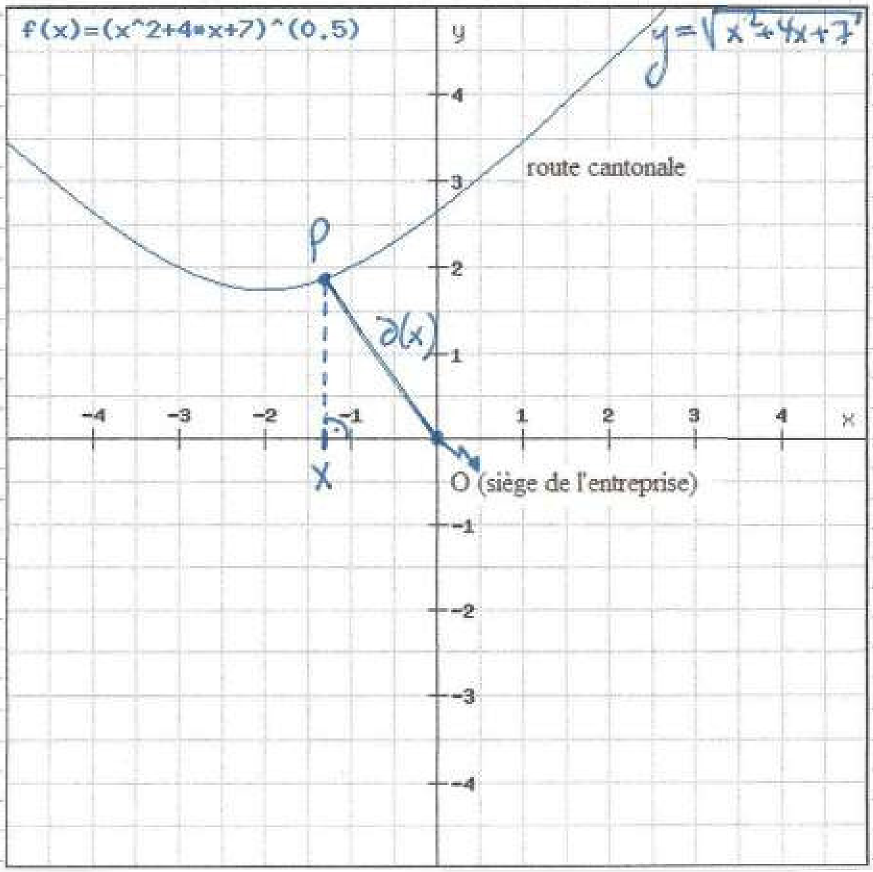
Examen à blanc 2013 — Corrigé

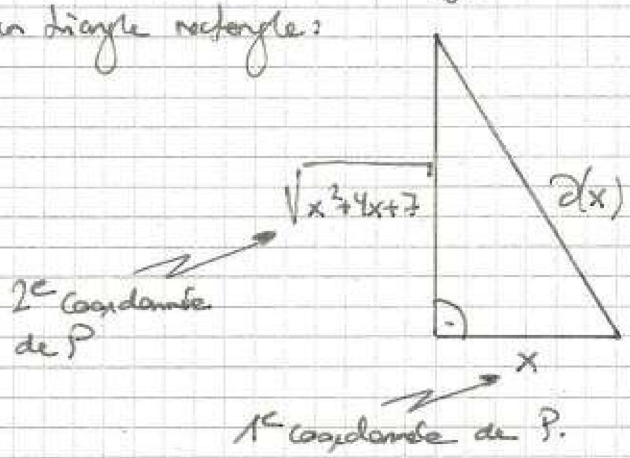
Problème 1

a) On note P le point d'abscisse x qui se trouve sur la route cantonale (qui est la fonction $y=\sqrt{x^2+4x+7}$:



Les coordonnées de P sont alors $(x;y)=(x;\sqrt{x^2+4x+7})$.

On a alors un triangle rectangle :



Par le théorème de Pythagore, on a alors $(\partial(x))^2=\left(\sqrt{x^2+4x+7}\right)^2+x^2$

$\Longrightarrow (\partial(x))^2 = x^2+4x+7+x^2$ (car prendre la racine carrée, puis élever au carré, nous renvoie au départ)

$\Longrightarrow (\partial(x))^2 = 2x^2+4x+7 \Longrightarrow \underline{\partial(x)=\sqrt{2x^2+4x+7}}$

b) Les coordonnées du point de la route cantonale le plus proche du siège de l'entreprise correspond aux coordonnées du point pour lesquelles la fonction $d(x)$ est minimale.
On doit donc chercher le minimum de $d(x)$ et, donc, résoudre l'équation $d'(x)=0$.
La fonction $d(x)=\sqrt{2x^2+4x+7}$ est une fonction composée. On la décompose :

$$x \longmapsto 2x^2+4x+7 = u \longmapsto \sqrt{u}$$

$$\begin{array}{ccc} 2x^2+4x+7 & & \sqrt{u} \\ \Big\downarrow \text{dérivée} & & \Big\downarrow \text{dérivée} \\ 2\cdot 2x+4\cdot 1+0 & & \dfrac{1}{2\sqrt{u}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2x^2+4x+7}} \\ = 4x+4 & & \end{array}$$

On obtient alors $d'(x)=(4x+4)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2x^2+4x+7}} = \dfrac{4x+4}{2\sqrt{2x^2+4x+7}}$

$$= \frac{2x+2}{\sqrt{2x^2+4x+7}}.$$

On résoud $d'(x)=0$:

$$\begin{aligned} \frac{2x+2}{\sqrt{2x^2+4x+7}} &= 0 && \Big|\ \cdot\sqrt{2x^2+4x+7} \\ 2x+2 &= 0 && \Big|\ -2 \\ 2x &= -2 && \Big|\ :2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Ainsi, en $x=-1$, $d(x)$ est minimum.
En $x=-1$, on a $y=\sqrt{(-1)^2+4\cdot(-1)+7} = \sqrt{1-4+7} = \sqrt{4} = 2$.
Par conséquent, les coordonnées du point où $d(x)$ est minimale sont

$$\underline{\underline{(-1\,;\,2)}}$$

c) La longueur de la route d'accès sera alors $d(x)$ avec $x=-1$.
Avec $x=-1$, on a $d(x)=\sqrt{2\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)+7} = \sqrt{2-4+7} = \sqrt{5}$
$\underline{\underline{\cong 2{,}236 \text{ km}}}$.

Problème 2

La valeur de l'action est $V(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 10$, où x représente le nombre d'années écoulées depuis janvier 2010.

a) La valeur de l'action au début 2010 est la valeur de $V(x)$ lorsque $x = 0$, c'est-à-dire $0^3 - 4 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 10 = \underline{\underline{10 \text{ dollars}}}$.

b) Il faut chercher entre janvier 2010 $(x=0)$ et janvier 2013 $(x=3)$ où $V(x)$ augmente (est croissante) et où $V(x)$ diminue (est décroissante).
On doit donc construire le tableau de variation (ou de croissance) de $V(x)$ entre $x=0$ et $x=3$.

On a : $V(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 10$,

$V'(x) = 3x^2 - 4 \cdot 2x + 3 \cdot 1 + 0 = 3x^2 - 8x + 3$,

$V'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 8x + 3 = 0$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 3$, $b = -8$ et $c = 3$; on a alors

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 36}}{6} = \frac{8 \pm \sqrt{28}}{6}$$

$$= \begin{cases} + & 2{,}215 \\ - & 0{,}451 \end{cases}$$

ainsi $x_1 = 0{,}451$ et $x_2 = 2{,}215$ (tous deux entre $x=0$ et $x=3$) sont les points à tangente horizontale de $V(x)$.

On peut alors construire le tableau de variation de $V(x)$ entre $x=0$ et $x=3$:

x	0		0,451		2,215		3
$V'(x)$		+	0	−	0	+	
$V(x)$		↗		↘		↗	

avec $x = 0$, $V'(x) = 3 > 0$

avec $x = 1$, $V'(x) = 3 - 8 + 3 < 0$

avec $x = 3$, $V'(x) = 3 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 + 3 = 27 - 24 + 3 > 0$

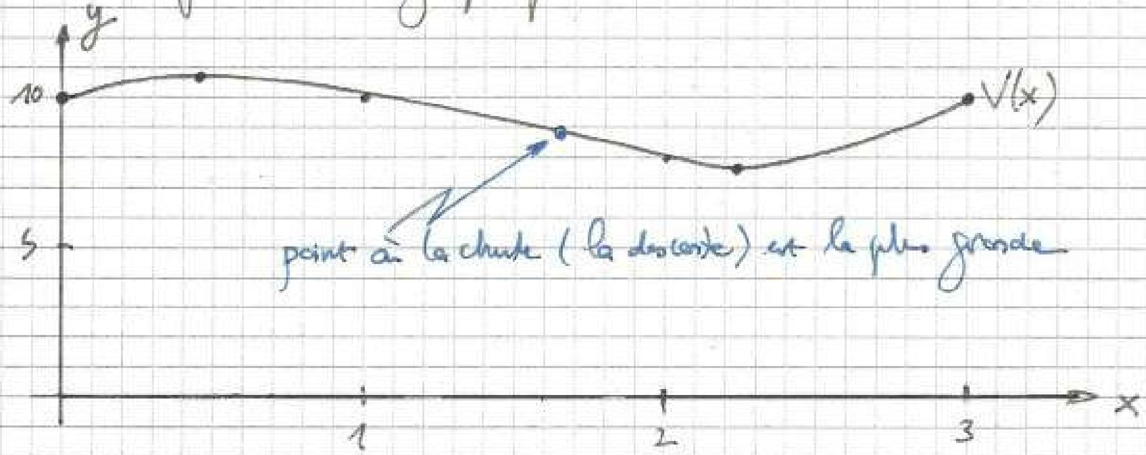
On en déduit que $V(x)$:

- a augmenté entre $x = 0$ (janvier 2010) et $x = 0{,}451$ (mi-mai 2010) ;
- a diminué entre $x = 0{,}451$ (mi-mai 2010) et $x = 2{,}215$ (début mars 2012) ;
- a augmenté entre $x = 2{,}215$ (mi-mars 2012) et $x = 3$ (janvier 2013).

c) D'après le tableau de variations de b), le maximum de $V(x)$ entre $x=0$ et $x=3$ est soit en $x=0{,}451$, soit en $x=3$.
Avec $x=3$, on a $V(x)= 3^3-4\cdot3^2+3\cdot3+10=10$.
Avec $x=0{,}451$, on a $V(x)=0{,}451^3-4\cdot0{,}451^2+3\cdot0{,}451+10=10{,}631$.
Ainsi, $V(x)$ a été maximum lorsque $\underline{\underline{x=0{,}451}}$ (mi-mai 2010) et, à ce moment-là, $\underline{\underline{V(x)=10{,}631}}$ dollars.

d) D'après le tableau de variations de b), le minimum de $V(x)$ entre $x=0$ et $x=3$ est soit en $x=0$, soit en $x=2{,}215$.
Avec $x=0$, on a $V(x)=0^3-4\cdot0^2+3\cdot0+10=10$.
Avec $x=2{,}215$, on a $V(x)=2{,}215^3-4\cdot2{,}215^2+3\cdot2{,}215+10=7{,}887$.
Ainsi, $V(x)$ a été minimum lorsque $\underline{\underline{x=2{,}215}}$ (mi-mars 2012) et, à ce moment-là, $\underline{\underline{V(x)=7{,}887}}$ dollars.

e) Schématiquement, le graphique de $V(x)$ est :



On doit chercher le point où la pente est la plus grande, mais en décroissance.
Cela signifie donc chercher le point où la pente sera la plus négative possible, autrement dit où elle sera minimum.
Il faut donc dériver la pente et annuler la dérivée.
Or, la pente est la dérivée de $V(x)$: pente $=V'(x)=3x^2-8x+3$.
La dérivée de la pente est alors $3\cdot2x-8=6x-8$.
Annuler cette dérivée donne $6x-8=0 \Rightarrow 6x=8 \Rightarrow x=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}=$
$=1{,}33$.
Par conséquent, en $\underline{x=1{,}33}$ (fin avril 2011), la valeur de l'action a chuté de la manière la plus rapide.

Problème 3

On a $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x^2-4x+3}$

Avant tout, cherchons le domaine de définition de f, autrement dit l'ensemble des x pour lesquels on peut calculer f.

Il faut que $x^2-4x+3 \neq 0$ (interdit de diviser par zéro).

Comme $x^2-4x+3=0$, équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=-4$ et $c=3$, nous donne $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2}$

$= \left\langle \begin{array}{l} \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{array} \right.$, on en déduit qu'il faut que $x \neq 1$ et $x \neq 3$ et que le domaine de définition de f est $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$.

a) Les intersections de f avec l'axe des x sont les x tels que $f(x)=0$.

On a $f(x) = 0 \Longrightarrow \dfrac{x^2+2x}{x^2-4x+3} = 0 \Longrightarrow x^2+2x=0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=2$ et $c=0$.

On obtient $x_{1;2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-0}}{2} = \dfrac{-2 \pm 2}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 0 \\ \frac{-4}{2} = -2. \end{array} \right.$

Ainsi, les intersections de f avec l'axe des x sont en $x=-2$ et $x=0$.
Ce sont donc les points $\underline{\underline{(-2;0) \text{ et } (0;0)}}$.

b) Comme $x=1$ et $x=3$ sont des exclus du domaine de définition de f (voir ci-dessus), les droites $\underline{\underline{x=1 \text{ et } x=3 \text{ sont des asymptotes verticales}}}$ du graphe de f.

En outre, comme le degré du numérateur de f est 2 avec 1 comme coefficient de x^2, et comme le degré du dénominateur de f est aussi 2 avec 1 comme coefficient de x^2, on a que $y = \dfrac{1}{1} \Longrightarrow \underline{\underline{y=1 \text{ est asymptote horizontale}}}$ du graphe de f.

c) On a $f(x) = \dfrac{u}{v}$ avec $u = x^2+2x$ et $v = x^2-4x+3$.
Comme $u' = 2x+2$ et $v' = 2x-4$, on a :

$$f'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{(2x+2)(x^2-4x+3)-(x^2+2x)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2} =$$

$$= \frac{2x^3-8x^2+6x+2x^2-8x+6-(2x^3-4x^2+4x^2-8x)}{(x^2-4x+3)^2} =$$

$$= \frac{2x^3-6x^2-2x+6-2x^3+8x}{(x^2-4x+3)^2} = \underline{\underline{\frac{-6x^2+6x+6}{(x^2-4x+3)^2}}}$$

Pour établir le tableau de variation de f, on commence par chercher les x tels que $f'(x)=0$.

$$f'(x)=0 \Longrightarrow \frac{-6x^2+6x+6}{(x^2-4x+3)^2}=0 \longrightarrow -6x^2+6x+6=0$$

$$\Longrightarrow x^2-x-1=0 \quad (\text{par division par } -6).$$

C'est une équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=-1$ et $c=-1$.

On a alors $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} = \begin{cases} 1{,}618 \\ -0{,}618 \end{cases}$

On peut alors établir le tableau de variation :

x		$-0{,}618$		1		$1{,}618$		3	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$
$f(x)$	↘		↗	‖	↗		↘	‖	↘

avec $x=-1$,
$f'(x) = \frac{-6\cdot(-1)^2+6\cdot(-1)+6}{((-1)^2-4\cdot(-1)+3)^2} < 0$

avec $x=0$,
$f'(x) = \frac{6}{3^2} > 0$

avec $x=1{,}5$,
$f'(x) > 0$

avec $x=2$,
$f'(x) < 0$

avec $x=4$,
$f'(x) < 0$

d) On utilise le tableau de variation de la partie c).

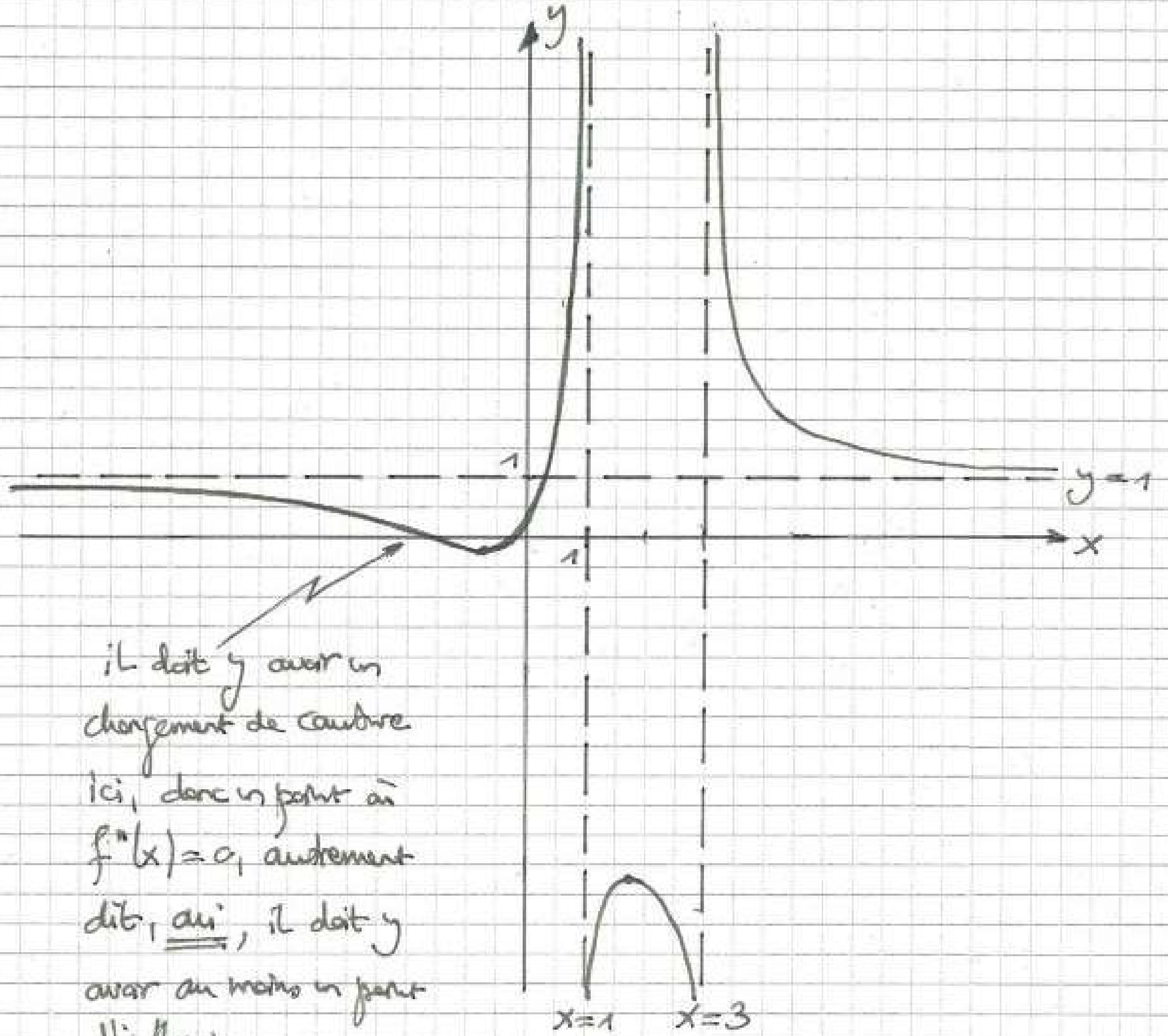
En $x=-0{,}618$, on a $f(x) = \frac{(-0{,}618)^2+2\cdot(-0{,}618)}{(-0{,}618)^2-4\cdot(-0{,}618)+3} = -0{,}145$.

Ainsi, le point $\underline{\underline{(-0{,}618\,;\,-0{,}145)\text{ est un minimum}}}$ (local)

En $x=1{,}618$, on a $f(x) = \frac{1{,}618^2+2\cdot1{,}618}{1{,}618^2-4\cdot1{,}618+3} = -6{,}854$.

Ainsi, le point $\underline{\underline{(1{,}618\,;\,-6{,}854)\text{ est un maximum}}}$ (local)

e) En utilisant les asymptotes verticales $x=1$ et $x=3$ et l'asymptote horizontale $y=1$, on peut schématiser le graphe de f :



il doit y avoir un changement de courbure ici, donc un point où $f''(x) = 0$, autrement dit, oui, il doit y avoir au moins un point d'inflexion.