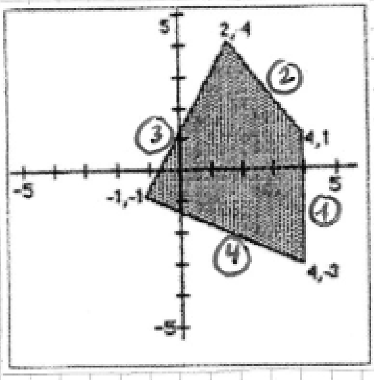
Chapitre 9. Programmation linéaire - Corrigé

Exercice 1



1. on doit avoir $x \leq 4$.

2. $y = ax+b$ où $a = \text{pente} = \frac{1-4}{4-2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + b$;
avec $x=2$ et $y=4$, on a $4 = -\frac{3}{2}.2+b \Rightarrow 4 = -3+b$
$\Rightarrow b = 7 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x+7$; comme on est au-dessous ou sur la droite, on a $y \leq -\frac{3}{2}x+7$.

3. $y = ax+b$ où $a = \text{pente} = \frac{4-(-1)}{2-(-1)} = \frac{5}{3} \Rightarrow y = \frac{5}{3}x+b$;
avec $x=2$ et $y=4$, on a $4 = \frac{5}{3}.2+b \Rightarrow 4 = \frac{10}{3}+b$
$\Rightarrow b = 4 - \frac{10}{3} = \frac{12}{3} - \frac{10}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}$; comme on est au-dessous ou sur la droite, on a $y \leq \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}$.

4. $y = ax+b$ où $a = \text{pente} = \frac{-3-(-1)}{4-(-1)} = \frac{-2}{5} \Rightarrow y = -\frac{2}{5}x+b$;
avec $x=4$ et $y=-3$, on a $-3 = -\frac{2}{5}.4+b \Rightarrow -3 = -\frac{8}{5}+b$
$\Rightarrow b = -3+\frac{8}{5} = \frac{-15}{5}+\frac{8}{5} = -\frac{7}{5} \Rightarrow y = -\frac{2}{5}x - \frac{7}{5}$; comme on est au-dessus ou sur la droite, on a $y \geq -\frac{2}{5}x - \frac{7}{5}$.

Le système d'inéquations qui correspond est donc :
$$\begin{cases} x \leq 4 \\ y \leq -\frac{3}{2}x+7 \\ y \leq \frac{5}{3}x+\frac{2}{3} \\ y \geq -\frac{2}{5}x - \frac{7}{5}. \end{cases}$$

Exercice 2

On doit commencer par dessiner la zone correspondant aux contraintes.

$x - 2y \geq -10$ | $-x$

$-2y \geq -x - 10$ | $:(-2)$ ⚠

$y \leq \frac{1}{2}x + 5$

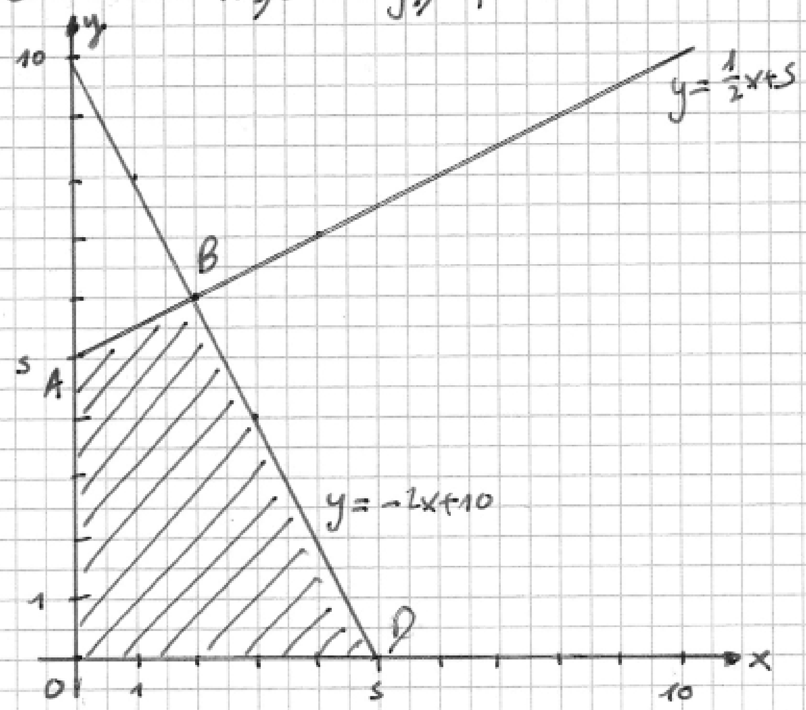
on dessine $y = \frac{1}{2}x + 5$ et on fera au-dessous

$2x + y \leq 10$ | $-2x$

$y \leq -2x + 10$

on dessine $y = -2x + 10$ et on fera au-dessous

Comme on a $x \geq 0$ et $y \geq 0$, on a :



On a $A(0;5)$, $B(2;6)$, $D = (5;0)$ et $O(0;0)$.

Vérification par calcul : A : on pose $x = 0$ dans $y = \frac{1}{2}x + 5 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow A(0;5)$

B : on a $y = \frac{1}{2}x + 5$ et $y = -2x + 10 \Rightarrow \frac{1}{2}x + 5 = -2x + 10$

$\Rightarrow \frac{5}{2}x = 5 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot 2 + 5 = 6 \Rightarrow B(2;6)$

D : on pose $y = 0$ dans $y = -2x + 10 \Rightarrow -2x + 10 = 0 \Rightarrow 2x = 10$

$\Rightarrow x = 5 \Rightarrow D(5;0)$.

On va calculer $C = 7x + 3y$ pour chacun des point A, B, D et O et voir où C est maximum et minimum.

$A(0;5) \Rightarrow C = 7 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 15$.

$B(2;6) \Rightarrow C = 7 \cdot 2 + 3 \cdot 6 = 14 + 18 = 32$.

$D(5;0) \Rightarrow C = 7 \cdot 5 + 3 \cdot 0 = 35 \Rightarrow$ maximum en $D(5;0)$ et $C = 35$.

$O(0;0) \Rightarrow C = 7 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ minimum en $O(0;0)$ et $C = 0$.

Exercice 3

On peut établir le tableau suivant :

	Nb	Heures de travail atelier A	Heures de travail atelier B	Profit
Camions	x	$5x$	$3x$	P_1
Autos	y	$2y$	$3y$	P_2
	$x \geq 0$, $y \geq 0$	$5x+2y \leq 180$	$3x+3y \leq 135$	$P = P_1 + P_2$

On dessine la zone correspondant aux contraintes : $x \geq 0$, $y \geq 0$,

$5x+2y \leq 180 \quad | -5x$

$2y \leq -5x+180 \quad | :2$

$y \leq -\frac{5}{2}x + 90$

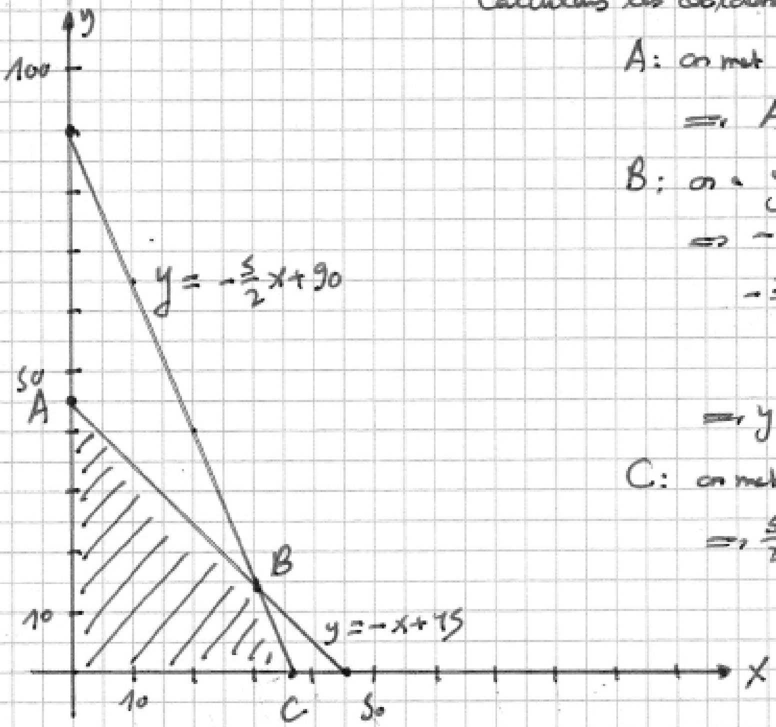
on dessine $y = -\frac{5}{2}x+90$ et on est au-dessous

$3x+3y \leq 135 \quad | -3x$

$3y \leq -3x+135 \quad | :3$

$y \leq -x+45$

on dessine $y = -x+45$ et on est au-dessous



Calculons les coordonnées des sommets du polygone des contraintes :

A : on met $x=0$ dans $y=-x+45 \Rightarrow y = 45$
$\Rightarrow A(0;45)$

B : on a $y = -\frac{5}{2}x+90$ et $y=-x+45$

$\Rightarrow -\frac{5}{2}x+90 = -x+45 \quad | +x-90$

$-\frac{3}{2}x = -45 \quad | :(-\frac{3}{2})$

$x = 30$

$\Rightarrow y = -x+45 = -30+45 = 15 \Rightarrow B(30;15)$

C : on met $y=0$ dans $y=-\frac{5}{2}x+90 \Rightarrow 0 = -\frac{5}{2}x+90$
$\Rightarrow \frac{5}{2}x = 90 \Rightarrow x = 36 \Rightarrow C(36;0)$

Le maximum du profit sera en $A(0;45)$, $B(30;15)$ ou $C(36;0)$.

1. $P_1 = 3000x$ et $P_2 = 2000y \Rightarrow P = 3000x + 2000y$:

$A(0;45) \Rightarrow P = 3000 \cdot 0 + 2000 \cdot 45 = 90'000$

$B(30;15) \Rightarrow P = 3000 \cdot 30 + 2000 \cdot 15 = 120'000$

$C(36;0) \Rightarrow P = 3000 \cdot 36 + 2000 \cdot 0 = 108'000$

$\Rightarrow$ il devra produire <u>30 camions et 15 automobiles.</u>

2. $P_1 = 4000x$ et $P_2 = 1000y \Rightarrow P = 4000x + 1000y$:

$A(0;45) \Rightarrow P = 4000 \cdot 0 + 1000 \cdot 45 = 45'000$

$B(30;15) \Rightarrow P = 4000 \cdot 30 + 1000 \cdot 15 = 135'000$

$C(36;0) \Rightarrow P = 4000 \cdot 36 + 1000 \cdot 0 = 144'000$

$\Rightarrow$ il devra produire <u>36 camions et 0 automobile.</u>

3. $P_1 = 1000x$ et $P_2 = 1000y \Rightarrow P = 1000x + 1000y$

$A(0;45) \Rightarrow P = 1000 \cdot 0 + 1000 \cdot 45 = 45'000$

$B(30;15) \Rightarrow P = 1000 \cdot 30 + 1000 \cdot 15 = 45'000$

$C(36;0) \Rightarrow P = 1000 \cdot 36 + 1000 \cdot 0 = 36'000$

$\Rightarrow$ il devra produire un nb de camions x et un nb d'autos y satisfaisant <u>la relation $y = -x + 45$ ou $x + y = 45$ entre $x = 0$, $y = 45$ et $x = 30$ et $y = 15$.</u>

Exercice 4

On peut établir le tableau suivant :

	Nb	Volume	Masse	Recette
Caisses de type A	x	$4x$	$200x$	$750x$
Caisses de type B	y	$2y$	$300y$	$500y$
	$x \geq 0$, $y \geq 0$	$4x+2y \leq 250$	$200x+300y \leq 19'500$	$750x+500y$

(19,5 tonnes = = 19'500 kg)

On dessine la zone correspondant aux contraintes : $x \geq 0$ $y \geq 0$,

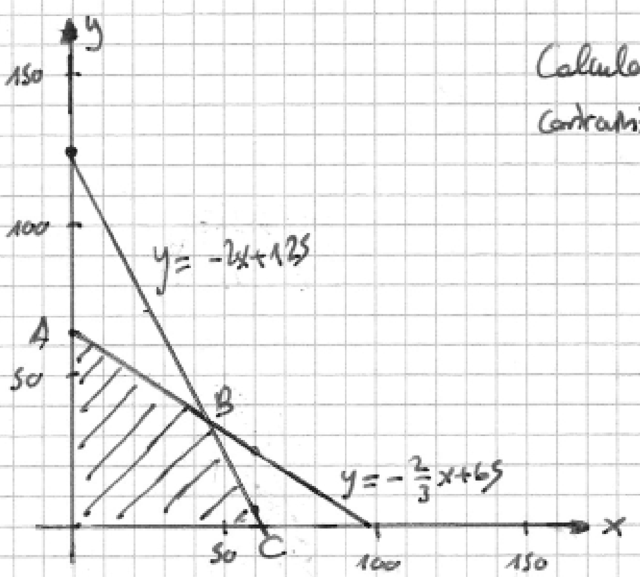
$$\begin{array}{l|l} 4x+2y \leq 250 & -4x \\ 2y \leq -4x+250 & :2 \\ y \leq -2x+125 & \end{array}$$

on dessine $y=-2x+125$

et on est au-dessous

$$\begin{array}{l|l} 200x+300y \leq 19'500 & :100 \\ 2x+3y \leq 195 & -2x \\ 3y \leq -2x+195 & :3 \\ y \leq -\frac{2}{3}x+65 & \end{array}$$

on dessine $y=-\frac{2}{3}x+65$ et on est au-dessous



Calculons les coordonnées des sommets du polygone des contraintes : A : on met $x=0$ dans $y=-\frac{2}{3}x+65 \Rightarrow y=65$

$\Rightarrow A(0;65)$

B : on a $y=-2x+125$ et $y=-\frac{2}{3}x+65$

$$\begin{array}{l|l} \Rightarrow -2x+125 = -\frac{2}{3}x+65 & \cdot 3 \\ -6x+375 = -2x+195 & +2x-375 \\ -4x = -180 & :(-4) \\ x = 45 & \end{array}$$

$\Rightarrow y = -2x+125 = -2\cdot 45 + 125 = 35$

$\Rightarrow B(45;35)$

C : on met $y=0$ dans $y=-2x+125 \Rightarrow 0=-2x+125$

$\Rightarrow 2x=125 \Rightarrow x=62,5 \Rightarrow C(62,5;0)$

On calcule la recette pour A, B et C et on regarde où elle est maximale :

$A(0;65)$: $750\cdot 0+500\cdot 65 = 32'500$

$B(45;35)$: $750\cdot 45+500\cdot 35 = 51'250$

$C(62,5;0)$: $750\cdot 62,5+500\cdot 0 = 46'875$.

La recette sera maximale s'il fabrique <u>45 caisses de type A et 35 caisses de type B.</u>

Exercice 5

On établit le tableau suivant :

	Nb	Heures de fabrication	Heures de décoration	Bénéfice
Assiettes	x	$2x$	$0,5x$	$70x$
Vases	y	$3y$	$2y$	$160y$
	$x \geq 0$ $y \geq 0$ $x \leq 30$	$2x+3y \leq 96$ $(12 \cdot 8 = 96)$	$0,5x+2y \leq 49$ $(7 \cdot 7 = 49)$	$70x+160y$

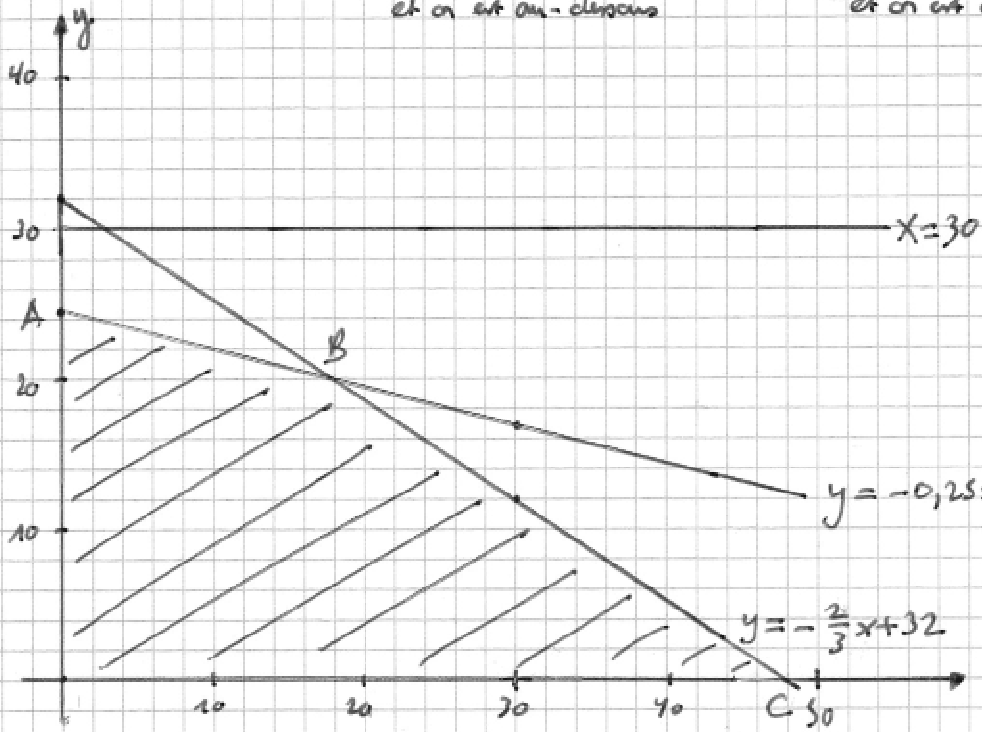
On dessine la zone correspondant aux contraintes : $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \leq 30$,

$$\begin{array}{l|l} 2x+3y \leq 96 & -2x \\ 3y \leq -2x+96 & :3 \\ y \leq -\frac{2}{3}x+32 & \end{array}$$

on dessine $y = -\frac{2}{3}x+32$ et on est au-dessous

$$\begin{array}{l|l} 0,5x+2y \leq 49 & -0,5x \\ 2y \leq -0,5x+49 & :2 \\ y \leq -0,25x+24,5 & \end{array}$$

on dessine $y=-0,25x+24,5$ et on est au-dessous



On calcule les coordonnées des sommets du polygone des contraintes :

A : on met $x=0$ dans $y=-0,25x+24,5 \Rightarrow y=24,5 \Rightarrow A(0;24,5)$

B : on a $y=-\frac{2}{3}x+32$ et $y=-0,25x+24,5 \Rightarrow$

$$\begin{array}{rl|l} -\frac{2}{3}x+32 &= -0,25x+24,5 & \cdot 3 \\ -2x+96 &= -0,75x+73,5 & +0,75x \ -96 \\ -1,25x &= -22,5 & :(-1,25) \\ x &= 18 & \end{array}$$

$\Rightarrow y=-0,25 \cdot 18+24,5 = 20 \Rightarrow B(18;20)$

C : on met $y=0$ dans $y=-\frac{2}{3}x+32 \Rightarrow -\frac{2}{3}x+32=0 \Rightarrow \frac{2}{3}x+32=0 \Rightarrow x=48$

$\Rightarrow C(48;0)$.

On calcule le bénéfice pour A, B et C et on regarde où il est maximal :

$A(0;24,5)$: $70\cdot 0+160\cdot 24,5 = 3920$

$B(18;20)$: $70\cdot 18+160\cdot 20 = 4460$

$C(48;0)$: $70\cdot 48+160\cdot 0 = 3360$.

Le bénéfice est donc maximal pour <u>18 assiettes et 20 vases.</u>

Exercice 6

On établit le tableau suivant:

	Nb	Heures	Bois	Colle	Bénéfice
Meubles A	x	$4x$	$20x$	$0{,}5x$	$300x$
Meubles B	y	$2y$	$30y$	$0{,}5y$	$400y$
	$x \geqslant 0$ $y \geqslant 0$	$4x+2y \leq 40$ $(5\cdot 8 = 40)$	$20x+30y \leq 420$	$0{,}5x+0{,}5y \leq 9$	$300x+400y$

On dessine la zone correspondant aux contraintes : $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$

$4x+2y \leq 40 \quad | -4x$

$2y \leq -4x+40 \quad | :2$

$y \leq -2x+20$

on dessine $y = -2x+20$

et on est au-dessous

$20x+30y \leq 420 \quad | -20x$

$30y \leq -20x+420 \quad | :30$

$y \leq -\frac{2}{3}x+14$

on dessine $y = -\frac{2}{3}x+14$

et on est au-dessous

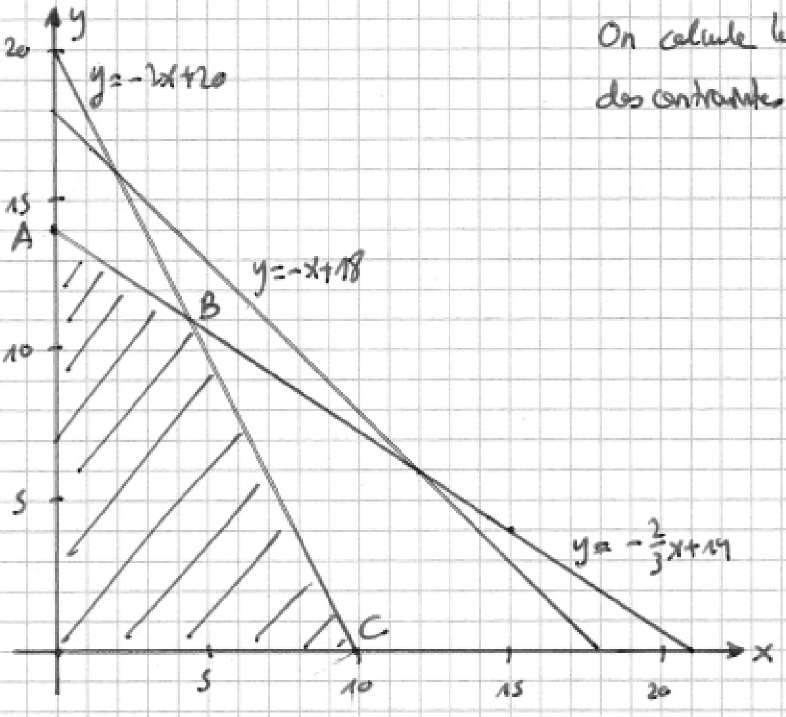
$0{,}5x+0{,}5y \leq 9 \quad | \cdot 2$

$x+y \leq 18 \quad | -x$

$y \leq -x+18$

on dessine $y = -x+18$

et on est au-dessous



On calcule les coordonnées des sommets du polygone des contraintes: A: on met $x=0$ dans $y=-\frac{2}{3}x+14$

$\Rightarrow y = 14 \Rightarrow A(0;14)$

B: on a $y=-2x+20$ et $y=-\frac{2}{3}x+14$

$\Rightarrow -2x+20 = -\frac{2}{3}x+14 \quad | \cdot 3$

$-6x+60 = -2x+42 \quad | +2x \; -60$

$-4x = -18 \quad | :(-4)$

$x = 4{,}5$

$\Rightarrow y = -2\cdot 4{,}5+20 = 11 \Rightarrow B(4{,}5 ; 11)$

C: on met $y=0$ dans $y=-2x+20$

$\Rightarrow 0 = -2x+20 \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = 10$

$\Rightarrow C(10;0)$.

On calcule le bénéfice pour A, B et C et on regarde où il est maximal:

$A(0;14)$: $300\cdot 0 + 400\cdot 14 = 5600$

$B(4{,}5;11)$: $300\cdot 4{,}5 + 400\cdot 11 = 5750$

$C(10;0)$: $300\cdot 10 + 400\cdot 0 = 3000$.

La fabrication la plus favorable sera de 4,5 meubles A (ou 4 si on veut les meubles terminés) et 11 meubles B.

Exercice 7

On établit le tableau suivant :

	Nb	Achats	Ventes	Bénéfice
Paquets de cacahuètes	x	$0{,}8x$	$2x$	$1{,}2x$
Paquets de bonbons	y	$1{,}6y$	$3{,}2y$	$1{,}6y$
	$x \geq 0$ $y \geq 0$	$0{,}8x+1{,}6y \leq 800$		$1{,}2x+1{,}6y$

$x+y \leq 700$

$x \leq 500$

$y \leq 400$

On dessine la zone correspondant aux contraintes : $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \leq 500$, $y \leq 400$,

$x+y \leq 700 \quad | -x$

$y \leq -x+700$

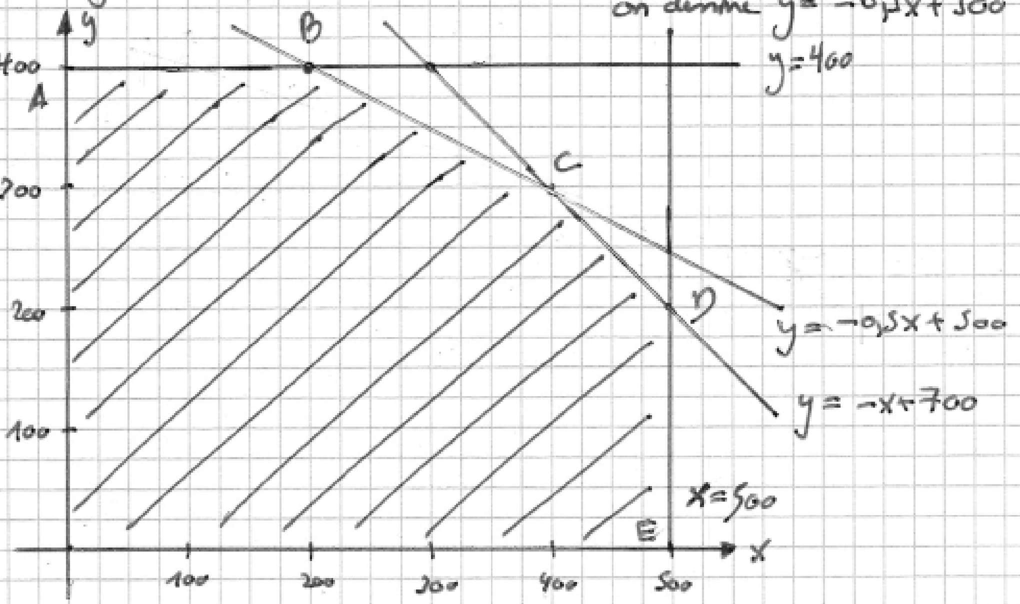
on dessine $y=-x+700$ et on est au-dessous

$0{,}8x+1{,}6y \leq 800 \quad | -0{,}8x$

$1{,}6y \leq -0{,}8x+800 \quad | :1{,}6$

$y \leq -0{,}5x+500$

on dessine $y=-0{,}5x+500$ et on est au-dessous



On calcule les coordonnées des sommets du polygone des contraintes :

A : on a $A(0;400)$

B : on met $y=400$ dans $y=-0{,}5x+500 \Rightarrow 400=-0{,}5x+500 \Rightarrow -0{,}5x=-100 \Rightarrow x=200$

$\Rightarrow B(200;400)$

C : on a $y=-0{,}5x+500$ et $y=-x+700 \Rightarrow -0{,}5x+500=-x+700 \quad | +x-500$

$0{,}5x=200 \quad | \cdot 2$

$x=400$

$\Rightarrow y=-x+700=-400+700=300 \Rightarrow C(400;300)$

D : on met $x=500$ dans $y=-x+700 \Rightarrow y=-500+700=200 \Rightarrow D(500;200)$

E : on a $E(500;0)$.

On calcule le bénéfice pour A, B, C, D et E et on regarde où il est maximal :

A $(0;400)$: $1{,}2\cdot 0+1{,}6\cdot 400=640$

B $(200;400)$: $1{,}2\cdot 200+1{,}6\cdot 400=880$

C $(400;300)$: $1{,}2\cdot 400+1{,}6\cdot 300=960$

D $(500;200)$: $1{,}2\cdot 500+1{,}6\cdot 200=920$

E $(500;0)$: $1{,}2\cdot 500+1{,}6\cdot 0=600$.

Le bénéfice sera maximal avec <u>400 paquets de cacahuètes et 300 paquets de bonbons.</u>

Exercice 8

On établit le tableau suivant:

	Nb	Tissu imprimé	Tissu uni	Heures de travail	Bénéfice
Chemises A	x	$1{,}8x$	$0{,}75x$	$3x$	$35x$
Chemises B	y	$2{,}25y$	$0{,}5y$	$3y$	$30y$
	$x \geq 0$ $y \geq 0$	$1{,}8x+2{,}25y \leq 270$	$0{,}75x+0{,}5y \leq 90$	$3x+3y \leq 390$	$35x+30y$

On dessine la zone correspondant aux contraintes: $x \geq 0$, $y \geq 0$,

$1{,}8x + 2{,}25y \leq 270 \quad | -1{,}8x$
$2{,}25y \leq -1{,}8x + 270 \quad | :2{,}25$
$y \leq -0{,}8x + 120$

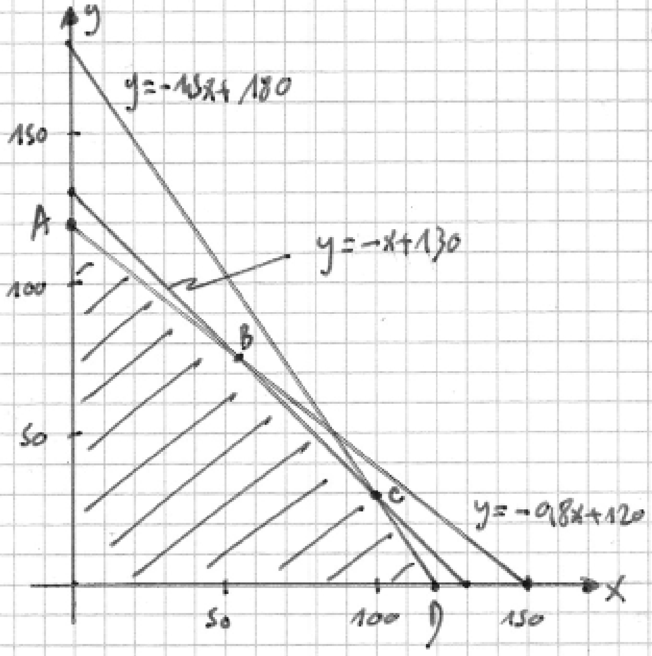
on dessine $y = -0{,}8x + 120$ et on est au-dessous

$0{,}75x + 0{,}5y \leq 90 \quad | -0{,}75x$
$0{,}5y \leq -0{,}75x + 90 \quad | \cdot 2$
$y \leq -1{,}5x + 180$

on dessine $y = -1{,}5x + 180$ et on est au-dessous

$3x + 3y \leq 390 \quad | -3x$
$3y \leq -3x + 390 \quad | :3$
$y \leq -x + 130$

on dessine $y = -x + 130$ et on est au-dessous



On calcule les coordonnées des sommets du polygone des contraintes:

A: on met $x=0$ dans $y=-0{,}8x+120 \Rightarrow y=120$
$\Rightarrow A(0;120)$

B: on a $y=-0{,}8x+120$ et $y=-x+130$
$\Rightarrow -0{,}8x+120 = -x+130 \quad | +x-120$
$0{,}2x = 10 \quad | \cdot 5$
$x = 50$
$\Rightarrow y = -x+130 = -50+130 = 80 \Rightarrow B(50;80)$

C: on a $y=-x+130$ et $y=-1{,}5x+180$
$\Rightarrow -x+130 = -1{,}5x+180 \quad | +1{,}5x-130$
$0{,}5x = 50 \quad | \cdot 2$
$x = 100$
$\Rightarrow y = -x+130 = -100+130 = 30 \Rightarrow C(100;30)$

D: on met $y=0$ dans $y=-1{,}5x+180$
$\Rightarrow 0 = -1{,}5x+180 \Rightarrow 1{,}5x = 180 \Rightarrow x = 120$
$\Rightarrow D(120;0)$

On calcule le bénéfice pour A, B, C et D et on regarde où il est maximal.

$A(0;120)$: $35 \cdot 0 + 30 \cdot 120 = 3600$
$B(50;80)$: $35 \cdot 50 + 30 \cdot 80 = 4150$
$C(100;30)$: $35 \cdot 100 + 30 \cdot 30 = 4400$
$D(120;0)$: $35 \cdot 120 + 30 \cdot 0 = 4200$

$\Rightarrow$ le bénéfice est maximal avec <u>100 chemises A et 30 chemises B.</u>

Exercice 9

On établit le tableau suivant :

	Nb	Jacinthes	Tulipes	Narcisses	Prix
Lots A	x	$30x$	$40x$	$30x$	$75x$
Lots B	y	$10y$	$40y$	$50y$	$60y$
	$x \geqslant 0$ $y \geqslant 0$	$30x+10y \geqslant 1200$	$40x+40y \geqslant 3200$	$30x+50y \geqslant 3000$	$75x+60y$

On dessine la zone correspondant aux contraintes : $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$,

$30x+10y \geqslant 1200 \quad | -30x$

$10y \geqslant -30x+1200 \quad | :10$

$y \geqslant -3x+120$

on dessine $y=-3x+120$ et on est au-dessus

$40x+40y \geqslant 3200 \quad | -40x$

$40y \geqslant -40x+3200 \quad | :40$

$y \geqslant -x+80$

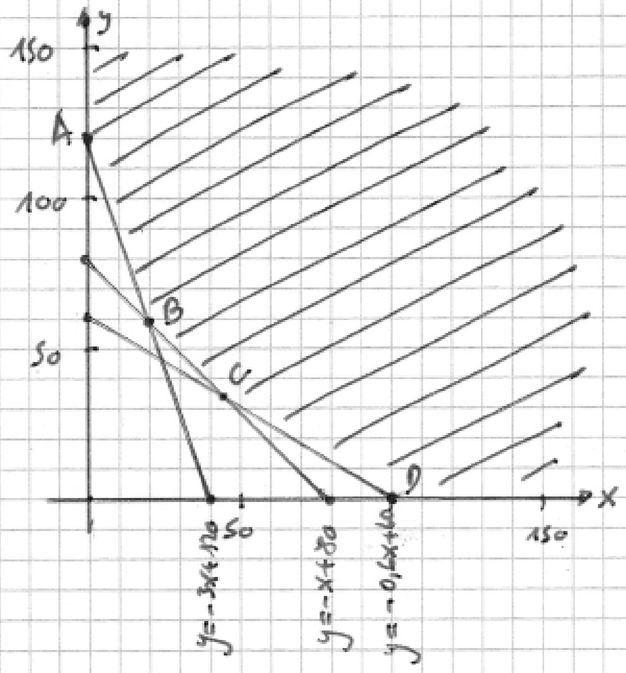
on dessine $y=-x+80$ et on est au-dessus

$30x+50y \geqslant 3000 \quad | -30x$

$50y \geqslant -30x+3000 \quad | :50$

$y \geqslant -0,6x+60$

on dessine $y=-0,6x+60$ et on est au-dessus



On calcule les coordonnées des sommets du polygone des contraintes :

A : on met $x=0$ dans $y=-3x+120 \Rightarrow y=120$

$\Rightarrow A(0;120)$

B : on a $y=-3x+120$ et $y=-x+80$

$\Rightarrow -3x+120=-x+80 \quad | +x-120$

$-2x=-40 \quad | :(-2)$

$x=20$

$\Rightarrow y=-x+80=-20+80=60 \Rightarrow B(20;60)$

C : on a $y=-x+80$ et $y=-0,6x+60$

$\Rightarrow -x+80=-0,6x+60 \quad | +0,6x-80$

$-0,4x=-20 \quad | :(-0,4)$

$x=50$

$\Rightarrow y=-x+80=-50+80=30 \Rightarrow C(50;30)$

D : on met $y=0$ dans $y=-0,6x+60$

$\Rightarrow 0=-0,6x+60 \Rightarrow 0,6x=60 \Rightarrow x=100$

$\Rightarrow D(100;0)$.

On calcule le prix total en A, B, C et D et on regarde où il est minimal :

$A(0;120)$: $75\cdot 0+60\cdot 120=7200$

$B(20;60)$: $75\cdot 20+60\cdot 60=5100$

$C(50;30)$: $75\cdot 50+60\cdot 30=5550$

$D(100;0)$: $75 \cdot 100 + 60 \cdot 0 = 7500$.

La dépense sera minimale avec <u>20 lots A et 60 lots B.</u>

On aura alors : $30 \cdot 20 + 10 \cdot 60 = 1200$ jacinthes $\Rightarrow$ toutes utilisées,
$40 \cdot 20 + 40 \cdot 60 = 3200$ tulipes $\Rightarrow$ toutes utilisées,
$30 \cdot 20 + 50 \cdot 60 = 3600$ narcisses $\Rightarrow$ <u>il reste 600 narcisses.</u>