) = x^2-6x+9+3x-9 = \underline{\underline{x^2-3x}}$.

c) $f(x) = -x^2+5$, $g(x) = 2$.

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2) = -2^2+5 = -4+5 = \underline{\underline{1}}$.

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(-x^2+5) = \underline{\underline{2}}$.

d) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$.

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1/x} = 1 : \frac{1}{x} = 1 \cdot \frac{x}{1} = \underline{\underline{x}}$.

De même, comme $f = g$, $g \circ f(x) = \underline{\underline{x}}$.

## Exercice 5

Si $f$ est une bijection, $f^{-1}$ existe et on a $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = \underline{x.}$

Avec $f(x) = -2x+6$ : $y = -2x+6 \Rightarrow 2x = -y+6 \Rightarrow x = -\frac{y}{2}+3 \Rightarrow y = -\frac{x}{2}+3$
$\Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{x}{2}+3.$

On a alors $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(-2x+6) = -\frac{-2x+6}{2}+3 = x-3+3 = x.$

Exercice 6

Par exemple : $f(x)=\frac{1}{x}$ $\left(y=\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{1}{y} \Rightarrow y=\frac{1}{x} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{x}\right)$ ;

$f(x)=x$ $\left(y=x \Rightarrow x=y \Rightarrow y=x \Rightarrow f^{-1}(x)=x\right)$;

$f(x)=-\frac{1}{x}$ ;

$f(x)=-x$ .

## Exercice 7

$$f(x)=\frac{2x-3}{x+5} \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{x-1}{3x+2}.$$

Commençons par chercher $f^{-1}$ et $g^{-1}$.

$$f(x)=\frac{2x-3}{x+6}: \quad y=\frac{2x-3}{x+5} \Rightarrow (x+5)y=2x-3 \Rightarrow xy+5y=2x-3$$

$$\Rightarrow xy-2x=-5y-3 \Rightarrow x(y-2)=-5y-3$$

$$\Rightarrow x=\frac{-5y-3}{y-2}=\frac{5y+3}{2-y} \Rightarrow \underline{\underline{f^{-1}(x)=\frac{5x+3}{2-x}}}$$

$$g(x)=\frac{x-1}{3x+2}: \quad y=\frac{x-1}{3x+2} \Rightarrow (3x+2)y=x-1 \Rightarrow 3xy+2y=x-1$$

$$\Rightarrow 3xy-x=-2y-1 \Rightarrow x(3y-1)=-2y-1$$

$$\Rightarrow x=\frac{-2y-1}{3y-1}=\frac{2y+1}{1-3y} \Rightarrow \underline{\underline{g^{-1}(x)=\frac{2x+1}{1-3x}}}.$$

$$f\circ g(x)=f(g(x))=f\left(\frac{x-1}{3x+2}\right)=\left(2\frac{x-1}{3x+2}-3\right):\left(\frac{x-1}{3x+2}+5\right)=$$

$$=\left(\frac{2x-2}{3x+2}-3\right):\left(\frac{x-1}{3x+2}+5\right)=\frac{2x-2-3(3x+2)}{3x+2}:\frac{x-1+5(3x+2)}{3x+2}=$$

$$=\frac{2x-2-9x-6}{3x+2}:\frac{x-1+15x+10}{3x+2}=\frac{-7x-8}{3x+2}:\frac{16x+9}{3x+2}=$$

$$=\frac{-7x-8}{3x+2}\cdot\frac{3x+2}{16x+9}=\underline{\underline{\frac{-7x-8}{16x+9}}}.$$

$$(f\circ g)^{-1}: \quad y=\frac{-7x-8}{16x+9} \Rightarrow (16x+9)y=-7x-8 \Rightarrow 16xy+9y=-7x-8$$

$$\Rightarrow 16xy+7x=-9y-8 \Rightarrow (16y+7)x=-9y-8$$

$$\Rightarrow x=\frac{-9y-8}{16y+7} \Rightarrow \underline{\underline{(f\circ g)^{-1}(x)=\frac{-9x-8}{16x+7}}}.$$

$$g^{-1}\circ f^{-1}(x)=g^{-1}(f^{-1}(x))=g^{-1}\left(\frac{5x+3}{2-x}\right)=\left(2\frac{5x+3}{2-x}+1\right):\left(1-3\frac{5x+3}{2-x}\right)=$$

$$=\left(\frac{10x+6}{2-x}+1\right):\left(1-\frac{15x+9}{2-x}\right)=\frac{10x+6+2-x}{2-x}:\frac{2-x-15x-9}{2-x}=$$

$$=\frac{9x+8}{2-x}:\frac{-16x-7}{2-x}=\frac{9x+8}{2-x}\cdot\frac{2-x}{-16x-7}=\frac{9x+8}{-16x-7}=\underline{\underline{\frac{-9x-8}{16x+7}}}.$$

On voit donc que $g^{-1}\circ f^{-1}=(f\circ g)^{-1}$.

## Exercice 8

Soit $f$ une fonction homographique : $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0)$.

Cherchons $f^{-1}$ : $y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow (cx+d)y = ax+b \Rightarrow cxy + dy = ax+b$

$$\Rightarrow cxy - ax = -dy + b \Rightarrow (cy-a)x = -dy+b$$

$$\Rightarrow x = \frac{-dy+b}{cy-a} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}.$$

Ainsi, pour avoir $f(x) = f^{-1}(x)$, on doit avoir $\dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{-dx+b}{cx-a}$.

On en conclut qu'il faut que $a = -d$ (ou $d = -a$).

La fonction homographique doit donc être de la forme $\underline{f(x) = \dfrac{ax+b}{cx-a}}$ $(c \neq 0)$.

Exercice 9



| $\circ$ | $i$ | $f$ | $g$ | $h$ |
|---|---|---|---|---|
| $i$ | $i$ | $f$ | $g$ | $h$ |
| $f$ | $f$ | $i$ | $h$ | $g$ |
| $g$ | $g$ | $h$ | $i$ | $f$ |
| $h$ | $h$ | $g$ | $f$ | $i$ |

$i(x)=x$

$f(x)=-x$

$g(x)=\frac{1}{x}$

$h(x)=-\frac{1}{x}$

$i\circ f(x)=i(f(x))=i(-x)=-x=f(x)$ ;

$i\circ g(x)=i(g(x))=i\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}=g(x)$ ;

$i\circ h(x)=i(h(x))=i\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}=h(x)$ ;

$f\circ i(x)=f(i(x))=f(x)$ ;

$f\circ f(x)=f(f(x))=f(-x)=-(-x)=x=i(x)$ ;

$f\circ g(x)=f(g(x))=f\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}=h(x)$ ;

$f\circ h(x)=f(h(x))=f\left(-\frac{1}{x}\right)=-\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}=g(x)$ ;

$g\circ i(x)=g(i(x))=g(x)$ ;

$g\circ f(x)=g(f(x))=g(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=h(x)$ ;

$g\circ g(x)=g(g(x))=g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1/x}=1:\frac{1}{x}=1\cdot\frac{x}{1}=x=i(x)$ ;

$g\circ h(x)=g(h(x))=g\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{-1/x}=-1:\frac{1}{x}=-1\cdot\frac{x}{1}=-x=f(x)$ ;

$h\circ i(x)=h(i(x))=h(x)$ ;

$h\circ f(x)=h(f(x))=h(-x)=-\frac{1}{-x}=\frac{1}{x}=g(x)$ ;

$h\circ g(x)=h(g(x))=h\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{1/x}=-1:\frac{1}{x}=-1\cdot\frac{x}{1}=-x=f(x)$ ;

$h\circ h(x)=h(h(x))=h\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{-1/x}=1:\frac{1}{x}=1\cdot\frac{x}{1}=x=i(x)$.

## Exercice 10.

Commençons par factoriser $y = -2x^2+3x+2$.

Les solutions de $-2x^2+3x+2=0$ sont :

on a : $a=-2$, $b=3$ et $c=2$ ;

$\Delta = b^2-4ac = 3^2-4.(-2).2 = 9+16 = 25$ ; $\sqrt{\Delta}=5$ ;

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3+5}{2.(-2)} = \dfrac{2}{-4} = -\dfrac{1}{2}$ ;

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3-5}{2.(-2)} = \dfrac{-8}{-4} = 2$.

On peut alors écrire $y = -2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)$.

Le tableau des signes de $y$ est alors

| | | $-\frac{1}{2}$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $x+\frac{1}{2}$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

Exercice 11

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = -\frac{1}{2x}.$$

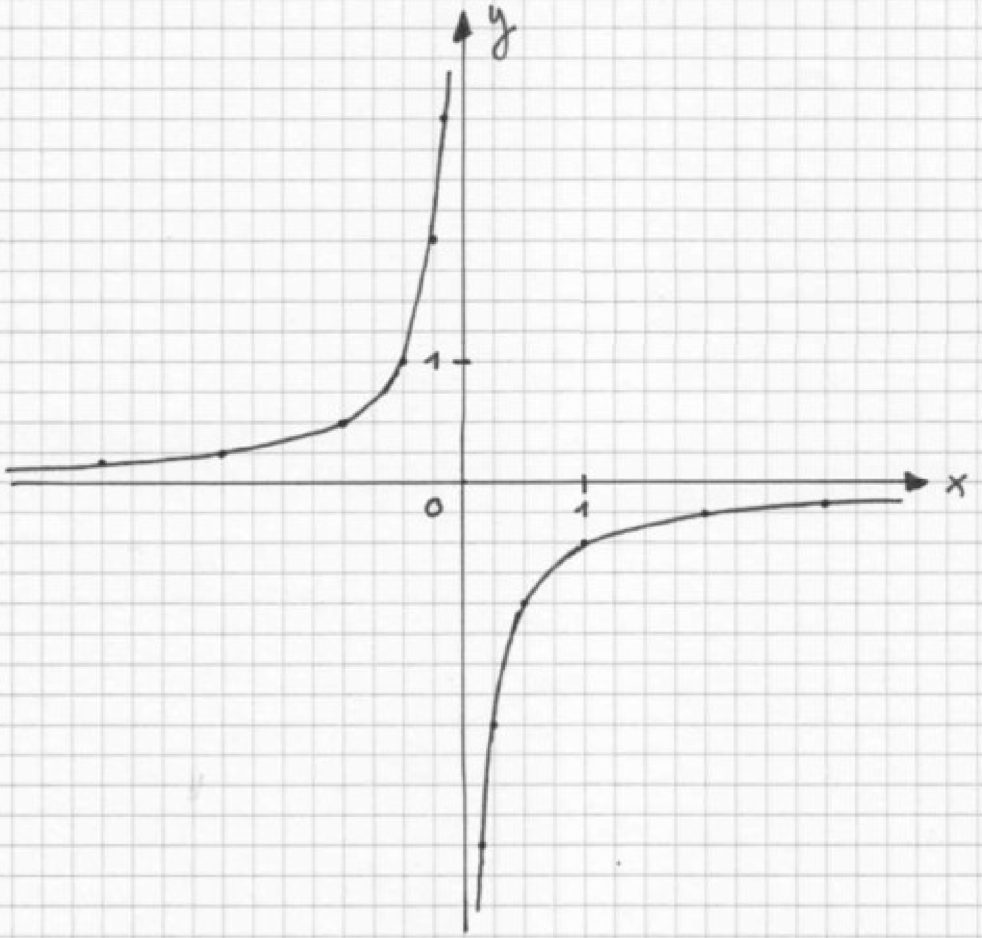
a) On doit avoir $2x \neq 0$, i.e. $x \neq 0$.
Ainsi $\underline{D = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*}$.

b) $f(-x) = -\frac{1}{2\cdot(-x)} = -\frac{1}{-2x} = \frac{1}{2x} = -\left(-\frac{1}{2x}\right) = -f(x)$ pour n'importe quelle valeur de $x$.
Donc $\underline{f \text{ est impaire}}$.

c) $f(x) = 0$ n'a aucune solution $\left(-\frac{1}{2x} = 0 \Rightarrow -1 = 0 \text{ ce qui est exclu}\right)$
Le tableau des signes de $f$ peut alors se construire comme suit

| | | 0 | |
|---|---|---|---|
| $2x$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $\frac{1}{2x}$ | $-$ | | $+$ |
| $y = -\frac{1}{2x}$ | $+$ | | $-$ |

d)



## Exercice 12

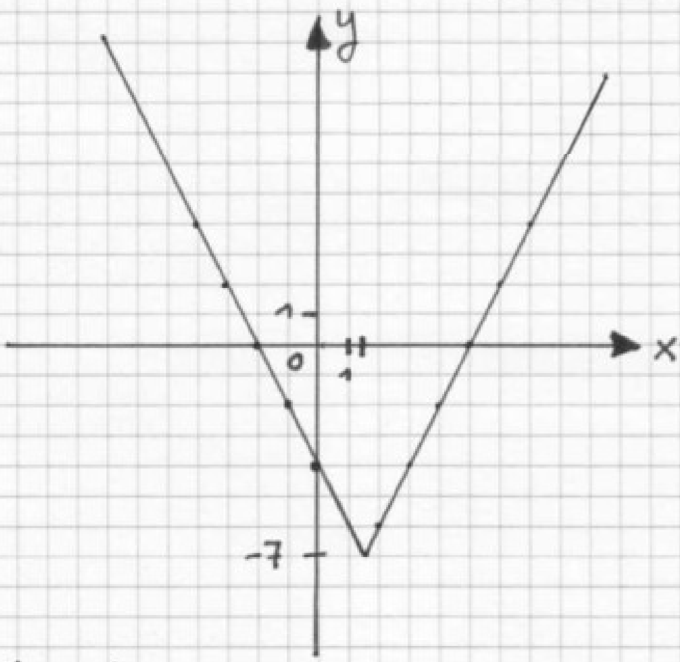


1. $f(x) = |-2x+3| - 7.$

On a: $|-2x+3| = \begin{cases} -2x+3 & \text{si } -2x+3 \geqslant 0 \\ -(-2x+3 & \text{si } -2x+3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} -2x+3 & \text{si } 2x \leqslant 3 \\ 2x-3 & \text{si } 2x > 3 \end{cases} =$

$= \begin{cases} -2x+3 & \text{si } x \leqslant \frac{3}{2} \\ 2x-3 & \text{si } x > \frac{3}{2}. \end{cases}$

Ainsi $f(x) = |-2x+3| - 7 = \begin{cases} -2x+3-7 & \text{si } x \leqslant \frac{3}{2} \\ 2x-3-7 & \text{si } x > \frac{3}{2} \end{cases} = \begin{cases} -2x-4 & \text{si } x \leqslant \frac{3}{2} \\ 2x-10 & \text{si } x > \frac{3}{2} \end{cases}$




Comme $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left|-2\cdot\frac{3}{2}+3\right| - 7 = |-3+3| - 7 = -7$ est le point le plus bas de la fonction (minimum), on a: $f(\mathbb{R}) = [-7; +\infty[.$

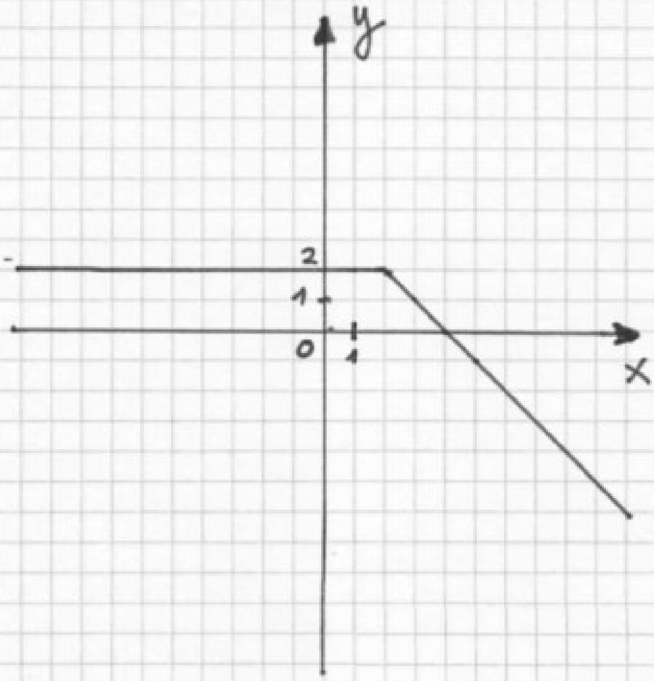
2. $f(x) = -\frac{1}{2}\cdot|x-2| - \frac{1}{2}x + 3.$

On a: $|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x-2 \geqslant 0 \\ -(x-2) & \text{si } x-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \geqslant 2 \\ -x+2 & \text{si } x < 2. \end{cases}$

Ainsi: $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{2}x + 3 & \text{si } x \geqslant 2 \\ -\frac{1}{2}(-x+2) - \frac{1}{2}x + 3 & \text{si } x < 2 \end{cases} =$

$= \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 1 - \frac{1}{2}x + 3 & \text{si } x \geqslant 2 \\ \frac{1}{2}x - 1 - \frac{1}{2}x + 3 & \text{si } x < 2 \end{cases} =$

$= \begin{cases} -x+4 & \text{si } x \geqslant 2 \\ 2 & \text{si } x < 2. \end{cases}$



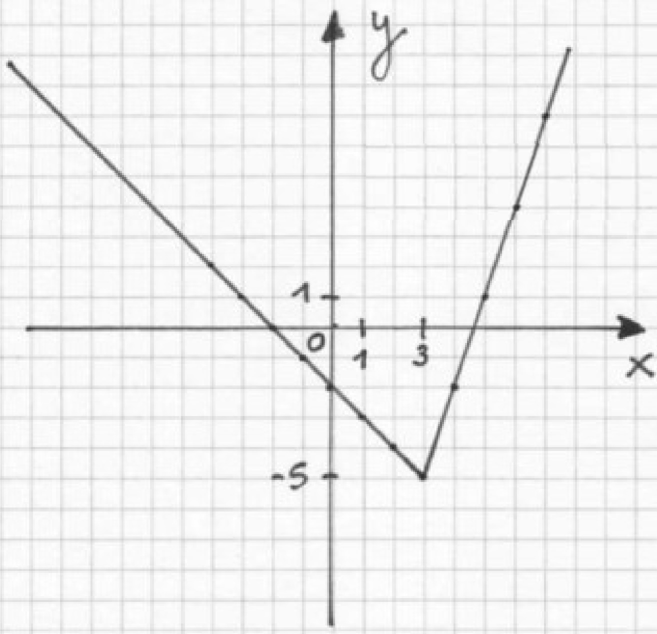

D'après le graphe, on a clairement $\underline{\underline{f(\mathbb{R}) = ]-\infty\,;2]}}$.

3. $f(x) = 2\cdot|x-3| + x - 8$.

On a $|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si } x-3 \geqslant 0 \\ -(x-3) & \text{si } x-3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \geqslant 3 \\ -x+3 & \text{si } x < 3. \end{cases}$

Ainsi : $f(x) = \begin{cases} 2(x-3) + x - 8 & \text{si } x \geqslant 3 \\ 2(-x+3) + x - 8 & \text{si } x < 3 \end{cases}$

$= \begin{cases} 2x-6+x-8 & \text{si } x \geqslant 3 \\ -2x+6+x-8 & \text{si } x < 3 \end{cases} = \underline{\underline{\begin{cases} 3x-14 & \text{si } x \geqslant 3 \\ -x-2 & \text{si } x < 3. \end{cases}}}$




D'après le graphe, on a $\underline{\underline{f(\mathbb{R}) = [-5\,;+\infty[}}$.

4. $f(x) = |-x^2+4x+5| =$

$$= \begin{cases} -x^2+4x+5 & \text{si } -x^2+4x+5 \geqslant 0 \\ -(-x^2+4x+5) & \text{si } -x^2+4x+5 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x^2+4x+5 & \text{si } -x^2+4x+5 \geqslant 0 \\ x^2-4x-5 & \text{si } -x^2+4x+5 < 0 \end{cases}$$

Construisons un tableau de signes pour $-x^2+4x+5$:
les zéros de $-x^2+4x+5$, i.e. les solutions de $-x^2+4x+5=0$, sont données par: on a $a=-1$, $b=4$ et $c=5$;

$\Delta = b^2-4ac = 4^2-4\cdot(-1)\cdot 5 = 16+20 = 36$; $\sqrt{36} = 6$;

donc $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4+6}{2\cdot(-1)} = \dfrac{2}{-2} = -1$ et

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4-6}{2\cdot(-1)} = \dfrac{-10}{-2} = 5$;

on a donc $-x^2+4x+5 = -(x+1)(x-5)$;
un tableau de signe est donc:

| | | $-1$ | | $5$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $x+1$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-5$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $-x^2+4x+5$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

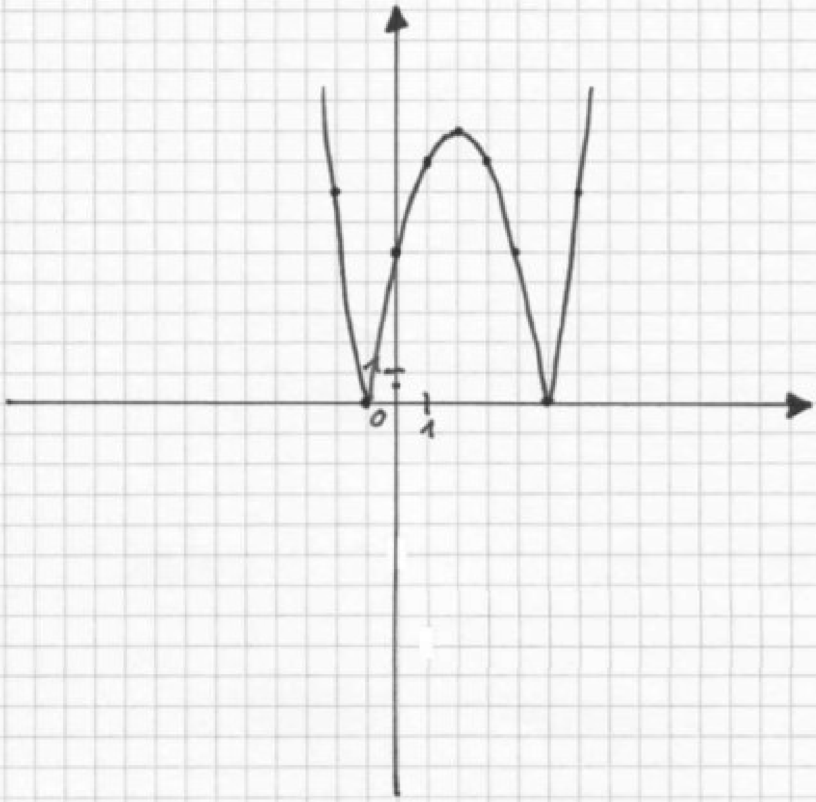
Ainsi $-x^2+4x+5 \geqslant 0$ si $x \in [-1;5]$, et
$-x^2+4x+5 < 0$ si $x \in ]-\infty;-1[$ et $x \in ]5;+\infty[$.

On obtient:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+4x+5 & \text{si } -1 \leq x \leq 5 \\ x^2-4x-5 & \text{si } x < -1 \text{ et } x > 5 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x^2-4x-5 & \text{si } x < -1 \\ -x^2+4x+5 & \text{si } -1 \leq x \leq 5 \\ x^2-4x-5 & \text{si } x > 5. \end{cases}$$

Le graphique de $f$ est alors:




D'après le graphe, on a $f(\mathbb{R}) = \underline{\underline{[0\,;+\infty[}} = \mathbb{R}_+$

## Exercice 13



$f(x) = |x^2-4| - x - 2.$

a) On a : $|x^2-4| = \begin{cases} x^2-4 & \text{si } x^2-4 \geq 0 \\ -(x^2-4) & \text{si } x^2-4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2-4 & \text{si } x^2 \geq 4 \\ -x^2+4 & \text{si } x^2 < 4 \end{cases} =$

$= \begin{cases} x^2-4 & \text{si } x \geq 2 \text{ et si } x \leq -2 \\ -x^2+4 & \text{si } -2 < x < 2 \end{cases} =$

$= \begin{cases} x^2-4 & \text{si } x \leq -2 \\ -x^2+4 & \text{si } -2 < x < 2 \\ x^2-4 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$

Ainsi $f(x) = \begin{cases} x^2-4-x-2 & \text{si } x \leq -2 \\ -x^2+4-x-2 & \text{si } -2 < x < 2 \\ x^2-4-x-2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} =$

$= \begin{cases} x^2-x-6 & \text{si } x \leq -2 \\ -x^2-x+2 & \text{si } -2 < x < 2 \\ x^2-x-6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

b) Intersections avec l'axe x : on a $y = 0$.

$x^2-x-6=0$ : $a=1$, $b=-1$ et $c=-6$ ;

$\Delta = b^2-4ac = (-1)^2-4.1.(-6) = 1+24 = 25$ ; $\sqrt{\Delta} = 5$ ;

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1+5}{2.1} = \dfrac{6}{2} = 3$ et

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1-5}{2.1} = \dfrac{-4}{2} = -2$ ;

on a bien $x_1 \geq 2$ et $x_2 \leq 0$.

$-x^2-x+2=0$ : $a=-1$, $b=-1$ et $c=2$ ;

$\Delta = b^2-4ac = (-1)^2-4.(-1).2 = 1+8 = 9$ ; $\sqrt{9} = 3$ ;

$x_3 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1+3}{2.(-1)} = \dfrac{4}{-2} = -2$ ;

$x_4 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1-3}{2.(-1)} = \dfrac{-2}{-2} = 1$ ;

on a bien $x_4 \in ]-2;2[$, mais on n'a pas $x_3 \in ]-2;2[$ (en fait $x_3 = x_2$).

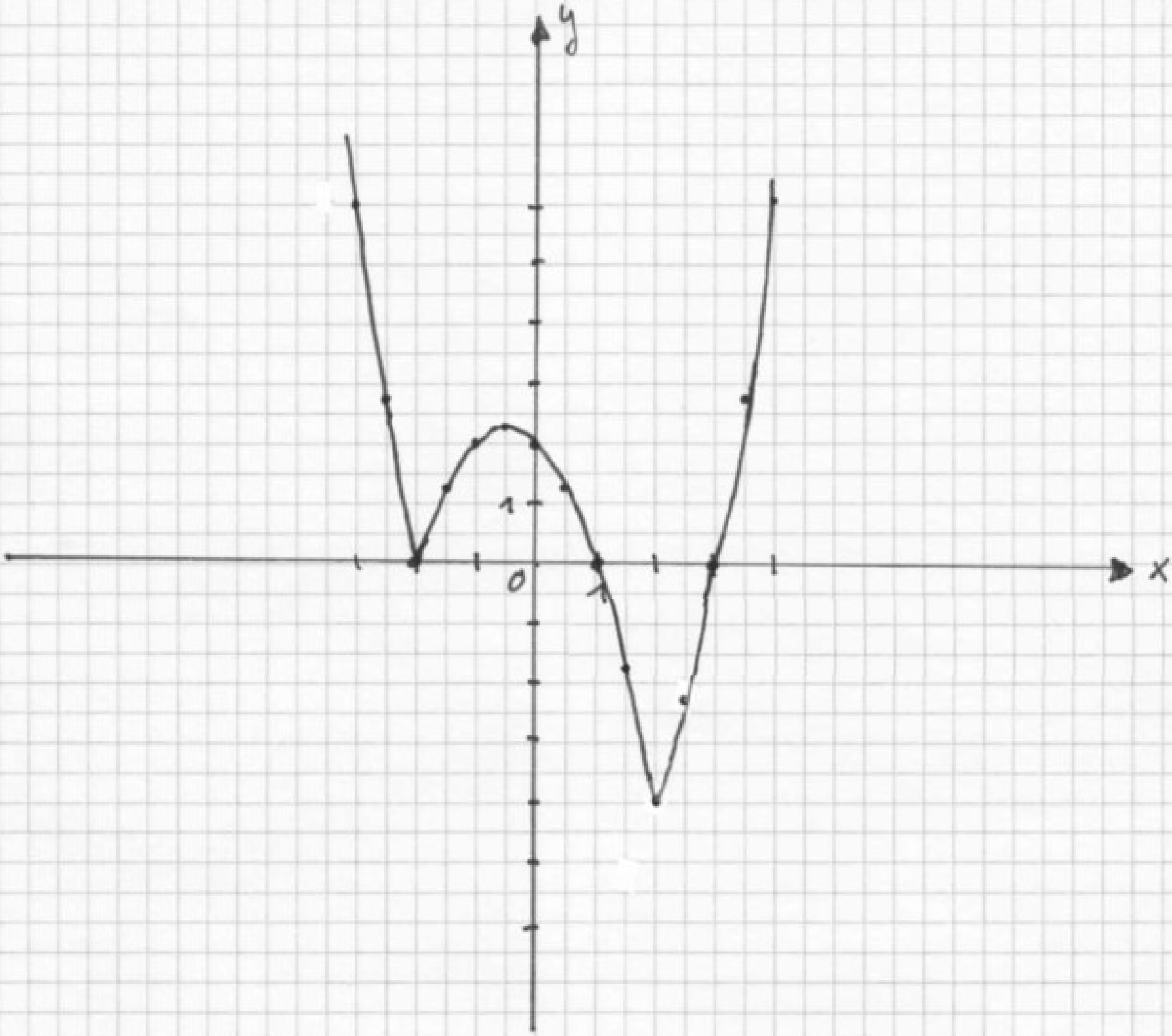
Ainsi, les intersections avec l'axe x sont : $(3;0)$, $(-2;0)$ et $(1;0)$.

Intersection avec l'axe y : on a $x = 0$ $(\in ]-2;2[)$.

Ainsi $y = -0^2-0+2 = 2$.

Donc, l'intersection avec l'axe y est $(0;2)$.

c)




d) Le point le plus bas du graphe de $f$ est en $x = 2$ et, alors, $y = f(2) = -4$.

On a donc $\underline{\underline{f(\mathbb{R}) = [-4 ; +\infty[}}$.

# Exercice 14

a) $|x| = 4 \Rightarrow \underline{\underline{x = 4 \text{ ou } x = -4.}}$

b) $|-2x+7| = 3 \Rightarrow$ soit $-2x+7 = 3 \Rightarrow -2x = -4 \Rightarrow x = 2$;

soit $-2x+7 = -3 \Rightarrow -2x = -10 \Rightarrow x = 5$.

$\Rightarrow \underline{\underline{x = 2 \text{ et } x = 5.}}$

c) $|x^2+3x-2| = 2 \Rightarrow$ soit $x^2+3x-2 = 2 \Rightarrow x^2+3x-4 = 0$ ①;

soit $x^2+3x-2 = -2 \Rightarrow x^2+3x = 0$ ②.

① $x^2+3x-4 = 0$ : on a $a=1$, $b=3$ et $c=-4$;

$\Delta = b^2-4ac = 3^2-4.1.(-4) = 9+16 = 25$;

$\sqrt{\Delta} = 5$;

$\Rightarrow x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+5}{2.1} = \frac{2}{2} = 1$ et

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-5}{2.1} = \frac{-8}{2} = -4$.

② $x^2+3x = 0 \Rightarrow x(x+3) = 0$

$\Rightarrow$ soit $x = 0$;

soit $x+3 = 0 \Rightarrow x = -3$.

$\Rightarrow \underline{\underline{x = -3,\ x = 0,\ x = 1 \text{ et } x = -4.}}$

d) $|-x+5| = |2x+3| \Rightarrow$ soit $-x+5 = 2x+3 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$;

soit $-x+5 = -(2x+3) \Rightarrow -x+5 = -2x-3 \Rightarrow x = -8$.

$\Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{2}{3} \text{ et } x = -8.}}$

e) $|x^2+3x-4| = |3x+12| \Rightarrow$ soit $x^2+3x-4 = 3x+12 \Rightarrow x^2-4 = 12$

$\Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$ ou $x = -4$;

soit $x^2+3x-4 = -(3x+12)$

$\Rightarrow x^2+3x-4 = -3x-12 \Rightarrow x^2+6x+16 = 0$ :

on a $a = 1$, $b = 6$ et $c = 16$;

$\Delta = b^2-4ac = 6^2-4.1.16 = 36-64 = -28 < 0$;

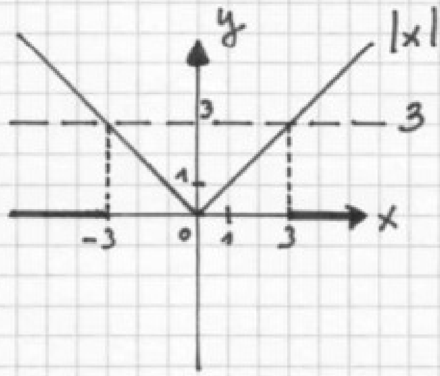
pas de solution.

$\Rightarrow \underline{\underline{x = 4 \text{ et } x = -4.}}$

f) $3\cdot|x|-2 = 7 \Rightarrow 3\cdot|x| = 9 \Rightarrow |x| = 3 \Rightarrow \underline{\underline{x = 3 \text{ ou } x = -3.}}$

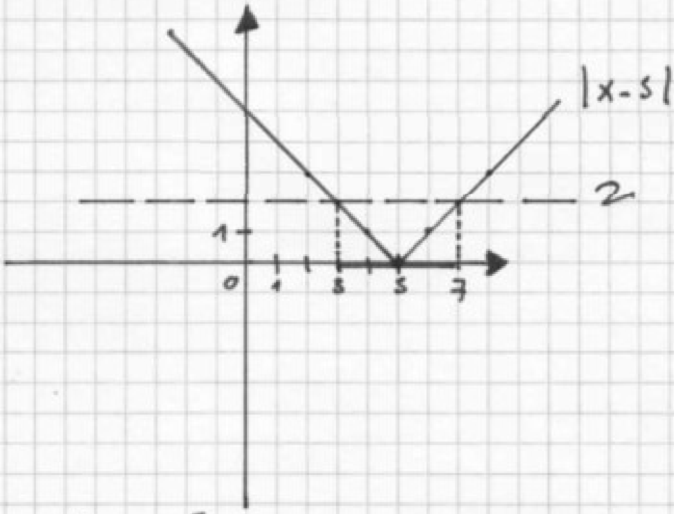
Exercice 15

a) $|x| > 3$:



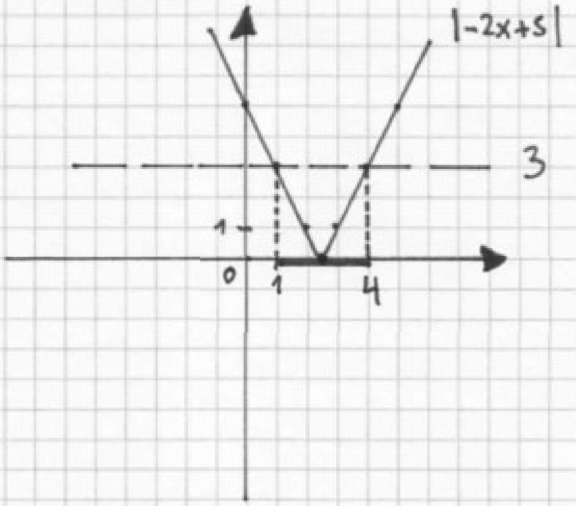

$\Longrightarrow$ $x \in \,]-\infty; -3[\, \cup \,]3; +\infty[$.

b) $|x-5| < 2$:




$\Longrightarrow$ $x \in \,]3; 7[$.

c) $|-2x+5| < 3$




$\Longrightarrow$ $x \in \,]1; 4[$.

Exercice 16

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6.$

a) Intersections avec l'axe x : on résoud $y = 0$, i.e. $f(x) = 0$, i.e. $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = 0$ :

on a : $a = \frac{1}{2}$, $b = -2$ et $c = -6$ ;

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-6) = 4 + 12 = 16$ ; $\sqrt{\Delta} = 4$ ;

ainsi $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+4}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{6}{1} = 6$ et

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-4}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{-2}{1} = -2.$

$\Longrightarrow$ $(6\,;\,0)$ et $(-2\,;\,0)$.

Intersection avec l'axe y : on pose $x = 0$ ; alors $y = f(0) = -6$ $\Longrightarrow$ $(0\,;\,-6)$.

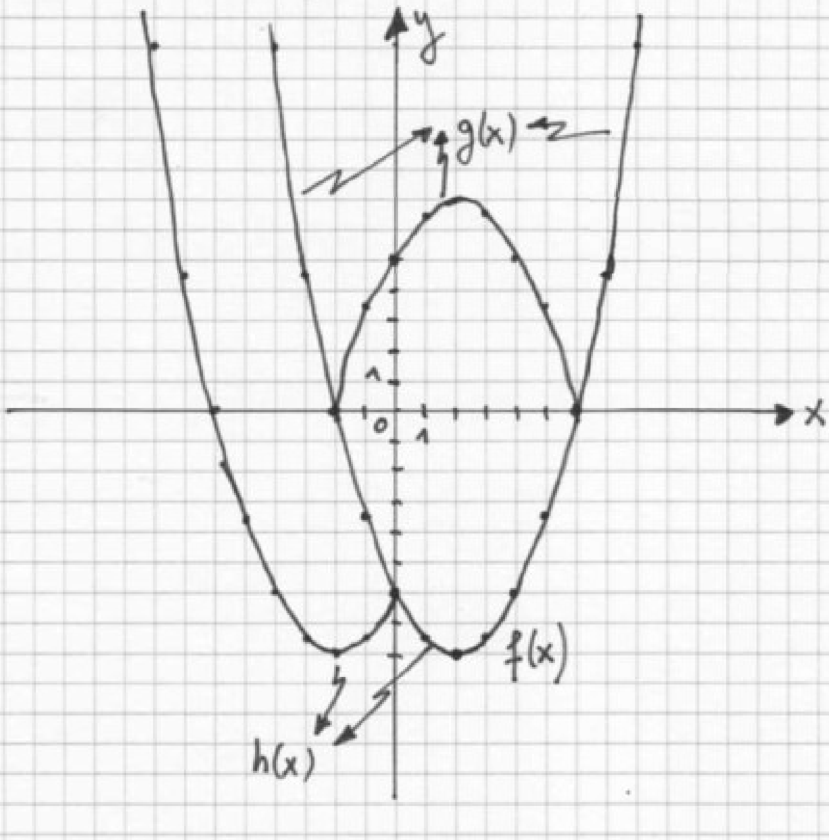
Minimum de f : comme f est une parabole, elle possède un axe de symétrie vertical passant par son sommet ; les points $(6\,;\,0)$ et $(-2\,;\,0)$ doivent donc être symétrique ; pour que cela joue, il faut que l'axe de symétrie soit $x = 2$ ;

avec $x = 2$, on a $y = f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - 6 = 2 - 4 - 6 = -8$ ;

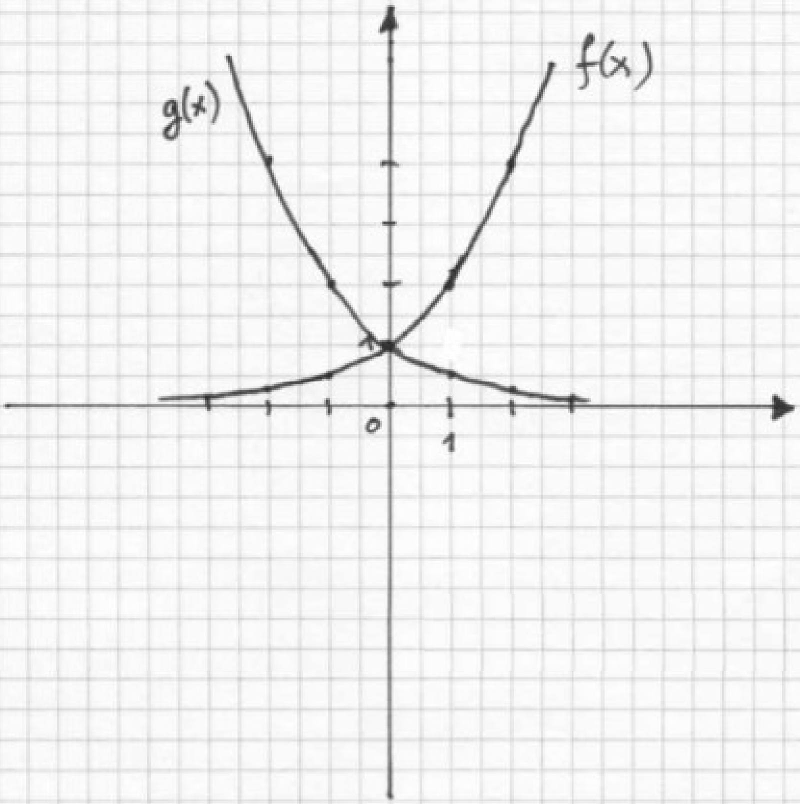
ainsi le sommet est $(2\,;\,-8)$ (qui est un minimum puisque le coefficient de $x^2$ $\left(\frac{1}{2}\right)$ est positif).

b)

c)



Exercice 17



## Exercice 18

On a : $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$, $x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$, etc.

a) $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = \underline{\underline{3}}.$

b) $16^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{16^{1/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{16}} = \underline{\underline{\dfrac{1}{4}}}.$

c) $8^{\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = \underline{\underline{4}}.$

d) $32^{\frac{4}{5}} = \left(32^{\frac{1}{5}}\right)^4 = \left(\sqrt[5]{32}\right)^4 = 2^4 = \underline{\underline{16}}.$

e) $27^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{27^{2/3}} = \dfrac{1}{(27^{1/3})^2} = \dfrac{1}{(\sqrt[3]{27})^2} = \dfrac{1}{(3)^2} = \underline{\underline{\dfrac{1}{9}}}.$

## Exercice 19

a) $\dfrac{a^m \cdot a^n}{a^2} = \dfrac{a^{m+n}}{a^2} = \underline{\underline{a^{m+n-2}}}.$

b) $\dfrac{x^m \cdot x^{2m} \cdot x^{2m}}{x} = \dfrac{x^{m+2m+2m}}{x^2} = \dfrac{x^{5m}}{x^2} = \underline{\underline{x^{5m-2}}}.$

c) $x^{m-n} \cdot x^{n-m} = x^{m-n+n-m} = x^0 = \underline{1.}$

d) $\dfrac{(xy)^m \cdot (x^{m+1} \cdot y^{m-1})}{xy} = \dfrac{x^m \cdot x^{m+1} \cdot y^m \cdot y^{m-1}}{xy} = \dfrac{x^{m+m+1} \cdot y^{m+m-1}}{xy} =$

$= \dfrac{x^{2m+1} y^{2m-1}}{xy} = \dfrac{x^{2m+1}}{x} \cdot \dfrac{y^{2m-1}}{y} = x^{2m+1-1} y^{2m-1-1} = \underline{\underline{x^{2m} y^{2m-2}}}.$

e) $(x^{1-n} \cdot y^{n-1}) \cdot x^2 y^2 = x^{1-n} \cdot x^2 \cdot y^{n-1} \cdot y^2 = x^{1-n+2} y^{n-1+2} = \underline{\underline{x^{3-n} y^{n+1}}}.$

f) $\dfrac{(x^2 \cdot y^3)^2}{xy^2} = \dfrac{(x^2)^2 \cdot (y^3)^2}{xy^2} = \dfrac{x^4 \cdot y^6}{xy^2} = \dfrac{x^4}{x} \cdot \dfrac{y^6}{y^2} = x^{4-1} y^{6-2} = \underline{\underline{x^3 y^4}}.$

Exercice 20

a) $2\cdot 2^{2x}-9\cdot 2^{x}+4=0 \Rightarrow 2\cdot(2^x)^2-9\cdot 2^x+4=0.$

Posons $y=2^x$. On obtient $2y^2-9y+4=0$ : on a $a=2$, $b=-9$, $c=4$ ;

$\Delta=b^2-4ac=(-9)^2-4\cdot2\cdot4=81-32=49$ ; $\sqrt{\Delta}=7$ ;

ainsi $y_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{9+7}{2\cdot2}=\dfrac{16}{4}=4$ et $y_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{9-7}{2\cdot2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

Avec $y_1=4$ et $y=2^x$, on trouve $x_1=2$.

Avec $y_2=\dfrac{1}{2}$ et $y=2^x$, on trouve $x_2=-1$.

$\Rightarrow$ $x=2$ et $x=-1$.

b) $9\cdot 3^{2x}-82\cdot 3^x+9=0 \Rightarrow 9\cdot(3^x)^2-82\cdot 3^x+9=0.$

Posons $y=3^x$. On obtient $9y^2-82y+9=0$ : on a $a=9$, $b=-82$ et $c=9$ ;

$\Delta=b^2-4ac=(-82)^2-4\cdot9\cdot9=6724-324=6400$ ; $\sqrt{\Delta}=80$ ;

ainsi $y_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{82+80}{2\cdot9}=\dfrac{162}{18}=9$ et $y_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{82-80}{2\cdot9}=\dfrac{2}{18}=\dfrac{1}{9}$.

Avec $y_1=9$ et $y=3^x$, on trouve $x_1=2$.

Avec $y_2=\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{3^2}=3^{-2}$ et $y=3^x$, on trouve $x_2=-2$.

$\Rightarrow$ $x=2$ et $x=-2$.

c) $2^{x^2-8}=\dfrac{1}{16}$ : $\dfrac{1}{16}=\dfrac{1}{2^4}=2^{-4}$.

On obtient $2^{x^2-8}=2^{-4}$ et on doit ainsi avoir $x^2-8=-4 \Rightarrow x^2=4$

$\Rightarrow$ $x=2$ et $x=-2$.

d) $10^{3x+2}=\sqrt{10}$ : $\sqrt{10}=10^{\frac{1}{2}}$.

On obtient $10^{3x+2}=10^{\frac{1}{2}}$ et on doit donc avoir $3x+2=\dfrac{1}{2} \Rightarrow 3x=-\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow$ $x=-\dfrac{1}{2}$.

## Exercice 21

$f(x) = \left(\frac{1}{2}x - 2\right) 2^x$.

a) $\underline{\underline{D = \mathbb{R}}}$ ($f$ peut être calculée pour toute valeur de $x$).

$f(-x) = \left(\frac{1}{2}\cdot(-x) - 2\right) 2^{-x} = \left(-\frac{1}{2}x - 2\right) 2^{-x} \neq \pm f(x)$

$\Rightarrow$ $f$ n'est ni paire ni impaire.

b) Avec l'axe x : on pose $y = 0$, i.e. $f(x) = 0$ ;

on obtient $\left(\frac{1}{2}x - 2\right)2^x = 0$ ;

Comme $2^x > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que $\frac{1}{2}x - 2 = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}x = 2 \Rightarrow x = 4$.

$\Rightarrow$ $(4 ; 0)$.

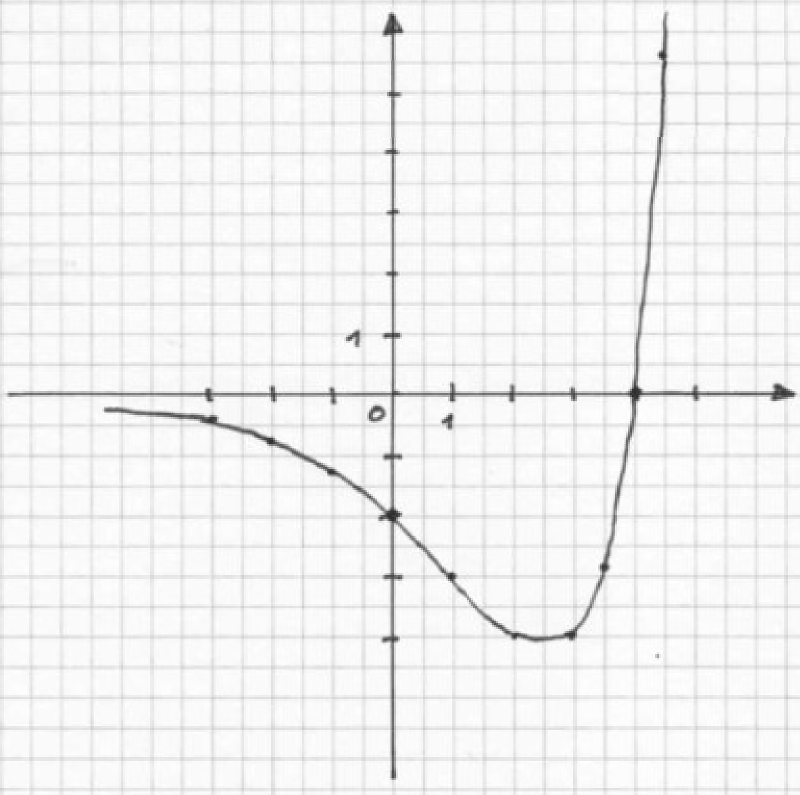
Avec l'axe y : on pose $x = 0$ ; on obtient $y = -2 \cdot 2^0 = -2$.

$\Rightarrow$ $(0 ; -2)$.

c)

| $x$ | | 4 | |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}x - 2$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $2^x$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |

d)




$f(-3) = \left(-\frac{3}{2} - 2\right) 2^{-3} = -0,4375$

$f(-2) = (-1 - 2)\, 2^{-2} = -0,75$

$f(-1) = \left(-\frac{1}{2} - 2\right) 2^{-1} = -1,25$

$f(1) = \left(\frac{1}{2} - 2\right) \cdot 2^1 = -3$

$f(2) = (1 - 2) \cdot 2^2 = -4$

$f(3) = \left(\frac{3}{2} - 2\right) \cdot 2^3 = -4$

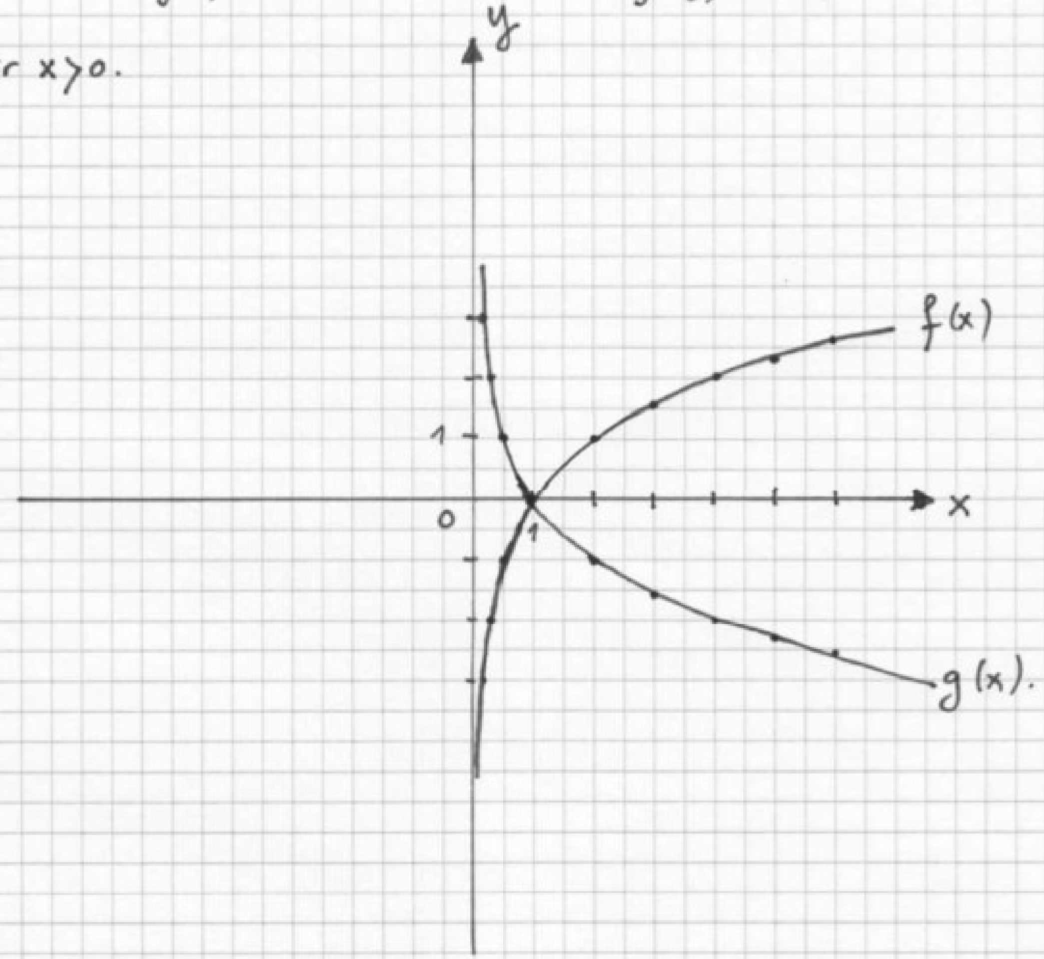
$f(3,5) = \left(\frac{3,5}{2} - 2\right) \cdot 2^{3,5} = -2,83$

$f(4,5) = \left(\frac{4,5}{2} - 2\right) \cdot 2^{4,5} = 5,66$

Exercice 22

$f(x) = \log_2(x) = \dfrac{\log(x)}{\log(2)}$ et $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x) = \dfrac{\log(x)}{\log(\frac{1}{2})}$.

On doit avoir $x > 0$.




$f$: $D = ]0; +\infty[$, $f(D) = \mathbb{R}$.

$g$: $D = ]0; +\infty[$, $f(D) = \mathbb{R}$.

## Exercice 23

a) $2\log(x)=-4 \Rightarrow \log(x)=-2 \Rightarrow \underline{\underline{x=10^{-2}=0{,}01.}}$

b) $3\log(2x)=9 \Rightarrow \log(2x)=3 \Rightarrow 2x=10^3=1000 \Rightarrow \underline{\underline{x=500.}}$

c) $\log(x^2-21)=2 \Rightarrow x^2-21=10^2=100 \Rightarrow x^2=121 \Rightarrow \underline{\underline{x=11 \text{ ou } x=-11.}}$

d) $\log(\log(x))=1 \Rightarrow \log(x)=10^1=10 \Rightarrow \underline{\underline{x=10^{10}.}}$

e) $\log^2(x)-\log(x)-2=0$: posons $y=\log(x)$;

on obtient $y^2-y-2=0$: on a $a=1$, $b=-1$ et $c=-2$;

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)=1+8=9$; $\sqrt{\Delta}=3$;

ainsi $y_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{1+3}{2\cdot1}=\dfrac{4}{2}=2$ et

$y_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{1-3}{2\cdot1}=\dfrac{-2}{2}=-1$;

avec $y_1=2$ et $y=\log(x)$, on a $\log(x)=2 \Rightarrow x=10^2=100$;

avec $y_2=-1$ et $y=\log(x)$, on a $\log(x)=-1 \Rightarrow x=10^{-1}=0{,}1$;

$\Rightarrow \underline{\underline{x=100 \text{ et } x=0{,}1.}}$

f) $\log^2(x)-6\log(x)=0 \Rightarrow \log(x)\left(\log(x)-6\right)=0$

$\Rightarrow$ soit $\log(x)=0 \Rightarrow x=10^0=1$;

soit $\log(x)-6=0 \Rightarrow \log(x)=6 \Rightarrow x=10^6$;

$\Rightarrow \underline{\underline{x=1 \text{ et } x=10^6.}}$

## Exercice 24

$$P(x) = -\frac{7}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - \frac{1}{3}x - 4,$$

$$Q(x) = -5x^3 + 2x^2 + x + \frac{3}{7},$$

$$R(x) = 2x^3 - x^2.$$

a)

$$P+Q = -\frac{7}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - \frac{1}{3}x - 4 + (-5x^3) + 2x^2 + x + \frac{3}{7} =$$
$$= -\frac{7}{3}x^4 + \left(\frac{2}{3} - 5\right)x^3 + 5x^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)x + \frac{3}{7} - 4 =$$
$$= \underline{-\frac{7}{3}x^4 - \frac{13}{3}x^3 + 5x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{25}{7}}.$$

$$Q+R = -5x^3 + 2x^2 + x + \frac{3}{7} + 2x^3 - x^2 = \underline{-3x^3 + x^2 + x + \frac{3}{7}}.$$

$$(P+Q)+R = -\frac{7}{3}x^4 - \frac{13}{3}x^3 + 5x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{25}{7} + 2x^3 - x^2 =$$
$$= -\frac{7}{3}x^4 + \left(2 - \frac{13}{3}\right)x^3 + 4x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{25}{7} =$$
$$= \underline{-\frac{7}{3}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 4x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{25}{7}}.$$

$$P+(Q+R) = -\frac{7}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - \frac{1}{3}x - 4 + (-3x^3) + x^2 + x + \frac{3}{7} =$$
$$= -\frac{7}{3}x^4 + \left(\frac{2}{3} - 3\right) + 4x^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)x + \frac{3}{7} - 4 =$$
$$= \underline{-\frac{7}{3}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 4x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{25}{7}}.$$

On constate que $(P+Q)+R = P+(Q+R)$, i.e. que l'addition de polynômes est associative.

b)

$$3P - 7Q = 3\left(-\frac{7}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - \frac{1}{3}x - 4\right) - 7\left(-5x^3 + 2x^2 + x + \frac{3}{7}\right) =$$
$$= -7x^4 + 2x^3 + 9x^2 - x - 12 + 35x^3 - 14x^2 - 7x - 3 =$$
$$= \underline{-7x^4 + 37x^3 - 5x^2 - 8x - 15}.$$

Exercice 25

$P(x) = 2x - 5 \quad , \quad Q(x) = x^3 + 3$

a) $P \cdot Q = (2x-5)(x^3+3) = 2x^4 + 6x - 5x^3 - 15 = \underline{\underline{2x^4 - 5x^3 + 6x - 15}}.$

b) $2P \cdot 3Q = 2 \cdot 3 \cdot P \cdot Q = 6 \cdot P \cdot Q = 6\left(2x^4 - 5x^3 + 6x - 15\right) = \underline{\underline{12x^4 - 30x^3 + 36x - 90}}.$

c) $P^2 = (2x-5)^2 = \underline{\underline{4x^2 - 20x + 25}}.$

d) $Q^2 = (x^3+3)^2 = \underline{\underline{x^6 + 6x^3 + 9}}.$

e) $P \cdot Q^2 = (2x-5)(x^6 + 6x^3 + 9) = 2x^7 + 12x^4 + 18x - 5x^6 - 30x^3 - 45 =$
$= \underline{\underline{2x^7 - 5x^6 + 12x^4 - 30x^3 + 18x - 45}}.$

f) $P^3 = P \cdot P^2 = (2x-5)\left(4x^2 - 20x + 25\right) = 8x^3 - 40x^2 + 50x - 20x^2 + 100x - 125 =$
$= \underline{\underline{8x^3 - 60x^2 + 150x - 125}}.$

g) $Q^3 = Q \cdot Q^2 = (x^3+3)(x^6 + 6x^3 + 9) = x^9 + 6x^6 + 9x^3 + 3x^6 + 18x^3 + 27 =$
$= \underline{\underline{x^9 + 9x^6 + 27x^3 + 27}}.$

Exercice 26

a)
$$\begin{array}{l|l}
x^3-7x^2+5x+1 & x^2-4x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{-(x^3-4x^2+2x)} & x-3 \\
\quad -3x^2+3x+1 & \\
\quad \underline{-(-3x^2+12x-6)} & \\
\qquad -9x+7 &
\end{array}$$

$\Longrightarrow$ $Q(x)=x-3$ et $R(x)=-9x+7$.

b)
$$\begin{array}{l|l}
x^2-5x+3 & x^6+2 \\ \cline{2-2}
\underline{-0} & 0 \\
x^2-5x+3 &
\end{array}$$

$\Longrightarrow$ $Q(x)=0$ et $R(x)=x^2-5x+3$.

c)
$$\begin{array}{l|l}
8x^3-4x^2-10x-3 & 2x-3 \\ \cline{2-2}
\underline{-(8x^3-12x^2)} & 4x^2+4x+1 \\
\quad 8x^2-10x-3 & \\
\quad \underline{-(8x^2-12x)} & \\
\qquad 2x-3 & \\
\qquad \underline{-(2x-3)} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

$\Longrightarrow$ $Q(x)=4x^2+4x+1$ et $R(x)=0$.

d)
$$\begin{array}{l|l}
4x-5 & 3x+4 \\ \cline{2-2}
\underline{-\left(4x+\frac{16}{3}\right)} & \frac{4}{3} \\
\quad -\frac{31}{3} &
\end{array}$$

$\Longrightarrow$ $Q(x)=\frac{4}{3}$ et $R(x)=-\frac{31}{3}$.

Exercice 27

a) $P(x) = (3x-5)(2x+3)$ : $P(x)$ est le produit de 2 polynômes de degré 1 ; $P(x)$ est donc de **degré 2**.

Les zéros de $P(x)$ sont les solutions de $(3x-5)(2x+3)=0$.

$(3x-5)(2x+3)=0 \Rightarrow$ soit $3x-5=0 \Rightarrow 3x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{3}$ ;

soit $2x+3=0 \Rightarrow 2x=-3 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$.

Les zéros de $P(x)$ sont donc $\underline{\underline{x=\frac{5}{3} \text{ et } x=-\frac{3}{2}}}$.

b) $P(x)=10x^2-x-2$ : les zéros de $P(x)$ sont les solutions de $10x^2-x-2=0$.

On a : $a=10$, $b=-1$ et $c=-2$.

$\Delta = b^2-4ac = (-1)^2-4.10.(-2) = 1+80 = 81$ ; $\sqrt{\Delta}=9$.

Ainsi $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+9}{2.10} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-9}{2.10} = \frac{-8}{10} = -\frac{4}{5}$.

Les zéros de $P(x)$ sont donc $\underline{\underline{x=\frac{1}{2} \text{ et } x=-\frac{4}{5}}}$.

On peut alors écrire $P(x)=10\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{4}{5}\right) = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot 5\left(x+\frac{4}{5}\right) =$

$= \underline{\underline{(2x-1)(5x+4)}}$.

Exercice 28

a) Connaissant les zéros d'un polynôme ($x_1$ et $x_2$), on peut l'écrire sous la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$ et on détermine $a$ avec la condition supplémentaire donnée.

Ici $x_1 = -2$ et $x_2 = 3$.

Le polynôme est donc $a(x+2)(x-3)$.

Si $x=0$, le polynôme vaut 18 : $a(0+2)(0-3)=18 \Rightarrow -6a = 18 \Rightarrow a = -3$.

$\Rightarrow$ le polynôme est $\underline{\underline{-3(x+2)(x-3)}}$.

b) Similairement à a), mais avec 3 zéros, le polynôme s'écrit:

$a(x-1)(x-3)(x+5)$.

Si $x=2$, le polynôme vaut 14 : $a(2-1)(2-3)(2+5)=14$

$\Rightarrow a\cdot 1\cdot(-1)\cdot 7 = 14 \Rightarrow -7a = 14 \Rightarrow a = -2$.

$\Rightarrow$ Le polynôme est $\underline{\underline{-2(x-1)(x-3)(x+5)}}$.

## Exercice 29



Si $P(x) = ax^2+bx+c$ s'annule en $x_1$ et $x_2$, on a $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

On a alors :

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \underline{\underline{-\frac{b}{a}}} \text{ et}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}$$ en utilisant

l'identité remarquable $(m+n)(m-n) = m^2 - n^2$;

ainsi $$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \underline{\underline{\frac{c}{a}}}.$$

## Exercice 30

$P(x) = 6x^3 - 13x^2 + x + 2.$

a) $P(-1) = 6\cdot(-1)^3 - 13\cdot(-1)^2 + (-1) + 2 = 6\cdot(-1) - 13\cdot 1 - 1 + 2 = -6 - 13 + 1 = -18;$

$P(0) = 6.0^3 - 13.0^2 + 0 + 2 = 2;$

$P(1) = 6\cdot 1^3 - 13\cdot 1^2 + 1 + 2 = 6 - 13 + 1 + 2 = -4;$

$P(2) = 6.2^3 - 13.2^2 + 2 + 2 = 6.8 - 13.4 + 4 = 48 - 52 + 4 = 0;$

$P(3) = 6.3^3 - 13.3^2 + 3 + 2 = 6.27 - 13.9 + 5 = 162 - 117 + 5 = 50.$

b) $P(x) : x+1$

$$\begin{array}{r|l}
6x^3 - 13x^2 + x + 2 & x+1 \\ \hline
\underline{-(6x^3 + 6x^2)} & 6x^2 - 19x + 20 \\
-19x^2 + x + 2 & \\
\underline{-(-19x^2 - 19x)} & \\
20x + 2 & \\
\underline{-(20x + 20)} & \\
-18 &
\end{array}$$

$\Rightarrow Q(x) = 6x^2 - 19x + 20$

et $R(x) = -18.$

$P(x) : x$

$$\begin{array}{r|l}
6x^3 - 13x^2 + x + 2 & x \\ \hline
\underline{-6x^3} & 6x^2 - 13x + 1 \\
-13x^2 + x + 2 & \\
\underline{-13x^2} & \\
x + 2 & \\
\underline{-x} & \\
2 &
\end{array}$$

$\Rightarrow Q(x) = 6x^2 - 13x + 1$

et $R(x) = 2$

$P(x) : x-1$

$$\begin{array}{r|l}
6x^3 - 13x^2 + x + 2 & x-1 \\ \hline
\underline{-(6x^3 - 6x^2)} & 6x^2 - 7x - 6 \\
-7x^2 + x + 2 & \\
\underline{-(-7x^2 + 7x)} & \\
-6x + 2 & \\
\underline{-(-6x + 6)} & \\
-4 &
\end{array}$$

$\Rightarrow Q(x) = 6x^2 - 7x - 6$

et $R(x) = -4$

$P(x) : x-2$

$$\begin{array}{r|l}
6x^3 - 13x^2 + x + 2 & x-2 \\ \hline
\underline{-(6x^3 - 12x^2)} & 6x^2 - x - 1 \\
-x^2 + x + 2 & \\
\underline{-(-x^2 + 2x)} & \\
-x + 2 & \\
\underline{-(-x + 2)} & \\
0 &
\end{array}$$

$\Rightarrow Q(x) = 6x^2 - x - 1$

et $R(x) = 0$

$P(x) : x-3$

$$
\begin{array}{r|l}
6x^3 - 13x^2 + x + 2 & x-3 \\
\hline
-(6x^3 - 18x^2) & 6x^2 + 5x + 16 \\
\hline
5x^2 + x + 2 & \\
-(5x^2 - 15x) & \\
\hline
16x + 2 & \\
-(16x - 48) & \\
\hline
50 &
\end{array}
$$

$\rightarrow Q(x) = 6x^2 + 5x + 16$
et $R(x) = 50$.

On voit ainsi que le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x - x_0)$ est égal à $P(x_0)$.

## Exercice 31

a) $P(x) = 6x^3 + 5x^2 - 4x = x(6x^2 + 5x - 4)$.

On résout $x(6x^2+5x-4) = 0$.

On a soit $x = 0$ ($1^{\text{ère}}$ solution), soit $6x^2+5x-4=0$.

$6x^2+5x-4=0$ : on a $a=6$, $b=5$ et $c=-4$ ;

$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-4) = 25 + 96 = 121$ ; $\sqrt{\Delta} = 11$ ;

ainsi $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5+11}{2 \cdot 6} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$ ($2^{\text{ème}}$ solution) et

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5-11}{2 \cdot 6} = \dfrac{-16}{12} = -\dfrac{4}{3}$ ($3^{\text{ème}}$ solution).

On a ainsi $P(x) = x \cdot 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{4}{3}\right) = x \cdot 2\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 3\left(x + \frac{4}{3}\right) =$

$= \underline{\underline{x(2x-1)(3x+4)}}$.

b) $P(x) = 7x^3 - 62x^2 + 89x + 14$ : comme $P(7) = 0$, $P(x)$ se divise par $x - 7$ :

$$
\begin{array}{r|l}
7x^3 - 62x^2 + 89x + 14 & x - 7 \\ \cline{2-2}
-(7x^3 - 49x^2) \phantom{+ 89x + 14} & 7x^2 - 13x - 2 \\ \cline{1-1}
-13x^2 + 89x + 14 & \\
-(-13x^2 + 91x) \phantom{+ 14} & \\ \cline{1-1}
-2x + 14 & \\
-(-2x + 14) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Ainsi $P(x) = (x-7)(7x^2 - 13x - 2)$.

Reste à factoriser $7x^2 - 13x - 2$.

On résout $7x^2 - 13x - 2 = 0$ : on a $a = 7$, $b = -13$ et $c = -2$ ;

$\Delta = b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-2) = 169 + 56 =$

$= 225$ ; $\sqrt{225} = 15$ ;

ainsi $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{13+15}{2 \cdot 7} = \dfrac{28}{14} = 2$ et

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{13-15}{2 \cdot 7} = \dfrac{-2}{14} = -\dfrac{1}{7}$.

On a donc $7x^2 - 13x - 2 = 7(x-2)\left(x + \frac{1}{7}\right) = (x-2)(7x+1)$.

Par conséquent $\underline{\underline{P(x) = (x-7)(x-2)(7x+1)}}$.

c) $P(x) = 105x^3 + 23x^2 - 16x - 4$ : comme $P\left(\frac{2}{5}\right) = 0$, $P(x)$ se divise par $\left(x - \frac{2}{5}\right)$ :

$$\begin{array}{r|l} 105x^3+23x^2-16x-4 & x-\frac{2}{5} \\ \cline{2-2} -(105x^3-42x^2) & 105x^2+65x+10 \\ \cline{1-1} 65x^2-16x-4 & \\ -(65x^2-26x) & \\ \cline{1-1} 10x-4 & \\ -(10x-4) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Ainsi $P(x) = (x-\frac{2}{5})(105x^2+65x+10) = (x-\frac{2}{5})5(21x^2+13x+2) =$
$= (5x-2)(21x^2+13x+2)$.

Reste à factoriser $21x^2+13x+2$.

On résout $21x^2+13x+2=0$ : on a $a=21$, $b=13$ et $c=2$ ;

$\Delta = b^2-4ac = 13^2-4.21.2 = 169-168 = 1$ ; $\sqrt{\Delta} = 1$ ;

ainsi $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-13+1}{2\cdot 21} = \frac{-12}{42} = -\frac{2}{7}$ et

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-13-1}{2\cdot 21} = \frac{-14}{42} = -\frac{1}{3}$.

On a donc $21x^2+13x+2 = 21(x+\frac{2}{7})(x+\frac{1}{3}) = 7(x+\frac{2}{7})\cdot 3(x+\frac{1}{3}) =$
$= (7x+2)(3x+1)$.

Par conséquent $P(x) = \underline{\underline{(5x-2)(7x+2)(3x+1)}}$.

d) $P(x) = 8x^3-12x^2+6x-1$ : comme $P(\frac{1}{2})=0$, $P(x)$ se divise par $(x-\frac{1}{2})$ :

$$\begin{array}{r|l} 8x^3-12x^2+6x-1 & x-\frac{1}{2} \\ \cline{2-2} -(8x^3-4x^2) & 8x^2-8x+2 \\ \cline{1-1} -8x^2+6x-1 & \\ -(-8x^2+4x) & \\ \cline{1-1} 2x-1 & \\ -(2x-1) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Ainsi $P(x) = (x-\frac{1}{2})(8x^2-8x+2) = (x-\frac{1}{2})2(4x^2-2x+1) =$
$(2x-1)(4x^2-2x+1)$.

Comme $4x^2-2x+1 = (2x-1)^2$ (en utilisant l'identité remarquable $a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$), on trouve :

$P(x) = (2x-1)(2x-1)^2 = \underline{\underline{(2x-1)^3}}$.