GRAVITATION

Bref historique

Dans l'Antiquité, au Moyen-Age et jusqu'à la Renaissance (15ème -16ème siècles), on pensait que la Terre était au centre de l'Univers et que tous les astres avaient des mouvement circulaires autour d'elle. On avait d'excellentes raisons de penser ainsi: d'abord parce que tout montrait que la Terre est immobile: en effet, personne ne perçoit, constate ou mesure son mouvement, c'est donc "scientifiquement" aberrant d'affirmer qu'elle bouge; ensuite l'Eglise affirme que la Terre est immobile, c'est un dogme et ne se discute pas, elle interdit de proférer comme de professer une idée différente. La théologie est toute puissante: Dieu a créé le Ciel, la Terre puis l'Homme qu'Il a placé au centre du Monde pour admirer et vénérer l'Oeuvre. Cette conception est appelée *géocentrisme*. Pourtant, en 1543, Copernic bouscule cette vision de l'Univers et affirme prudemment que c'est le Soleil qui occupe le position centrale et que la Terre est une planète tournant d'un mouvement circulaire uniforme autour de lui. Dès cette époque, la science (mais pas toujours d'autres pensées) ne se départira plus de l'*héliocentrisme*, malgré bien de douloureuses réticences au 17ème siècle (affaire Galilée, par exemple).

Trois grands noms émergent dans l'histoire de l'astronomie et de la gravitation, ce sont, dans l'ordre chronologique, Johann Képler (1571-1630), Isaac Newton (1642-1727) et Albert Einstein (1879-1955). Nous ne pourrons traiter (brièvement) les théories que des deux premiers, celles d'Einstein dépassant largement nos possibilités de physique et de mathématiques.

Képler, copernicien convaincu, au début du 17ème siècle a été le premier à montrer que les trajectoires des planètes ne sont pas circulaires mais *elliptiques*, le Soleil occupant, non pas le centre de l'ellipse, mais l'un de ses *foyers*. A l'époque de Képler la physique était quasiment inexistante, elle apparaîtra vers la fin de ce 17ème avec Newton, mais Képler réussit, par des méthodes géométrico-mystiques et avec beaucoup de travail, d'ardeur et aussi d'un peu de chance, à établir les trois lois qui portent son nom et qui sont encore valables aujourd'hui. Leur connaissance fait partie du bagage de tout(e) lycéen(e).

Une véritable théorie de la gravitation est donc apparue avec Newton vers la fin du 17ème siècle. Lorsqu'elle fut comprise et admise par la communauté scientifique au début du 18ème siècle, ce fut une véritable révolution intellectuelle. Le pouvoir de prédiction des phénomènes astronomiques qu'elle décrivait était d'une incroyable précision, à tel point qu'elle devint LA théorie scientifique par excellence. Cet engouement fut même parfois néfaste parce qu'on lui prêtait des propriétés explicatives dans des domaines où elle n'avait rien à voir (la physiologie, la médecine !).

Depuis le 18ème siècle la théorie de la gravitation de Newton a été considérablement améliorée mais les idées de base de Newton sont toujours d'actualité. Tous les astronomes et les spécialistes qui s'occupent de navigation spatiale et lancent des satellites l'utilisent abondamment.

Ce n'est qu'au début du 20ème siècle qu'une autre théorie de la gravitation, reposant sur des principes radicalement différents, a été proposée par Einstein. Sa théorie ne montre absolument pas que celle de Newton est fausse, mais seulement qu'elle n'est qu'un cas particulier de la sienne. En effet, la théorie de Newton ne donnait pas exactement les résultats en accord avec l'expérience lorsque des champs de gravitation très intenses étaient en jeu. Le cas typique est le mouvement de la planète Mercure, la plus proche du Soleil, qui s'explique plus correctement par la théorie de la Relativité Générale d'Einstein que par la théorie de Newton.

Notons finalement que le mouvement de rotation de la Terre n'à pu être expérimentalement démontré que vers le milieu du 19ème siècle grâce à Léon Foucault et son fameux pendule.

Ce chapitre sera divisé en quatre parties:

1. **Force de gravitation.** page 3
2. **Satellites en orbites circulaires - 3ème loi de Képler.** page 11
3. **Energie et gravitation.** page 17
4. **Orbites non circulaires - Moment cinétique.** page 23

Exercices page 29

Les trois premières seront étudiés en deuxième année, la quatrième ne le sera qu'en troisième année.

1. Force de gravitation

Paradoxe de la gravitation: *il est souvent plus facile de soulever une fille que de la laisser tomber.* Woody Allen.

Tomber *amoureux n'a rien à voir avec la théorie de la gravitation.* Albert Einstein.

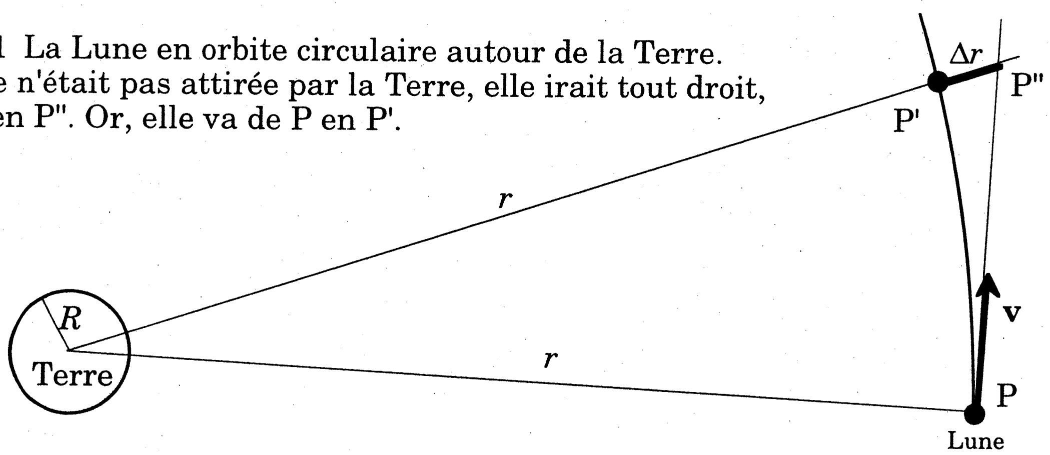
1.1. La Lune et la pomme

Par une belle soirée, le sieur (pas encore Sir) Isaac Newton est dans son jardin, paisiblement assis sur un banc. On est vers 1674 en Angleterre, il a une trentaine d'années. Le ciel est découvert et il regarde la Lune. Il n'y a personne à qui faire la cour alors il observe et réfléchit. Il a un cerveau qui fonctionne à merveille, il sait s'en servir et il a une capacité de travail considérable (le génie est 10 % d'inspiration et 90 % de transpiration).

Il regarde la Lune et voit une pomme tombant de son pommier (les pommes tombant de baobabs sont plus rares), on devait être en septembre. Il lui vient alors l'idée la plus révolutionnaire qu'un quelconque humain ait jamais eue: le mouvement circulaire de la Lune autour de la Terre et la chute de la pomme sur le sol terrestre ont la même cause! Autrement dit, la Lune est en chute libre permanente sur la Terre; elle nous tombe dessus mais nous rate constamment!

Reprenons très schématiquement la démarche suivie par notre héros (immortalisé par Gotlib dans la RAB) pour montrer tout d'abord que la Terre exerce une force sur les objets, (pomme, Lune, ...) et ensuite que cette force *décroit comme le carré de la distance.*

Fig. 1 La Lune en orbite circulaire autour de la Terre. Si elle n'était pas attirée par la Terre, elle irait tout droit, de P en P''. Or, elle va de P en P'.



Prenons donc la Lune se trouvant à un certain instant au point P de sa trajectoire supposée circulaire de rayon r. Si la Lune n'était soumise à aucune force son mouvement serait rectiligne à $\mathbf{v} = \mathbf{const}$.

(MRU) et après un intervalle de temps qu'on note simplement t et qu'on choisit petit, elle serait au point P". Or, elle se trouve au point P', séparé de P" par une distance noté Δr.

Considérons la distance Δr comme une **chute libre verticale** d'une hauteur $\Delta r = h$ de la Lune sur la Terre et appliquons ce que Galilée faisait déjà quelques dizaines d'années avant Newton:

$$h = \Delta r = \frac{1}{2} g_L t^2 \qquad (1)$$

où g_L est l'accélération de pesanteur à l'endroit où se trouve la Lune, parce qu'il n'y a aucune raison de penser que l'accélération de pesanteur à l'endroit de la Lune est la même que pour la pomme, en effet on s'attend bien à ce qu'elle diminue lorsqu'on s'éloigne de la Terre. Le but est de **trouver ce que vaut** g_L.

Examinons d'autre part la distance Δr du point de vue géométrique en considérant le triangle rectangle en P et appliquons Pythagore:

$$(r + \Delta r)^2 = r^2 + (vt)^2 \Rightarrow \Delta r = \sqrt{r^2 + (vt)^2} - r$$

où vt est la distance PP" (ou PP', pas de différence si t est petit, et on peut le prendre arbitrairement petit) parcourue par la Lune à la vitesse v pendant le temps t. On écrit:

$$\Delta r = r\sqrt{1 + \frac{v^2 t^2}{r^2}} - r$$

et puisque la distance vt est petite par rapport à r, on utilise l'approximation (voir F&T, p. 92, éd. 2000) :

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} \quad \text{pour } x \ll 1$$

ce qui donne:

$$\Delta r \approx r\left(1 + \frac{v^2 t^2}{2r^2}\right) - r = \frac{v^2 t^2}{2r} \qquad (2)$$

Les relations (1) et (2) donnent toutes deux Δr, donc (1) = (2) => $g_L = v^2/r$. Voilà qui est important. Ainsi, g_L n'est autre qu'une accélération centripète, ce à quoi on pouvait s'attendre. Et si on remplace v par son expression dans un MCU, puisqu'il s'agit de cela: $v = 2\pi r/T$, où T est la période de révolution de la Lune, on obtient:

$$g_L = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

A l'époque de Newton la distance Terre-Lune r et la période de révolution (sidérale) T de la Lune était relativement bien connues (quoique r moins bien que T); remplaçant alors par ces valeurs numériques, on trouve:

$$g_L \approx 2{,}72.10^{-3} \text{ m/s}^2$$

Comparons maintenant cette valeur de g à l'altitude de la Lune à la valeur de g à la surface de la Terre, ce qui serait l'accélération de la pomme: $g_p = 9{,}81$ m/s^2 :

$$g_p / g_L \approx 3600$$

ce qui signifie que l'attraction terrestre est environ 3600 fois plus faible à l'endroit de la Lune qu'à la surface terrestre, à l'endroit de la pomme. L'idée (géniale!) de Newton a été de remarquer que la distance Terre-Lune est (en moyenne) très proche de 60 fois la valeur du rayon terrestre R, c-à-d de la distance à laquelle la pomme se trouve **du centre de la Terre**. En effet:

$$r \approx 384.000 \text{ km} \text{ et } R \approx 6370 \text{ km}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{r}{R}\right) \approx 60{,}3 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{r}{R}\right)^2 \approx 3600$$

La distance est 60 fois plus grande, l'attraction due à la Terre est $(60)^2$ fois plus petite.

La conclusion fondamentale à laquelle Newton est arrivé est que la Terre exerce une force d'attraction sur tout corps, aussi bien sur la pomme que sur la Lune et que cette force décroit comme le **carré de la distance** qui sépare le corps du centre de la Terre (fig. 2).

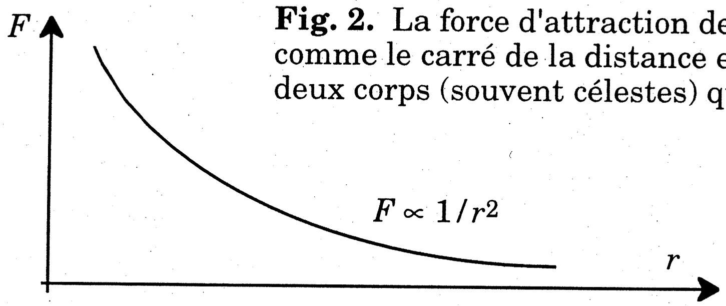


Fig. 2. La force d'attraction de gravitation décroit comme le carré de la distance entre les centres des deux corps (souvent célestes) qui ne font que s'attirer.

1.2. La force de gravitation

Poussant plus loin son idée et la généralisant, il affirma que toute masse m_2 exerce sur toute masse m_1 une force d'attraction, dite de gravitation, dont la grandeur F_{21} est :

$$F_{21} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Cela s'interprète en remarquant d'abord que la force due à m_2 est d'autant plus grande que m_2 est importante, ce qui se traduit le plus simplement par: $F_{21} \propto m_2$; ensuite cette force agissant sur m_1 sera naturellement proportionnelle à m_1 , c-à-d: $F_{21} \propto m_1$. Puis Newton a montré, comme on vient de le voir (§ 1.1), que $F_{21} \propto 1/r^2$. Lorsqu'une grandeur est simultanément proportionnelle à plusieurs, elle est proportionnelle à leur produit. Il ne manque finalement qu'une constante de proportionnalité pour avoir une égalité. On la note G et on la nomme tout naturellement **constante de la Gravitation Universelle**. Cela donne la relation ci-dessus. Personne jusqu'ici n'a pu montrer que cette relation est fausse. C'est la **loi de la gravitation**

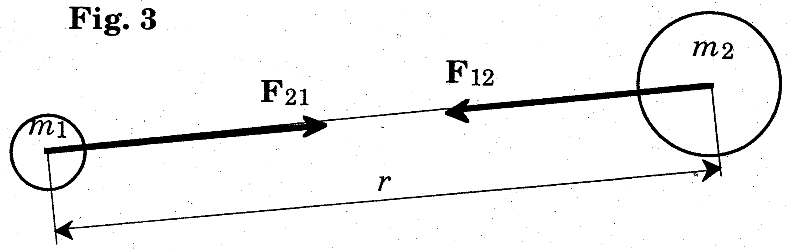
universelle de Newton, qui s'ajoute à ses trois lois *bien connues* de la dynamique.

Remarques, nombreuses et importantes :

a) Le terme de *gravitation* vient de *grave* qui en latin veut dire *lourd* (un événement grave serait lourd à supporter...). Dans la physique primitive, on disait qu'un corps était *grave* lorsqu'il était susceptible de tomber. D'autre part, dans le langage courant actuel, *graviter* est volontiers synonyme de *tourner autour*, tel des électrons qui *gravitent* autour du noyau de l'atome, des moustiques autour d'un candélabre allumé ou des vautours autour d'une charogne. La force de gravitation n'a rien à voir avec les deux derniers exemples, sur lesquels ont ne s'étendra pas, *et ni avec le premier non plus*; d'abord parce que ce n'est aucunement la force de gravitation qui agit sur les électrons de la part du noyau et ensuite parce que les électrons n'ont pas une trajectoire circulaire, ils n'ont même pas de trajectoire du tout, mais cela est une autre histoire, l'une des plus subtile de la physique contemporaine...

b) La force $\mathbf{F}_{21}$ exercée sur m_2 par m_1 est égale en grandeur à la force $\mathbf{F}_{21}$ exercée sur m_1 par m_2, quelles que soient les deux masses, comme on le voit sur la fig. 3. La raison en est la troisième loi de Newton (celle des actions réciproques). En effet, supposons (bêtement) que ces deux forces ne s'opposent pas exactement; la résultante de ces deux forces $\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21}$ ne serait alors pas nulle et le système entier fait de m_1 et de m_2 subirait une force, donc une accélération due à rien du tout. L'hypothèse est donc fausse parce que la conclusion est absurde: les deux forces sont bien égales et opposées. De plus, les deux vecteurs ont la même droite-support, celle qui relie les centres des masses.

Fig. 3



Par la troisième loi de Newton de la dynamique:

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$$

quelles que soient les masses.

c) Les deux masses apparaissent en **produit** dans l'expression, ce qui garantit une situation symétrique du point de vue des deux forces et des deux masses. On remarquera pourtant qu'il y a bien d'autres possibilités de combinaison des deux masses pour maintenir la symétrie, telle la somme $m_1 + m_2$, mais n'expliquerait pas que la force est nulle si l'une des deux masses est nulle. Une autre raison est simplement que $F_{21} = m_1 a_1$, $F_{12} = m_2 a_2$.

d) La loi est valable pour des masses ponctuelles, ce qui est souvent une assez bonne approximation en astronomie ou en astronautique lorsque les distances entre les masses sont beaucoup plus grandes que les dimensions de chacun des deux corps eux-mêmes. La Terre est grosse, 13 000 km de diamètre environ, mais vis-à-vis de sa distance au Soleil, 150 millions de km, ce diamètre est souvent négligeable dans l'étude du mouvement orbital de la Terre, on peut alors la considérer comme une masse ponctuelle.

e) La loi reste cependant valable si les masses ne sont pas ponctuelles mais ont pourtant une symétrie sphérique (isotropie). Cette condition est très souvent réalisée. Dans ce cas il est très important de noter que la distance r est la distance de **centre à centre** de chaque sphère. Une condition cependant est que les deux masses ne doivent pas s'interpénétrer, ce qui entrainerait une expression de la loi quelque peu différente, mais qui a aussi été examinée par Newton. Cela fait conclure que du point de vue gravitationnnel, une masse sphérique exerce le même effet, dans l'espace qui lui est extérieur, qu'un point matériel de même masse.
Les irrégularités de sphéricité de la Terre sont mesurables par les fluctuations de l'orbite de satellites artificiels.

f) La force de gravitation est **toujours attractive**, jamais répulsive, comme peut l'être la force électrostatique (pourquoi cette comparaison?). Les masses sont toujours positives, alors que les charges électriques peuvent être d'un signe ou de l'autre.

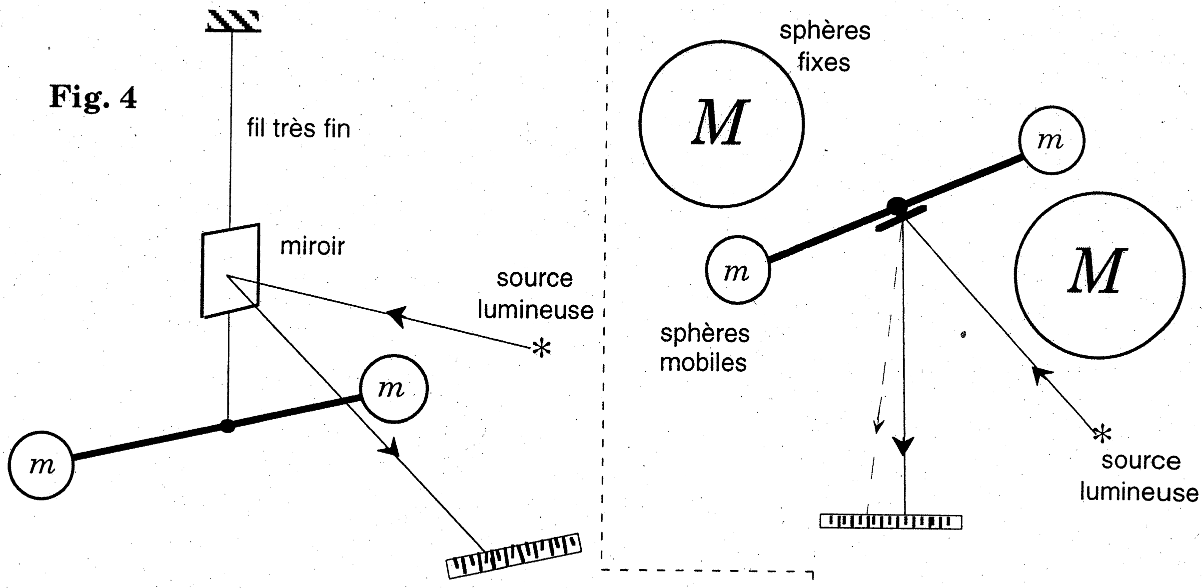
g) La constante G qui apparaît dans la loi n'a pu être déterminée expérimentalement qu'environ un siècle après Newton; ce fut le travail remarquable de **Cavendish**. Il faut en effet observer que pour la déterminer, cela nécessite de connaître simultanément la force, les deux masses et la distance, ce qui est impossible en astronomie. Cavendish (et ses successeurs) ont eu recours à des mesures très délicates **en laboratoire**. La force de gravitation est énorme lorsque les masses sont gigantesques, comme celles des astres, mais entre des objets à l'échelle humaine, cette force est extrêmement faible et très difficile à mesurer. La valeur actuellement admise est: $G = 6{,}6732.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

On se contentera de $\boldsymbol{G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2\ kg^{-2}}}$.

On se rend compte de la petitesse de cette force puisque, par exemple, deux masses de 1 kg chacune, séparées de 1 m s'attirent avec une force de quelques cent milliardièmes de newton. Entre objets à l'échelle humaine, et a fortiori à l'échelle microscopique (les atomes, les molécules), la force de gravitation est **tout à fait négligeable**.

h) **Cavendish** utilisa un *pendule de torsion* (Fig. 4 plus bas) fait d'un fil très fin auquel est suspendue par son milieu une tige légère supportant deux petites sphères de plomb, pouvant tourner dans un plan horizontal. A proximité de celles-ci sont placées deux grosses sphères de plomb, en position fixe et qui vont exercer une attraction de gravitation très très faible sur les petites sphères et provoquer un très léger couple de torsion sur le fil. Un miroir est fixé au fil et permet ainsi, par la réflexion d'un faisceau lumineux, de mesurer le très faible angle de torsion du fil provoqué par la force d'attraction des grosses sphères sur les petites.

Fig. 4



Pendule de torsion de Cavendish, vue "perspective", *M* non représentées.

Vue de dessus.

1.3. La notion de *poids*

Le poids d'une masse m n'est rien d'autre, à quelques détails près (la rotation diurne), que la force d'attraction de gravitation entre cette masse et la masse M de l'astre de rayon R sur lequel elle se trouve, autrement dit:

$$mg = G\frac{m\,M}{R^2} \quad \Rightarrow \quad g = G\frac{M}{R^2}$$

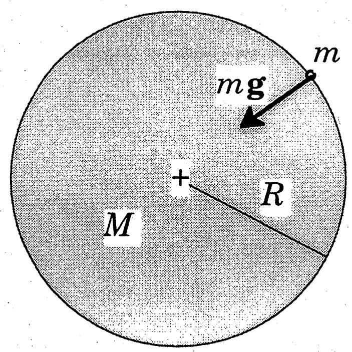


Fig. 5.

l'accélération de la pesanteur **g** est ainsi conditionnée par les caractéristiques de l'astre: sa masse et son rayon.

Exemples d'applications:

a) Il est facile de déterminer la masse de la Terre si on en connait son rayon R (assez bien connu dès l'Antiquité, grâce à Eratosthène) et si on mesure g, par la chute libre par exemple :

$$M = \frac{g\,R^2}{G} \approx \frac{9{,}81\ .\ \left(6{,}37.10^6\right)^2}{6{,}67.10^{-11}} \approx 5{,}97.10^{24}\,\mathrm{kg}$$

b) Il est aussi facile de calculer quel serait le poids d'une masse à la surface d'un astre dont on connait les caractéristiques, ainsi pour la Lune, par exemple :

$$g = G\frac{M_L}{R_L^2} \approx 6{,}67.10^{-11}.\frac{7{,}35.10^{22}}{\left(1{,}74.10^{6}\right)^2} \approx 1{,}62\ \mathrm{m/s}^2$$

un poids de 600 N sur Terre ne serait ainsi que de 100 N sur la Lune. La masse n'ayant bien sûr pas changé.

c) Les calculs de g ci-dessus sont valables **à la surface** de l'astre. Pour trouver g à une altitude h quelconque *au dessus* de la surface, il faut écrire :

$$g = G\frac{M}{(R+h)^2} = G\frac{M}{R^2\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} = g_0\frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} = g_0\frac{R^2}{(R+h)^2}$$

où $g_0 = \dfrac{GM}{R^2}$ est la valeur de g à la surface.

Pour une **faible altitude**, on peut développer le carré et considérer que $h << R$, ce qui permet de négliger $(h/R)^2$ et obtenir:

$$g \approx g_0\frac{1}{1+2h/R}$$

Calculons à titre d'exemple à quelle altitude au dessus de la Terre g aurait diminué de 1 ‰ (donc env. 9,80 au lieu de 9,81), ce qui revient à $g/g_0 = 0{,}999$; par conséquent : $1 + 2h/R = 1{,}001$, donc :

$$\frac{2h}{R} = 0{,}001 \Rightarrow h = \frac{0{,}001R}{2} \approx 3{,}2\ \mathrm{km}.$$

Question: à quelle altitude (à priori pas faible) au dessus d'un astre le poids d'une masse est-il deux fois plus faible qu'à sa surface?

Réponse:

$$g = \frac{g_0}{2} \text{ c-à-d: } \frac{GM}{(R+h)^2} = \frac{GM}{2R^2} \Rightarrow R + h = \sqrt{2}\,R \Rightarrow h \approx 0{,}41\,R$$

Pour la Terre, cela correspond à une altitude de 2640 km environ.

2. Satellites en orbites circulaires Lois de Képler

Tout d'abord, en parenthèse, une question simple et saugrenue : avez-vous vraiment déjà vu un cercle ?

Au début du 17ème siècle, J. Képler, fervent adepte de l'héliocentrisme (c'est quoi ça? ça s'oppose à quoi?) avait observé, comme bien des astronomes de son temps, que les périodes de révolution des planètes autour du Soleil étaient d'autant plus longues qu'elles en étaient éloignées.

Autre parenthèse: *Quelles sont, dans l'ordre en partant du Soleil, les noms de ces planètes?*

A l'époque de Képler, toutes les observations astronomiques se faisaient à l'oeil nu et la détermination expérimentale des *périodes* n'était pas chose facile mais possible. La mesure des *distances* astronomiques était par contre quasiment impossible, surtout en absolu. On avait tout au plus quelque idée des distances *relatives* des planètes au Soleil. Képler soupçonna une relation mathématique, et c'est là la grande originalité de la démarche du bonhomme, entre *période* et *distance* pour chaque planète et s'attacha à la trouver. La physique de son époque était quasi-inexistante, mais il utilisa des considérations mystico-géométriques et parvint au résultat suivant (juste, démontré correctement par Newton quelques décennies plus tard):

> *"Le carré de la période de révolution T des planètes est proportionnel au cube du grand axe de leur orbite "*: $T^2 \propto a^3$, ou bien: $T^2 = k\, a^3$,

où a est le demi-grand axe et k une constante, *la même pour toutes* les planètes.

Restons pourtant dans la situation simple et pas très fausse des *orbites circulaires*. Dans ce cas, le grand axe de l'ellipse est simplement un diamètre du cercle, c-à-d $a = r$, rayon du cercle.

Considérons deux planètes tournant autour du Soleil. Soient T_1 et T_2 leur périodes, ainsi que r_1 et r_2 le rayon de leur orbite respective. Alors:

$$T_1^2 = k r_1^3 \quad \text{et} \quad T_2^2 = k r_2^3 \quad \text{ce qui se traduit en:} \quad \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$$

Avec cela, Képler pouvait calculer toutes les distances *relatives* des planètes au Soleil, c'-à-d en unité de distance Terre-Soleil. Ainsi par exemple, si l'indice 1 se réfère à la Terre et l'indice 2 à Jupiter, on calcule le rayon de l'orbite de Jupiter:

$$\frac{r_2}{r_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow r_2 = r_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Mesurant que $T_2 \approx 12$ ans (et $T_1 = 1$ an, évidemment) on calcule que Jupiter est alors environ 5,2 fois plus éloignée du Soleil que l'est la Terre.

N'ayant pas de physique, Képler ne pourra jamais connaître la constante de proportionnalité k de sa loi, ce qui ne l'intéresse d'ailleurs pas vraiment. Il faudra attendre la fin de ce 17ème siècle avec Newton qui mettra en oeuvre sa dynamique géniale (mais oui !). Cette fois Newton *démontre* la loi de Képler, ce qu'on va faire ici pour le cas particulier simple de **l'orbite circulaire** (une loi démontrée n'est alors plus une loi mais un théorème, mais passons):

Une planète de masse m en MCU autour du Soleil, de masse M, est soumise à la force de gravitation de la part de celui-ci. La 2ème loi de Newton pour cette unique force s'écrit:

$F = G\frac{mM}{r^2} = ma = m\frac{v^2}{r}$ ce qui se simplifie en :

$G\frac{M}{r} = v^2$ (*) et donne la vitesse de la planète :

$v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$ qui ne dépend pas de sa masse (!)

Pour trouver la période, il suffit de prendre la relation bien connue entre période T et vitesse v dans un MCU :

$$v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

remplaçant ceci dans (*), on obtient :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \qquad \textit{alors } k = \frac{4\pi^2}{GM}$$

c'est la **troisième loi deKépler** (pour des orbites *circulaires*).

Pour avoir sa formulation **générale** (qu'on ne démontrera pas), il suffit de remplacer le rayon du cercle r par le **demi-grand axe** a de l'orbite elliptique:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

troisième loi de Képler (pour des orbites elliptiques).

Exemple d'application: la masse des planètes (ou d'autres astres).

Si un astre possède un (ou des) satellite(s), l'application de cette 3ème loi de Képler rend la détermination de la masse M de l'astre en question extrêmement simple. Il suffit en effet de connaître la période T et le rayon r de l'orbite de son satellite dans le cas circulaire, ou le grand axe de l'ellipse dans le cas général. Restons pourtant toujours dans le cas circulaire. Extrayant M de la 3ème loi on obtient:

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{G\,T^2}$$

Il est important de souligner que la masse m du satellite n'intervient pas. M est la masse de l'astre central, conditionnant l'orbite du satellite.

a) **Masse de la Terre**. Nous avons fait au précédent chapitre un tel calcul en utilisant la valeur de l'accélération de la pesanteur g. Utilisons maintenant le satellite naturel de la Terre, la Lune, dont l'orbite est presque circulaire, r = 384 000 km et la période (sidérale) de révolution est T = 27,33 jours. En mettant les bonnes unités on arrive au résultat connu: $M_T \approx 6.10^{24}$ kg (à 0,5 % près).

b) **Masse du Soleil**. Il possède des satellites, la Terre en est un, dont l'orbite est presque circulaire de rayon $r = 1{,}496.10^{11}$ m (c'est une **u**nité **a**stronomique : 1 UA) et dont la période T de révolution autour du Soleil est de 1 an, par définition. Appliquant la formule ci-dessus, toujours avec les bonnes unités, on arrive à $M_S \approx 2.10^{30}$ kg (à 0,4 % près). Notons ici qu'on pourra prendre 1 UA ≈ $1{,}5.10^{11}$ m, à 0,3 % près.

c) **Question**: Quelles sont les planètes du système solaire pour lesquelles il est (relativement) facile d'en déterminer la masse et quelles sont celles pour lesquelles c'est (relativement) difficile? Et pourquoi?

Les deux premières lois de Képler

La première. Elle dit:

"Les planètes ont des orbites elliptiques autour du Soleil. Il occupe l'un des foyers de l'ellipse".

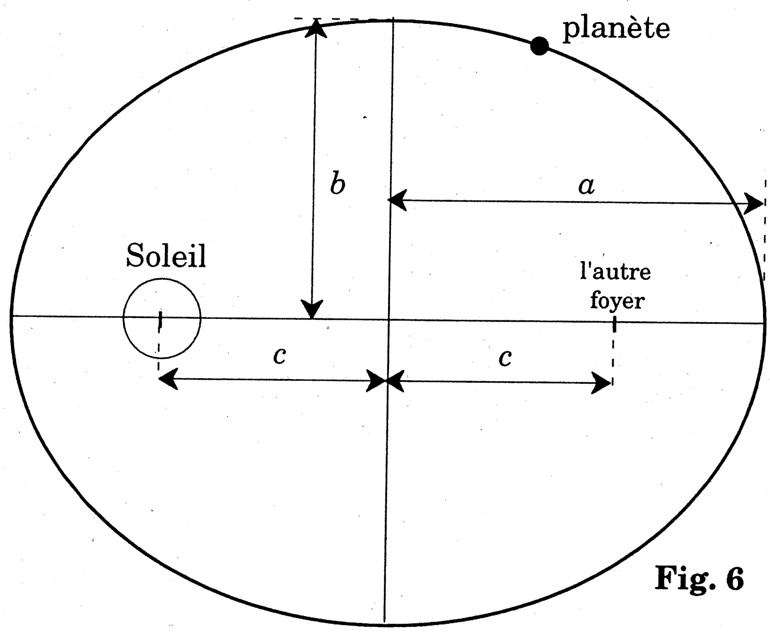
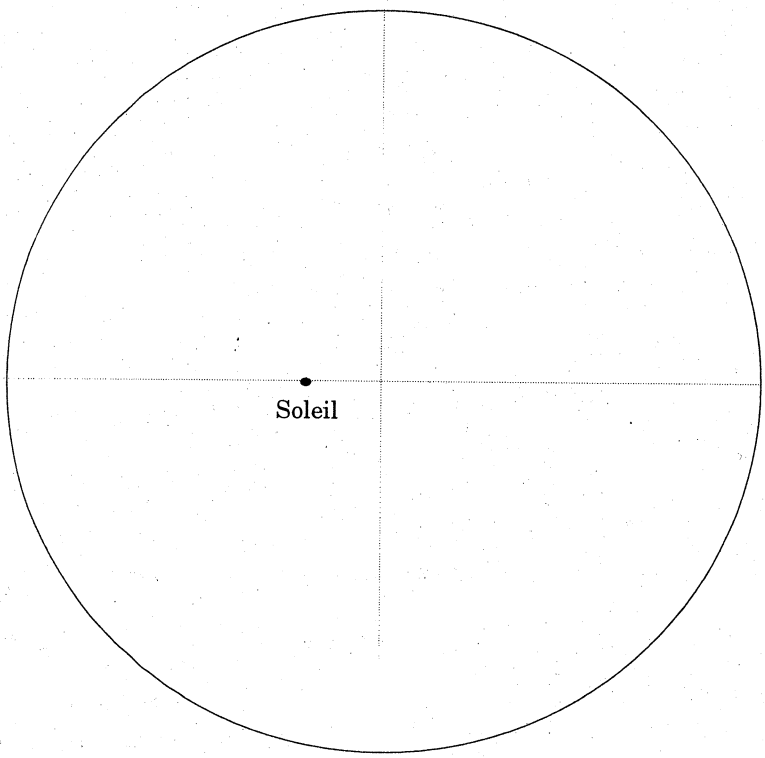


Fig. 6

Dessin représentatif mais pas très réaliste: les orbites des planètes ne sont pas aussi elliptiques que cela (voir fig. suivante). Et le Soleil n'est pas si gros.

On définit l'*excentricité* e de l'orbite comme "l'imperfection" relativement au cercle par $e = c/a$.
Pour un cercle, $a = b = r$, $e = 0$ car $c = 0$.
La géométrie dit que pour toute ellipse:

$$a^2 - b^2 = c^2$$



L'orbite de la planète la plus excentrique: Mercure, pour laquelle e = 0,2.
Malgré les apparences, *ce n'est pas un cercle*, comme on peut le vérifier en mesurant soigneusement les deux axes sur la figure. La position (et le diamètre) du Soleil est respectée selon les proportions des deux axes. La planète ne peut évidemment pas être dessinée à cette échelle, son diamètre serait de l'ordre de 0,004 mm.

Des caractéristiques des planètes se trouvent dans le F & T.

Voilà une belle surprise pour l'époque. Pensez-donc! Non seulement, les planètes, ces astres, considérés comme de nature divine, donc parfaits, n'ont pas le mouvement parfait, c'est-à-dire absolument circulaire et uniforme, mais une "espèce d'ovale", l'ellipse. De plus, comble de l'hérésie, le Soleil, grand maître du ballet planétaire, n'est même pas au centre de cette fichue ellipse, il est à l'un des foyers, c-à-d quelque part décalé par rapport au centre. Et à l'autre foyer, il n'y a rien! Dissymétrie choquante! Etonnement, incrédulité, scandale! Et pourtant, Képler avait raison, la Nature est ainsi.

La deuxième loi. Elle dit:

... quelque chose que nous pourrons étudier dans la quatrième partie de ce chapitre, et de nouveau grâce à Newton, qui a vraiment tout compris le premier. Parce que Képler, qui a découvert sa loi, n'en a vu que l'aspect pragmatique, n'en a pas du tout compris la portée, n'a vraiment pas vu qu'il y avait une nouvelle loi de conservation derrière sa 2ème loi, loi de conservation absolument fondamentale jusque dans les aspects les plus subtils de la physique contemporaine. Même le grand Newton n'avait semble-t-il pas bien perçu cette loi de conservation.

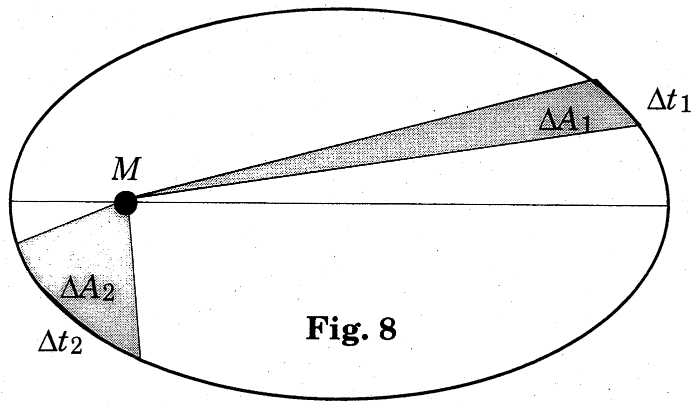


Fig. 8

Cette 2ème loi dit ceci:

" *Les planètes balaient des aires égales en des temps égaux*".

Cela revient à :

$$\Delta A_1 = \Delta A_2 \text{ si } \Delta t_1 = \Delta t_2$$

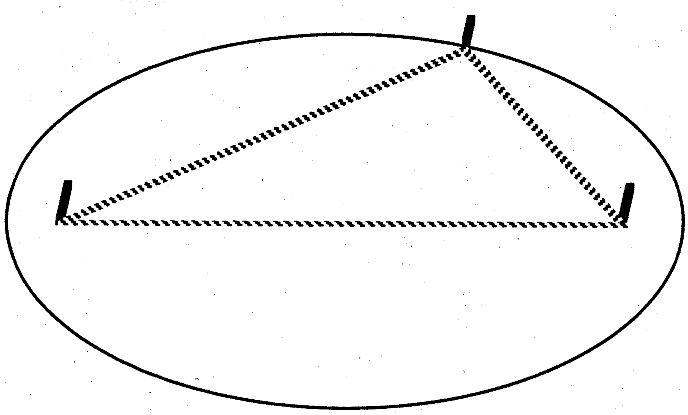
sera démontré dans la 4ème partie de ce cours.

... et l'ellipse du jardinier, vous connaissez ?

Un jardinier à l'envie (ou l'ordre) de planter des bulbes de tulipes en automne de façon à ce qu'au printemps les fleurs dessinent une belle ellipse. C'est un jardinier cultivé, il connait sa géométrie et sait que l'une des définitions de l'ellipse est:

"le lieu géométrique dont la somme des distances à deux points fixes est constante".

Il prend alors trois piquets et une ficelle dont il réunit les extrémités. Il enfonce dans la terre deux de ses piquets et tend la corde sur les deux piquets au moyen du troisième, qu'il déplace tout autour, laissant ainsi un sillon dans le sol. Il a appliqué la définition ci-dessus puisque la ficelle tendue a une longueur fixe. La figure ci-dessous doit être explicite. Les deux piquets plantés définissent les foyers de l'ellipse, comme on pourra le démontrer.



L'ellipse du jardinier:

Il est très profitable de faire *soi-même* l'expérience avec par exemple un carton, deux punaises, une ficelle et un crayon.

Fig. 9

3. Energie et gravitation

3.1. Energie potentielle

Depuis près de 4,6 milliards d'années les planètes tournent immuablement autour du Soleil, les forces de frottement sont pratiquement nulles puisque le vide est (presque) parfait. Ce fait précieux permet de mettre en oeuvre **l'énergie mécanique** et sa conservation, ce qui impose de se définir une **énergie potentielle de gravitation**.

Pour cela, il faut partir de la **définition générale de l'énergie potentielle** en un point P comme étant

le travail de la force (ici de gravitation) entre ce point et un point de référence R choisi tel que l'énergie potentielle y soit nulle.

Il y a une infinité de possibilités, la plus simple est dans ce cas de choisir *le point à l'infini*, là où la force de gravitation est *nulle*. On écrit donc, par **définition** de l'énergie potentielle et du travail:

l'E_{pot} (de gravitation) en un point P est le travail de la force (de gravitation) de ce point au point de référence R, ce qui se traduit par:

$$E_{\text{pot}}(\text{P}) = A_{\text{P,R}}(\mathbf{F}_{\text{G}}) = \sum \mathbf{F}_{\text{G}} \cdot \Delta\mathbf{r}$$

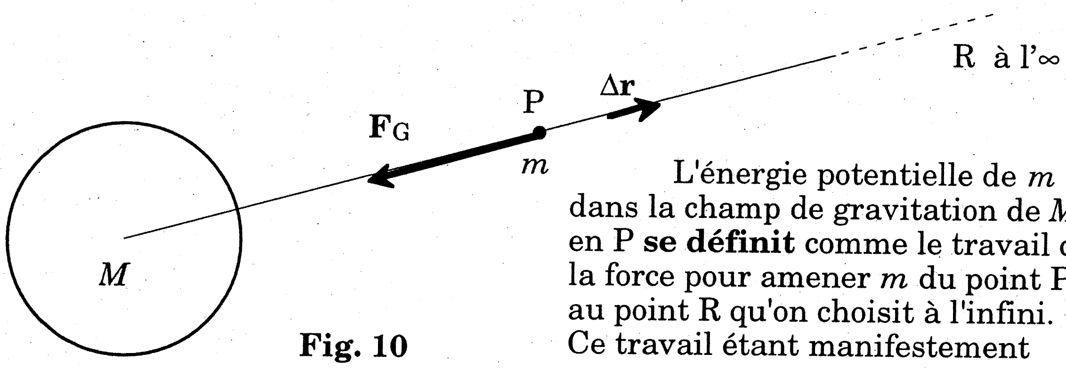


Fig. 10

L'énergie potentielle de m dans la champ de gravitation de M en P **se définit** comme le travail de la force pour amener m du point P au point R qu'on choisit à l'infini. Ce travail étant manifestement négatif ($\mathbf{F}_{\text{G}}$ de sens opposé à $\Delta\mathbf{r}$), l'énergie potentielle l'est donc aussi.

Or on est incapable de calculer le travail sous cette forme, à moins d'écrire la somme sous forme d'intégrale, qu'on peut alors calculer si on connait le calcul intégral (et si on ne le connait pas encore, on laisse de côté cette démonstration et on se contente de n'en considérer que le résultat, c-à-d l'expression finale de l'énergie potentielle) :

$E_{\text{pot}}(\text{P}) = \int_{\text{P}}^{\text{R}} \mathbf{F}_{\text{G}} \cdot \mathbf{dr}$, mais $\mathbf{F}_{\text{G}}$ est opposé au $\mathbf{dr}$ allant de P à R, donc:

$$E_{\text{pot}}(\text{P}) = -\int_{\text{P}}^{\text{R}} F_{\text{G}}\,\text{d}r = -\int_{\text{P}}^{\text{R}} \frac{GmM}{r^2}\,\text{d}r = -GmM\int_{\text{P}}^{\text{R}} \frac{\text{d}r}{r^2} =$$

$$= \left[-GmM\left(-\frac{1}{r}\right)\right]_{\text{P}}^{\text{R}} = -\frac{GmM}{r_{\text{P}}} \quad \text{puisque } \frac{1}{r_{\text{R}}} = 0$$

Finalement, l'énergie potentielle d'une masse m dans le champ de gravitation d'une masse M et à une distance r du centre de celle-ci s'écrit :

$$E_{\text{pot}} = -\frac{GmM}{r}$$

Remarques:

a) Par la commutativité du produit des masses, l'énergie potentielle de la masse M dans le champ de gravitation de m a exactement la même expression.

b) L'énergie potentielle de gravitation est *toujours négative*, ce qui ne doit pas étonner puisque le travail de la force de gravitation lorsqu'on s'éloigne de l'astre attracteur est négatif, la force s'opposant à ce déplacement.

c) Si on se donne tant de peine pour avoir une énergie potentielle c'est parce qu'alors on peut utiliser la conservation de l'énergie mécanique. On pourrait utiliser le théorème de l'énergie cinétique, toujours valable, mais il faudrait à chaque fois calculer une intégrale pour obtenir le travail de la force, ici non vectoriellemnt constante, ce qu'on s'épargne dorénavant, le calcul ci-dessus est fait une fois pour toutes.

Question pertinente:

D'une part on a montré que le poids est une force de gravitation et d'autre part on sait depuis longtemps que l'énergie potentielle de *pesanteur* s'écrit mgh. Qu'en est-il alors maintenant avec cette nouvelle expression de ce qui devrait être la même chose ?

Réponse élaborée:
C'est (un peu) la même chose, mais mgh n'est qu'un *cas particulier simple* de l'expression générale établie ci-dessus. Montrons cela, en faisant voir que tout est question de l'importance de la différence d'altitude, faible ou non vis-à-vis du rayon de l'astre.
Calculons la **différence** d'énergie potentielle pour deux points à des distances r_1 et r_2 du centre de l'astre, donc séparés par la différence d'altitude $h = r_2 - r_1$:

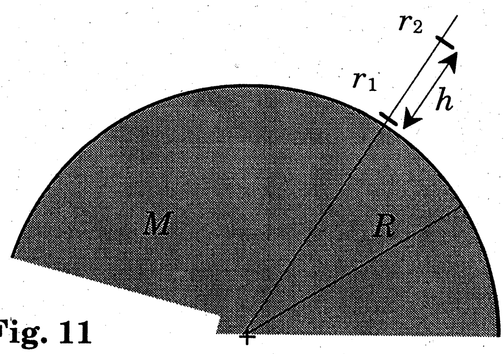


Fig. 11

$$\Delta E_{\text{pot}} = -\frac{GmM}{r_2} - \left(-\frac{GmM}{r_1}\right) = GmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = GmM\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right) = GmM\frac{h}{r_1 r_2}$$

Si la différence d'altitude est faible, c-à-d si $r_2 - r_1 << r_1$ ou r_2 alors $r_1 r_2 \approx r^2$. (Si $r_1 = R$ alors $r_1 r_2 \approx R^2$). Dans cette hypothèse:

$$\Delta E_{\text{pot}} \approx GmM\frac{h}{R^2} = \frac{GM}{R^2} m h = mgh \quad \text{puisque } g = \frac{GM}{R^2} \quad \text{(voir p. 8)}$$

Illustration:

Soyons sur la Lune (masse M, rayon R); elle n'a pas d'atmosphère, il n'y a donc pas de frottement aérodynamique et l'énergie mécanique est ainsi bien conservée. Du sol lunaire on lance verticalement une masse m avec une vitesse initiale v_1. Examinons la hauteur h maximum atteinte (où $v_2 = 0$) selon la valeur de v_1 et voyons dans quelle mesure on peut faire l'approximation ci-dessus.

Il s'agit donc de calculer $h = f(v_1)$; allons-y d'abord par le calcul exact, sans approximation :

$$\Delta E_{\text{méc}} = 0 \Longleftrightarrow \Delta E_{\text{pot}} = -\Delta E_{\text{cin}} \quad \text{où} \quad \Delta E_{\text{cin}} = \left(\frac{1}{2}m v_2^2 - \frac{1}{2}m v_1^2\right) = -\frac{1}{2}m v_1^2 \quad \text{et où}$$

$$\Delta E_{\text{pot}} = -\frac{GmM}{r_2} + \frac{GmM}{r_1} = GmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = GmM\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right) = GmM\frac{h}{R(R+h)}$$

donc: $\dfrac{2GM}{R}\dfrac{h}{R+h} = v_1^2$, c'est le calcul exact. Un peu d'algèbre pour tirer h :

$$h = \frac{v_1^2 R}{\dfrac{2GM}{R} - v_1^2} \quad \text{qu'on écrit:} \quad h = \frac{v_1^2}{\dfrac{2GM}{R^2} - \dfrac{v_1^2}{R}} = \frac{v_1^2}{2g - \dfrac{v_1^2}{R}} \qquad (*)$$

Calculons maintenant h dans l'approximation des faibles différences d'altitude:

$$\Delta E_{\text{méc}} = 0 \Longleftrightarrow \Delta E_{\text{pot}} = -\Delta E_{\text{cin}} = -\left(\frac{1}{2}m v_2^2 - \frac{1}{2}m v_1^2\right) = \frac{1}{2}m v_1^2 = mgh$$

$$\text{par conséquent : } h = \frac{v_1^2}{2g} \qquad (**).$$

Ainsi, le degré d'approximation est donné en comparant (*) et (**), ce qui revient à comparer $(2g - v_1^2/R)$ à $(2g)$. Pour la Lune, $g = 1{,}62$ m/s^2 et $R = 1730$ km, ce qui donne $(2gR)^{1/2} = 2{,}37.10^3$ m/s. Pour $v_1 = 10$ m/s l'erreur sur h est inférieure à 0,002 %, donc négligeable. Pour $v_1 = 100$ m/s, l'erreur devient inférieure à 0,2 %, négligeable selon les exigences de précision. Mais pour $v_1 = 1000$ m/s cette erreur atteint 20 %, ce qui n'est plus négligeable du tout, le calcul exact, avec l'expression correcte de l'énergie potentielle de gravitation est indispensable. Le calcul exact donne dans ce cas une altitude de 380 km environ alors que le calcul avec l'approximation (**) ne donne que 309 km, comme on pourra le vérifier.

L'approximation sera donc applicable si la différence d'altitude est faible vis-à-vis de rayon de l'astre, autrement dit, si on peut négliger la variation de g avec l'altitude.

3.2. Vitesse de libération

C'est la vitesse *minimale* que doit avoir un projectile de masse m pour quitter définitivenent un astre de masse M, pour se "libérer" de son attraction. Lorsqu'on lance un caillou en l'air, il retombe immanquablement: on ne l'a pas lancé assez fort !

Lorsqu'il monte verticalement, sa vitesse diminue, s'annule, s'inverse puis augmente à nouveau lorsqu'il redescend. On peut imaginer le lancer, toujours verticalement, assez violemment pour que la diminution de vitesse soit si lente qu'elle ne s'annule qu'à l'"infini". Le caillou ne reviendra plus. Cela se traduit de façon simple au moyen de l'énergie. Abstraction faite des frottements (on est sur une planète dépourvue d'atmosphère ou hors de l'atmosphère terrestre), l'énergie mécanique de m est conservée: elle est la même au point de départ, à la surface de l'astre, qu'à l'infini. Mais à l'infini, l'énergie potentielle est nulle, comme on l'a voulu, et l'énergie cinétique aussi puisqu'on exige que m y arrive "tout juste", avec une vitesse v_2 nulle.

Les indices (1) et (2) se référant à la surface de l'astre et à l'infini respectivement:

$$E_{méc}(1) = E_{méc}(2) \Leftrightarrow E_{cin}(1) + E_{pot}(1) = E_{cin}(2) + E_{pot}(2)$$

ce qui s'écrit : $\frac{1}{2} m v_{lib}^2 - \frac{GmM}{R} = 0 + 0$

d'où on tire aisément la vitesse de libération: $v_{lib} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

Remarque: si m est propulsé d'une altitude h telle que $r = R + h$, c'est r et non plus R qui intervient dans l'expression ci-dessus. La vitesse de libération est d'autant plus faible que l'altitude est élevée (r est au dénominateur), d'où l'avantage, du point de vue énergie et donc carburant, à lancer des fusées non pas du sol terrestre mais depuis des stations orbitales de très hautes altitudes. D'autres problèmes surgissent : il faut amener la fusée sur la station orbitale...

Exemples numériques:

Depuis la surface de notre planète, on calcule avec cette formule que la vitesse de libération minimale doit être de 11,2 km/s. Cette vitesse n'est plus que de 4,35 km/s depuis une station orbitale géostationnaire (env. 36 000 km d'altitude), ce qui fait gagner 85 % d'énergie, puisque $E_{cin} \propto v^2$.

Pour quitter le système solaire depuis une orbite terrestre, à 150 millions de km du Soleil, il faut une vitesse de libération minimum de l'ordre de 42 km/s.

Remarque: Un certain nombre d'hypothèses restrictives sont implicites dans les calculs faits ci-dessus. Pour que l'expression $v_{lib} = (2GM/r)^{1/2}$ soit applicable il faudrait pouvoir faire abstraction :

- des frottements aérodynamiques,
- de la rotation et du mouvement orbital de l'astre de départ,
- de l'influence gravitationnelle des autres astres,

et comme on l'a dit, il faut que le lancer soit vertical. Bien des contraintes; le travail des gens qui lancent des fusées et mettent des satellites en orbite n'est pas tout simple; ils ont à disposition de gros ordinateurs pour les aider mais ce ne sont que les lois de la dynamique, qu'on connait maintenant, qui sont y programmées.

3.3. Diagrammes d'énergie

Avant de se lancer dans de fastidieux (mais rassurants) calculs algébriques par l'application irréfléchie, voire aveugle de "formules" de physique, il est extrêmement salutaire d'examiner les aspects géométriques et graphiques des phénomènes. On ne le répétera jamais assez à nos étudiants pleins de bonne volonté mais trop souvent obnubilés par l'idée que le "calcul" suffit, que la manipulation de formules ne fera pas surgir la solution d'un problème qu'ils ne perçoivent que par son contenu algébrique.

Ce paragraphe n'est qu'une illustration de plus de ce que permet l'examen de la transcription graphique des lois physiques.

L'énergie potentielle de gravitation, par sa définition et le choix du point de référence à l'infini, est **toujours** négative; par contre l'énergie cinétique n'est **jamais** négative, par conséquent l'énergie mécanique, qui en est la somme des deux, peut être aussi bien positive que négative, voire nulle, mais de toute façon constante.

Considérons une masse m soumise à la gravitation d'une masse M et se baladant à la distance r variable du centre de M. Son énergie mécanique étant constante, elle se représente par une droite horizontale sur un diagramme *Energie* = f(r). L'énergie potentielle est une fonction *croissante* : $E_{pot} \propto -1/r$. Trois cas possibles:

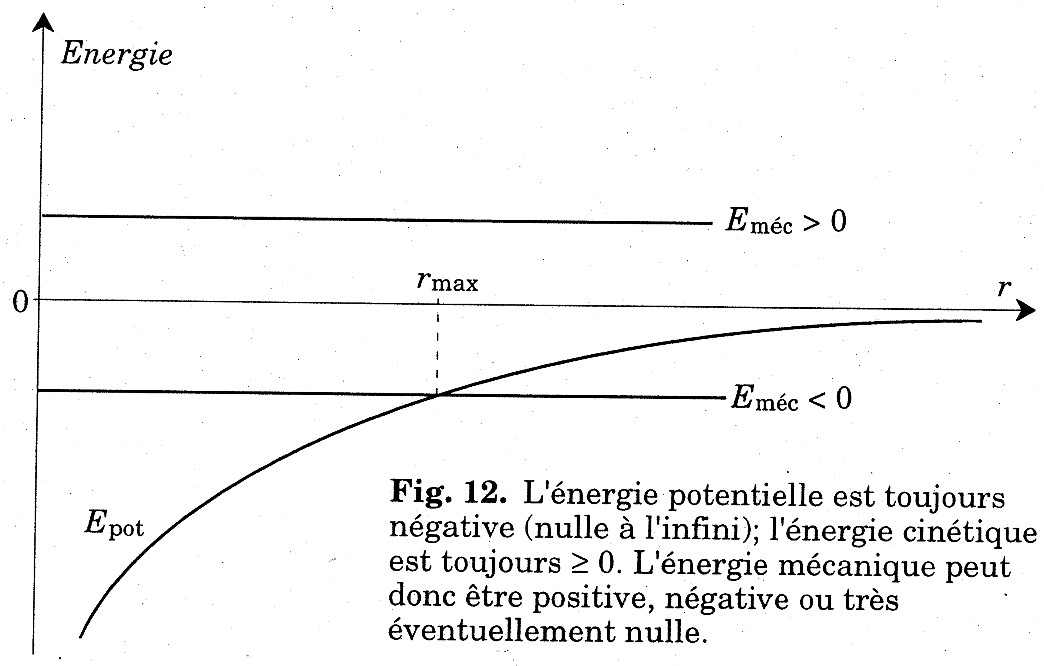


Fig. 12. L'énergie potentielle est toujours négative (nulle à l'infini); l'énergie cinétique est toujours ≥ 0. L'énergie mécanique peut donc être positive, négative ou très éventuellement nulle.

1°) $E_{méc} > 0$. Pas d'intersection de la droite et de la courbe: $E_{cin} = E_{méc} - E_{pot} > 0$ quel que soit r , la masse m pourra aller jusqu'à l'infini, sa vitesse ne s'annulera jamais.

2°) $E_{méc} < 0$. Il y a intersection de la droite et de la courbe: $E_{cin} = E_{méc} - E_{pot} > 0$ seulement si $r < r_{max}$. Pour $r > r_{max}$, l'énergie cinétique serait négative, ce qui est impossible, la masse m est *confinée*, liée perpétuellement à M.

3°) $E_{méc} = 0$. C'est le cas très particulier intermédiaire déjà traité pour calculer la vitesse de libération.

Exercice: Esquisser l'allure de E_{cin} = f(r) sur le graphe de la Fig. 12. ci-dessus.

Voyons maintenant quelques arguments à propos des ...

Trajectoires:

Par des calculs qu'il est impossible de reproduire ici à cause de leur complexité, Newton a montré que la trajectoire d'une masse m dans le champ de gravitation d'une masse $M >> m$ ne peut être qu'une *conique*. En géométrie, on appelle **conique** la courbe plane d'intersection d'un plan avec un cône circulaire droit; on peut démontrer que ce ne peut être qu'une **hyperbole**, une **ellipse**, qui peut éventuellement être le cas particulier d'un **cercle**, ou une **parabole** (voir Fig. 13). Il y a ainsi trois cas à distinguer, en rapport direct avec les signes de l'énergie mécanique évoqués plus haut:

1°) Le plan coupe les deux *nappes* du cône, l'intersection a deux branches qui sont les deux branches d'une **hyperbole**. Il va de soi que la trajectoire de m ne peut être que l'une des deux branches, mais l'important est de voir qu'une telle courbe est *ouverte*, qu'elle va jusqu'à l'infini, comme il est prédit par la positivité de l'énergie mécanique. Ainsi: $E_{\text{méc}} > 0$ => trajectoire hyperbolique.

2°) Le plan ne coupe qu'une nappe du cône, l'intersection est une courbe fermée, on montrerait qu'il s'agit de façon générale d'une **ellipse**. Si le plan est perpendiculaire à l'axe du cône, l'intersection est un **cercle**, cas particulier de l'ellipse. Une telle courbe est limitée dans l'espace, elle ne va pas jusqu'à l'infini, elle est *fermée*. C'est l'état *lié* évoqué plus haut. Ainsi: $E_{\text{méc}} < 0$ => trajectoire elliptique (éventuellement circulaire). Un autre cas particulier est l'ellipse complètement écrasée, *dégénérée* en deux segments de droite confondus. C'est la situation du lancer vertical, la masse m monte à haute altitude et retombe au point de départ. A son altitude maximale (en r_{max}) sa vitesse est nulle, de même que son énergie cinétique. C'est en fait ce que représente le diagramme d'énergies de la Fig. 12 pour $E_{\text{méc}} < 0$).

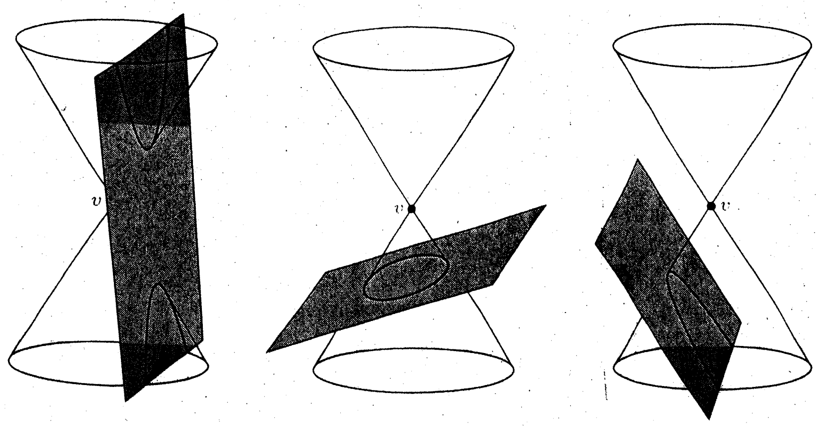
3°) Le plan ne coupe qu'une nappe du cône mais est parallèle à l'une de ses génératrices. L'intersection est alors une **parabole**. On voit que ce troisième cas est très particulier puisqu'il requiert une contrainte géométrique stricte sur la position du plan. La conséquence du point de vue de la dynamique est qu'une trajectoire parabolique est un cas exceptionnellement rare en gravitation. Ainsi: $E_{\text{méc}} = 0$ => trajectoire parabolique.

Fig. 12 bis.

hyperbole

ellipse

parabole



4. Orbites non circulaires et moment cinétique

4.1. Définition et commentaires

Observation astronomique: la trajectoire des planètes, des satellites ou d'autres corps célestes est toujours plane *et ce plan est fixe dans l'espace.*

On sait qu'en géométrie analytique, il suffit de deux vecteurs (non parallèles) d'un plan pour en définir complètement l'orientation et que son équation peut s'établir au moyen du **produit vectoriel** de ces deux vecteurs, donnant un troisième vecteur, normal au plan. Il suffirait encore d'un point fixe du plan pour en définir complètement la position.

Astronomiquement parlant, les deux vecteurs seront tout naturellement le vecteur-position **r** du corps céleste et son vecteur-vitesse **v**. Le point fixe serait la position de l'astre attracteur en O. Ainsi, la fixité du plan de trajectoire permet déjà d'affirmer que le vecteur $\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}$ a une orientation invariable dans l'espace. Le propos n'est pas ici de calculer l'équation du plan, mais de mettre en place une *loi de conservation* fondamentale. Pour cela, la commodité a fait choisir non pas $\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}$ mais $\mathbf{r} \wedge m\mathbf{v}$ comme vecteur, incluant ainsi la masse du corps céleste en mouvement.

Définition:

On appelle **moment cinétique** (*angular momentum* en anglais) d'une masse m animée d'une vitesse **v** et répérée par le vecteur **r** le vecteur :

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge m\mathbf{v}$$

En gravitation, en plus de la constance de sa direction et de son sens, ce vecteur-moment cinétique est aussi constant en norme, comme on va le montrer.

Rappelons qu'une définition est à apprendre et pas vraiment à comprendre. C'est plutôt ce qu'on en fait et comment on le fait qu'il faut comprendre.

Pour cela, considérons une masse m soumise à la force de gravitation **F** d'une masse M. Le vecteur repérant m depuis M est **r** et les vecteurs **r** et **F** sont parallèles. *Leur produit vectoriel est donc nul.* La force de gravitation est une **force centrale**, ce qui veut dire qu'elle est toujours dirigée vers un même point, ici le centre de l'astre attracteur.

La propriété essentielle d'une force centrale est que **son moment de force est nul**.

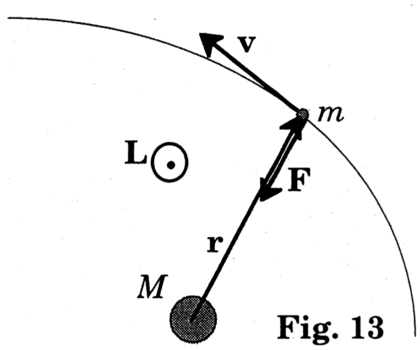


Fig. 13

Il est dès lors indispensable de se remémorer la *définition* précise d'un **moment de force**, notion qu'on avait établie et abondamment utilisée en *statique du corps solide*. Rappelons qu'il fait intervenir la **force** et son **bras de levier**, c-à-d la plus courte distance entre la droite-support du vecteur-force **F** et un point fixe O. En gravitation, le bras de levier de la force est manifestement nul (Fig. 13), si le point fixe est au centre de M.

On ne confondra pas la masse M et le moment de force $\mathbf{M}_0$!

Plus précisément, le moment d'une force **F** par rapport à un point O est un **vecteur** résultant du produit vectoriel de la force et du vecteur **r** allant de O au point d'application de la force: $\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}$. Examinons la relation entre **L** et $\mathbf{M}_0$; si on soupçonne que **L** est constant cela revient à croire que sa **dérivée par rapport au temps est nulle** puisqu'il n'y a que la dérivée d'une constante qui donne toujours zéro.

Calculons donc la dérivée par rapport au temps de ce produit (vectoriel):

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{r} \wedge m\mathbf{v}\right) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \wedge m\mathbf{v} + \mathbf{r} \wedge \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \qquad (*)$$

$$\text{Or, } \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{v} \wedge m\mathbf{v} = 0$$

Il ne reste que le deuxième terme de (*) pour lequel on peut écrire, la masse m étant très généralement constante: $d(m\mathbf{v}) = m d\mathbf{v}$. On a ainsi:

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \wedge m\,\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \text{ Mais } m\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

$$\text{donc : } \dot{\mathbf{L}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{M}_0 = 0, \text{ c'est la Fig. 13.}$$

Les soupçons étaient bien fondés, le moment cinétique de m est constant car sa dérivée par rapport au temps est nulle. Voilà une nouvelle loi de conservation.

Les lois de conservation

a) La chimie ne serait pas ce qu'elle est sans la loi de **conservation de la masse** lors d'une réaction chimique, aussi compliquée soit-elle. La conservation de la masse intervient constamment en physique aussi, bien sûr, c'est quasiment sous-entendu. Cependant, vers le début du 20ème siecle, on s'est rendu compte qu'elle n'est pas toujours conservée. Ce sont les travaux d'A. Einstein, par sa théorie de la *Relativité Restreinte* qui ont mit cette bizarrerie en lumière. Il est en effet pour le moins difficile d'admettre que la masse d'un objet puisse dépendre de sa vitesse et que, de plus, cette masse puisse disparaître complètement pour faire surgir de l'énergie (la fameuse relation $E = mc^2$). C'est pourtant ainsi que la Nature se comporte, comme le montrent les multilples expériences de physique nucléaire et corpusculaire d'aujourd'hui, pain quotidien de quelques personnes étranges, les physiciens des centres de recherche en hautes énergies.

b) Dans leur ordre d'apparition dans les cours de notre école, il y a eu ensuite la **conservation de l'énergie mécanique**, s'appliquant sans réserve lorsqu'il n'y a pas de forces dissipatives. C'est le cas en gravitation mais aussi en physique atomique et nucléaire.

c) Si jamais il y a des frottements, alors une fraction de l'énergie mécanique est transformée en énergie thermique, mais c'est toujours de l'énergie. Le concept d'énergie a ceci de puissant et diversifié que les physiciens l'ont inventé, vers le milieu du 19ème siècle, parce quelle que soit sa forme: mécanique, thermique, électrique, etc, il y a toujours **conservation de l'énergie totale** (sauf en Relativité, voir a)).

d) Si La **conservation de la quantité de mouvement** était encore au programme, elle nous aurait permis ensuite d'étudier efficacement les interactions brèves, du genre chocs. Encore un loi qui rend d'inappréciables services aux gens qui s'occupent, dans ces étranges centres de recherche, à faire se collisionner des particules, étranges aussi parfois, pour en tirer des informations sur la structure très intime de la matière.

e) Et maintenant voici la dernière, celle de la **conservation du moment cinétique**, qu'on vient d'aborder. Elle aussi s'applique en physique atomique et nucléaire, car il se trouve que les **forces** d'interaction entre les particules (électrons autour du noyau de l'atome ou d'autres situations plus ésotériques de la physique des particules) sont **centrales**. Alors, ça marche!

Pourquoi le physicien se met-il a jubiler lorsqu'il peut faire usage d'une (ou plusieurs) loi(s) de conservation? Parce que quand il observe un phénomène naturel (*physique* vient du grec ancien et veut dire *Nature*) où tout change (position, vitesse, force, température, courant électrique, etc) il cherche ce qui pourrait rester invariable, cela lui permet d'écrire une relation mathématique, une égalité entre deux situations apparamment complètement différentes et de calculer l'évolution du phénomène, de faire des prédictions sur son futur (le retour de telle ou telle comète n'est qu'un exemple parmi bien d'autres).

Le texte ci-dessus est écrit en petits caractères. **Ne l'apprenez pas mais lisez-le, attentivement!** Il vous fera un peu dépasser la *physique des formules* que vous croyez devoir ingurgiter.

4.2. Applications du moment cinétique

1) Deuxième loi de Képler - Loi des aires

La deuxième loi de Képler (dite aussi *loi des aires*) a été légèrement évoquée à la fin du § 2, Fig 8. Parlons-en plus clairement, maintenant qu'on dispose du moment cinétique. Notons que ni Newton et encore moins Képler ne disposaient de ce concept de moment cinétique. Cela n'a pas empêché le second de découvrir empiriquement la loi qui porte dorénavant son nom, ni le premier de la démontrer astucieusement en inventant des nouvelles mathématiques pour y parvenir: le calcul différentiel et intégral.

Soit un corps céleste dans le champ de gravitation d'un astre de masse M. Sur la figure, la trajectoire est elliptique, mais ce n'est pas indispensable pour la validité de la loi, elle peut être aussi bien hyperbolique qu'éventuellement circulaire ou encore parabolique.

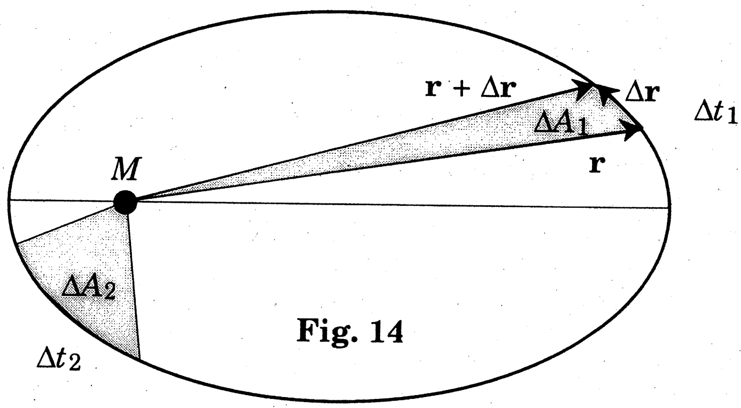


Fig. 14

Pour la démonstration de la loi il faut considérer le vecteur-position **r** à des instants différents. Pendant un intervalle de temps Δt ce vecteur "balaie" et définit un *secteur* d'aire ΔA. La loi dit :

"pour des intervalles de temps égaux, les aires balayées par le vecteur-position sont égales."

Pour la Fig. 14, cela signifie que si $\Delta t_1 = \Delta t_2$ alors $\Delta A_1 = \Delta A_2$; ce qui revient à voir que $\Delta A / \Delta t = const$.

Démontrons cela:

Par définition, la norme du vecteur résultant d'un produit vectoriel est "l'aire" du parallélogramme construit sur les deux vecteurs; le secteur triangulaire a une aire qui est la moitié de l'aire fabriquée avec **r** et $\Delta\mathbf{r}$; le vecteur $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ est la diagonale du parallélogramme, alors : $2\Delta A = || \mathbf{r} \wedge \Delta\mathbf{r} ||$.

Ne soyons pas timoré et multiplions cela par $m/\Delta t$, ce qui donne:

$$2m\frac{\Delta A}{\Delta t} = \left|\left| \mathbf{r} \wedge m\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right|\right| = || \mathbf{r} \wedge m\,\mathbf{v} || = || \mathbf{L} || = L\,,$$

par définition de **v** et de **L**.

Voilà qui est fait: **L** est constant, par conséquent $\Delta A / \Delta t$ l'est aussi. $\Delta A / \Delta t$ est la *vitesse aréolaire*, la vitesse avec laquelle varie la surface balayée par le vecteur-position. Cette vitesse-là est constante, on vient de le démontrer, à l'encontre de la vraie vitesse v du corps céleste de masse m qui gravite. En effet, la vitesse de m est d'autant plus grande qu'il est proche de M, comme on le montre ci-après.

2) Vitesses d'un satellite aux extrémités des axes de son orbite elliptique:

Le moment cinétique est conservé, il est donc le même en tout point de l'orbite. En particulier: $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_3$, et donc : $L_1 = L_2 = L_3$, c-à-d:

$r_1 m v_1 \sin\phi_1 = r_2 m v_2 \sin\phi_2 = r_3 m v_3 \sin\phi_3$

Pour les deux extrémités du grand axe, c'est facile à voir car $\sin\phi = 1$. Ce qui donne:

$(a - c)v_1 = (a + c)v_2$, d'où $v_1/v_2 = (a + c)/(a - c)$.

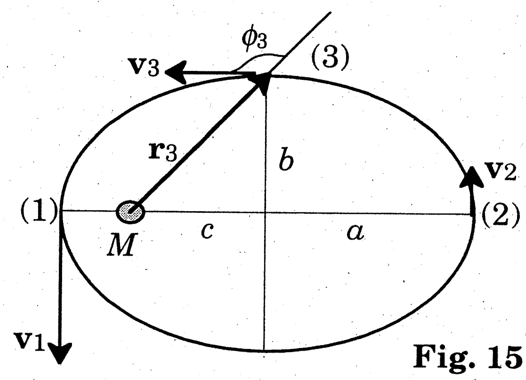


Fig. 15

Pour le point (3) la situation est un peu différente puisque **r** n'est pas perpendiculaire à **v** . Il suffit pourtant de regarder sur le dessin le bras de levier de $\mathbf{v}_3$ qui est simplement b. Donc $L_3 = bmv_3$. On a ainsi montré que :

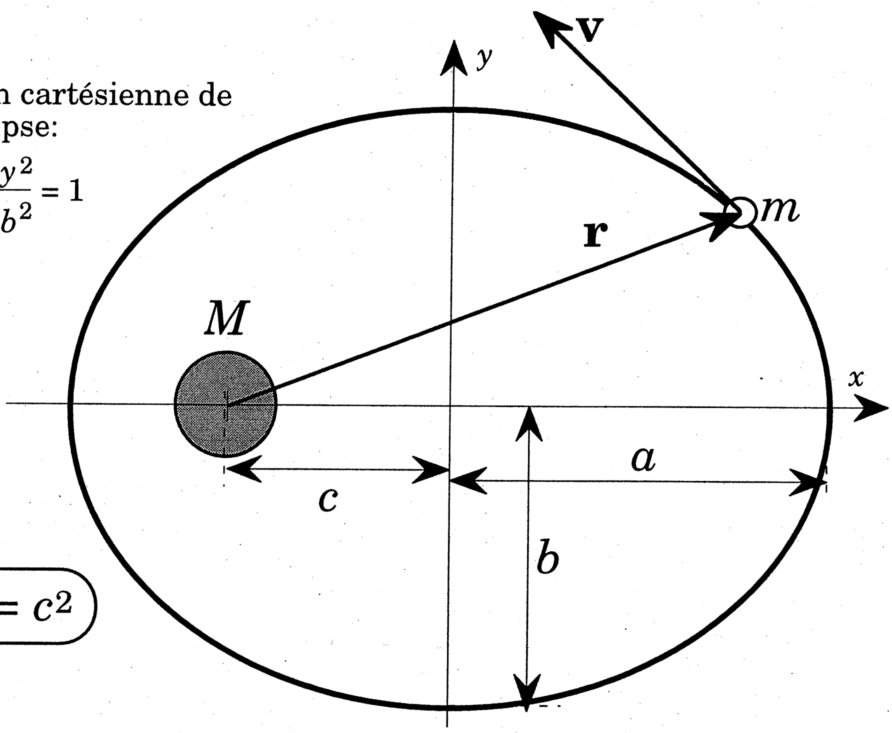
$v_1 > v_3 > v_2$; la vitesse orbitale est d'autant plus faible que le satellite est éloigné de l'astre qui l'attire, comme attendu.

Annexe : **les coniques** (voir aussi p. 13, 15 et 22)

Equation cartésienne de cette ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\boxed{a^2 - b^2 = c^2}$$

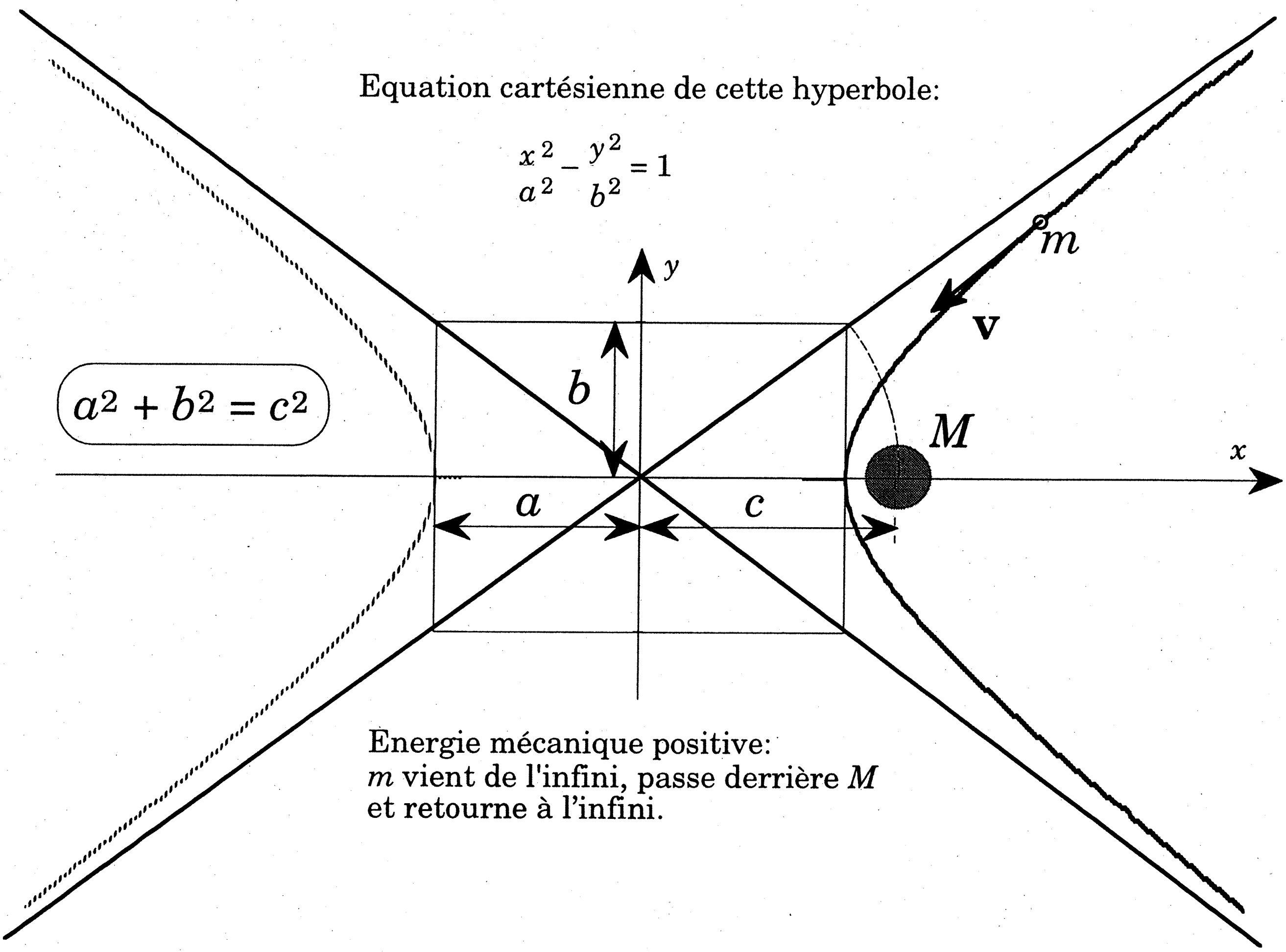


Energie mécanique négative: m a une trajectoire fermée.

Equation cartésienne de cette hyperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$



Energie mécanique positive:
m vient de l'infini, passe derrière M et retourne à l'infini.

Exercices

1. Force de gravitation - Poids

1. Soient deux sphères de platine (r = 21,4·10^3 kg/m^3) de 10 cm de rayon. On veut les placer l'une près de l'autre de façon à ce que la force d'attraction de gravitation mutuelle soit de 1 mN.
   A quelle distance devraient-elles être l'une de l'autre ?
   Pourquoi l'expérience n'est-elle pas possible ?

   Rép: 2,3 cm.

2. A quelle altitude au dessus d'un astre de rayon R = 9000 km, le poids d'une masse est-il 3 fois plus faible qu'à sa surface ?

   Rép: 6588 km.

3. Un astronaute débarque sur une planète dépourvue d'atmosphère dont le rayon est R = 2660 km. Du sol horizontal, il y lance verticalement un caillou qui atteint la hauteur de 18 m avant de retomber à son point de départ. Le temps de "vol" est de 12 s. Quelle est la masse volumique (moyenne) de cet astre ?

   Rép: 1,35·10^3 kg/m^3.

4. Une fusée se déplace en ligne droite de la Terre au Soleil. A quelle distance de la Terre les forces d'attraction de ces deux astres sur la fusée se compensent-elles?
   ($d_{T\text{-}S} \approx$ 150 millions de km, $m_T \approx 6.10^{24}$ kg, $m_S \approx 2.10^{30}$ kg).

   Rép: 260.000 km.

5. Quelle devrait-être la période de rotation de la Terre sur elle-même pour que les objets situés à l'équateur n'y touchent plus le sol ?

   Rép: 1 h 24 min.

6. Calculer la force d'attraction de gravitation que ressent sur Terre un individu de 60 kg de la part de la Lune. Calculer cette force sur une carotte de 60 g, car il paraît que la Lune les aide à pousser, surtout quand elle est pleine.
   (Et les marées, alors !?)

   Rép: 2 mN; 2 µN.

2. Orbites circulaires - $3^{ème}$ loi de Képler

1. Calculer la période de révolution et la vitesse d'un satellite artificiel en "rase-mottes" (c-à-d à une altitude négligeable vis-à-vis du rayon terrestre) autour de la Terre.
   Rép: 1 h 24 min.

2. Calculer l'altitude et la vitesse de révolution d'un satellite géostationnaire (dont la période de révolution est de 24 h). Un tel satellite peut-il rester à la verticale de n'importe quel point du globe ?
   Rép: env. 36.000 km; 3,08 km/s.

3. Un astronaute s'approche d'une planète inconnue. Lorsqu'il s'en trouve à 180.000 km, il la voit sous un angle de 1,2 deg. Il se met ensuite en orbite circulaire à 800 km au dessus de la surface et mesure que la période de révolution de son vaisseau spatial (moteurs coupés) est de 3 h 25 min. Il calcule alors le rayon et la masse volumique de cette planète. Que trouve-t-il ?
   Rép: 1885 km; $2{,}70 \cdot 10^3$ kg/m^3.

4. A quelle altitude au dessus d'un astre de rayon R = 4000 km, la période de révolution d'un satellite en orbite circulaire est-elle deux fois plus grande (ou plus petite, à préciser dans la réponse) que très près de la surface ?
   Rép: 2350 km.

5. Des astronomes (du futur) observent deux planètes en orbites circulaires autour d'une étoile. La première se trouve à 23 millions de km de l'étoile et la deuxième à 64 millions de km. La première a une période de révolution de 118 jours. Quelle est la période de la deuxième (en jours)?
   Rép: 548 jours.

6. Lors d'un rendez-vous spatial deux sondes naviguent en orbites circulaires coplanaires très proches autour de la Terre. L'une a une orbite de 10 000 km de rayon, l'autre de 4 m de plus. Calculer à quelle vitesse une sonde dépasse l'autre, et laquelle.
   Indication: dériver v par rapport à r .
   Rép: env. 1,3 mm/s.

7. Un satellite tourne en "rase-motte" autour d'un astre dont la masse volumique est de $4{,}2 \cdot 10^3$ kg/m^3. Quelle la période de révolution de ce satellite ?
   Rép: env. 1 h 37 min.

8. Dans le F&T on trouve que la Lune a une période sidérale de 27,33 j et une période synodique de 29,53 j. De quoi s'agit-il ? Pourquoi deux périodes différentes ? A laquelle des deux se réfèrent les astrologues ?

3. Energie et gravitation

1. Lorsqu'un satellite artificiel perd de l'altitude, il entre progressivement dans l'atmosphère et va de plus en plus vite. Comment est-il possible que le freinage dû à l'air lui fasse *augmenter* son énergie cinétique ?

2. Montrer que l'énergie cinétique d'un satellite en orbite circulaire est inversément proportionnelle au rayon de sa trajectoire.

3. Avec quelle vitesse initiale doit être lancé verticalement de la surface terrestre un objet pour qu'il atteigne l'altitude de 2000 km ? (Tous frott. aérod. négligés).
   Rép: env. 20.000 km/h.

4. Calculer la vitesse de libération minimale de la surface lunaire.
   Rép: 2370 m/s.

5. Un trou noir est un astre tel que la vitesse de libération soit supérieure à la vitesse de la lumière, laquelle ne peut donc pas s'en échapper; un tel astre est ainsi absolument invisible, donc absolument noir. La théorie de la vitesse de libération présentée dans ce chapitre n'est pas très correcte dans ce cas, mais elle donne un *ordre de grandeur* convenable.
   a) Calculer quel devrait-être le diamètre du Soleil pour qu'il soit un trou noir.
   b) Calculer de même pour la Terre, ainsi que sa masse volumique.
   Rép: a) env. 6 km; b) env. 2 cm; env. $2 \cdot 10^{30}$ kg/m^3.

6. Lorsqu'on lance à partir de la surface de la Terre un objet à faible vitesse (qques dizaines ou centaines de m/s), la trajectoire est une parabole (voir chapitre de balistique). Si la vitesse est de qques milliers de m/s, la trajectoire est une portion d'ellipse. Indépendamment des frottements aérodynamiques, quelle est l'hypothèse faite dans le premier cas, et qui n'est plus valable dans le second ? (N'est pas vraiment en rapport avec l'énergie).

7. Une comète se déplace dans le système solaire. Lorsqu'elle se trouve à 600 millions de km du soleil sa vitesse est de 40 km/s. Calculer sa vitesse lorsque qu'elle se trouve à 200 millions de km du soleil.
   Quel est le type de trajectoire suivie par cette comète ?
   Rép: 50 km/s; hyperbole.

8. Un objet est lancé *à partir de la surface* d'un astre avec une vitesse orientée de façon quelconque mais de valeur inférieure à la vitesse de libération. Montrer que dans tous les cas (sauf un très particulier, lequel ?), l'objet retombe toujours sur l'astre et ne peut par conséquent pas être mis en orbite elliptique.

9. Une masse de 1 kg est *posée* à l'équateur terrestre.
   a) Calculer ses trois énergies. On ne néglige pas la rotation diurne de la Terre.
   b) Cette masse est maintenant en orbite géostationnaire. Même calcul.
   c) Calculer l'énergie qu'il a fallu dépenser pour la placer là.
   Rép: a) 0,1 MJ; - 62,5 MJ; - 62,4 MJ; b) 4,72 MJ; - 9,44 MJ; - 4,72 MJ; c) 57,7 MJ.

4. Moment cinétique - Orbites non-circulaires

1. Sur une voie rectiligne, une locomotive de 150 t roule à 36 km/h. A 20 m de la voie se trouve une vache de 900 kg, immobile. Calculer la norme du moment cinétique de la locomotive par rapport à la vache lorsque une distance de a) 85 m, b) 312 m, c) 748 m, d) 5891 m, e) 12 288 m sépare les deux protagonistes.
   Rép: $3{\cdot}10^7$ Js.

2. Lors d'un mouvement elliptique le moment cinétique d'une planète est conservé. Il en est évidemment de même si le mouvement est un MCU (pourquoi?). En est-il encore de même pour un MCUA quelconque?

3. Le moment cinétique de la masse (ponctuelle) oscillant au bout d'un fil et constituant un pendule est-il conservé ? Pourquoi ou pourquoi pas ? Par rapport à quel point fixe pourrait-il l'être ?

4. Si le moment cinétique d'une planète en orbite elliptique autour du Soleil est référé à l'autre foyer de l'ellipse, celui où il n'y a rien, est-il aussi conservé ?

5. En utilisant la loi des aires pour l'orbite elliptique complète, montrer que la vitesse au bout du petit axe de l'ellipse est $v = (GM/a)^{1/2}$.
   (Aire d'une ellipse: $A = \pi ab$).

6. En utilisant le résultat de l'exercice précédent, montrer que l'énergie mécanique d'un astre de masse m en orbite elliptique de demi-grand axe a autour d'un astre de masse M s'écrit: $-\,GmM/2a$.

7. Pour un astre de masse m en orbite elliptique (de paramètres a, b et c) autour d'un astre de masse M, montrer que la travail de la force de gravitation pour aller d'une extrémité à l'autre du grand axe s'écrit: $\pm\, 2GmMc/b^2$. Quelle est la signification du $\pm$?

8. Il s'agit de lancer un satellite en orbite elliptique autour de la Terre. Sa vitesse maximale doit être de 9,06 km/s et sa vitesse minimale de 4,53 km/s (la moitié). Calculer ($R_t \approx 6370$ km, $GM_t \approx 4{\cdot}10^{14}$ Nm^2):
   a) les paramètres a,b et c de l'ellipse;
   b) les altitudes extrèmes;
   c) l'altitude et la vitesse lorsque le satellite est au bout du petit axe.
   Rép: a) 9746, 9189 et 3249 km; b) 128 et 6626 km; c) 3376 km et 6,41 km/s.

9. Quel est le rapport des vitesses extrêmes d'un astre en orbite elliptique si le grand axe est deux fois plus grand que le petit ?
   Rép: env. 14.