Exercice 19

$d_1 : -x + 2y + 3 = 0$
$d_2 : 3x - 4y - 12 = 0$

a. Points d'abscisse nulle : $x = 0$

$\Rightarrow d_1 : 2y + 3 = 0 \Rightarrow 2y = -3 \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \Rightarrow \underline{\underline{(0; -\frac{3}{2})}}$.

$d_2 : -4y - 12 = 0 \Rightarrow 4y = -12 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow \underline{\underline{(0; -3)}}$.

Points d'ordonnée nulle : $y = 0$

$\Rightarrow d_1 : -x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \underline{\underline{(3; 0)}}$.

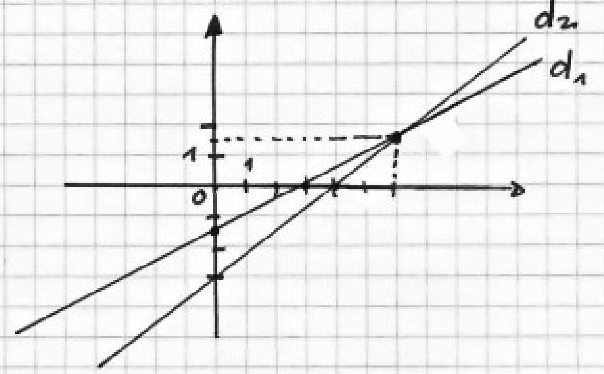
$d_2 : 3x - 12 = 0 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow \underline{\underline{(4; 0)}}$.

b. Vecteur directeur de d_1 : Deux points de d_1 sont $A_1(0; -\frac{3}{2})$ et $B_1(3; 0)$.
Un vecteur directeur est donc $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \end{pmatrix}$.
Or, on a $\begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \end{pmatrix} \underbrace{/\!/ \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\cdot 2} \underbrace{/\!/ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{:3}$. Un vecteur directeur de d_1 est donc $\underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}}$.

Vecteur directeur de d_2 : Deux points de d_2 sont $A_2(0; -3)$ et $B_2(4; 0)$.
Un vecteur directeur est donc $\overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{OB_2} - \overrightarrow{OB_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}}$.

c. Les vecteurs de d_1 et d_2 sont respectivement $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Les vecteurs ne sont pas parallèles puisqu'il n'existe pas de nombre $k \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Ainsi $\underline{\underline{d_1 \text{ et } d_2 \text{ sont sécantes}}}$.

d.



e. Calculer le point d'intersection de d_1 et d_2 revient à résoudre le système $\begin{cases} -x + 2y + 3 = 0 \\ 3x - 4y - 12 = 0. \end{cases}$

En multipliant 2 fois la première équation et en y ajoutant la deuxième, on obtient :

$x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$.

Avec $x = 6$ dans la première équation, on obtient $-6 + 2y + 3 = 0 \Rightarrow 2y - 3 = 0$
$\Rightarrow 2y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$

Le point d'intersection a donc pour coordonnée $\underline{\underline{\left(6\,;\,\frac{3}{2}\right)}}$.

f. Il y a plusieurs possibilités autant pour d_1 que pour d_2.

$\underline{d_1}$: d_1 passe par $A_1\left(0\,;-\frac{3}{2}\right)$ et a $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur;
des équations paramétriques sont donc:

Coordonnées de A_1

composantes du vecteur directeur

$$\begin{cases} x = \phantom{-\frac{3}{2}+\ } 2\lambda \\ y = -\frac{3}{2} + \lambda \end{cases}$$

$\underline{d_2}$: d_2 passe par $A_2(0\,;-3)$ et a $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur;
des équations paramétriques sont donc:

Coordonnées de A_2

composantes du vecteur directeur

$$\begin{cases} x = 4\lambda \\ y = -3 + 3\lambda \end{cases}$$

Exercice 20

a. Commençons par calculer les coordonnées de A', milieu de BC.

On a $B(2;7)$ et $C(3;-4)$.

Ainsi $A'\left(\frac{2+3}{2};\frac{7+(-4)}{2}\right)=\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$.

La médiane passe par $A(-5;2)$ et $A'\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Elle a donc comme vecteur directeur $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}5/2\\3/2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15/2\\-1/2\end{pmatrix}$.

Or, comme $\begin{pmatrix}15/2\\-1/2\end{pmatrix}\parallel\begin{pmatrix}15\\-1\end{pmatrix}$, on peut prendre $\begin{pmatrix}15\\-1\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur de m_A.

Des équations paramétriques de m_A sont ainsi : $\begin{cases}x=-5+15\lambda\\y=2-\lambda\end{cases}$

Coordonnées de A — Composante du vecteur directeur

Pour obtenir l'équation cartésienne de m_A, on va éliminer le paramètre λ dans ces équations paramétriques :

$$\begin{aligned} x=-5+15\lambda &\xrightarrow{\cdot 1} x=-5+15\lambda\\ y=2-\lambda &\xrightarrow{\cdot 15} 15y=30-15\lambda\\ &\qquad x+15y=25. \end{aligned}$$

L'équation cartésienne de m_A est donc $\underline{x+15y-25=0}$.

b. $D(10;1)$.

<u>Avec les équations paramétriques de m_A</u> : $\begin{cases}x=-5+15\lambda\\y=2-\lambda.\end{cases}$

Avec $x=10$, on a $10=-5+15\lambda \Rightarrow 15\lambda=15 \Rightarrow \lambda=1$.

Avec $\lambda=1$, on a $y=2-1=1$, ce qui est bien la 2^e coordonnée de D.

Ainsi <u>D appartient à m_A.</u>

<u>Avec l'équation cartésienne de m_A</u> : $x+15y-25=0$.

On remplace x par 10 et y par 1 dans le membre de gauche et on le calcule :

$10+15\cdot 1-25=10+15-25=0$, ce qui correspond au membre de droite.

Ainsi <u>D appartient à m_A.</u>

Exercice 21

N°	Equ. paramétriques	Equ. cartésienne	Un point	Un vecteur	Equ. $y=mx+h$
1	$\begin{cases} x=\lambda \\ y=-2+3\lambda \end{cases}$	$3x-y-2=0$	$(0;-2)$	$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$	$y=3x-2$
2	$\begin{cases} x=5\lambda \\ y=2-\lambda \end{cases}$	$x+5y-10=0$	$(0;2)$	$\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$	$y=-\frac{1}{5}x+2$
3	$\begin{cases} x=7+4\lambda \\ y=1-3\lambda \end{cases}$	$3x+4y-25=0$	$(7;1)$	$\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$	$y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$
4	$\begin{cases} x=4\lambda \\ y=\frac{3}{2}+\lambda \end{cases}$	$x-4y+6=0$	$(0;\frac{3}{2})$	$\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$	$y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$
5	$\begin{cases} x=-2\lambda \\ y=9+\lambda \end{cases}$	$x+2y-18=0$	$(0;9)$	$\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$	$y=-\frac{1}{2}x+9$
6	$\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=2+2\lambda \end{cases}$	$2x+y-4=0$	$(1;2)$	$\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$	$y=-2x+4$

1. $y=3x-2 \Rightarrow 3x-y-2=0$ équ. cartésienne.
   $x=0 \Rightarrow y=3\cdot 0-2=-2 \Rightarrow (0;-2)$ est un point.
   $y=0 \Rightarrow 3x-2=0 \Rightarrow 3x=2 \Rightarrow x=\frac{2}{3} \Rightarrow (\frac{2}{3};0)$ est un autre point.
   $\Rightarrow$ un vecteur est donné par $\begin{pmatrix}2/3\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3\\2\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.
   $\Rightarrow$ des équations paramétriques sont : $\begin{cases} x=\lambda \\ y=-2+3\lambda. \end{cases}$

2. $x+5y-10=0 \Rightarrow 5y=-x+10 \Rightarrow y=-\frac{1}{5}x+2$.
   $x=0 \Rightarrow y=-\frac{1}{5}\cdot 0+2=2 \Rightarrow (0;2)$ est un point.
   $y=0 \Rightarrow x-10=0 \Rightarrow x=10 \Rightarrow (10;0)$ est un autre point.
   $\Rightarrow$ un vecteur est donné par $\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-2\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$.
   $\Rightarrow$ des équations paramétriques sont : $\begin{cases} x=5\lambda \\ y=2-\lambda. \end{cases}$

3. Des équations paramétriques sont : $\begin{cases} x=7+4\lambda \\ y=1-3\lambda. \end{cases}$
   Eliminons λ : $\left.\begin{array}{l} x=7+4\lambda \xrightarrow{\cdot 3} 3x=21+12\lambda \\ y=1-3\lambda \xrightarrow{\cdot 4} 4y=4-12\lambda \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 3x+4y=25 \Rightarrow 3x+4y-25=0.$
   $3x+4y-25=0 \Rightarrow 4y=-3x+25 \Rightarrow y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$.

4. $x-4y+6=0 \Rightarrow 4y=x+6 \Rightarrow y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$.
   $x=0 \Rightarrow y=\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{3}{2}=\frac{3}{2} \Rightarrow (0;\frac{3}{2})$ est un point.

$y=0 \Rightarrow x+6=0 \Rightarrow x=-6 \Rightarrow (-6;0)$ est un autre point.

$\Rightarrow$ un vecteur est donné par $\begin{pmatrix}0\\3/2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3/2\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}12\\3\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$.

$\Rightarrow$ des équations paramétriques sont: $\begin{cases} x = 4\lambda \\ y = \frac{3}{2}+\lambda . \end{cases}$

5. Des équations paramétriques sont: $\begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 9+\lambda . \end{cases}$

Eliminons λ: $\left.\begin{matrix} x=-2\lambda \xrightarrow{\cdot 1} x=-2\lambda \\ y=9+\lambda \xrightarrow{\cdot 2} 2y=18+2\lambda \end{matrix}\right\} \xrightarrow{+} x+2y=18 \Rightarrow x+2y-18=0$.

$x+2y-18=0 \Rightarrow 2y=-x+18 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+9$.

6. $\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=2+2\lambda \end{cases} \Rightarrow$ un point est $(1;2)$ et un vecteur est $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

Eliminons λ: $\left.\begin{matrix} x=1-\lambda \xrightarrow{\cdot 2} 2x=2-2\lambda \\ y=2+2\lambda \xrightarrow{\cdot 1} y=2+2\lambda \end{matrix}\right\} \xrightarrow{+} 2x+y=4 \Rightarrow 2x+y-4=0$.

$2x+y-4=0 \Rightarrow y=-2x+4$.

Exercice 22

a. $d_1 : 3x-2y+6=0$ et $d_2 : x+8y-5=0$.

L'intersection est donnée par la solution du système $\begin{cases} 3x-2y+6=0 \\ x+8y-5=0 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} 3x-2y+6=0 \xrightarrow{\cdot 4} 12x-8y+24=0 \\ x+8y-5=0 \xrightarrow{\cdot 1} x+8y-5=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 13x+19=0 \Rightarrow 13x=-19 \Rightarrow x=-\frac{19}{13}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x-2y+6=0 \xrightarrow{\cdot 1} 3x-2y+6=0 \\ x+8y-5=0 \xrightarrow{\cdot(-3)} -3x-24y+15=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} -26y+21=0 \Rightarrow 26y=21 \Rightarrow y=\frac{21}{26}.$$

L'intersection de d_1 et d_2 est $\left(-\frac{19}{13} ; \frac{21}{26}\right)$.

b. $d_1 : x+8y-5=0$ et $d_2 : \begin{cases} x=7+3\lambda \\ y=-1+2\lambda. \end{cases}$

Par substitution des équations de d_2 dans celle de d_1, on obtient :

$7+3\lambda+8(-1+2\lambda)-5=0 \Rightarrow 7+3\lambda-8+16\lambda-5=0$

$\Rightarrow 19\lambda-6=0 \Rightarrow 19\lambda=6 \Rightarrow \lambda=\frac{6}{19}.$

Avec $\lambda=\frac{6}{19}$, on a $x=7+3\cdot\frac{6}{19}=\frac{151}{19}$ et $y=-1+2\cdot\frac{6}{19}=-\frac{7}{19}$.

L'intersection est donc $\left(\frac{151}{19} ; -\frac{7}{19}\right)$.

c. $d_1 : \begin{cases} x=7+3\lambda \\ y=-1+2\lambda \end{cases}$ et $d_2 : \begin{cases} x=-4-\mu \\ y=5+7\mu. \end{cases}$

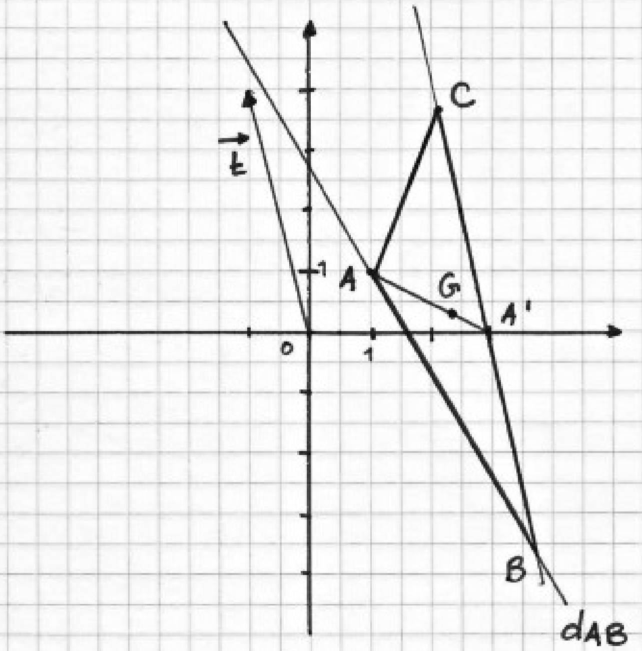
On doit résoudre le système : $\begin{cases} 7+3\lambda=-4-\mu \\ -1+2\lambda=5+7\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda+\mu=-11 \\ 2\lambda-7\mu=6 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} 3\lambda+\mu=-11 \xrightarrow{\cdot 7} 21\lambda+7\mu=-77 \\ 2\lambda-7\mu=6 \xrightarrow{\cdot 1} 2\lambda-7\mu=6 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 23\lambda=-71 \Rightarrow \lambda=-\frac{71}{23}.$$

Avec $\lambda=-\frac{71}{23}$, on a $x=7+3\cdot\left(-\frac{71}{23}\right)=-\frac{52}{23}$ et $y=-1+2\cdot\left(-\frac{71}{23}\right)=-\frac{165}{23}$.

L'intersection est donc $\left(-\frac{52}{23} ; -\frac{165}{23}\right)$.

Exercice 23



Le centre de gravité G du triangle ABC est donné par $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$.

En outre, si A' est le milieu de BC, alors $AG = \frac{2}{3}AA'$.

On a : $A(1;1)$ et $G\left(\frac{7}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Ainsi $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}7/3\\1/3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4/3\\-2/3\end{pmatrix}$ et

$AG = \|\overrightarrow{AG}\| = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9}+\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{20}{9}} = \frac{\sqrt{20}}{3} = \frac{2\sqrt5}{3}$.

Donc $AA' = AG : \frac{2}{3} = \frac{3}{2}AG = \frac{3}{2}\cdot\frac{2\sqrt5}{3} = \sqrt5$.

Un vecteur unitaire (de norme 1), parallèle à $\vec u = \frac{1}{\|\overrightarrow{AG}\|}\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2\sqrt5}\begin{pmatrix}4/3\\-2/3\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

Ainsi $\overrightarrow{AA'}$ sera le vecteur $\vec u$ multiplié par $\|\overrightarrow{AA'}\|$:

$\overrightarrow{AA'} = \|\overrightarrow{AA'}\|\cdot\vec u = \sqrt5\cdot\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

On a finalement $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$. Ainsi $A'(3;0)$.

Exprimons maintenant des équations paramétriques de $d_{A'B}$:

$d_{A'B}$ passe par $A'(3;0)$ et est parallèle à $\vec t = \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ (puisque, A' étant le milieu de BC, $\overrightarrow{A'B} /\!/ \overrightarrow{BC} /\!/ \vec t$) ; on a ainsi :

$$d_{A'B} : \begin{cases} x = 3-\lambda \\ y = 4\lambda. \end{cases}$$

B est l'intersection de d_{AB} et $d_{A'B}$. En substituant dans l'équation de d_{AB} les équations de $d_{A'B}$, on obtient : $5(3-\lambda)+3\cdot4\lambda-8=0 \Rightarrow 15-5\lambda+12\lambda-8=0$

$\Rightarrow 7\lambda+7=0 \Rightarrow 7\lambda=-7 \Rightarrow \lambda=-1$.

Avec $\lambda=-1$ dans $d_{A'B}$, on obtient : $x=3-(-1)=4$ et $y=4(-1)=-4$.

On en conclut donc que $\underline{\underline{B(4;-4)}}$

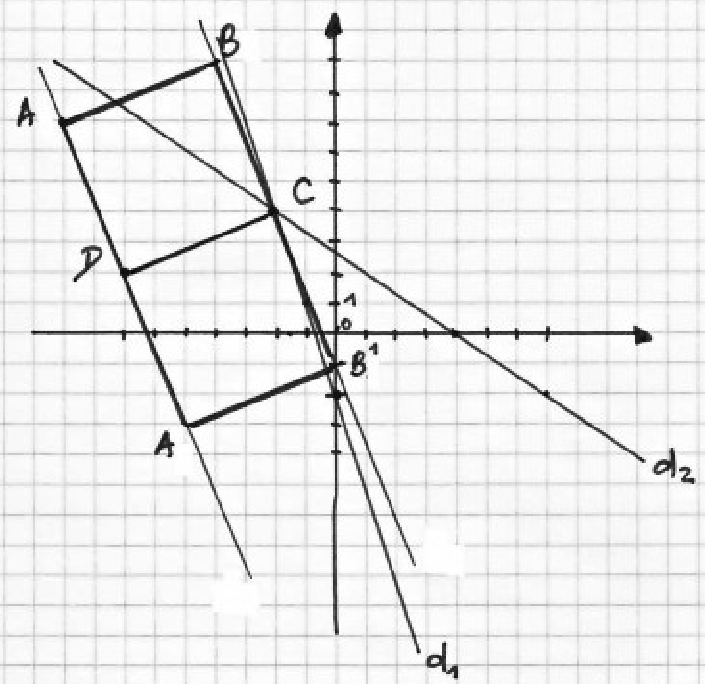
Posons $C(x;y)$. La relation $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$ s'écrit :

$\begin{pmatrix}7/3\\1/3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.

Ainsi, on a $\underline{\underline{C(2;4)}}$.

Exercice 24



On trouve 2 carrés possibles.

C est l'intersection de d_1 et d_2. En substituant dans d_1 les équations de d_2, on obtient :

$3(7+3\lambda)+(-2-2\lambda)+2=0 \Rightarrow 21+9\lambda-2-2\lambda+2=0 \Rightarrow 7\lambda+21=0 \Rightarrow 7\lambda=-21 \Rightarrow \lambda=-3.$

Avec $\lambda=-3$, on trouve : $x=7+3(-3)=7-9=-2$ et $y=-2-2(-3)=-2+6=4$.

Ainsi, on a $C(-2;4)$.

Calculons $\vec{DC}$: $\vec{DC}=\vec{OC}-\vec{OD}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-7\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$.

Comme $\vec{AD}$ et $\vec{BC}$ doivent être perpendiculaires à $\vec{DC}$ et de même norme, on va avoir $\vec{AD}=\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{BC}=\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ ou $\vec{AD}=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{BC}=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$

(un vecteur perpendiculaire à $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et de même longueur est $\begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$).

Comme $\vec{AD}=\vec{OD}-\vec{OA}$ et $\vec{BC}=\vec{OC}-\vec{OB}$, on a $\vec{OA}=\vec{OD}-\vec{AD}$ et $\vec{OB}=\vec{OC}-\vec{BC}$.

Avec $\vec{AD}=\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{BC}=\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$, on obtient $\vec{OA}=\begin{pmatrix}-7\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\7\end{pmatrix}\Rightarrow A(-9;7)$

et $\vec{OB}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\9\end{pmatrix}\Rightarrow B(-4;9)$.

Avec $\vec{AD}=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{BC}=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$, on obtient $\vec{OA}=\begin{pmatrix}-7\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}\Rightarrow A(-5;-3)$

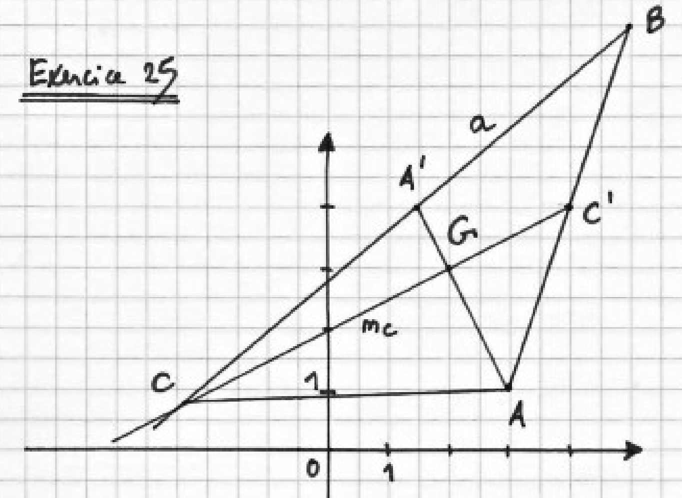
et $\vec{OB}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow B(0;-1)$.

On a donc les 2 solutions suivantes :

$A(-9;7)$, $B(-4;9)$, $C(-2;4)$, $D(-7;2)$ et

$A(-5;-3)$, $B(0;-1)$, $C(-2;4)$, $D(-7;2)$.

Exercice 25



Le centre de gravité G du triangle ABC est donné par $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.

En outre, si A' est le milieu de BC, alors
$$AG = \frac{2}{3}AA'.$$

a. <u>Marche à suivre:</u>

1) Grâce à $AG = \frac{2}{3}AA'$, i.e. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$, on a $\overrightarrow{AA'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$, i.e. $\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$, d'où $\overrightarrow{OA'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{OA}$.

2) Comme C' est le milieu de AB, on a $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC'}$, i.e. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{AC'}$, d'où $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{OA}$.

3) Comme A' est le milieu de BC, on a $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BA'}$, i.e. $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{BA'}$, d'où $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{OB}$.

<u>Calculs:</u>

1) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{OA'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{OA} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3/2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/2\\4\end{pmatrix}$.

2) $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{OC'} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{OA} = 2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} \Rightarrow$ <u>$B(5;7)$.</u>

3) $\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}3/2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7/2\\-3\end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{OB} = 2\begin{pmatrix}-7/2\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\-6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$ <u>$C(-2;1)$.</u>

b. m_c passe par $C'(4;4)$ et est parallèle à $\overrightarrow{C'G} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OC'} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

Des équations paramétriques de m_c sont donc: $\begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = 4 + \lambda. \end{cases}$

Eliminons λ: $\left.\begin{array}{l} x = 4+2\lambda \xrightarrow{\cdot 1} x = 4+2\lambda \\ y = 4+\lambda \xrightarrow{\cdot(-2)} -2y = -8-2\lambda \end{array}\right\} \xrightarrow{+} x - 2y = -4 \Rightarrow$ <u>$x - 2y + 4 = 0.$</u>

c. a passe par $B(5;7)$ et est parallèle à $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\-6\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}7\\6\end{pmatrix}$.

Des équations paramétriques de a sont donc: $\begin{cases} x = 5 + 7\lambda \\ y = 7 + 6\lambda. \end{cases}$

Eliminons λ: $\left.\begin{array}{l} x = 5+7\lambda \xrightarrow{\cdot 6} 6x = 30+42\lambda \\ y = 7+6\lambda \xrightarrow{\cdot(-7)} -7y = -49-42\lambda \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 6x - 7y = -19 \Rightarrow$ <u>$6x - 7y + 19 = 0.$</u>

d. Voir ci-dessous.

Exercice 26

$d_m : 4x - my + 2 = 0.$

a. On substitue x par 2 et y par -3:

$$4 \cdot 2 - m(-3) + 2 = 0 \Rightarrow 8 + 3m + 2 = 0 \Rightarrow 3m + 10 = 0 \Rightarrow 3m = -10 \Rightarrow \underline{\underline{m = -\frac{10}{3}}}.$$

b. Une droite est parallèle à l'axe Oy si elle est de la forme $x = c$ (il n'y a pas de y dans l'équation). Pour avoir $x = c$, on doit avoir ici $\underline{\underline{m = 0}}$ (d_m sera alors $4x + 2 = 0 \Rightarrow 4x = -2 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$).

c. Cherchons 2 points de d_m:

$y = 0 \Rightarrow 4x + 2 = 0 \Rightarrow 4x = -2 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}; 0\right);$

$x = 0 \Rightarrow -my + 2 = 0 \Rightarrow my = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{m} \Rightarrow \left(0; \frac{2}{m}\right).$

Un vecteur directeur de d_m est donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 2/m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2/m \end{pmatrix}$.

Pour que $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ soit aussi un vecteur directeur, il faut qu'il soit parallèle à $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 2/m \end{pmatrix}$ et, donc, qu'il existe un nombre k tel que $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1/2 \\ 2/m \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1/2 \\ 2/m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k/2 \\ 2k/m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{k}{2} \\ 3 = \frac{2k}{m} \end{cases} \Rightarrow k = 2 \Rightarrow 3 = \frac{2 \cdot 2}{m} \Rightarrow 3 = \frac{4}{m}$$

$$\Rightarrow 3m = 4 \Rightarrow \underline{\underline{m = \frac{4}{3}}}.$$

d. Calculons $\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

d_m doit être perpendiculaire à $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$. Elle doit donc être parallèle à $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ (pour trouver un vecteur perpendiculaire à un vecteur donné, on intervertit les composantes et on change un signe).

On a vu en c. qu'un vecteur directeur de d_m est $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 2/m \end{pmatrix}$.

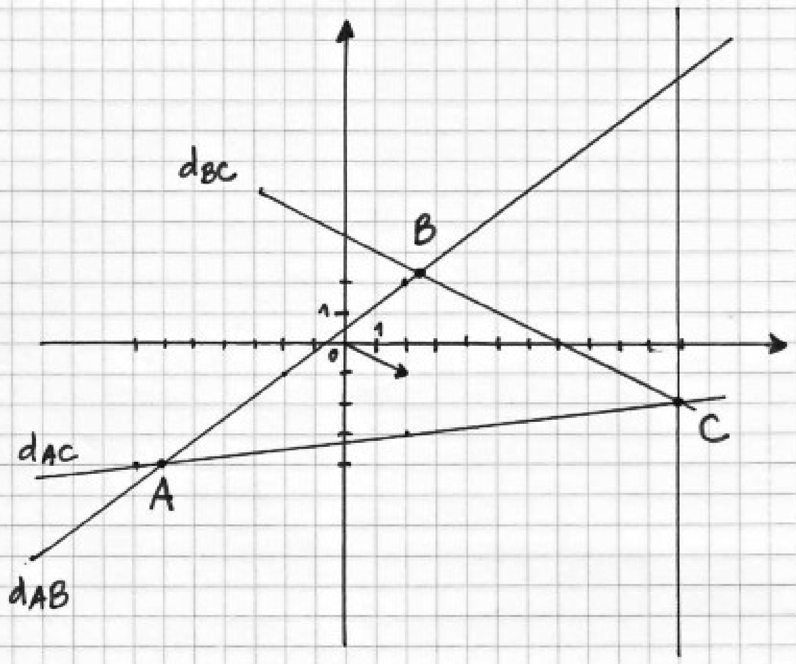
Les vecteurs $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 2/m \end{pmatrix}$ doivent donc être parallèle.

Autrement dit, il doit exister un nombre k tel que $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1/2 \\ 2/m \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1/2 \\ 2/m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k/2 \\ 2k/m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5 = \frac{k}{2} \Rightarrow k = 10 \\ 2 = \frac{2k}{m} \Rightarrow 2 = \frac{2 \cdot 10}{m} \Rightarrow 2 = \frac{20}{m} \Rightarrow 2m = 20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{m = 10.}}$$

Exercice 27



$d_{AB}: 3x-5y+1=0$

$x=3 \Rightarrow 9-5y+1=0 \Rightarrow 5y=10 \Rightarrow y=2$

$x=-2 \Rightarrow -6-5y+1=0 \Rightarrow 5y=-5 \Rightarrow y=-1$

$d_{AC}: x-9y-29=0$

$x=2 \Rightarrow 2-9y-29=0 \Rightarrow 9y=-27 \Rightarrow y=-3$

$x=-7 \Rightarrow -7-9y-29=0 \Rightarrow 9y=-36 \Rightarrow y=-4$

A est l'intersection de d_{AB} et d_{AC}. $A(x;y)$ est donc la solution du système $\begin{cases} 3x-5y+1=0 \\ x-9y-29=0 \end{cases}$.

$$\left.\begin{array}{l} 3x-5y+1=0 \xrightarrow{\cdot 9} 27x-45y+9=0 \\ x-9y-29=0 \xrightarrow{\cdot(-5)} -5x+45y+145=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 22x+154=0 \Rightarrow 22x=-154 \Rightarrow x=-7.$$

Avec $x=-7$, on a $-7-9y-29=0 \Rightarrow 9y=-36 \Rightarrow y=-4$. Ainsi $\underline{\underline{A(-7;-4)}}$.

Comme $C(11;y)$, par substitution dans d_{AC}, on obtient:

$11-9y-29=0 \Rightarrow 9y=-18 \Rightarrow y=-2$. Ainsi $\underline{\underline{C(11;-2)}}$.

Cherchons des équations paramétriques de d_{BC}. d_{BC} passe par $C(11;-2)$ et est parallèle à $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ses équations paramétriques sont donc: $\begin{cases} x = 11+2\lambda \\ y=-2-\lambda. \end{cases}$

B est l'intersection de $d_{AB}: 3x-5y+1=0$ et $d_{BC}: \begin{cases} x=11+2\lambda \\ y=-2-\lambda \end{cases}$.

Par substitution des équations de d_{BC} dans d_{AB}, on obtient:

$3(11+2\lambda)-5(-2-\lambda)+1=0 \Rightarrow 33+6\lambda+10+5\lambda+1=0 \Rightarrow 11\lambda+44=0 \Rightarrow 11\lambda=-44 \Rightarrow \lambda=-4.$

Avec $\lambda=-4$, on trouve $x=11+2(-4)=11-8=3$ et $y=-2-(-4)=-2+4=2$.

On en conclut que $\underline{\underline{B(3;2)}}$.

Exercice 28

a. Le produit scalaire des vecteurs $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ est donné par

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 7 = 10 - 21 = \underline{\underline{-11.}}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 5 \cdot (-4) + 7 \cdot 3 = -12 + 21 = \underline{\underline{9.}}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix} = 5 \cdot (-5) + 7 \cdot (-2) = -25 - 14 = \underline{\underline{-39.}}$$

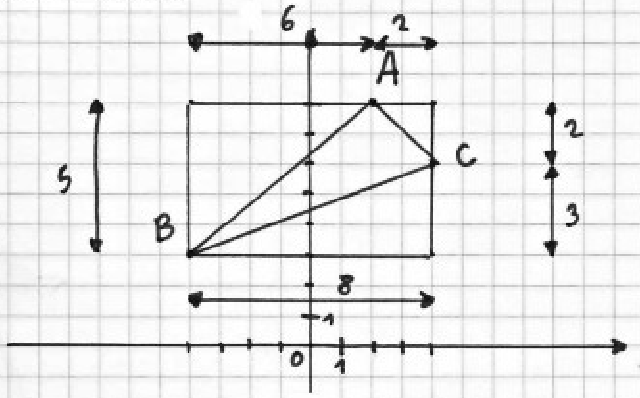
b. 2 vecteurs sont perpendiculaires si leur produit scalaire est nul.
On doit donc trouver $\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$ tel que $\vec{e} \cdot \vec{a} = 0$, i.e. $\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$, i.e.
$2e_1 - 3e_2 = 0$.
Si on prend $e_1 = 3$ et $e_2 = 2$, i.e $\vec{e} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, il est perpendiculaire à $\vec{a}$ et a en plus la même norme: $\|\vec{a}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$,
$\|\vec{e}\| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.
On peut donc prendre $\underline{\underline{\vec{e} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}}$ (on pourrait aussi prendre $\vec{e} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$).

c. On a $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Sa norme est $\|\vec{c}\| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$.
Un vecteur unité est un vecteur de norme 1.
En prenant $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{c}\|} \vec{c} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$, $\vec{u}$ est dans le même sens que $\vec{c}$
et $\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1$.
On peut donc prendre $\underline{\underline{\vec{u} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}}}$.

d. 2 vecteurs vont former un angle obtus si leur produit scalaire est négatif (si le produit scalaire était positif, les 2 vecteurs formeraient un angle aigu).
D'après a., on a $\vec{a} \cdot \vec{b} = -11 < 0$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 9 > 0$, $\vec{b} \cdot \vec{d} = -39 < 0$.
Ainsi $\underline{\underline{\vec{a} \text{ et } \vec{d} \text{ forment un angle obtus avec } \vec{b}.}}$

e. 2 vecteurs sont perpendiculaires si leur produit scalaire est nul.
On doit donc avoir $\vec{f} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -4x - 15 = 0$
$\Rightarrow 4x = -15 \Rightarrow \underline{\underline{x = -\frac{15}{4}.}}$

Exercice 29



On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Calculons les produits scalaires des vecteurs formant les côtés du triangle:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -6 \cdot 2 + (-5)(-2) = -12 + 10 = -2 < 0;$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = 6 \cdot 8 + 5 \cdot 3 = 48 + 15 = 63 > 0;$$

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = (-8)(-2) + (-3) \cdot 2 = 16 - 6 = 10 > 0.$$

Comme $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < 0$, cela signifie que l'angle en A est obtus. Le triangle ABC est donc obtus.

Le périmètre du triangle ABC est donné par:

$$\|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\| + \|\overrightarrow{CA}\| = \sqrt{(-6)^2 + (-5)^2} + \sqrt{8^2 + 3^2} + \sqrt{(-2)^2 + 2^2} =$$
$$= \sqrt{36 + 25} + \sqrt{64 + 9} + \sqrt{4 + 4} = \sqrt{61} + \sqrt{73} + \sqrt{8} \cong 19{,}18.$$

L'aire du triangle ABC est donnée par:

$$6 \cdot 8 - \frac{5 \cdot 6}{2} - \frac{2 \cdot 2}{2} - \frac{3 \cdot 8}{2} = 48 - 15 - 2 - 12 = 19.$$

L'angle entre 2 vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est donné par $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$.

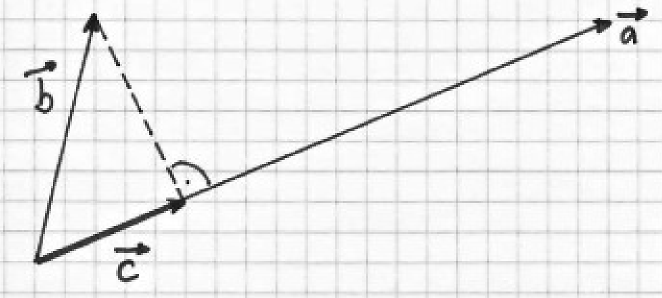
Angle $\widehat{ABC}$: $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\|} = \dfrac{63}{\sqrt{61} \cdot \sqrt{73}} \cong 0{,}944 \longrightarrow \widehat{ABC} \cong 19{,}25°$.

Angle $\widehat{BCA}$: $\cos(\widehat{BCA}) = \dfrac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{AC}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\|} = \dfrac{10}{\sqrt{8}\sqrt{73}} \cong 0{,}414 \longrightarrow \widehat{BCA} \cong 65{,}56°$.

Angle $\widehat{BAC}$: $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|} = \dfrac{-2}{\sqrt{61} \cdot \sqrt{8}} \cong -0{,}091 \longrightarrow \widehat{BAC} \cong 95{,}19°$

(on vérifie que $19{,}25° + 65{,}56° + 95{,}19° \cong 180°$, aux approximations des angles près).

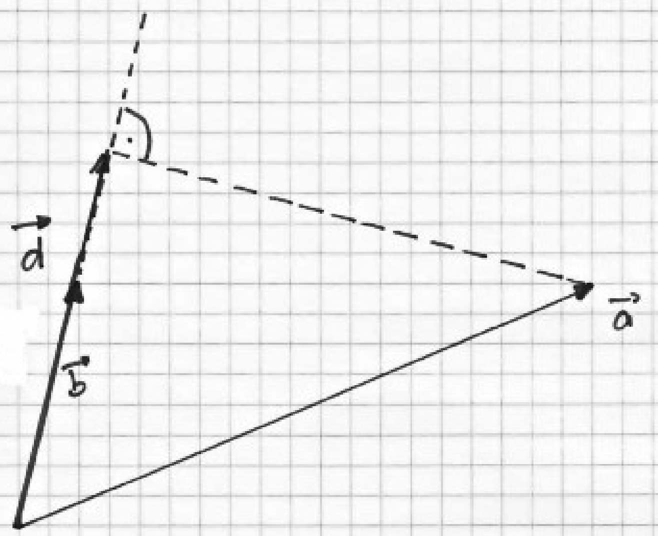
Exercice 30



Par définition du produit scalaire, on a

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

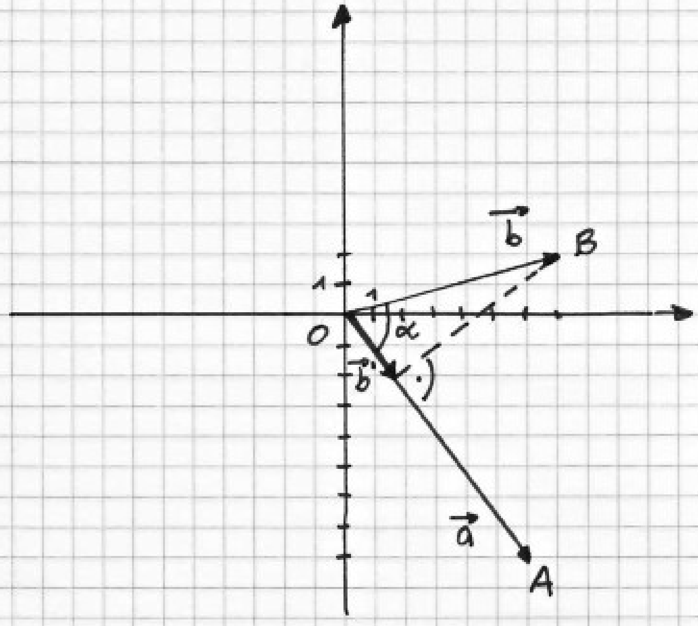
Le vecteur $\vec{c}$ répond donc à la question.



Similairement, on a $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{d} \cdot \vec{b}$.

Le vecteur $\vec{d}$ répond donc à la question.

Exercice 31



a. $\vec{b'}$ est la projection de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$.

b. Par définition, $\|\vec{b'}\| = \dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{\|\vec{a}\|}$.

On a $\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix}6\\-8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix} = 6\cdot 7+(-8)\cdot 2$

$= 42-16 = 26$ et

$\|\vec{a}\| = \sqrt{6^2+(-8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10.$

Ainsi $\|\vec{b'}\| = \dfrac{26}{10} = \underline{\underline{2,6.}}$

c. Par la trigonométrie, on sait que

aire OAB $= \frac{1}{2}\,\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\sin(\alpha)$.

On a $\|\vec{a}\| = 10$ (voir b.),

$\|\vec{b}\| = \sqrt{7^2+2^2} = \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$,

$\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|} = \dfrac{26}{10\cdot\sqrt{53}} \cong 0,357$

$\Longrightarrow \alpha \cong 69,08°$.

Ainsi aire OAB $= \frac{1}{2}\cdot 10\cdot\sqrt{53}\,\sin(69,08°) =$

$= \underline{\underline{34.}}$

d. $\vec{b'}$ est parallèle à $\vec{a}$ et sa norme est 2,6 (voir b.).

Un vecteur unitaire parallèle à $\vec{a}$ est $\dfrac{1}{\|\vec{a}\|}\cdot\vec{a} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix}6\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,6\\-0,8\end{pmatrix}$.

Ainsi on a $\vec{b'} = \|\vec{b'}\|\cdot\begin{pmatrix}0,6\\-0,8\end{pmatrix} = 2,6\cdot\begin{pmatrix}0,6\\-0,8\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}1,56\\-2,08\end{pmatrix}}}.$

Exercice 32

a. $\vec{a}$ et $\vec{b}$ seront perpendiculaires si $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix}-7\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\-3\end{pmatrix} = -7x+4(-3) = -7x-12.$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Rightarrow -7x-12=0 \Rightarrow 7x=-12 \Rightarrow \underline{\underline{x=-\frac{12}{7}}}.$

b. $\vec{c}$ et $\vec{d}$ seront perpendiculaires si $\vec{c}\cdot\vec{d}=0$.

$\vec{c}\cdot\vec{d} = \begin{pmatrix}x\\2x-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x+1\\-4\end{pmatrix} = x(x+1)+(2x-3)(-4) = x^2+x-8x+12 = x^2-7x+12.$

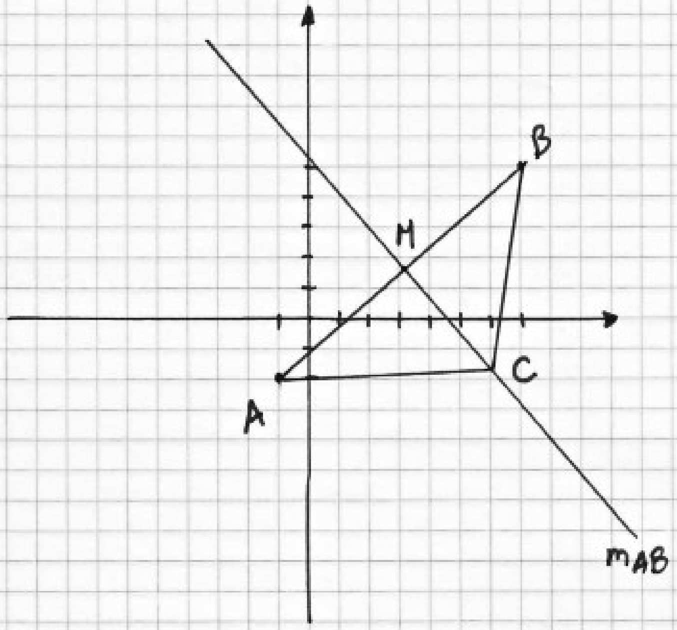
$\vec{c}\cdot\vec{d}=0 \Rightarrow x^2-7x+12=0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$, avec $a=1$, $b=-7$ et $c=12$.

On a $\Delta = b^2-4ac = (-7)^2-4.1.12 = 49-48 = 1$ et $\sqrt{\Delta}=\sqrt{1}=1$.

Les solutions sont $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+1}{2\cdot1} = \frac{8}{2} = 4$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-1}{2\cdot1} = \frac{6}{2} = 3.$

Les valeurs possibles de x sont donc $\underline{\underline{x=3 \text{ et } x=4}}.$

Exercice 33



M est le milieu de AB.

m_{AB} est la médiatrice de AB.

C sera sur la médiatrice de AB (ce qui assurera que CA = CB → ABC est isocèle).

On doit avoir $\dfrac{AB.MC}{2} = 75$

On a $A(-1;-2)$ et $B(7;4)$.

Ainsi $M\left(\frac{-1+7}{2};\frac{-2+4}{2}\right) = (3;1)$.

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}$.

Le vecteur $\begin{pmatrix}6\\-8\end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ est perpendiculaire à AB et est donc parallèle à m_{AB} qui passe par M.

Des équations paramétriques de m_{AB} sont ainsi : $\begin{cases} x = 3+3\lambda \\ y = 1-4\lambda. \end{cases}$

Le point $C(x;y) \in m_{AB}$ satisfait donc $x = 3+3\lambda$ et $y = 1-4\lambda$.

De plus : $AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{8^2+6^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$;

$\vec{MC} = \vec{OC} - \vec{OM} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-3\\y-1\end{pmatrix}$;

$MC = \|\vec{MC}\| = \sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$;

$\dfrac{AB.MC}{2} = \dfrac{10\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}}{2} = 5\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$.

On doit donc avoir $5\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2} = 75 \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2} = 15$

$\Rightarrow (x-3)^2+(y-1)^2 = 225$.

Comme $x = 3+3\lambda$ et $y = 1-4\lambda$, on obtient :

$(3+3\lambda-3)^2+(1-4\lambda-1)^2 = 225 \Rightarrow (3\lambda)^2+(-4\lambda)^2 = 225$

$\Rightarrow 9\lambda^2+16\lambda^2 = 225 \Rightarrow 25\lambda^2 = 225 \Rightarrow \lambda^2 = 9 \Rightarrow \lambda = \pm 3$.

Si $\lambda = 3$, on a $x = 3+3\cdot 3 = 3+9 = 12$ et $y = 1-4\cdot 3 = 1-12 = -11$.

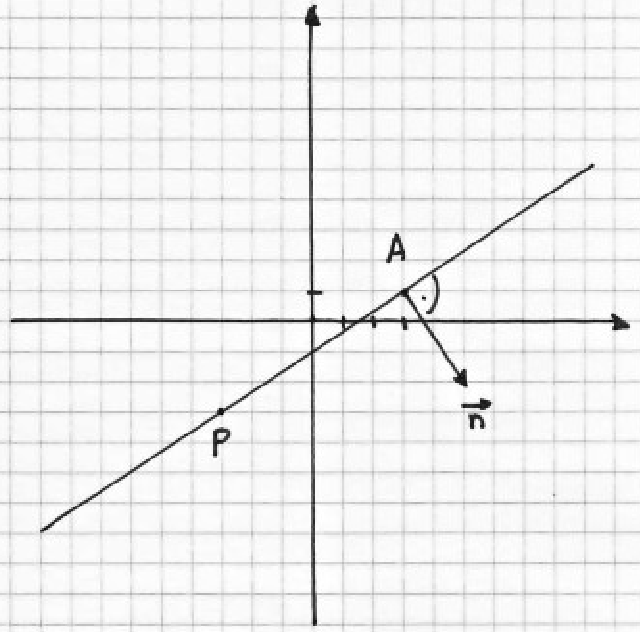
Si $\lambda = -3$, on a $x = 3+3(-3) = 3-9 = -6$ et $y = 1-4\cdot(-3) = 1+12 = 13$.

Les 2 solutions pour les coordonnées de C sont donc :

$\underline{C(12;-11) \text{ et } C(-6;13)}$.

Exercice 34

a.



On doit avoir $\overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$, i.e. $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$.

Avec $P(x;y)$, on a $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} =$

$= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} =$

$= (x-3) \cdot 2 + (y-1) \cdot (-3) =$

$= 2x - 6 - 3y + 3 = 2x - 3y - 3$.

Donc $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{2x - 3y - 3 = 0.}}$

b. On doit avoir $\overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$, i.e. $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$.

Avec $P(x;y)$, on a $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+5 \\ y-2 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} x+5 \\ y-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} = -4(x+5) - 1(y-2) = -4x - 20 - y + 2 = -4x - y - 18$.

Donc $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{-4x - y - 18 = 0.}}$

Exercice 35

On sait que $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, alors une équation cartésienne d'une droite perpendiculaire à $\vec{n}$ est de la forme $ax+by+c=0$.

a. La droite a passe par $A(-2;3)$ et est parallèle à $\vec{d}=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$.
Un vecteur $\vec{n}$ perpendiculaire à $\vec{d}$ (et donc à a) est de la forme $\vec{n}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$.
L'équation cartésienne de a est ainsi $5x+2y+c=0$.
En utilisant le point $A(-2;3)$, on a $5\cdot(-2)+2\cdot3+c=0 \Rightarrow -10+6+c=0$
$\Rightarrow -4+c=0 \Rightarrow c=4$.
L'équation cartésienne de a est donc $\underline{\underline{5x+2y+4=0}}$.

b. La droite b passe par $B(3;-1)$ et est perpendiculaire à $\vec{n}=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$.
L'équation cartésienne de b est ainsi $-4x+3y+c=0$.
En utilisant le point $B(3;-1)$, on a $-4\cdot3+3\cdot(-1)+c=0 \Rightarrow -12-3+c=0 \Rightarrow -15+c=0$
$\Rightarrow c=15$.
L'équation cartésienne de b est donc $\underline{\underline{-4x+3y+15=0}}$.

c. La droite c passe par $C(-6;0)$ et est perpendiculaire à a. Elle est donc perpendiculaire à $\vec{d}=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ (voir a.).
L'équation cartésienne de c est ainsi $-2x+5y+c=0$.
En utilisant $C(-6;0)$, on a $-2\cdot(-6)+5\cdot0+c=0 \Rightarrow 12+c=0 \Rightarrow c=-12$.
L'équation cartésienne de c est donc $\underline{\underline{-2x+5y-12=0}}$.

d. La droite d passe par $D(5;2)$ et est parallèle à b. Elle est donc perpendiculaire à $\vec{n}=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ (voir b.).
L'équation cartésienne de d est ainsi $-4x+3y+c=0$.
En utilisant $D(5;2)$, on a $-4\cdot5+3\cdot2+c=0 \Rightarrow -20+6+c=0 \Rightarrow -14+c=0 \Rightarrow c=14$.
L'équation cartésienne de d est donc $\underline{\underline{-4x+3y+14=0}}$.

Exercice 36

a. On sait que le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal (= perpendiculaire) à la droite $ax+by+c=0$.

Avec $3x-4y-12=0$, on a que $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal et, donc, que $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur.

Posons $x=0$; on a alors : $-4y-12=0 \Rightarrow 4y=-12 \Rightarrow y=-3$.

Posons $y=0$; on a alors : $3x-12=0 \Rightarrow 3x=12 \Rightarrow x=4$.

Deux points de la droite sont donc $(0;-3)$ et $(4;0)$.

b. Avec $5x+3y+9=0$, on a que $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal.

Posons $x=0$; on a alors : $3y+9=0 \Rightarrow 3y=-9 \Rightarrow y=-3$.

Ainsi $(0;-3)$ est un point de la droite.

c. Calculons $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur et $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal.

Exercice 37

$d : x+4y-5=0$, $A(-1;4)$ et $B(5;2)$.

a. $C(x;y) \in d \Rightarrow x+4y-5=0$;

ABC est rectangle $\Rightarrow$ soit $AB \perp BC$, soit $AB \perp AC$, soit $BC \perp AC$.

$AB \perp BC \Leftrightarrow \vec{AB}\cdot\vec{BC}=0$: $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$;

$\vec{BC}=\vec{OC}-\vec{OB}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-5\\y-2\end{pmatrix}$;

$\vec{AB}\cdot\vec{BC}=\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-5\\y-2\end{pmatrix}=6(x-5)-2(y-2)=6x-30-2y+4=$

$=6x-2y-26$;

$\vec{AB}\cdot\vec{BC}=0 \Rightarrow 6x-2y-26=0$;

Le point $C(x;y)$ doit donc satisfaire à $x+4y-5=0$ et $6x-2y-26=0$;

$$\left.\begin{matrix} x+4y-5=0 \xrightarrow{\cdot 1} x+4y-5=0 \\ 6x-2y-26=0 \xrightarrow{\cdot 2} 12x-4y-52=0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{+} 13x-57=0 \Rightarrow 13x=57 \Rightarrow x=\frac{57}{13};$$

$$\left.\begin{matrix} x+4y-5=0 \xrightarrow{\cdot 6} 6x+24y-30=0 \\ 6x-2y-26=0 \xrightarrow{\cdot(-1)} -6x+2y+26=0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{+} 26y-4=0 \Rightarrow 26y=4 \Rightarrow y=\frac{2}{13};$$

$AB \perp AC \Leftrightarrow \vec{AB}\cdot\vec{AC}=0$: $\vec{AB}=\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$; $\vec{AC}=\vec{OC}-\vec{OA}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+1\\y-4\end{pmatrix}$;

$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x+1\\y-4\end{pmatrix}=6(x+1)-2(y-4)=6x+6-2y+8=$

$=6x-2y+14$;

$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=0 \Rightarrow 6x-2y+14=0$;

Le point $C(x;y)$ doit donc satisfaire à $x+4y-5=0$ et $6x-2y+14=0$;

$$\left.\begin{matrix} x+4y-5=0 \xrightarrow{\cdot 1} x+4y-5=0 \\ 6x-2y+14=0 \xrightarrow{\cdot 2} 12x-4y+28=0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{+} 13x+23=0 \Rightarrow 13x=-23 \Rightarrow x=-\frac{23}{13};$$

$$\left.\begin{matrix} x+4y-5=0 \xrightarrow{\cdot 6} 6x+24y-30=0 \\ 6x-2y+14=0 \xrightarrow{\cdot(-1)} -6x+2y-14=0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{+} 26y-44=0 \Rightarrow 26y=44 \Rightarrow y=\frac{22}{13};$$

$BC \perp AC \Leftrightarrow \vec{BC}\cdot\vec{AC}=0$: $\vec{BC}=\begin{pmatrix}x-5\\y-2\end{pmatrix}$; $\vec{AC}=\begin{pmatrix}x+1\\y-4\end{pmatrix}$;

$\vec{BC}\cdot\vec{AC}=\begin{pmatrix}x-5\\y-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x+1\\y-4\end{pmatrix}=(x-5)(x+1)+(y-2)(y-4)=$

$=x^2+x-5x-5+y^2-4y-2y+8=$

$=x^2-4x+y^2-6y+3$;

$\vec{BC}\cdot\vec{AC}=0 \Rightarrow x^2-4x+y^2-6y+3=0$;

Le point $C(x;y)$ doit donc satisfaire à $x+4y-5=0$ et $x^2-4x+y^2-6y+3=0$;

$x+4y-5=0 \Rightarrow x=-4y+5$

$\Rightarrow (-4y+5)^2-4(-4y+5)+y^2-6y+3=0$

$\Rightarrow 16y^2-40y+25+16y-20+y^2-6y+3=0$

$\Rightarrow 17y^2-30y+8=0$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme

$ax^2+bx+c=0$ avec $a=17$, $b=-30$ et $c=8$;

on a $\Delta=b^2-4ac=(-30)^2-4\cdot17\cdot8=900-544=356$ et $\sqrt{\Delta}=\sqrt{356}=2\sqrt{89}$;

Les solutions sont donc $y_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{30+2\sqrt{89}}{2.17}=\dfrac{15+\sqrt{89}}{17}$ et

$y_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{30-2\sqrt{89}}{2.17}=\dfrac{15-\sqrt{89}}{17}$;

avec $y_1=\dfrac{15+\sqrt{89}}{17}$, on a $x_1=-4y_1+5=-4\,\dfrac{15+\sqrt{89}}{17}+5=\dfrac{-60-4\sqrt{89}}{17}+\dfrac{85}{17}=\dfrac{25-4\sqrt{89}}{17}$;

avec $y_2=\dfrac{15-\sqrt{89}}{17}$, on a $x_2=-4y_2+5=-4\,\dfrac{15-\sqrt{89}}{17}+5=\dfrac{-60+4\sqrt{89}}{17}+\dfrac{85}{17}=\dfrac{25+4\sqrt{89}}{17}$.

On obtient donc 4 points C possible :

$$\left(\frac{57}{13};\frac{2}{13}\right),\ \left(-\frac{23}{13};\frac{22}{13}\right),\ \left(\frac{25-4\sqrt{89}}{17};\frac{15+\sqrt{89}}{17}\right)\text{ et }\left(\frac{25+4\sqrt{89}}{17};\frac{15-\sqrt{89}}{17}\right).$$

b. $C(x;y)\in d \Rightarrow x+4y-5=0$;

ABC isocèle en C $\Rightarrow AC=BC$: $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}x+1\\y-4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}x-5\\y-2\end{pmatrix}$ (voir a.) ;

$AC=\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{(x+1)^2+(y-4)^2}$;

$BC=\|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2}$;

$$\begin{aligned}AC=BC &\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2}\\ &\Rightarrow (x+1)^2+(y-4)^2=(x-5)^2+(y-2)^2\\ &\Rightarrow x^2+2x+1+y^2-8y+16=x^2-10x+25+y^2-4y+4\\ &\Rightarrow x^2+y^2+2x-8y+17=x^2+y^2-10x-4y+29\\ &\Rightarrow 2x-8y+17=-10x-4y+29\\ &\Rightarrow 12x-4y-12=0 \Rightarrow 3x-y-3=0\ ;\end{aligned}$$

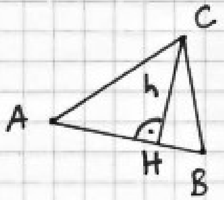
Le point $C(x;y)$ doit donc satisfaire : $x+4y-5=0$ et $3x-y-3=0$;

$$\left.\begin{aligned}x+4y-5=0 &\xrightarrow{\cdot 1} x+4y-5=0\\ 3x-y-3=0 &\xrightarrow{\cdot 4} 12x-4y-12=0\end{aligned}\right\}\xrightarrow{+} 13x-17=0 \Rightarrow 13x=17 \Rightarrow x=\frac{17}{13}\ ;$$

$$\left.\begin{aligned}x+4y-5=0 &\xrightarrow{\cdot 3} 3x+12y-15=0\\ 3x-y-3=0 &\xrightarrow{\cdot(-1)} -3x+y+3=0\end{aligned}\right\}\xrightarrow{+} 13y-12=0 \Rightarrow 13y=12 \Rightarrow y=\frac{12}{13}.$$

Le seul point C est donc $\left(\frac{17}{13};\frac{12}{13}\right)$.

c. $C(x;y)\in d \Rightarrow x+4y-5=0$;



aire de ABC $=6 \Rightarrow \dfrac{AB.h}{2}=6 \Rightarrow AB.h=12$

$\Rightarrow h=\dfrac{12}{AB}$.

Or $h=\text{dist}(C;d_{AB})$. On va donc trouver C avec la relation $\text{dist}(C;d_{AB})=\dfrac{12}{AB}$.

On a $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$ (voir a.) ;

ainsi $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{6^2+(-2)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$.

On obtient ainsi $\text{dist}(C;d_{AB})=\dfrac{12}{AB}$.

Cherchons l'équation cartésienne de d_{AB}.

On a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, qui est un vecteur normal à d_{AB}.

d_{AB} s'écrit donc $x+3y+c=0$.

Avec $A(-1;4)$, on obtient $-1+3\cdot4+c=0 \Rightarrow -1+12+c=0 \Rightarrow 11+c=0 \Rightarrow c=-11$.

Ainsi d_{AB} : $x+3y-11=0$.

On peut alors calculer la distance de $C(x;y)$ à d_{AB} :

$$\text{dist}(C; d_{AB}) = \frac{|x+3y-11|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{|x+3y-11|}{\sqrt{10}}.$$

On obtient ainsi de $\text{dist}(C; d_{AB}) = \frac{12}{AB}$:

$$\frac{|x+3y-11|}{\sqrt{10}} = \frac{12}{2\sqrt{10}} \Rightarrow |x+3y-11| = \frac{12}{2} \Rightarrow |x+3y-11| = 6.$$

On a alors 2 possibilités : ① $x+3y-11=6 \Rightarrow x+3y-17=0$;

② $x+3y-11=-6 \Rightarrow x+3y-5=0$.

① C doit satisfaire : $x+4y-5=0$ et $x+3y-17=0$;

$$\left.\begin{array}{l} x+4y-5=0 \xrightarrow{\cdot 3} 3x+12y-15=0 \\ x+3y-17=0 \xrightarrow{\cdot(-4)} -4x-12y+68=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} -x+53=0 \Rightarrow x=53 ;$$

$$\left.\begin{array}{l} x+4y-5=0 \xrightarrow{\cdot 1} x+4y-5=0 \\ x+3y-17=0 \xrightarrow{\cdot(-1)} -x-3y+17=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} y+12=0 \Rightarrow y=-12.$$

② C doit satisfaire : $x+4y-5=0$ et $x+3y-5=0$;

$$\left.\begin{array}{l} x+4y-5=0 \xrightarrow{\cdot 3} 3x+12y-15=0 \\ x+3y-5=0 \xrightarrow{\cdot(-4)} -4x-12y+20=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} -x+5=0 \Rightarrow x=-5 ;$$

$$\left.\begin{array}{l} x+4y-5=0 \xrightarrow{\cdot 1} x+4y-5=0 \\ x+3y-5=0 \xrightarrow{\cdot(-1)} -x-3y+5=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} y=0.$$

Les 2 possibilités pour C sont donc $\underline{\underline{C(53;-12) \text{ et } C(-5;0)}}$.

Exercice 38

a: $3x - 4y - 17 = 0$

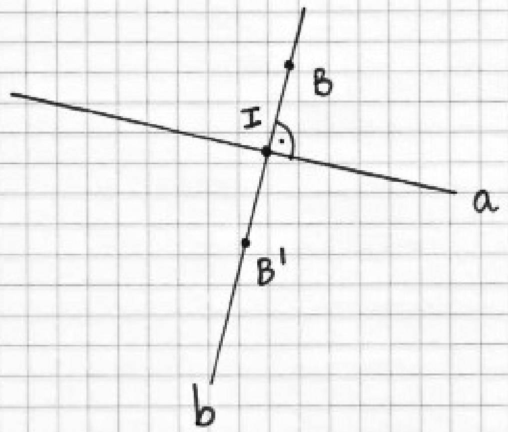
a. Un vecteur normal à a est $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Ce vecteur sera parallèle à b.
Un vecteur normal à b est ainsi $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
L'équation cartésienne de b s'écrit donc $4x + 3y + c = 0$.
Avec $B(-3;6)$, on obtient: $4(-3) + 3\cdot 6 + c = 0 \Rightarrow -12 + 18 + c = 0 \Rightarrow 6 + c = 0 \Rightarrow c = -6$.
L'équation cartésienne de b est donc $\underline{\underline{4x + 3y - 6 = 0}}$.

b. L'intersection de a et b est le point $(x;y)$ satisfaisant à $3x - 4y - 17 = 0$ et $4x + 3y - 6 = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 4y - 17 = 0 \xrightarrow{\cdot 3} 9x - 12y - 51 = 0 \\ 4x + 3y - 6 = 0 \xrightarrow{\cdot 4} 16x + 12y - 24 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 25x - 75 = 0 \Rightarrow 25x = 75 \Rightarrow x = 3.$$

Avec $x = 3$, on a $3\cdot 3 - 4y - 17 = 0 \Rightarrow 9 - 4y - 17 = 0 \Rightarrow -4y - 8 = 0 \Rightarrow 4y = -8 \Rightarrow y = -2$.
L'intersection de a et b est donc le point $\underline{\underline{(3;-2)}}$.

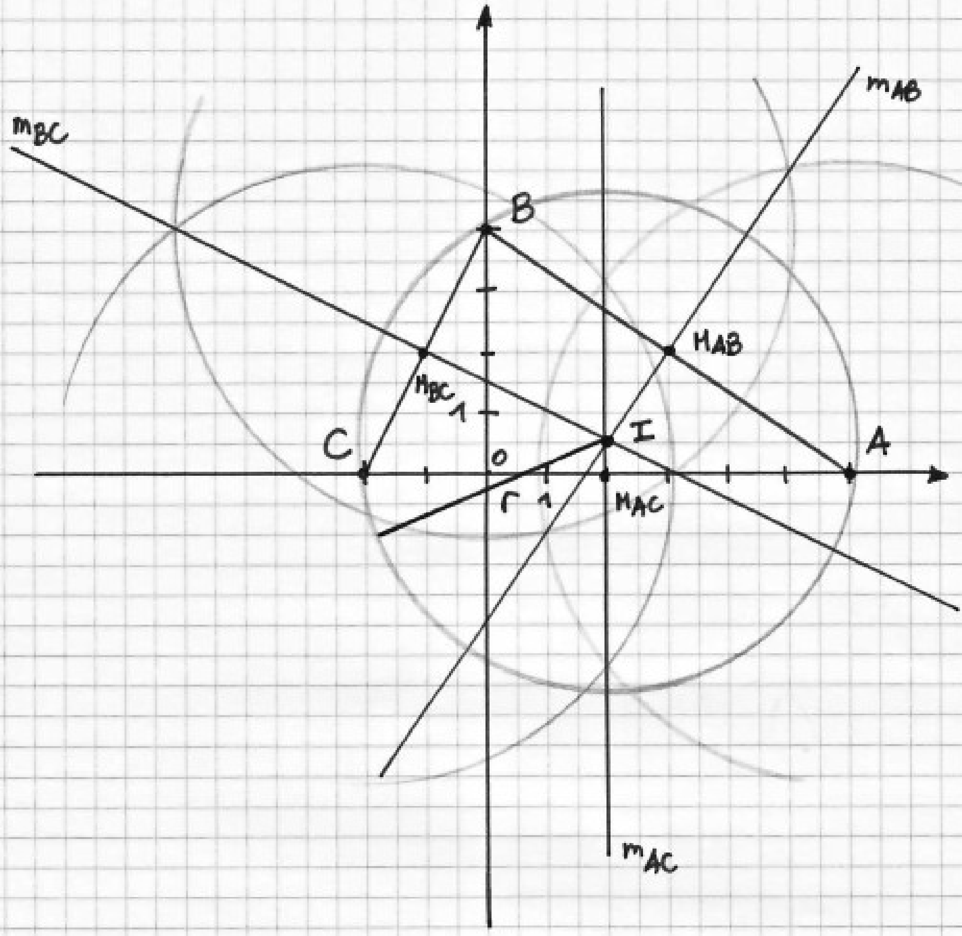
c.



D'après b., on a $I(3-2)$.
On a $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{BI}$ (puisque I doit être le milieu de BB').
Ainsi $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB} + 2(\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OI} - 2\overrightarrow{OB} =$
$= 2\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OB} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, on a $\underline{\underline{B'(9;-10)}}$.

Exercice 39



a. Les médiatrices passent par les milieux des segments et sont perpendiculaires à ceux-ci.

M_{AB} : $A(6;0),\ B(0;4) \Rightarrow M_{AB}\left(\frac{6+0}{2};\frac{0+4}{2}\right)=(3;2)$.

M_{BC} : $B(0;4),\ C(-2;0) \Rightarrow M_{BC}\left(\frac{0+(-2)}{2};\frac{4+0}{2}\right)=(-1;2)$.

M_{AC} : $A(6;0),\ C(-2;0) \Rightarrow M_{AC}\left(\frac{6+(-2)}{2};\frac{0+0}{2}\right)=(2;0)$.

$\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$;

$\vec{BC}=\vec{OC}-\vec{OB}=\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$;

$\vec{AC}=\vec{OC}-\vec{OA}=\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\0\end{pmatrix}$;

m_{AB} passe par $M_{AB}(3;2)$ et est perpendiculaire à $\vec{AB}=\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$;

m_{AB} s'écrit donc $3x-2y+c=0$;

avec $M_{AB}(3;2)$, on obtient $3\cdot3-2\cdot2+c=0 \Rightarrow 9-4+c=0 \Rightarrow 5+c=0 \Rightarrow c=-5$;

ainsi $\underline{m_{AB}: 3x-2y-5=0.}$

m_{BC} passe par $M_{BC}(-1;2)$ et est perpendiculaire à $\vec{BC}=\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$;

m_{BC} s'écrit donc $x+2y+c=0$;

avec $M_{BC}(-1;2)$, on obtient $-1+2\cdot2+c=0 \Rightarrow -1+4+c=0 \Rightarrow 3+c=0 \Rightarrow c=-3$;

ainsi $\underline{m_{BC}: x+2y-3=0.}$

m_{AC} passe par $M_{AC}(2;0)$ et est perpendiculaire à $\vec{AC}=\begin{pmatrix}-8\\0\end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$;

m_{AC} s'écrit donc $x+c=0$;

avec $M_{AC}(2;0)$, on obtient $2+c=0 \Rightarrow c=-2$;

ainsi m_{AC}: $\underline{\underline{x-2=0.}}$

b. On doit chercher le point d'intersection $I(x;y)$ appartenant à m_{AB}: $3x-2y-5=0$, m_{BC}: $x+2y-3=0$ et m_{AC}: $x-2=0$.

De $x-2=0$, on tire $x=2$.

Avec $x=2$ dans m_{AB}, on obtient $3\cdot 2-2y-5=0 \Rightarrow 6-2y-5=0 \Rightarrow 1-2y=0$

$\Rightarrow 2y=1 \Rightarrow y=\frac{1}{2}$.

On vérifie que $x=2$ et $y=\frac{1}{2}$ satisfont à l'équation de m_{BC}:

$x+2y-3 = 2+2\cdot\frac{1}{2}-3 = 2+1-3 = 0 \rightarrow$ OK.

Le point d'intersection de m_{AB}, m_{BC} et m_{AC} est $\underline{\underline{I(2;\frac{1}{2})}}$.

c. Le rayon du cercle circonscrit au triangle est $r = \|\overrightarrow{IA}\| = \|\overrightarrow{IB}\| = \|\overrightarrow{IC}\|$.

On a: $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OI} = \begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-1/2\end{pmatrix}$; $\|\overrightarrow{IA}\| = \sqrt{4^2+(-\frac{1}{2})^2} = \sqrt{16+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2}$;

$\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OI} = \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-7/2\end{pmatrix}$; $\|\overrightarrow{IB}\| = \sqrt{(-2)^2+(-\frac{7}{2})^2} = \sqrt{4+\frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2}$;

$\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OI} = \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-1/2\end{pmatrix}$; $\|\overrightarrow{IC}\| = \sqrt{(-4)^2+(-\frac{1}{2})^2} = \sqrt{16+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2}$.

Le rayon du cercle circonscrit est donc $\underline{\underline{r=\frac{\sqrt{65}}{2}}}$.

d. Voir ci-dessous.

Exercice 40

La distance du point $P(x_0;y_0)$ à la droite $d: ax+by+c=0$ est donnée par :

$$dist(P;d) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Ainsi : $dist(O;d) = \frac{|4.0-3.0-24|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|-24|}{\sqrt{16+9}} = \frac{24}{\sqrt{25}} = \underline{\underline{\frac{24}{5}}}$;

$dist(B;d) = \frac{|4.11-3.(-10)-24|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|44+30-24|}{5} = \frac{50}{5} = \underline{\underline{10}}$;

$dist(C;d) = \frac{|4.9-3.4-24|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|36-12-24|}{5} = \frac{0}{5} = \underline{\underline{0}}$ (ce qui signifie que $C \in d$).

On va chercher le lieu géométrique des points $P(x;y)$ tels que $dist(P;d)=2$.

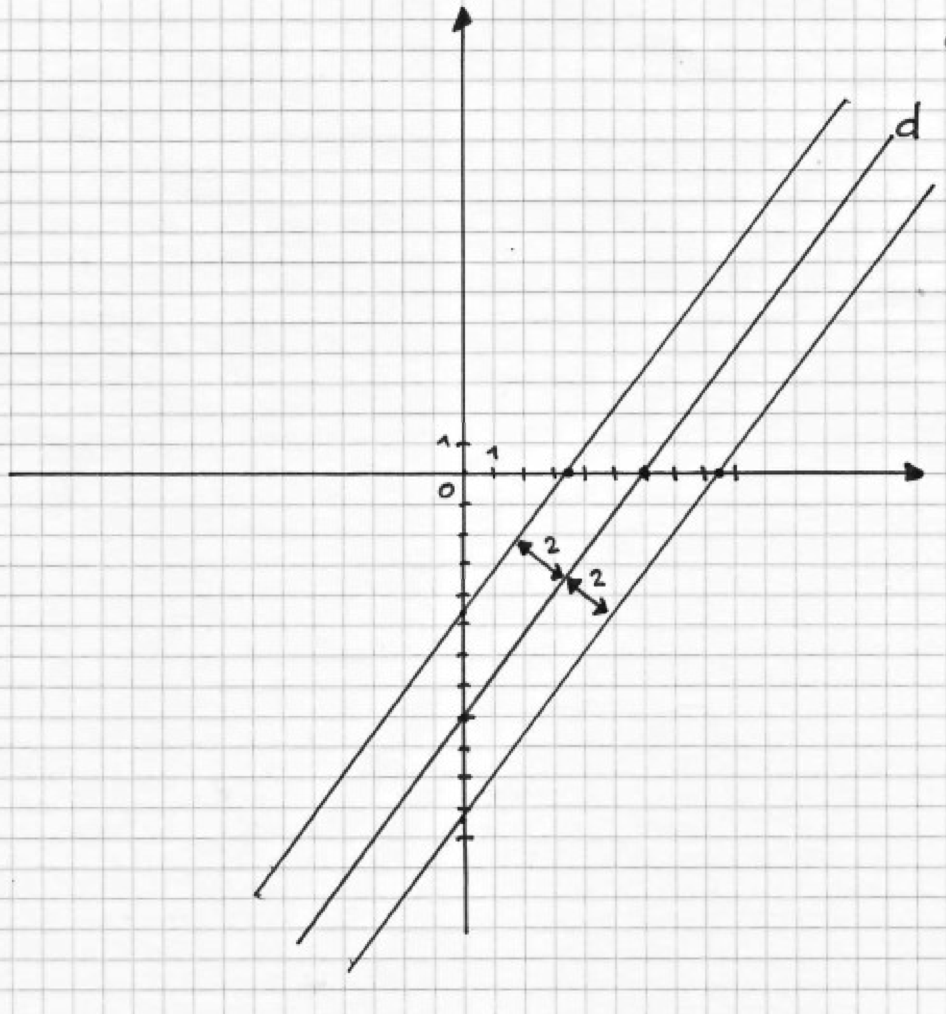
On a $dist(P;d) = \frac{|4x-3y-24|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|4x-3y-24|}{5}$.

$dist(P;d) = 2 \Rightarrow \frac{|4x-3y-24|}{5} = 2 \Rightarrow |4x-3y-24| = 10.$

On a alors 2 possibilités : ① $4x-3y-24=10 \Rightarrow 4x-3y-34=0$

et ② $4x-3y-24=-10 \Rightarrow 4x-3y-14=0.$

L'ensemble des points cherchés est donc formé des droites $\underline{\underline{4x-3y-34=0 \text{ et } 4x-3y-14=0}}$.



$d: 4x-3y-24=0$

$y=0 \Rightarrow 4x-24=0$
$\Rightarrow x=6$

$x=0 \Rightarrow -3y-24=0$
$\Rightarrow y=-8$

$4x-3y-34=0$

$y=0 \Rightarrow 4x-34=0$
$\Rightarrow x=8,5$

$x=0 \Rightarrow -3y-34=0$
$\Rightarrow y=-\frac{34}{3}$

$4x-3y-14=0$

$y=0 \Rightarrow 4x-14=0$
$\Rightarrow x=3,5$

$x=0 \Rightarrow -3y-14=0$
$\Rightarrow y=-\frac{14}{3}$

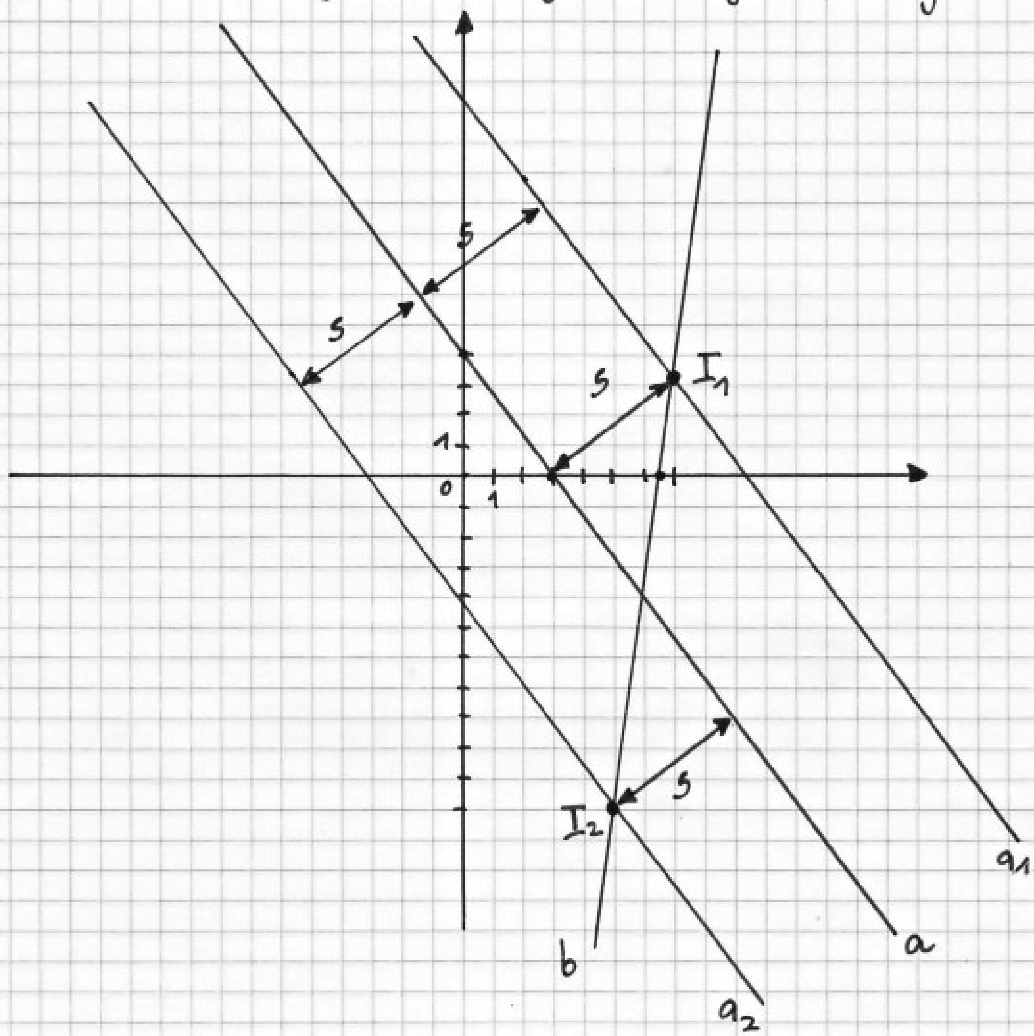
Exercice 41

$a : 4x+3y-12=0$: $y=0 \Rightarrow 4x-12=0 \Rightarrow x=3$

$x=0 \Rightarrow 3y-12=0 \Rightarrow y=4$

$b : 7x-y-46=0$: $y=0 \Rightarrow 7x-46=0 \Rightarrow x=-\frac{46}{7} \cong 6{,}57$

$x=5 \Rightarrow 7\cdot5-y-46=0 \Rightarrow 35-y-46=0 \Rightarrow -y-11=0 \Rightarrow y=-11$



On va commencer à chercher les équations des droites qui sont à une distance de 5 de a.

Soit $P(x;y)$. On a $\text{dist}(P;a) = \frac{|4x+3y-12|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|4x+3y-12|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|4x+3y-12|}{\sqrt{25}} = \frac{|4x+3y-12|}{5}$.

$\text{dist}(P;a)=5 \Rightarrow \frac{|4x+3y-12|}{5}=5 \Rightarrow |4x+3y-12|=25$.

On a 2 possibilités : ① $4x+3y-12=25 \Rightarrow 4x+3y-37=0$ (droite a_1)

② $4x+3y-12=-25 \Rightarrow 4x+3y+13=0$ (droite a_2).

Les points cherchés sont alors les intersections de a_1 et a_2 avec b.

$a_1 \cap b$: $\left.\begin{array}{l} 4x+3y-37=0 \xrightarrow{\cdot 1} 4x+3y-37=0 \\ 7x-y-46=0 \xrightarrow{\cdot 3} 21x-3y-138=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 25x-175=0 \Rightarrow 25x=175 \Rightarrow x=7$;

avec $x=9$, on a $4\cdot7+3y-37=0 \Rightarrow 28+3y-37=0 \Rightarrow 3y-9=0 \Rightarrow 3y=9 \Rightarrow y=3$;

l'intersection de $a_1 \cap b$ est donc le point $I_1(7;3)$

$a_2 \cap b$: $\left.\begin{array}{l} 4x+3y+13=0 \xrightarrow{\cdot 1} 4x+3y+13=0 \\ 7x-y-46=0 \xrightarrow{\cdot 3} 21x-3y-138=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 25x-125=0 \Rightarrow 25x=125 \Rightarrow x=5;$

avec $x=5$, on a $4.5+3y+13=0 \Rightarrow 20+3y+13=0 \Rightarrow 3y+33=0 \Rightarrow 3y=-33 \Rightarrow y=-11;$

l'intersection de $a_2 \cap b$ est donc le point $I_2\,(5;-11)$.

Les points de b à distance 5 de a sont donc $\underline{\underline{(7;3) \text{ et } (5;-11)}}$.

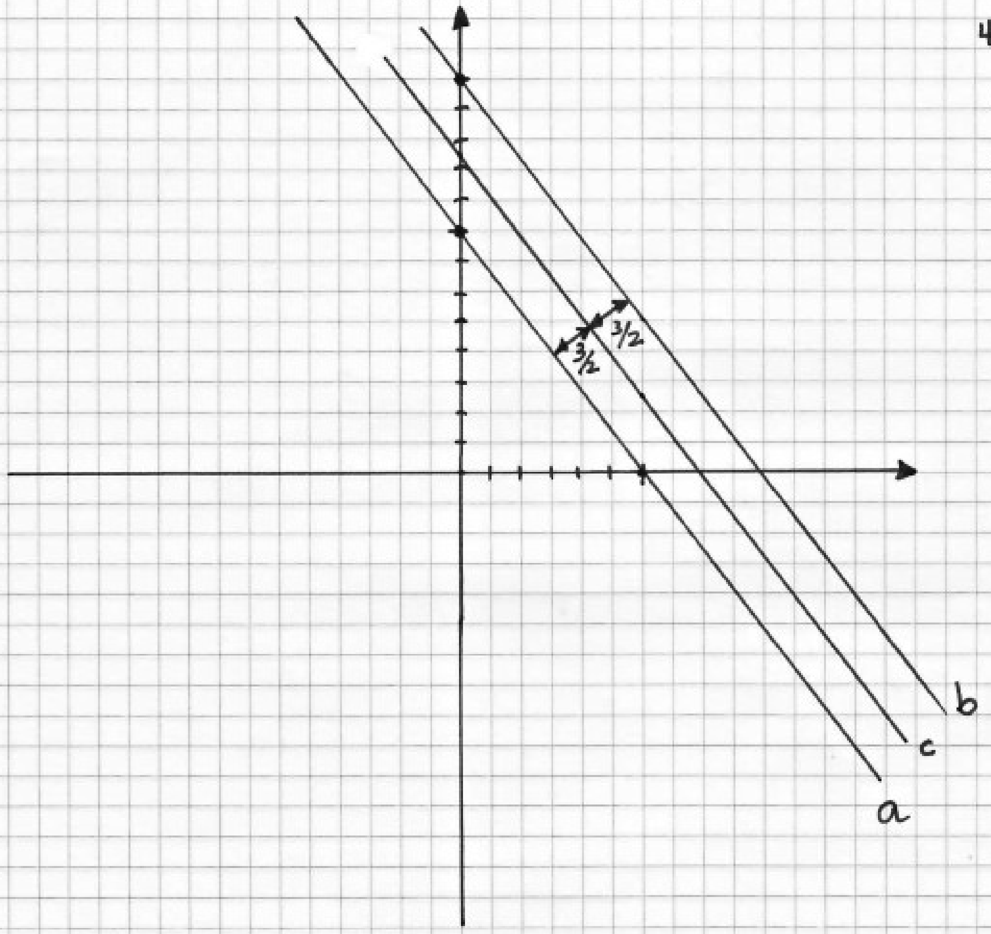
Exercice 42

a: $4x+3y-24=0$

b: passe par $B(0;13)$ et est parallèle à a.

La distance entre a et b est la distance entre B et a:

$$dist(a;b) = dist(B;a) = \frac{|4.0+3.13-24|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|39-24|}{\sqrt{16+9}} = \frac{15}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = \underline{\underline{3.}}$$



$4x+3y-24=0$

$x=0: 3y-24=0 \Rightarrow y=8$

$y=0: 4x-24=0 \Rightarrow x=6$

Equation de c: c est l'ensemble des points $P(x;y)$ tel que $dist(P;a) = dist(P;b) = \frac{3}{2}$;

$$dist(P;a) = \frac{|4x+3y-24|}{5} = \frac{3}{2} \Rightarrow |4x+3y-24| = \frac{15}{2}$$

$\Rightarrow$ soit $4x+3y-24 = \frac{15}{2} \Rightarrow 4x+3y-\frac{63}{2}=0$

soit $4x+3y-24 = -\frac{15}{2} \Rightarrow 4x+3y-\frac{33}{2}=0$;

équation de b: passe par $B(0;13)$ et est parallèle à a: $4x+3y-24=0$

$\Rightarrow$ équation de b de la forme $4x+3y+c=0$;

avec $B(0;13)$, on obtient $4.0+3.13+c=0 \Rightarrow 39+c=0 \Rightarrow c=-39$

$\Rightarrow$ équation de b: $4x+3y-39=0$;

$$dist(P;b) = \frac{|4x+3y-39|}{5} = \frac{3}{2} \Rightarrow |4x+3y-39| = \frac{15}{2}$$

$\Rightarrow$ soit $4x+3y-39=\frac{15}{2} \Rightarrow 4x+3y-\frac{93}{2}=0$

soit $4x+3y-39=-\frac{15}{2} \Rightarrow 4x+3y-\frac{63}{2}=0$.

On en conclut que l'équation de c est $\underline{\underline{4x+3y-\frac{63}{2}=0}}$ (équation apparaissant des 2 côtés).

<u>Equation de d</u>: d est l'ensemble des points $P(x;y)$ tel que $\text{dist}(P;a)=2\cdot\text{dist}(P;b)$ avec $\text{dist}(P;a)+\text{dist}(P;b)=3$.

On en déduit : $2\,\text{dist}(P;b)+\text{dist}(P;b)=3 \Rightarrow 3\,\text{dist}(P;b)=3$

$\Rightarrow \text{dist}(P;b)=1 \Rightarrow \text{dist}(P;a)=2\cdot 1=2$.

$\text{dist}(P;a)=2$: $\frac{|4x+3y-24|}{5}=2 \Rightarrow |4x+3y-24|=10$

$\Rightarrow$ soit $4x+3y-24=10 \Rightarrow 4x+3y-34=0$

soit $4x+3y-24=-10 \Rightarrow 4x+3y-14=0$.

$\text{dist}(P;b)=1$: $\frac{|4x+3y-39|}{5}=1 \Rightarrow |4x+3y-39|=5$

$\Rightarrow$ soit $4x+3y-39=5 \Rightarrow 4x+3y-44=0$

soit $4x+3y-39=-5 \Rightarrow 4x+3y-34=0$.

On en conclut que l'équation de d est $\underline{\underline{4x+3y-34=0}}$ (équation apparaissant des 2 côtés).

Exercice 43

Les bissectrices des droites a et b sont le lieu géométrique des points $P(x;y)$ tels que

$$\text{dist}(P;a) = \text{dist}(P;b).$$

$$\text{dist}(P;a) = \frac{|3x-4y+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|3x-4y+1|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|3x-4y+1|}{\sqrt{25}} = \frac{|3x-4y+1|}{5}.$$

$$\text{dist}(P;b) = \frac{|12x+5y-7|}{\sqrt{12^2+5^2}} = \frac{|12x+5y-7|}{\sqrt{144+25}} = \frac{|12x+5y-7|}{\sqrt{169}} = \frac{|12x+5y-7|}{13}.$$

$$\text{dist}(P;a) = \text{dist}(P;b) \Rightarrow \frac{|3x-4y+1|}{5} = \frac{|12x+5y-7|}{13}$$

$$\Rightarrow 13\cdot|3x-4y+1| = 5\cdot|12x+5y-7|$$

$$\Rightarrow |13(3x-4y+1)| = |5(12x+5y-7)|$$

$$\Rightarrow |39x-52y+13| = |60x+25y-35|$$

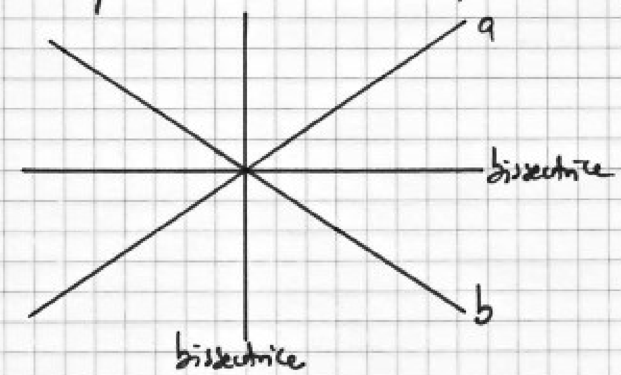
$\Rightarrow$ soit $39x-52y+13 = 60x+25y-35 \Rightarrow 21x+77y-48=0$

soit $39x-52y+13 = -(60x+25y-35)$

$\Rightarrow 39x-52y+13 = -60x-25y+35 \Rightarrow 99x-27y+48=0$

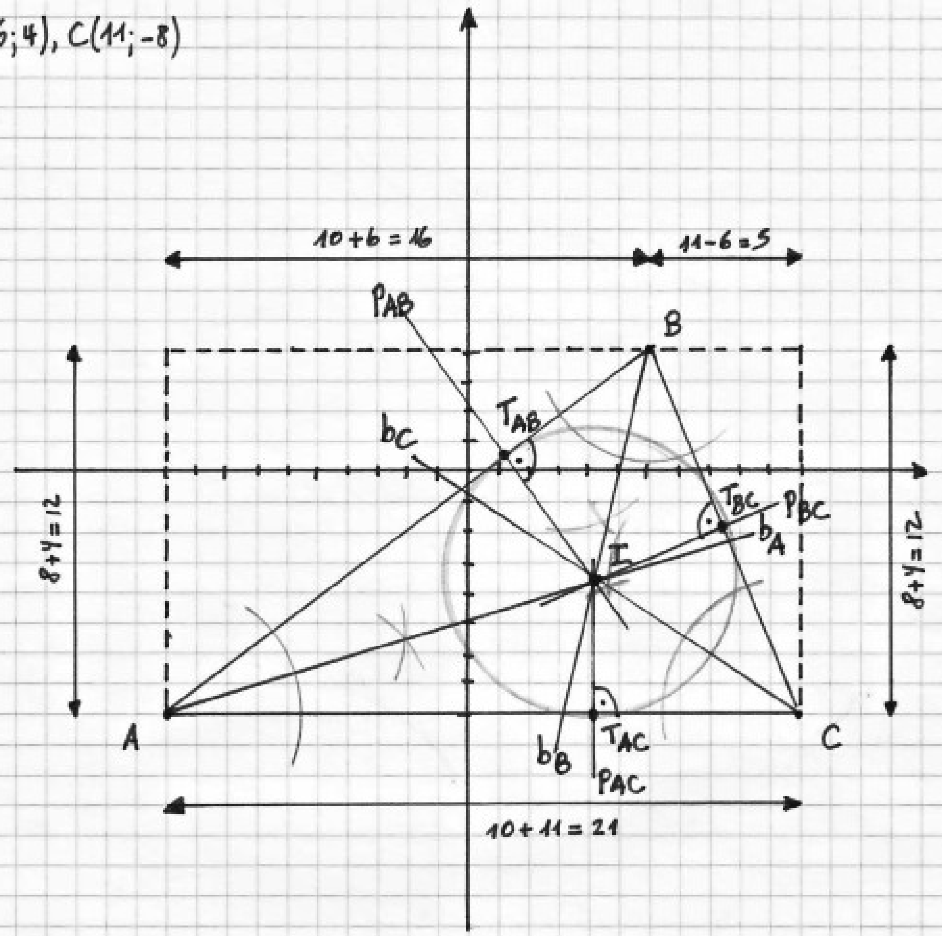
$\Rightarrow 33x-9y+16=0.$

Les équations des 2 bissectrices sont donc $\underline{\underline{21x+77y-48=0 \text{ et } 33x-9y+16=0.}}$



Exercice 44

$A(-10;-8), B(6;4), C(11;-8)$



a. On a aire $ABC = 21 \cdot 12 - \frac{16 \cdot 12}{2} - \frac{5 \cdot 12}{2} = 252 - 96 - 30 = \underline{126}.$

b. Bissectrice intérieure de $\widehat{ABC}$: Cherchons les 2 bissectrices de d_{AB} et d_{BC}. Ce sont le lieu géométrique des points $P(x;y)$ tels que $dist(P;d_{AB}) = dist(P;d_{BC})$.

Equation de d_{AB} : d_{AB} passe par $A(-10;-8)$ et est parallèle à $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \end{pmatrix}$;
or $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; ainsi d_{AB} est perpendiculaire à $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$; l'équation de d_{AB} s'écrit donc
$3x - 4y + c = 0$; avec $A(-10;-8)$, on obtient $3 \cdot (-10) - 4(-8) + c = 0 \Rightarrow -30 + 32 + c = 0 \Rightarrow 2 + c = 0$
$\Rightarrow c = -2$; l'équation de d_{AB} est donc $3x - 4y - 2 = 0$.

Equation de d_{BC} : d_{BC} passe par $B(6;4)$ et est parallèle à $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 11 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$;
ainsi d_{BC} est perpendiculaire à $\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$; l'équation de d_{BC} s'écrit donc $12x + 5y + c = 0$; avec
$B(6;4)$, on obtient $12 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + c = 0 \Rightarrow 72 + 20 + c = 0 \Rightarrow 92 + c = 0 \Rightarrow c = -92$;
l'équation de d_{BC} est donc $12x + 5y - 92 = 0$.

Ainsi $dist(P;d_{AB}) = dist(P;d_{BC}) \Rightarrow \frac{|3x - 4y - 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|12x + 5y - 92|}{\sqrt{12^2 + 5^2}}$

$\Rightarrow \frac{|3x - 4y - 2|}{5} = \frac{|12x + 5y - 92|}{13} \Rightarrow 13 \cdot |3x - 4y - 2| = 5 \cdot |12x + 5y - 92|$

$\Rightarrow |13(3x - 4y - 2)| = |5(12x + 5y - 92)| \Rightarrow |39x - 52y - 26| = |60x + 25y - 460|$

$\Rightarrow$ soit ① $39x - 52y - 26 = 60x + 25y - 460 \Rightarrow 21x + 77y - 434 = 0 \Rightarrow 3x + 11y - 62 = 0$

soit ② $39x - 52y - 26 = -(60x + 25y - 460) \Rightarrow 39x - 52y - 26 = -60x - 25y + 460$

$\Rightarrow 99x - 27y - 486 = 0 \Rightarrow 11x - 3y - 54 = 0.$

Les 2 bissectrices de $\widehat{ABC}$ sont donc: ① $3x + 11y - 62 = 0$ et ② $11x - 3y - 54 = 0$.

Reste à trouver celle qui est intérieure au triangle ABC: b_B.

On remarque que l'intersection de b_B avec l'axe des ordonnées doit être au-dessous des coordonnées de A et C, autrement dit inférieure à -8.

Si $x = 0$ dans ①: $11y - 62 = 0 \Rightarrow 11y = 62 \Rightarrow y = \frac{62}{11} \cong 5{,}636$.

Si $x = 0$ dans ②: $-3y - 54 = 0 \Rightarrow 3y = -54 \Rightarrow y = -18$.

Ainsi, la bissectrice intérieure est ② et on a b_B: $\underline{\underline{11x - 3y - 54 = 0.}}$

<u>Bissectrice intérieure de $\widehat{BAC}$:</u> Cherchons les 2 bissectrices de d_{AB} et d_{AC}. Ce sont le lieu géométrique des points $P(x;y)$ tels que $dist(P; d_{AB}) = dist(P; d_{AC})$.

Equation de d_{AB} : $3x - 4y - 2 = 0$ (voir ci-dessus).

Equation de d_{AC}: d_{AC} passe par $A(-10;-8)$ et est parallèle à $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 11 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 0 \end{pmatrix}$;

or $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 21 \\ 0 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; ainsi d_{AC} est perpendiculaire à $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; l'équation de d_{AC} s'écrit donc $y + c = 0$; avec $A(-10;-8)$, on obtient $-8 + c = 0 \Rightarrow c = 8$; l'équation de d_{AC} est donc $y + 8 = 0$.

Ainsi $dist(P; d_{AB}) = dist(P; d_{AC}) \Rightarrow \frac{|3x - 4y - 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|y+8|}{\sqrt{1^2}} \Rightarrow \frac{|3x - 4y - 2|}{5} = |y + 8|$

$\Rightarrow |3x - 4y - 2| = 5 \cdot |y + 8| \Rightarrow |3x - 4y - 2| = |5(y+8)| \Rightarrow |3x - 4y - 2| = |5y + 40|$

$\Rightarrow$ soit ① $3x - 4y - 2 = 5y + 40 \Rightarrow 3x - 9y - 42 = 0 \Rightarrow x - 3y - 14 = 0$

soit ② $3x - 4y - 2 = -(5y + 40) \Rightarrow 3x - 4y - 2 = -5y - 40 \Rightarrow 3x + y + 38 = 0$.

Les 2 bissectrices de $\widehat{BAC}$ sont donc: ① $x - 3y - 14 = 0$ et ② $3x + y + 38 = 0$.

Reste à trouver celle qui est intérieure au triangle ABC: b_A.

On remarque que l'intersection de b_A avec l'axe des ordonnées doit être entre les ordonnées de B et C, autrement dit entre -8 et 4.

Si $x = 0$ dans ①: $-3y - 14 = 0 \Rightarrow 3y = -14 \Rightarrow y = -\frac{14}{3} \cong -4{,}667$.

Si $x = 0$ dans ②: $y + 38 = 0 \Rightarrow y = -38$.

Ainsi la bissectrice intérieure est ① et on a $\underline{b_A}$: $\underline{\underline{x - 3y - 14 = 0.}}$

<u>Bissectrice intérieure de $\widehat{ACB}$:</u> Cherchons les 2 bissectrices de d_{AC} et d_{BC}. Ce sont le lieu géométrique des points $P(x;y)$ tels que $dist(P; d_{AC}) = dist(P; d_{BC})$.

$\left.\begin{array}{l} \text{Equation de } d_{AC}: \ y + 8 = 0 \\ \text{Equation de } d_{BC}: \ 12x + 5y - 92 = 0 \end{array}\right\}$ (voir ci-dessus).

Ainsi $dist(P; d_{AC}) = dist(P; d_{BC}) \Rightarrow \frac{|y+8|}{\sqrt{1^2}} = \frac{|12x + 5y - 92|}{\sqrt{12^2 + 5^2}}$

$\Rightarrow |y + 8| = \frac{|12x + 5y - 92|}{13} \Rightarrow 13 \cdot |y + 8| = |12x + 5y - 92| \Rightarrow |13(y+8)| = |12x + 5y - 92|$

$\Rightarrow |13y + 104| = |12x + 5y - 92|$

$\Rightarrow$ soit ① $13y+104 = 12x+5y-92 \Rightarrow 12x-8y-196=0 \Rightarrow 3x-2y-49=0$

soit ② $13y+104 = -(12x+5y-92) \Rightarrow 13y+104 = -12x-5y+92 \Rightarrow 12x+18y+12=0$

$\Rightarrow 2x+3y+2=0.$

Les 2 bissectrices de $\widehat{ACB}$ sont donc : ① $3x-2y-49=0$ et ② $2x+3y+2=0$.

Reste à trouver celle qui est intérieure au triangle ABC : b_C.

On remarque que l'intersection de b_C avec l'axe des ordonnées doit être entre les ordonnées de A et B, autrement dit entre -8 et 4.

Si $x=0$ dans ① : $-2y-49=0 \Rightarrow 2y=-49 \Rightarrow y=-24{,}5$.

Si $x=0$ dans ② : $3y+2=0 \Rightarrow 3y=-2 \Rightarrow y=-\frac{2}{3}=-0{,}\overline{6}$.

Ainsi la bissectrice intérieure est ② et on a : $\underline{\underline{b_C : 2x+3y+2=0.}}$

En résumé, on a : $b_A : x-3y-14=0$

$b_B : 11x-3y-54=0$

$b_C : 2x+3y+2=0$

Les 3 bissectrices doivent se couper en un point commun $I(x;y)$.

On va chercher l'intersection I de b_A et b_B, puis vérifier que $I \in b_C$.

$$\left.\begin{array}{l} b_A : x-3y-14=0 \xrightarrow{\cdot 11} 11x-33y-154=0 \\ b_B : 11x-3y-54=0 \xrightarrow{\cdot(-1)} -11x+3y+54=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} -30y-100=0 \Rightarrow 30y=-100$$

$\Rightarrow y=-\frac{10}{3}$.

Avec $y=-\frac{10}{3}$, on a $x-3(-\frac{10}{3})-14=0 \Rightarrow x+10-14=0 \Rightarrow x-4=0 \Rightarrow x=4$.

On obtient donc $I(4;-\frac{10}{3})$.

Vérifions que $I(4;-\frac{10}{3}) \in b_C$: $2\cdot 4+3\cdot(-\frac{10}{3})+2 = 8-10+2=0$ OK.

Le point d'intersection des 3 bissectrices est $\underline{\underline{I(4;-\frac{10}{3})}}$ (centre du cercle inscrit).

Le rayon du cercle inscrit est donné par $r = dist(I;d_{AB}) = dist(I;d_{BC}) = dist(I;d_{AC})$.

$d_{AB} : 3x-4y-2=0 \Rightarrow dist(I;d_{AB}) = \frac{|3\cdot 4-4(-\frac{10}{3})-2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|12+\frac{40}{3}-2|}{5} = \frac{70/3}{5} = \frac{14}{3}$.

$d_{BC} : 12x+5y-92=0 \Rightarrow dist(I;d_{BC}) = \frac{|12\cdot 4+5(-\frac{10}{3})-92|}{\sqrt{12^2+5^2}} = \frac{|48-\frac{50}{3}-92|}{13} = \frac{182/3}{13} = \frac{14}{3}$.

$d_{AC} : y+8=0 \Rightarrow dist(I;d_{AC}) = \frac{|-\frac{10}{3}+8|}{\sqrt{1^2}} = \frac{14/3}{1} = \frac{14}{3}$.

Ainsi le rayon du cercle inscrit est $\underline{\underline{r=\frac{14}{3}.}}$

c. Pour trouver les points de tangence du cercle inscrit avec le côté AB du triangle (T_{AB}), on cherche l'équation de la perpendiculaire p_{AB} à AB qui passe par I, puis son intersection avec d_{AB}.

Perpendiculaire p_{AB} : passe par $I(4;-\frac{10}{3})$ et est perpendiculaire à $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}16\\12\end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ (voir ci-dessus) ; la droite p_{AB} s'écrit donc $4x+3y+c=0$;

avec $I\left(4;-\frac{10}{3}\right)$, on obtient: $4\cdot 4+3\left(-\frac{10}{3}\right)+c=0 \Rightarrow 16-10+c=0 \Rightarrow 6+c=0 \Rightarrow c=-6$;

ainsi on a $p_{AB}: 4x+3y-6=0$.

On a donc: $d_{AB}: 3x-4y-2=0$ et $p_{AB}: 4x+3y-6=0$.

$T_{AB}(x;y)$, intersection de d_{AB} et p_{AB}, est la solution de:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x-4y-2=0 \xrightarrow{\cdot 3} 9x-12y-6=0 \\ 4x+3y-6=0 \xrightarrow{\cdot 4} 16x+12y-24=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 25x-30=0 \Rightarrow 25x=30 \Rightarrow x=\frac{6}{5};$$

avec $x=\frac{6}{5}$, on a $3\cdot\frac{6}{5}-4y-2=0 \Rightarrow 4y=\frac{18}{5}-2 \Rightarrow 4y=\frac{8}{5} \Rightarrow y=\frac{2}{5}$.

On a ainsi $\underline{\underline{T_{AB}\left(\frac{6}{5};\frac{2}{5}\right)}}$.

On pourrait similairement trouver les point de tangence T_{BC} et T_{AC}.

d. Voir ci-dessus.

Exercice 45

$M(5;3)$

a. $P(x;y)$ avec $d(M;P)=5$:

$d(M;P) = \|\overrightarrow{MP}\| = \|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}\| = \left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} x-5 \\ y-3 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}$;

$d(M;P)=5 \Rightarrow \sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2} = 5$

$\Rightarrow \underline{\underline{(x-5)^2+(y-3)^2=25}}$, cercle de rayon 5 centré en $M(5;3)$.

b. On pose $y=0$ dans $(x-5)^2+(y-3)^2=25 \Rightarrow (x-5)^2+(0-3)^2=25$

$\Rightarrow (x-5)^2+9=25 \Rightarrow (x-5)^2=16 \Rightarrow x-5 = \begin{cases} 4 \Rightarrow x=9 \\ -4 \Rightarrow x=1. \end{cases}$

Ainsi les abscisses des points du cercle qui sont sur l'axe Ox sont $\underline{\underline{x=1 \text{ et } x=9.}}$

Exercice 46

Une équation caractérisera un cercle si elle peut être mise sous la forme $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$, où $(x_0;y_0)$ est le centre et r le rayon du cercle.

a. $x^2+y^2-14x-2y-126=0$: on a $(x-7)^2=x^2-14x+49$;
ainsi $x^2-14x=(x-7)^2-49$;
de plus $(y-1)^2=y^2-2y+1$;
ainsi $y^2-2y=(y-1)^2-1$;
l'équation peut alors s'écrire
$(x-7)^2-49+(y-1)^2-1-126=0$
$\Rightarrow (x-7)^2+(y-1)^2-176=0 \Rightarrow (x-7)^2+(y-1)^2=176$;
c'est donc bien un cercle ; son centre est $(7;1)$ et son rayon $\sqrt{176}$.

b. $x^2+y^2+10x+14y+123=0$: on a $(x+5)^2=x^2+10x+25$;
ainsi $x^2+10x=(x+5)^2-25$;
de plus $(y+7)^2=y^2+14y+49$;
ainsi $y^2+14y=(y+7)^2-49$;
l'équation peut alors s'écrire
$(x+5)^2-25+(y+7)^2-49+123=0$
$\Rightarrow (x+5)^2+(y+7)^2+39=0 \Rightarrow (x+5)^2+(y+7)^2=-39$;
ce n'est donc pas un cercle (puisque le membre de droite est négatif).

c. $x^2+y^2+8x-16y+80=0$: on a $(x+4)^2=x^2+8x+16$;
ainsi $x^2+8x=(x+4)^2-16$;
de plus $(y-8)^2=y^2-16x+64$;
ainsi $y^2-16x=(y-8)^2-64$;
l'équation peut alors s'écrire
$(x+4)^2-16+(y-8)^2-64+80=0 \Rightarrow (x+4)^2+(y-8)^2=0$;
ce n'est pas l'équation d'un cercle (puisque le rayon est 0).

d. $3x^2+3y^2+7x-10=0 \Rightarrow x^2+y^2+\frac{7}{3}x-\frac{10}{3}=0$: on a $\left(x+\frac{7}{6}\right)^2=x^2+\frac{7}{3}x+\frac{49}{36}$;
ainsi $x^2+\frac{7}{3}x=\left(x+\frac{7}{6}\right)^2-\frac{49}{36}$;
l'équation s'écrit alors
$\left(x+\frac{7}{6}\right)^2-\frac{49}{36}+y^2-\frac{10}{3}=0$
$\Rightarrow \left(x+\frac{7}{6}\right)^2+y^2=\frac{169}{36}$;
c'est donc bien un cercle ; son centre est $\left(-\frac{7}{6};0\right)$ et son rayon $\frac{13}{6}$.

Exercice 47

a. L'équation du cercle s'écrit $\underline{\underline{(x+7)^2+(y-4)^2=169}}$ $(13^2=169)$.

b. $A(a_1;9)$ appartient au cercle : on a donc $(a_1+7)^2+(9-4)^2=169 \Rightarrow (a_1+7)^2+5^2=169$

$\Rightarrow (a_1+7)^2+25=169 \Rightarrow (a_1+7)^2=144 \Rightarrow a_1+7= \begin{cases} 12 \Rightarrow a_1=5 \\ -12 \Rightarrow a_1=-19. \end{cases}$

Comme on veut $a_1>0$, on obtient $\underline{\underline{a_1=5.}}$

$B(-2;b_2)$ appartient au cercle : on a donc $(-2+7)^2+(b_2-4)^2=169 \Rightarrow 5^2+(b_2-4)^2=169$

$\Rightarrow (b_2-4)^2=144 \Rightarrow b_2-4= \begin{cases} 12 \Rightarrow b_2=16 \\ -12 \Rightarrow b_2=-8. \end{cases}$

Comme on veut $b_2<0$, on obtient $\underline{\underline{b_2=-8.}}$

c. On a $A(5;9)$ et $B(-2;-8)$.

La médiatrice m du segment AB passe par M, milieu de AB, et est perpendiculaire à $\overrightarrow{AB}$.

On a $M\left(\frac{5+(-2)}{2};\frac{9+(-8)}{2}\right)=\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$.

De plus $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}-2\\-8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\-17\end{pmatrix}\parallel\begin{pmatrix}7\\17\end{pmatrix}$.

L'équation cartésienne de m s'écrit alors $7x+17y+c=0$.

Avec $M\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$, on obtient $7\cdot\frac{3}{2}+17\cdot\frac{1}{2}+c=0 \Rightarrow \frac{21}{2}+\frac{17}{2}+c=0 \Rightarrow \frac{38}{2}+c=0$

$\Rightarrow 19+c=0 \Rightarrow c=-19.$

L'équation cartésienne de m s'écrit donc $\underline{\underline{7x+17y-19=0.}}$

d. On a $C(-7;4)$.

Dans $m: 7x+17y-19=0$, cela donne $7\cdot(-7)+17\cdot4-19=-49+68-19=0$.

Ainsi, on a bien $\underline{\underline{C\in m.}}$

Exercice 48

$C: x^2+y^2+10x-4y-35=0.$

a. On va calculer la distance de P_1, P_2, P_3 au centre du cercle et la comparer au rayon du cercle.

On a : $x^2+y^2+10x-4y-35=0$: $(x+5)^2 = x^2+10x+25 \Rightarrow x^2+10x=(x+5)^2-25$;

$$(y-2)^2 = y^2-4y+4 \Rightarrow y^2-4y=(y-2)^2-4;$$

l'équation du cercle s'écrit alors $(x+5)^2-25+(y-2)^2-4-35=0$

$$\Rightarrow (x+5)^2+(y-2)^2-64=0 \Rightarrow (x+5)^2+(y-2)^2=64 \quad (=8^2);$$

ainsi le centre du cercle est $M(-5;2)$ et son rayon est 8.

De plus: $\overrightarrow{MP_1} = \overrightarrow{OP_1}-\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix}1\\11\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{MP_1}\| = \sqrt{6^2+9^2} = \sqrt{36+81} = \sqrt{117} > 8$;

$\overrightarrow{MP_2} = \overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix}-10\\9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\7\end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{MP_2}\| = \sqrt{(-5)^2+7^2} = \sqrt{25+49} = \sqrt{74} > 8$;

$\overrightarrow{MP_3} = \overrightarrow{OP_3}-\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{MP_3}\| = \sqrt{8^2+(-1)^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65} > 8.$

Ainsi <u>les points P_1, P_2, P_3 sont à l'extérieur du cercle.</u>

b. Les tangentes au cercle C sont les droites à distance 8 (= rayon du cercle) du centre $M(-5;2)$ du cercle. Ainsi, si la tangente est $ax+by+c=0$, on doit avoir $\text{dist}(M;\text{tangente})=8$.

Si, on divise l'équation de la tangente par a (en supposant $a\neq 0$), l'équation de la tangente peut s'écrire $x+\frac{b}{a}y+\frac{c}{a}=0$, autrement dit $x+Ay+B=0$.

On a: $\text{dist}(M;\text{tangente}) = \dfrac{|-5+A\cdot 2+B|}{\sqrt{1^2+A^2}} = \dfrac{|2A+B-5|}{\sqrt{A^2+1}}$.

Ainsi $\text{dist}(M;\text{tangente})=8 \Rightarrow \dfrac{|2A+B-5|}{\sqrt{A^2+1}}=8 \Rightarrow |2A+B-5| = 8\sqrt{A^2+1}$

$$\Rightarrow (2A+B-5)^2=(8\sqrt{A^2+1})^2 \Rightarrow (2A+B-5)^2=64(A^2+1).$$

De plus les tangentes doivent être parallèles à $\vec{d}=\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$ et donc perpendiculaires à $\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}$.

L'équation des tangentes doivent être de la forme $7x-4y+c=0$, i.e. par division par 7,

$x-\frac{4}{7}y+\frac{c}{7}=0$.

On doit ainsi avoir $A=-\frac{4}{7}$ et $B=\frac{c}{7}$.

En remplaçant ces valeurs dans $(2A+B-5)^2=64(A^2+1)$, on obtient:

$$\left(2\left(-\frac{4}{7}\right)+\frac{c}{7}-5\right)^2=64\left(\left(-\frac{4}{7}\right)^2+1\right) \Rightarrow \left(-\frac{8}{7}+\frac{c}{7}-5\right)^2=64\left(\frac{16}{49}+1\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{c}{7}-\frac{43}{7}\right)^2=\frac{4160}{49} \Rightarrow \left(\frac{c-43}{7}\right)^2=\frac{4160}{49} \Rightarrow \frac{(c-43)^2}{49}=\frac{4160}{49} \Rightarrow (c-43)^2=4160$$

$$\Rightarrow c-43 = \begin{cases} \sqrt{4160}=8\sqrt{65} \Rightarrow c=43+8\sqrt{65} \\ -\sqrt{4160}=-8\sqrt{65} \Rightarrow c=43-8\sqrt{65}. \end{cases}$$

Les équations des 2 tangentes sont donc <u>$7x-4y+43+8\sqrt{65}=0$ et $7x-4y+43-8\sqrt{65}=0$.</u>

Les tangentes trouvées sont perpendiculaire à la droite passant par $M(-5;2)$, droite perpendiculaire à $\vec{d} = \binom{4}{7}$.

Cette droite perpendiculaire a pour équation $4x+7y+c=0$.

Avec $M(-5;2)$, on trouve $4\cdot(-5)+7\cdot2+c=0 \Rightarrow -20+14+c=0 \Rightarrow -6+c=0 \Rightarrow c=6$.

Cette droite a donc pour équation $4x+7y+6=0$.

Les points de tangence sont les intersections de cette droite avec les 2 tangentes.

$$\left.\begin{array}{l} 4x+7y+6=0 \xrightarrow{\cdot 4} 16x+28y+24=0 \\ 7x-4y+43+8\sqrt{65}=0 \xrightarrow{\cdot 7} 49x-28y+301+56\sqrt{65}=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 65x = 325+56\sqrt{65} \Rightarrow x = 5+\frac{56\sqrt{65}}{65}.$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x+7y+6=0 \xrightarrow{\cdot 7} 28x+49y+42=0 \\ 7x-4y+43+8\sqrt{65}=0 \xrightarrow{\cdot(-4)} -28x+16y-172-32\sqrt{65} \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 65y = -130-32\sqrt{65} \Rightarrow y = -2-\frac{32\sqrt{65}}{65}.$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x+7y+6=0 \xrightarrow{\cdot 4} 16x+28y+24=0 \\ 7x-4y+43-8\sqrt{65}=0 \xrightarrow{\cdot 7} 49x-28y+301-56\sqrt{65}=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 65x = 325-56\sqrt{65} \Rightarrow x = 5-\frac{56\sqrt{65}}{65}.$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x+7y+6=0 \xrightarrow{\cdot 7} 28x+49y+42=0 \\ 7x-4y+43-8\sqrt{65}=0 \xrightarrow{\cdot(-4)} -28x+16y-172+32\sqrt{65} \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 65y = -130+32\sqrt{65} \Rightarrow y = -2+\frac{32\sqrt{65}}{65}.$$

Les points de tangence sont donc : $\left(5+\frac{56\sqrt{65}}{65}; -2-\frac{32\sqrt{65}}{65}\right)$ et $\left(5-\frac{56\sqrt{65}}{65}; -2+\frac{32\sqrt{65}}{65}\right)$.

c. C : centre $M(-5;2)$, rayon $r=8$.

d : $x+8y+54=0$

Calculons $\text{dist}(M;d)$: $\text{dist}(M;d) = \frac{|-5+8\cdot2+54|}{\sqrt{1^2+8^2}} = \frac{|-5+16+54|}{\sqrt{1+64}} = \frac{65}{\sqrt{65}} = \sqrt{65} > 8$.

On en conclut donc que <u>d ne coupe pas le cercle.</u>

Exercice 49

$C : x^2+y^2+10y+2y+13=0$ et $T(-3;2)$

On a $(x+5)^2 = x^2+10x+25 \Rightarrow x^2+10x = (x+5)^2-25$;

$(y+1)^2 = y^2+2y+1 \Rightarrow y^2+2y = (y+1)^2-1$.

L'équation de C s'écrit donc $(x+5)^2-25+(y+1)^2-1+13=0$

$\Rightarrow (x+5)^2+(y+1)^2-13=0 \Rightarrow (x+5)^2+(y+1)^2=13$.

Le centre du cercle est donc $M(-5;-1)$ et son rayon est $r=\sqrt{13}$.

L'équation de la tangente est de la forme $ax+by+c=0$.

La tangente est perpendiculaire à $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

On peut donc prendre $a=2$ et $b=3$ et l'équation de la tangente s'écrit :

$2x+3y+c=0$.

On doit aussi avoir dist $(M; \text{tangente}) = \sqrt{13}$ (= rayon du cercle).

On a $\text{dist}(M;\text{tangente}) = \dfrac{|2\cdot(-5)+3\cdot(-1)+c|}{\sqrt{2^2+3^2}} = \dfrac{|-10-3+c|}{\sqrt{4+9}} = \dfrac{|c-13|}{\sqrt{13}}$.

Ainsi $\text{dist}(M;\text{tangente}) = \sqrt{13} \Rightarrow \dfrac{|c-13|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \Rightarrow |c-13| = 13$

$$\Rightarrow c-13 = \begin{cases} 13 \Rightarrow c = 26 \\ -13 \Rightarrow c = 0. \end{cases}$$

On a alors 2 possibilités pour la tangente : $2x+3y+26=0$ et $2x+3y=0$.

Vérifions à laquelle appartient $T(-3;2)$.

$2x+3y-26=0$: $2(-3)+3\cdot 2-26 = -6+6-26 = -26 \neq 0$.

$2x+3y=0$: $2\cdot(-3)+3\cdot 2 = -6+6 = 0 \longrightarrow$ ok.

L'équation de la tangente est donc $\underline{\underline{2x+3y=0.}}$

Exercice 50

$d: x+y-4=0$

$C: (x-1)^2+(y+3)^2=20$

$d: x+y-4=0 \Rightarrow y=-x+4$

Par substitution dans C on obtient:

$(x-1)^2+(-x+4+3)^2=20 \Rightarrow (x-1)^2+(-x+7)^2=20$

$\Rightarrow x^2-2x+1+x^2-14x+49=20 \Rightarrow 2x^2-16x+50=20 \Rightarrow 2x^2-16x+30=0$

$\Rightarrow x^2-8x+15=0$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$, avec $a=1$, $b=-8$ et $c=15$.

On a $\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4.1.15=64-60=4$ et $\sqrt{\Delta}=\sqrt{4}=2$.

Les solutions sont $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8+2}{2\cdot 1}=\frac{10}{2}=5$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8-2}{2\cdot 1}=\frac{6}{2}=3$.

Avec $x_1=5$, on a $y_1=-x_1+4=-5+4=-1$.

Avec $x_2=3$, on a $y_2=-x_2+4=-3+4=1$.

Les intersections de d et C sont donc: $(5;-1)$ et $(3;1)$.

Exercice 51

Le centre du cercle est $M(-2;3)$.

Le rayon du cercle est la distance de M à d, puisque d est tangente au cercle.

On a $\text{dist}(M;d) = \dfrac{|-2+2\cdot 3|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \dfrac{|-2+6|}{\sqrt{1+4}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

Ainsi le rayon du cercle est $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$. On a $\left(\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 = \dfrac{16}{5}$.

Donc l'équation du cercle est $(x+2)^2+(y-3)^2 = \dfrac{16}{5}$.

Exercice 52

Les équations des droites parallèles à $d : x-4y+10=0$ sont de la forme $x-4y+c=0$.

Elles doivent être tangentes à $C : (x-2)^2+(y+5)^2=17$, cercle de centre $M(2;-5)$ et de rayon $\sqrt{17}$.

Ces droites doivent donc être à distance $\sqrt{17}$ de M.

On a $\text{dist}(M ; \text{droites parallèles}) = \dfrac{|2-4(-5)+c|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}} = \dfrac{|2+20+c|}{\sqrt{1+16}} = \dfrac{|c+22|}{\sqrt{17}}$.

Ainsi $\text{dist}(M ; \text{droites parallèles}) = \sqrt{17} \Rightarrow \dfrac{|c+22|}{\sqrt{17}} = \sqrt{17} \Rightarrow |c+22| = 17$

$\Rightarrow$ soit $c+22=17 \Rightarrow c=-5$

soit $c+22=-17 \Rightarrow c=-39$.

Les équations des droites cherchées sont donc : $x-4y-5=0$ et $x-4y-39=0$.

Exercice 53

Calculons les longueurs des segments PQ, PR et QR.

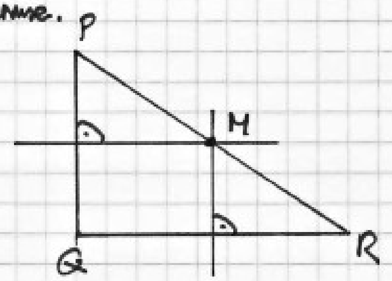
On a : $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$; $PQ=\|\overrightarrow{PQ}\|=\sqrt{4^2+(-4)^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}$;

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$; $PR=\|\overrightarrow{PR}\|=\sqrt{6^2+(-2)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}$;

$\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$; $QR=\|\overrightarrow{QR}\|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$.

De plus : $PQ^2=32$, $PR^2=40$ et $QR^2=8$ et, ainsi $PR^2=PQ^2+QR^2$.

Donc <u>PQR est bien un triangle rectangle</u>, avec PR comme hypothénuse.



L'équation du cercle passant par PQR est l'équation du cercle circonscrit à PQR. L'intersection des médiatrices d'un triangle rectangle est le milieu M de l'hypothénuse (voir ci-contre). Ici M est le milieu de PQ. Donc

$M\left(\frac{-2+2}{2};\frac{7+3}{2}\right)=(0;5)$.

$M(0;5)$ est donc le centre du cercle cherché.

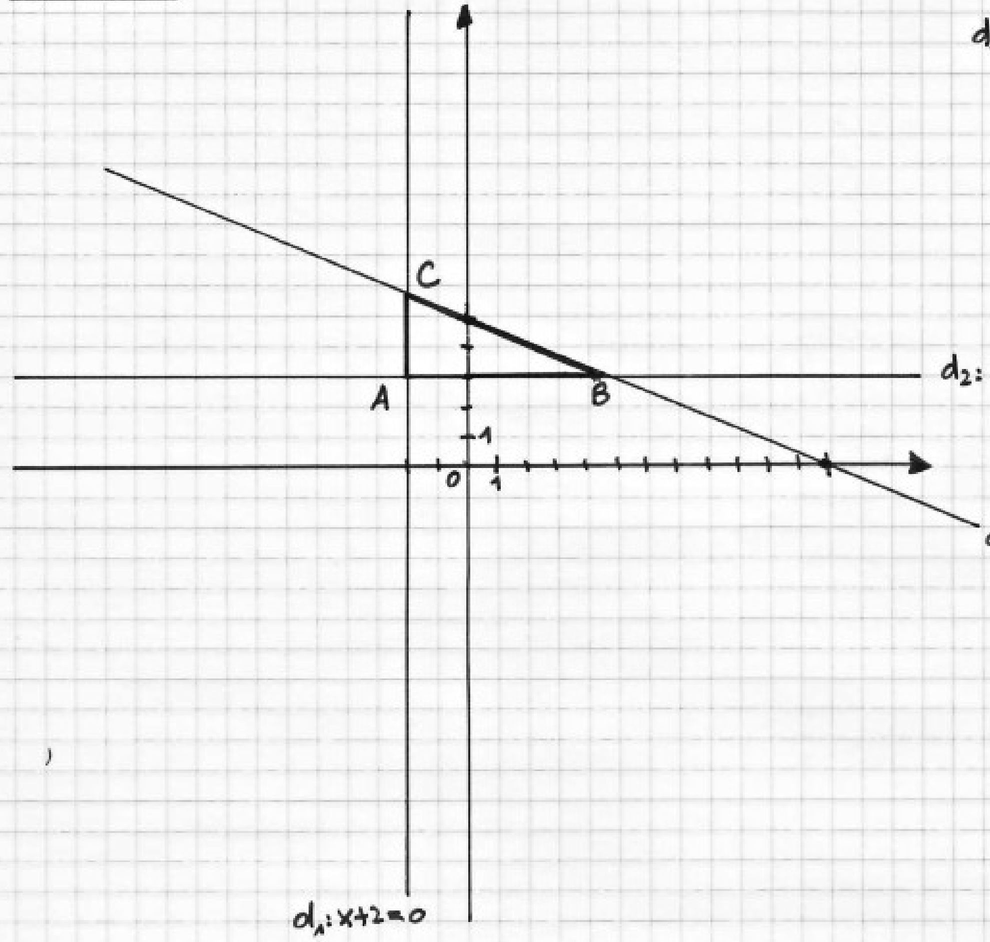
Son rayon est PM (puisque M est le milieu de PR).

On a $PM=\|\overrightarrow{PM}\|=\|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}\|=\left\|\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$.

Ainsi le rayon du cercle est $\sqrt{8}$.

L'équation du cercle cherché est donc : <u>$x^2+(y-5)^2=8$.</u>

Exercice 54



d_3: $5x+12y-60=0$

$y=0 \Rightarrow 5x-60=0 \Rightarrow 5x=60$
$\Rightarrow x=12$

$x=0 \Rightarrow 12y-60=0 \Rightarrow 12y=60$
$\Rightarrow y=5$

Le centre du cercle inscrit au triangle ABC est le point à égale distance des 3 côtés du triangle.

Soit $M(x;y)$ ce centre.

On doit donc avoir $dist(M;d_1)=dist(M;d_2)=dist(M;d_3)$.

$dist(M;d_1)=\dfrac{|x+2|}{\sqrt{1^2+0^2}}=\dfrac{|x+2|}{1}=|x+2|.$

$dist(M;d_2)=\dfrac{|y-3|}{\sqrt{0^2+1^2}}=\dfrac{|y-3|}{1}=|y-3|$

$dist(M;d_3)=\dfrac{|5x+12y-60|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\dfrac{|5x+12y-60|}{\sqrt{25+144}}=\dfrac{|5x+12y-60|}{\sqrt{169}}=\dfrac{|5x+12y-60|}{13}.$

On doit donc trouver x et y tel que $|x+2|=|y-3|=\dfrac{|5x+12y-60|}{13}$

$|x+2|=|y-3| \Rightarrow$ soit $x+2=y-3 \Rightarrow x-y+5=0$ (1)

soit $x+2=-(y-3) \Rightarrow x+2=-y+3 \Rightarrow x+y-1=0$ (2)

$|x+2|=\dfrac{|5x+12y-60|}{13} \Rightarrow$ soit $x+2=\dfrac{5x+12y-60}{13} \Rightarrow 13x+26=5x+12y-60 \Rightarrow 8x-12y+86=0$

$\Rightarrow 4x-6y+43=0$ (A)

soit $x+2=\dfrac{-(5x+12y-60)}{13} \Rightarrow 13x+26=-5x-12y+60 \Rightarrow 18x+12y-34=0$

$\Rightarrow 9x+6y-17=0$ (B)

On a alors 4 possibilités: (1)+(A), (1)+(B), (2)+(A), (2)+(B).

(1)+(A) : $\left.\begin{array}{l} x-y+5=0 \xrightarrow{\cdot 6} 6x-6y+30=0 \\ 4x-6y+43=0 \xrightarrow{\cdot(-1)} -4x+6y-43=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 2x-13=0 \Rightarrow 2x=13 \Rightarrow x=\dfrac{13}{2}.$

Avec $x=\frac{13}{2}$, on a $\frac{13}{2}-y+5=0 \Rightarrow y=\frac{13}{2}+5=\frac{23}{2}$.
Cela nous donne le point $\left(\frac{13}{2}; \frac{23}{2}\right)$, qui est clairement en dehors du triangle ABC.

(1)+(B) : $\left.\begin{array}{l} x-y+5=0 \xrightarrow{\cdot 6} 6x-6y+30=0 \\ 9x+6y-17=0 \xrightarrow{\cdot 1} 9x+6y-17=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 15x+13=0 \Rightarrow 15x=-13 \Rightarrow x=-\frac{13}{15}$.
Avec $x=-\frac{13}{15}$, on a $-\frac{13}{15}-y+5=0 \Rightarrow y=-\frac{13}{15}+5=\frac{62}{15}$.
Cela nous donne le point $\left(-\frac{13}{15}; \frac{62}{15}\right)$, qui est clairement à l'intérieur du triangle ABC.

(2)+(A) : $\left.\begin{array}{l} x+y-1=0 \xrightarrow{\cdot 6} 6x+6y-6=0 \\ 4x-6y+43=0 \xrightarrow{\cdot 1} 4x-6y+43=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 10x+37=0 \Rightarrow 10x=-37 \Rightarrow x=-\frac{37}{10}$.
Avec $x=-\frac{37}{10}$, on a $-\frac{37}{10}+y-1=0 \Rightarrow y=\frac{37}{10}+1=\frac{47}{10}$.
Cela nous donne le point $\left(-\frac{37}{10}; \frac{47}{10}\right)$, qui est clairement en dehors du triangle ABC.

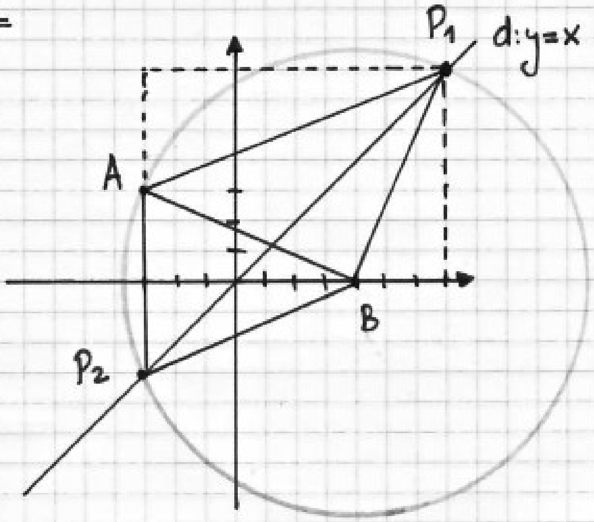
(2)+(B) : $\left.\begin{array}{l} x+y-1=0 \xrightarrow{\cdot(-6)} -6x-6y+6=0 \\ 9x+6y-17=0 \xrightarrow{\cdot 1} 9x+6y-17=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 3x-11=0 \Rightarrow 3x=11 \Rightarrow x=\frac{11}{3}$.
Avec $x=\frac{11}{3}$, on a $\frac{11}{3}+y-1=0 \Rightarrow y=1-\frac{11}{3}=-\frac{8}{3}$.
Cela nous donne le point $\left(\frac{11}{3}; -\frac{8}{3}\right)$, qui est clairement en dehors du triangle ABC.

Comme l'intersection des bissectrices (= centre du cercle inscrit) est toujours à l'intérieur du triangle ABC, le seul point qui joue est $\left(-\frac{13}{15}; \frac{62}{15}\right)$.
On a ainsi $M\left(-\frac{13}{15}; \frac{62}{15}\right)$.
Le rayon du cercle sera donné par $r=\text{dist}(M;d_1)=\text{dist}(M;d_2)=\text{dist}(M;d_3)$.
On a : $\text{dist}(M;d_1)=|x+2|=\left|-\frac{13}{15}+2\right|=\frac{17}{15}$;
$\text{dist}(M;d_2)=|y-3|=\left|\frac{62}{15}-3\right|=\frac{17}{15}$;
$\text{dist}(M;d_3)=\frac{|5x+12y-60|}{13}=\frac{1}{13}\left|5\cdot\left(-\frac{13}{15}\right)+12\cdot\frac{62}{15}-60\right|=\frac{1}{13}\left|-\frac{13}{3}+\frac{248}{5}-60\right|=\frac{1}{13}\left|\frac{-221}{15}\right|=$
$=\frac{1}{13}\cdot\frac{221}{15}=\frac{17}{15}$.
Le rayon du cercle est donc $\frac{17}{15}$. On a $\left(\frac{17}{15}\right)^2=\frac{289}{225}$

L'équation du cercle cherché est donc $\underline{\underline{\left(x+\frac{13}{15}\right)^2+\left(y-\frac{62}{15}\right)^2=\frac{289}{225}}}$.

On pourrait l'écrire $\left(\frac{15x+13}{15}\right)^2+\left(\frac{15y-62}{15}\right)^2=\frac{289}{225} \Rightarrow \frac{(15x+13)^2}{225}+\frac{(15y-62)^2}{225}=\frac{289}{225}$
$\Rightarrow \underline{\underline{(15x+13)^2+(15y-62)^2=289}}$.

Exercice 55



Comme le triangle doit être isocèle en B, le point A et les points P sont sur un cercle centré en B et de rayon $r = AB$.

On a $r = AB = \|\vec{AB}\| = \|\vec{OB} - \vec{OA}\| = \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{7^2 + (-3)^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$.

L'équation du cercle est donc $(x-4)^2 + y^2 = 58$.

Les points P sont les intersections de ce cercle et de d :

$$\begin{Bmatrix} (x-4)^2 + y^2 = 58 \\ y = x \end{Bmatrix} \Rightarrow (x-4)^2 + x^2 = 58 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 + x^2 = 58$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 8x + 16 = 58 \Rightarrow 2x^2 - 8x - 42 = 0$$

$\Rightarrow x^2 - 4x - 21 = 0$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a = 1$, $b = -4$ et $c = -21$.

On a $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-21) = 16 + 84 = 100$ et $\sqrt{\Delta} = 10$.

Les solutions sont $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4+10}{2 \cdot 1} = \dfrac{14}{2} = 7$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4-10}{2 \cdot 1} = \dfrac{-6}{2} = -3$.

Avec $x_1 = 7$, on a $y_1 = x_1 = 7$ et, avec $x_2 = -3$, on a $y_2 = x_2 = -3$.

Les points cherchés sont donc $\underline{P_1(7;7) \text{ et } P_2(-3;-3)}$.

On a aire AP_1BP_2 = aire AP_1B et aire AP_2B.

Aire $AP_2B = \dfrac{6 \cdot 7}{2} = 21$.

aire $AP_1B = 7 \cdot 10 - \dfrac{4 \cdot 10}{2} - \dfrac{3 \cdot 7}{2} - \dfrac{7 \cdot 3}{2} = 70 - 20 - 10{,}5 - 10{,}5 = 29$.

Ainsi l'aire de AP_1BP_2 est $21 + 29 = \underline{50}$.

Exercice 56

a. Cherchons les intersections de la droite et du cercle:

$$\left\{\begin{array}{l} y = mx \\ x^2+y^2-10x+16=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+(mx)^2-10x+16=0$$
$$\Rightarrow x^2+m^2x^2-10x+16=0$$
$$\Rightarrow (1+m^2)x^2-10x+16=0.$$

C'est une équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1+m^2$, $b=-10$ et $c=16$.

On sait qu'il y aura 2 solutions (la droite coupe le cercle) si $\Delta = b^2-4ac > 0$.

On a $\Delta = b^2-4ac = (-10)^2-4(1+m^2)\cdot 16 = 100-64-64m^2 = 36-64m^2$

On aura $36-64m^2>0 \Leftrightarrow 36>64m^2 \Leftrightarrow m^2 < \frac{36}{64} = \frac{9}{16} \Leftrightarrow -\frac{3}{4} < m < \frac{3}{4}$.

Ainsi, si $-\frac{3}{4} < m < \frac{3}{4}$, la droite coupe le cercle.

b. La droite sera tangente au cercle s'il n'y a qu'un point d'intersection entre la droite et le cercle. Cela signifie que le système ci-dessus n'a qu'une solution. De même pour l'équation $(1+m^2)x^2-10x+16=0$. Ainsi il faut que $\Delta=0$. Comme $\Delta = 36-64m^2$, cela nous donne $36-64m^2=0 \Rightarrow m^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow m = \pm\frac{3}{4}$.

Ainsi, si $m=-\frac{3}{4}$ ou $\frac{3}{4}$, la droite est tangente au cercle.