Exercice 3.1

Exprimer les angles suivants en radians en écrivant la réponse **en multiple de π.**

degrés	$90°$	$135°$	$30°$	$18°$	$22,5°$	$720°$	$270°$	$1°$	$x°$
radians									

Exprimer les angles suivants en degrés.

radians	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{20}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	6π	1	$2,5$	x
degrés									

Exercice 3.2

Soit un nombre α. Dessiner précisément, à l'aide d'un rapporteur, le point P_α qui représente α sur le cercle trigonométrique. Mesurer sur le dessin les valeurs de $\cos(\alpha), \sin(\alpha), \tan(\alpha)$ et $\cot(\alpha)$ et rapporter les valeurs trouvées dans le tableau ci-contre.

α	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\tan(\alpha)$	$\cot(\alpha)$	$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$	$\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$
$230°$						
$1,9$						
$14,2\pi$						

Exercice 3.3

Dans chacun des cas suivants, dire pour quelles valeurs de α l'égalité est satisfaite :

a. $\cos(\alpha°) = 0$
b. $\sin(\alpha°) = -1$
c. $\cos(\alpha) = -1$
d. $\sin(\alpha°) = 0$
e. $\tan(\alpha°) = -1$
f. $\cot(\alpha) = 0$
g. $\tan(\alpha°) = 0$
h. $\cot(\alpha) = -1$

Exercice 3.4

a. Trouver les angles entre $0°$ et $360°$ qui coïncide sur le cercle trigonométrique à des angles de $2578°$, $5555°$, $-1111°$ et $-9876°$.

b. Trouver les angles entre 0 et 2π qui coïncide sur le cercle trigonométrique à des angles de $\frac{97\pi}{6}$, $\frac{111\pi}{8}$, $\frac{-304\pi}{3}$ et $-\frac{123\pi}{4}$.

Exercice 3.5

Déterminer, à l'aide d'une réflexion géométrique, les valeurs exactes suivantes :

a. $\cancel{\cos(\alpha)}$, $\cancel{\sin(\alpha)}$, $\tan(\alpha)$ et $\cot(\alpha)$ avec $\alpha = \frac{\pi}{6}$ rad
b. $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$, $\tan(\alpha)$ et $\cot(\alpha)$ avec $\alpha = 45°$
c. $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$, $\tan(\alpha)$ et $\cot(\alpha)$ avec $\alpha = \frac{\pi}{3}$ rad

Exercice 3.6

Toronto et Quito sont situées sur le même méridien. Sachant que le rayon terrestre est d'environ 6370 km et que la différence entre leur latitude est de 43°, calculer la distance séparant ces deux villes.

Exercice 3.7

Sans calculatrice, trouver la valeur exacte de :

a. $\sin(120°)$
b. $\cos(135°)$
c. $\tan(150°)$
d. $\cos(210°)$
e. $\tan(300°)$
f. $\sin(330°)$
g. $\cos(225°)$
h. $\cot(225°)$

Exercice 3.8

A partir des relations fondamentales, démontrer les égalités suivantes :

a. $1+\tan^2(\alpha)=\dfrac{1}{\cos^2(\alpha)}$
b. $\dfrac{\sin^2(x)}{1-\cos(x)}=1+\cos(x)$
c. $1+\cot^2(\alpha)=\dfrac{1}{\sin^2(\alpha)}$

Exercice 3.9

Trouver la valeur exacte de $\sin(t)$, $\cos(t)$ $\tan(t)$ et $\cot(t)$ sans chercher la valeur de l'angle t dans les cas suivants :

a. $\cos(t)=\frac{3}{5}$ avec $t\in Q_{IV}$
b. $\sin(t)=-0,28$ avec $t\in Q_{III}$
c. $\tan(t)=2$, avec $t\in Q_I$
d. $\cot(t)=-\frac{9}{40}$, avec $t\in Q_{IV}$

Exercice 3.10

Simplifier :

a. $\dfrac{\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$
b. $\dfrac{1-\sin^2(x)}{\sin(x)\cos(x)}$
c. $\dfrac{1-(\sin(x)-\cos(x))^2}{\sin(x)}$
d. $(\sin(x)+\cos(x))^2+(\sin(x)-\cos(x))^2$

Exercice 3.11

A l'aide d'une réflexion sur le cercle trigonométrique :

a. exprimer $\sin(\pi+\alpha)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ et $\tan(\pi-\alpha)$ en utilisant $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$, ou $\tan(\alpha)$.
b. compléter les égalités suivantes :

- $-\cos(\alpha)=\cos(...)$
- $\sin(\alpha)=\cos(...)$
- $-\sin(\alpha)=\sin(...)$
- $-\cos(\alpha)=\sin(...)$
- $\cos(\alpha)=\sin(...)$
- $-\sin(\alpha)=\cos(...)$

Exercice 3.12

Sans machine à calculer, mais en travaillant avec les valeurs exactes, compléter le tableau

α	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\tan(\alpha)$	$\cos(2\alpha)$	$\sin(2\alpha)$	$2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$	$\frac{1-\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$
$\frac{\pi}{4}$							
$\frac{\pi}{3}$							
$\frac{5\pi}{6}$							
$\frac{11\pi}{6}$							

Exercice 3.13

Calculer, en degrés et en radians les angles suivants :

a. Angle intérieur au sommet d'un décagone régulier.

b. Angle aux pointes d'une étoile régulière à 5 branches.

Exercice 3.14

Sur un cercle de rayon 3.2 m, on prélève un arc correspondant à un angle de 117°. Quelle est la longueur de cet arc ?

Exercice 3.15

Sion et Delémont se trouvent sur le même méridien terrestre. Leur distance à vol d'oiseau est de 123 km. Sachant que la latitude de Sion est de 46°14'N et que le rayon terrestre est de 6370 km, calculer celle de Delémont.
Indication : Les coordonnées géographiques sont exprimées en degrés sexagésimaux (système de numérotation utilisant la base 60). L'unité standard est le degré (360 degrés) puis la minute (60 minutes = 1 degré) puis la seconde (60 secondes = 1 minute).

Exercice 3.16

Sur un circuit circulaire de 65 m de rayon, un coureur avance à 30 km/h. Observé du centre, il parcourt un certain angle chaque seconde. Calculer sa vitesse angulaire en radians par seconde, en degrés par seconde et en tours par minute

Exercice 3.17

Deux coureurs A et B tournent dans le même sens sur un circuit circulaire. A fait 30° par minute et B fait 45° par minute. Déterminer l'horaire des rencontres sachant qu'au départ, A et B occupent des positions diamétralement opposées. Reprendre la question en supposant que B tourne dans l'autre sens.

Exercice 3.18

Les aiguilles d'une montre tournent à vitesse constante ; elles se superposent donc à intervalles réguliers. Déterminer le délai séparant deux rencontres.

Exercice 3.19

Un engrenage est composé de deux pignons de diamètre 3 et 5 cm. Le petit pignon tourne à 300 tours par minute, il entraîne le grand. Déterminer la vitesse de rotation du grand pignon en tours par seconde et en radians par minute.

Exercice 3.20

Simplifier :

a. $\sin^3(x) + \sin(x) \cdot \cos^2(x)$

b. $\dfrac{\frac{1}{\cos(x)}}{\frac{\cos(x)}{\sin(x)} + \frac{\sin(x)}{\cos(x)}}$

c. $\dfrac{\cos^2(x)}{1 - \sin(x)}$

d. $\left(1 - \sin^2(x)\right) \cdot \left(1 + \tan^2(x)\right)$

Exercice 3.21

Sachant que $\tan(t) = \frac{5}{4}$ avec t dans le quadrant III Q_{III}), trouver la valeur exacte de $\sin(t)$ et $\cos(t)$ sans chercher la valeur de l'angle t.

Exercice 3.22

Trouver la valeur exacte de $\cos(-945°)$ et $\sin\left(\frac{-10\pi}{3}\right)$.

Exercice 3.23

Le triangle ABC est représenté ci-contre. Dans chaque cas, trouver les angles et les côtés inconnus.

a. $a = 7.8$ cm, $\alpha = 27°$

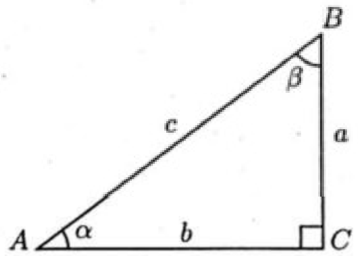
b. $a = 6.3$ cm, $c = 9.2$ cm

c. $c = 4.8$ cm, $\beta = 10°$

d. $a = 13.4$ cm, $b = 20$ cm

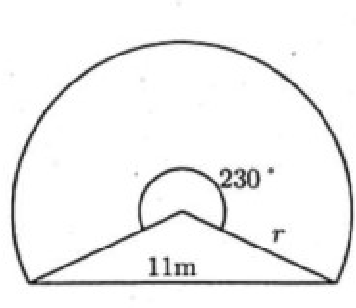
e. $a = 5$ cm, Aire $= 6$ cm^2

f. $b = 2a$



Exercice 3.24

La voûte d'un tunnel est un arc de cercle dont l'angle au centre mesure 230°. Sachant que la largeur de la base est de 11 m, déterminer le rayon de l'arc de cercle ainsi que la hauteur maximale de la voûte par rapport au sol.

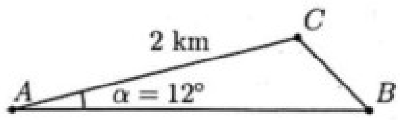


Exercice 3.25

Quelle est la hauteur d'une tour dont l'ombre sur le sol mesure 36 m lorsque le soleil est $37,5°$ au-dessus de l'horizon ?

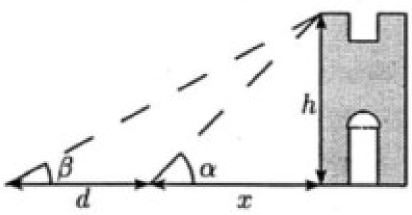
Exercice 3.26

Un homme doit se rendre de A à B dans le brouillard. Il part de A en se trompant de $12°$ dans l'estimation de sa direction, et parcourt 2 km. Parvenu à C, il corrige son cap et parvient en B après avoir parcouru encore $0,8$ km. Quelle est la distance entre A et B ?



Exercice 3.27

Pour déterminer la hauteur d'une tour inaccessible, on fixe une distance d et on mesure les angles α et β. Trouver des formules pour calculer la hauteur h et la distance x. Tester vos formules en vérifiant que $h = 14.12$ m et $x = 17.68$ m si l'on pose $\alpha = 38.6°$, $\beta = 18.3°$et $d = 25$ m.



Exercice 3.28

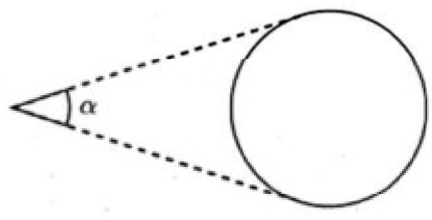
Dans un disque de rayon de 10 cm, on prélève un secteur correspondant à une corde de 6 cm. Calculer le périmètre et l'aire de ce secteur.

Exercice 3.29

Un homme se trouve devant une tour circulaire dont la circonférence fait 50 m. Il regarde la tour sous un angle α de $18°$.

a. Quelle est la distance minimale entre l'homme et la tour ?

b. Quel serait l'angle si cette distance était de 100 m ?



Exercice 3.30

Dans un cercle de 3.45 m de rayon, on inscrit un 9-gone régulier. Déterminer le périmètre et l'aire de ce polygone.

Exercice 3.31

Une étoile régulière à cinq branches est inscrite dans un cercle de 10 cm de diamètre. Calculer son périmètre.

Exercice 3.32

L'aire d'un triangle isocèle est de 120 m^2, l'angle à son sommet est de 54°. Calculer sa base, sa hauteur et la longueur de ses côtés.

Exercice 3.33

a. Résoudre un triangle connaissant $c = 10$, $\alpha = 65^0$ et $\gamma = 43^0$

b. Résoudre un triangle connaissant $a = 7.32$, $b = 4.65$ et $\gamma = 71.6^0$

c. Résoudre un triangle connaissant $a = 2$, $b = \sqrt{6}$ et $c = 1 + \sqrt{3}$. Commencer par calculer β en employant les valeurs exactes des côtés.

d. Résoudre un triangle connaissant l'aire$= 12.52$ m^2, $\alpha = 54.08^0$ et $\beta = 88,94^0$

Exercice 3.34

Déterminer les côtés et les angles des triangles dans lesquels :

a. aire $= 24$, $\sin(\alpha) = \frac{12}{13}$, $b + c = 17$ et $c > b$.

b. $c = 8$, $\alpha = \frac{\pi}{9}$ et $b = 2a$

Exercice 3.35

Calculer les 3 côtés d'un triangle sachant qu'ils sont exprimés par trois nombres entiers consécutifs et que le plus grand angle est le double du plus petit.

Exercice 3.36

Dans un quadrilatère convexe $ABCD$, on donne l'angle $\alpha = 96.8^0$ (en A) et les longueurs des côtés $AB = 3.5$, $BC = 5.8$, $CD = 6.2$ et $DA = 4.4$. Calculer les autres angles et l'aire du quadrilatère.

Exercice 3.37

Dessiner, dans un même repère, mais avec deux couleurs différentes, les graphes de $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \sin(x)$. Colorier une période pour chaque fonction.

Exercice 3.38

Etudier la fonction $f(x) = \tan(x)$. Ceci comprend : domaines, zéros, période, parité, tableau des signes et graphe.

Exercice 3.39

Dessiner, dans le même système d'axes sur l'intervalle $[\,0\,;\,2\pi\,]$, les graphes des fonctions ci-dessous avec le graphe de la fonction $x \mapsto \cos(x)$. Ensuite, pour chacune d'elles, déterminer le domaine d'existence D, l'ensemble des images $f(D)$, la période P et la parité de la fonction.

a. $f(x) = \cos(x+1)$

b. $g(x) = 2\cos(x)$

c. $h(x) = \cos(2x)$

d. $i(x) = |\cos(2x)|$

e. $j(x) = -\cos(x+1)$

f. $k(x) = \cos|x| + 1$

g. $l(x) = \sqrt{\cos(x)}$

h. $m(x) = \log(\cos(x))$

i. $n(x) = \mathrm{int}(\cos(x))$

Exercice 3.40

Résoudre les équations trigonométriques suivantes. Donner toutes les solutions positives avec une précision au dixième.

a. $\sin(\theta°) = 0,1$

b. $\sin(\theta°) = -0,84$

c. $\sin(\theta° + 15°) = 0,951$

d. $\cos(\theta°) = 0,8$

e. $\cos(\theta°) = -0,84$

f. $\cos(\theta° - 20°) = \sqrt{\frac{2}{3}}$

g. $\tan(\theta°) = 4$

h. $\tan(\theta°) = -0,32$

i. $\tan(\theta° + 100°) = 0,11$

Exercice 3.41

Déterminer toutes les solutions des équations suivantes dans l'intervalle $0° < \theta° \leq 360°$:

a. $\cos(2\theta°) = \frac{1}{3}$

b. $\tan(3\theta°) = 2$

c. $\sin(2\theta°) = -0,6$

d. $\cos(4\theta° + 30°) = -\frac{1}{4}$

e. $\tan(2\theta° - 90°) = 0,4$

f. $\sin(3\theta° - 45°) = -0,42$

g. $\cot(\theta°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

h. $\cot(\theta° - 20°) = \sqrt{3}$

i. $\cot(2\theta°) = 2.8$

Exercice 3.42

Déterminer un nombre entre 10 et 11 dont le sinus vaut $-0,88$.

Exercice 3.43

Résoudre les équations trigonométriques suivantes :

a. $\sin(5x) = \sin(7x)$

b. $\cos(2x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

c. $\sin(4x) + \sin(x) = 0$

d. $\tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \tan(3x)$

Exercice 3.44

Résoudre les équations trigonométriques suivantes :

a. $2\sin(x) + \cos(x) = 0$

b. $4\cos^2(x) - 4\cos(x) - 3 = 0$

c. $2\sin^2(x) - 3\sin(x) + 1 = 0$

d. $\sqrt{3}\sin(2x) - \cos(2x) = 0$

e. $2\cos^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$

f. $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = 1$

Exercice 3.45

Réécrire les expressions ci-dessous sans utiliser les fonctions trigonométriques, en s'inspirant de l'exemple suivant :

$$\boxed{\cos(\arcsin(x)) \overset{y=\arcsin(x)}{=} \cos(y) = \sqrt{1-\sin^2(y)} = \sqrt{1-(\sin(\arcsin(x)))^2} = \sqrt{1-x^2}}$$

a. $\tan(\arctan(x))$ b. $\sin(\arccos(x))$ c. $\tan(\arccos(x))$ d. $\sin(2\arcsin(x))$

Exercice 3.46

a. A partir des formules d'addition et des relations fondamentales, établir les formules de :

- $\cos(2x) = ...$
- $\sin(2x) = ...$
- $\tan(2x) = ...$

b. Démontrer les égalités suivantes :
- $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x) = \cos(x) \cdot (1 - 4\sin^2(x))$
- $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x) = \sin(x) \cdot (4\cos^2(x) - 1)$

Exercice 3.47

Déterminer la valeur exacte de $\cos(15°)$ et $\sin(15°)$ de $\sin(105°)$ et $\cos(105°)$ et de $\cos(255°)$

Exercice 3.48

Simplifier :

a. $\cos(x) + \cos(x + 120°) + \cos(x + 240°) = ...$ b. $\sin(x) + \sin(x + 120°) + \sin(x + 240°) = ...$

Exercice 3.49

Sachant que $\sin(x) = \frac{2}{3}$, $(x \in Q_{II})$ et $\cos(y) = -\frac{1}{4}$ $(y \in Q_{III})$, déterminer, sans calculatrice, la valeur exacte de $\sin(x + y)$ et $\tan(x - y)$.

Exercice 3.50

Si $\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$ et $\cos(\beta) = \frac{24}{25}$ et si α, β sont aigus, trouver la valeur exacte de $\tan(\alpha)$ et $\sin(\beta)$ et celles de $\cos(\alpha - \beta)$ et $\tan(\alpha + \beta)$.

Exercice 3.51

a. Déterminer, **sans la calculatrice**, la valeur exacte de $\tan(2\theta)$ sachant que $\sin(\theta) = \frac{3}{5}$ et que θ est dans le deuxième quadrant.

b. Simplifier **au maximum** l'expression suivante : $\tan\left(\frac{\pi}{4} + t\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right)$.

Exercice 3.52

a. Prouver que $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos(x)}{2}$ en vous inspirant de la démonstration de $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos(x)}{2}$ ci-contre.

b. Sans calculatrice, calculer la valeur exacte de $\sin(22,5°)$

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= 1 - 2\sin^2(x) \\ \sin^2(x) &= \frac{1-\cos(2x)}{2} \\ \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1-\cos(x)}{2} \end{aligned}$$

Exercice 3.53

Résoudre les équations suivantes, en donnant toutes les solutions en degrés.

a. $\cos(x) = \tan(x)$
b. $3\sin^2(x) + \cos^2(x) - 2 = 0$
c. $\sin(2x) + 3\cos(2x) = 2$
d. $\tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cot(3x)$
e. $\sin(x) + 3\cos(x) = 3$
f. $\tan^4(x) - 4\tan^2(x) + 3 = 0$
g. $2\tan(x) + 2\cot(x) = 5$
h. $\sin^4(x) + \cos^4(x) = \frac{2}{3}$

Exercice 3.54

Démontrer les relations suivantes :

a. $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
b. $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
c. $\frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{1}{\cos^2(y)} = \tan^2(x) - \tan^2(y)$
d. $\tan(x) + \tan(y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x)\cos(y)}$
e. $\tan(x) = \frac{\sin(2x)}{1+\cos(2x)} = \frac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)}$
f. $\cos(x) = \frac{1 - tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$
g. $\tan(45^\circ - x) = \frac{1 - \tan(x)}{1 + \tan(x)}$
h. $\cot(x) = \frac{1+\cos(2x)}{\sin(2x)}$

Exercice 3.55

a. Montrer que $\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$
b. Justifier, de deux manières différentes, l'équation suivante :

$$\cos(t) + \sin(t) = \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Exercice 3.56

Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto \cos(x) + \sqrt{3}\sin(x)$ en calculant l'image des multiples de 30^0 et 45^0. A l'aide du graphe, résoudre, graphiquement puis algébriquement les équations suivantes :

a. $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{2}$
b. $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 0$
c. $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = -1$

Exercice 3.57

Résoudre les équations suivantes :

a. $\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$
b. $\cos(2x) = \cos(x)$
c. $\sin\left(\frac{5x}{3}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$
d. $\sin^2(2x) = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
e. $6\cos^2(x) = 5\sin(x)$
f. $3\sin(x) + 6\cos^2(x) = 5$
g. $\cos^2(x) + 2\sin(x) + 1 = 0$
h. $\tan^4(x) - 15\tan^2(x) + 26 = 0$
i. $2\cos(3x) + 2\sin(3x) = 1 + \sqrt{3}$
j. $3\sin(x) + 4\cos(x) = 5$
k. $\cos(x) - 2\sin(x) = 2$
l. $4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1$
m. $\tan(x) + 3\cot(x) = 4$
n. $\arccos(2x) = \arcsin(x)$