Chapitre 1

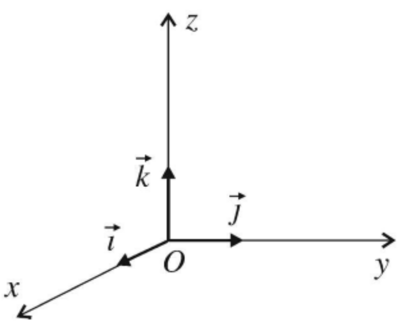
Cinématique et Dynamique

1.1 Grandeurs cinématiques

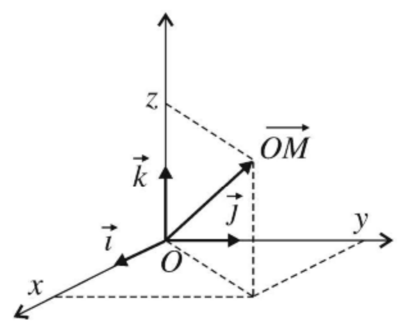
En classe de 2[e] nous avons introduit les grandeurs cinématiques utilisées pour décrire le mouvement d'un point matériel : l'abscisse curviligne, les vecteurs position, vitesse et accélération. Les vecteurs sont exprimés dans la base d'un repère, le plus souvent orthonormée. Le choix de la base est arbitraire mais, en pratique, est guidé par la trajectoire et les forces qui agissent sur le mobile ; nous allons utiliser la base cartésienne et la base de Frenet.

1.1.1 Base cartésienne

À un référentiel galiléen (par exemple le référentiel terrestre) nous pouvons attacher un *repère cartésien* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ dont les vecteurs unitaires de base sont fixes par rapport au référentiel (figure 1.1a).



(a) Base cartésienne



(b) Vecteur position

FIGURE 1.1 – Repère orthonormé à 3 dimensions

Position d'un mobile

Dans la base cartésienne, le *vecteur position* du point mobile M s'exprime (figure 1.1b) :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}} \tag{1.1}$$

Dans le cas d'une trajectoire plane dans le plan Oxy : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$.

Une autre façon de repérer la position d'un mobile M sur sa trajectoire est d'utiliser l'*abscisse curviligne*. Pour cela, on choisit arbitrairement (figure 1.2) :

- un point A sur la trajectoire (l'origine),
- un sens positif.

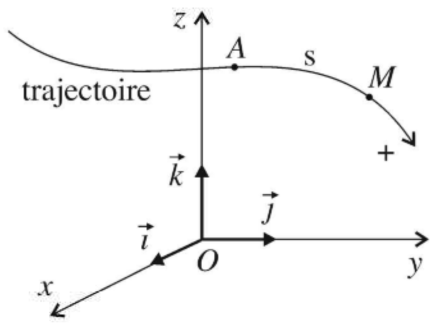


FIGURE 1.2 – Abscisse curviligne

L'abscisse curviligne s est la mesure algébrique de l'arc $\widehat{AM}$. Il est à noter que pour pouvoir utiliser l'abscisse curviligne, il faut connaître la trajectoire du mobile.

Vecteur vitesse

Le *vecteur vitesse* $\vec{v}$ du mobile M à l'instant t nous renseigne sur la rapidité du changement du vecteur position à cet instant. Il est défini par (figure 1.3) :

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{t' \to t} \frac{\overrightarrow{MM'}}{t' - t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}} \tag{1.2}$$

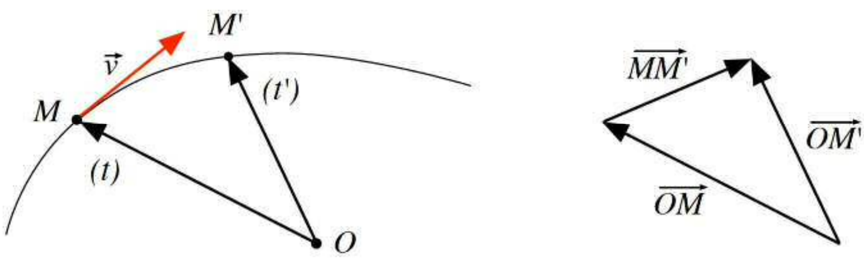


FIGURE 1.3 – Vecteur vitesse

En effet :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \Delta\overrightarrow{OM}$$

et

$$\lim_{t' \to t} \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{t'-t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}.$$

Le vecteur vitesse en M est tangent à la trajectoire en ce point et orienté dans le sens du mouvement.

L'expression du vecteur vitesse dans la base cartésienne se déduit des relations (1.1) et (1.2) :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k})}{\mathrm{d}t}$$

et comme les vecteurs de base sont constants :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\vec{\imath} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\vec{\jmath} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\vec{k}} \tag{1.3}$$

de sorte qu'on puisse écrire :

$$\vec{v}\left|\begin{array}{l} v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ v_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ v_z = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \end{array}\right.$$

Remarque : on utilise souvent les notations $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ qui représentent exclusivement des dérivations par rapport au temps. Ainsi :

$$\vec{v} = \dot{x}\,\vec{\imath} + \dot{y}\,\vec{\jmath} + \dot{z}\,\vec{k}.$$

Vecteur accélération

Le *vecteur accélération* $\vec{a}$ à l'instant t indique la rapidité de variation du vecteur vitesse. Il est défini par (figure 1.4) :

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{t' \to t} \frac{\vec{v'} - \vec{v}}{t'-t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}}$$

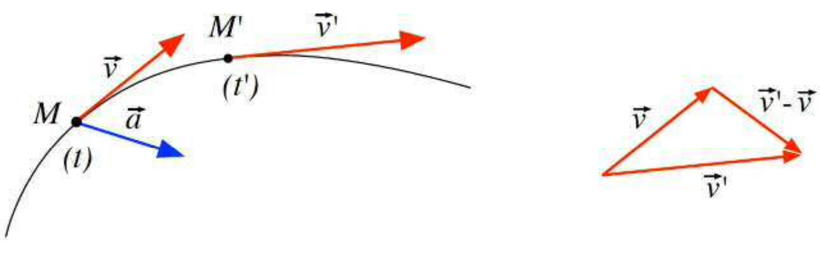


FIGURE 1.4 – Vecteur accélération

De la relation (1.3) il vient :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\,\vec{\imath} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\,\vec{\jmath} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\,\vec{k}$$

d'où :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{\imath} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{\jmath} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{k}}$$

puisque les vecteurs de base sont constants.

On peut alors écrire :

$$\vec{a}\;\left|\;\begin{aligned} a_x &= \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \\ a_y &= \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} \\ a_z &= \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} \end{aligned}\right.$$

Remarque : avec la notation pour les dérivations par rapport au temps, l'accélération s'écrit :

$$\vec{a} = \dot{v}_x\,\vec{\imath} + \dot{v}_y\,\vec{\jmath} + \dot{v}_z\,\vec{k} = \ddot{x}\,\vec{\imath} + \ddot{y}\,\vec{\jmath} + \ddot{z}\,\vec{k}.$$

1.1.2 Base de Frenet

Dans la suite nous allons nous limiter à une trajectoire plane. Le repère cartésien sera utilisé par exemple dans le cas d'une force constante. Dans d'autres situations on utilise également le repère $(M, \vec{T}, \vec{N})$ appelé *repère de Frenet* (figure 1.5).

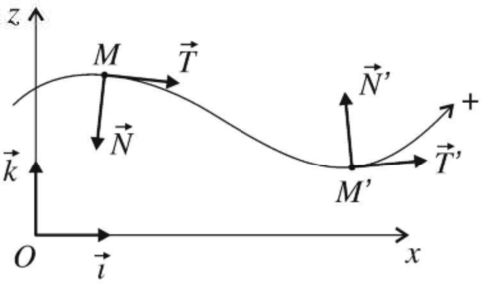


FIGURE 1.5 – Repère de Frenet

Il s'agit d'un repère qui se déplace avec le mobile M ; les vecteurs de base varient par rapport au référentiel galiléen lors du déplacement du point mobile. Les caractéristiques du repère de Frenet sont :

- son origine est le point mobile M ;
- le vecteur unitaire $\vec{T}$ est tangent en M à la trajectoire et orienté dans le sens positif ;
- le vecteur unitaire $\vec{N}$ est orthogonal en M à la trajectoire (et donc aussi à $\vec{T}$) et orienté vers l'intérieur de la courbure de celle-ci.

Comme le vecteur vitesse $\vec{v}$ est tangent à la trajectoire, son expression dans la base de Frenet est :

$$\vec{v} = v_T\,\vec{T} + 0\,\vec{N}$$

où v_T est la valeur algébrique de la vitesse en M. Ainsi :

- $v_T > 0$ si le mobile se déplace dans le sens positif ;

- $v_T < 0$ si le mobile se déplace en sens contraire.

La norme du vecteur vitesse est donnée par :

$$v = |v_T| = \lim_{t' \to t} \frac{\overline{MM'}}{t' - t} = \lim_{t' \to t} \frac{|s' - s|}{t' - t}$$

dont on peut déduire la vitesse algébrique :

$$v_T = \lim_{t' \to t} \frac{s' - s}{t' - t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

où s est l'abscisse curviligne. Ainsi, dans la base de Frenet :

$$\boxed{\vec{v} = v_T \vec{T} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \vec{T} = \dot{s} \vec{T}} \tag{1.4}$$

1.1.3 Mouvement circulaire

Un mobile décrit un mouvement circulaire si sa trajectoire est un cercle. Le mouvement est circulaire uniforme si en plus la norme du vecteur vitesse reste constante. Par contre, la direction du vecteur vitesse change constamment.

Abscisse angulaire

Dans le cas d'un mouvement circulaire, la position d'un mobile M peut être repérée par l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$, appelé *abscisse angulaire* (figure 1.6). Le choix de l'origine A est arbitraire.

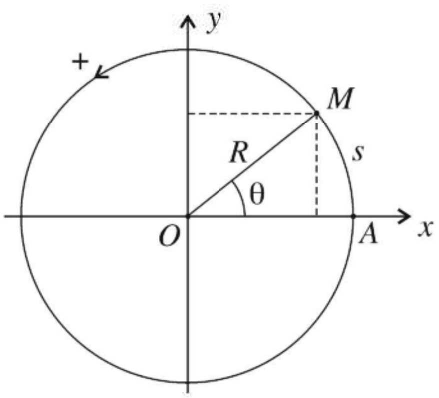


FIGURE 1.6 – Abscisse angulaire

Les coordonnées cartésiennes de la position du mobile sont :

$$x = R\cos(\theta)\ ;\ y = R\sin(\theta) \tag{1.5}$$

où R est le rayon de la trajectoire circulaire.

L'abscisse curviligne s est, pour une trajectoire de rayon R donné, proportionnelle à l'angle θ. On peut alors déduire d'une « règle de trois » la relation entre s et θ :

$$\begin{aligned} 2\pi\,\mathrm{rad} &\longrightarrow s = 2\pi\,R \\ 1\,\mathrm{rad} &\longrightarrow s = 2\pi\,R/2\pi = R \\ \theta\,\mathrm{rad} &\longrightarrow s = \theta\,R. \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{s = R\theta} \tag{1.6}$$

où l'angle θ est exprimé en radian.

Vitesse angulaire

La relation (1.4) donne la vitesse algébrique comme la dérivée de l'abscisse curviligne par rapport au temps. En utilisant la relation (1.6), nous pouvons faire apparaître l'abscisse angulaire :

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(R\,\theta)}{\mathrm{d}t} = R\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = R\,\dot{\theta} \tag{1.7}$$

car le rayon R de la trajectoire circulaire est constant.

Remarque : puisque v_T est la seule coordonnée du vecteur vitesse dans la base de Frenet, nous allons poser $v = v_T$. Rappelons que v est alors une valeur algébrique.

La dérivée de l'abscisse angulaire par rapport au temps est, par définition, la *vitesse angulaire* de rotation du point mobile M sur le cercle :

$$\boxed{\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}}$$

Elle s'exprime en radian par seconde (rad/s). Une vitesse angulaire de 1 rad/s signifie que l'abscisse angulaire varie de 1 rad en 1 s.

En utilisant la relation (1.7), nous pouvons maintenant exprimer la vitesse v, appelée *vitesse linéaire*, en fonction de ω :

$$\boxed{v = R\,\omega} \tag{1.8}$$

Accélération centripète

Puisque le vecteur vitesse change constamment de direction, le mobile en mouvement circulaire est accéléré, même si v est constant ! Calculons son accélération :

$$\begin{aligned} \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}(v\,\vec{T})}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{T} + v\,\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

Le premier terme correspond à l'accélération tangentielle $a_T\,\vec{T}$ et est due à la variation de la valeur de la vitesse linéaire. Ce terme s'annule dans le cas d'un mouvement circulaire

uniforme.
Le deuxième terme est une conséquence du changement de direction du vecteur vitesse.

Nous allons établir l'expression du deuxième terme dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme. Exprimons le vecteur position en coordonnées cartésiennes dans le plan Oxy (figure 1.6) :

$$\overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} x = R\,\cos(\theta) \\ y = R\,\sin(\theta) \end{array} \right. \tag{1.9}$$

Le vecteur vitesse est obtenu en dérivant le vecteur position par rapport au temps :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \left| \begin{array}{l} \dot{x} = -R\,\dot{\theta}\,\sin(\theta) = -R\,\omega\,\sin(\theta) \\ \dot{y} = R\,\dot{\theta}\,\cos(\theta) = R\,\omega\,\cos(\theta) \end{array} \right.$$

Comme le mouvement est uniforme, la vitesse linéaire est constante ; d'après la relation (1.8), la vitesse angulaire ω est également constante. L'accélération est obtenue en dérivant la vitesse par rapport au temps :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \left| \begin{array}{l} \ddot{x} = -R\,\omega\,\dot{\theta}\,\cos(\theta) = -R\,\omega^2\,\cos(\theta) \\ \ddot{y} = -R\,\omega\,\dot{\theta}\,\sin(\theta) = -R\,\omega^2\,\sin(\theta) \end{array} \right.$$

La comparaison avec l'expression (1.9) du vecteur position permet d'écrire : $\vec{a} = -\omega^2\,\overrightarrow{OM}$.
En exprimant le vecteur position dans la base de Frenet (figure 1.7a), $\overrightarrow{OM} = -R\,\vec{N}$, il vient :

$$\vec{a} = \omega^2\,R\,\vec{N} = a_N\,\vec{N}.$$

En utilisant la relation (1.8), nous pouvons également exprimer la coordonnée normale de l'accélération en fonction de la vitesse linéaire :

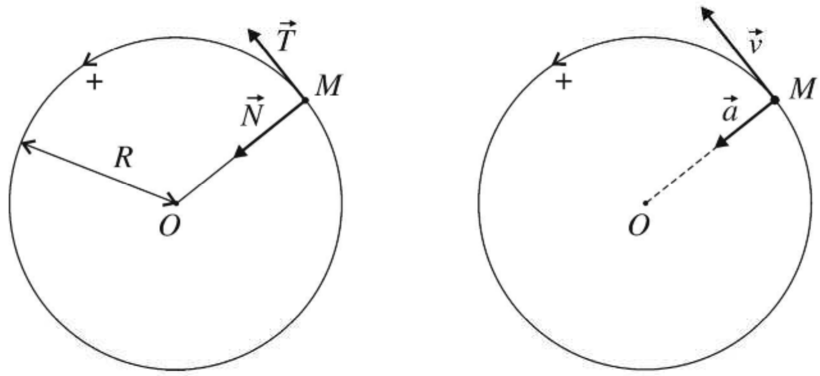
$$\boxed{a_N = R\,\omega^2 = \frac{v^2}{R}}$$

La figure 1.7b montre les vecteurs vitesse et accélération dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme. Dans ce cas, l'accélération est orientée vers le centre du cercle ; on dit qu'elle est *centripète*.

L'expression pour la coordonnée normale de l'accélération reste valable dans le cas d'un mouvement circulaire *non uniforme*. Dans le cas général d'un mouvement circulaire, le vecteur accélération est :

$$\boxed{\vec{a} = a_T\,\vec{T} + a_N\,\vec{N} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{T} + \frac{v^2}{R}\,\vec{N}} \tag{1.10}$$

Cette expression reste même valable pour un mouvement plan quelconque. Le rayon R désigne alors le *rayon de courbure* de la trajectoire et peut varier durant le mouvement. Ce n'est que pour un mouvement circulaire que le rayon de courbure est constant.



(a) Base de Frenet (b) Vitesse et accélération

FIGURE 1.7 – Mouvement circulaire uniforme

Mouvement circulaire uniforme

Le mouvement circulaire est uniforme si la vitesse linéaire est constante ; il en suit que la vitesse angulaire est également constante :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega = \text{constante.}$$

En intégrant cette relation par rapport au temps on obtient l'abscisse angulaire en fonction du temps :

$$\theta = \int \omega \, \mathrm{d}t = \omega \, t + cte.$$

Si à l'instant $t = 0$ nous avons $\theta = \theta_0$, l'équation horaire du mouvement circulaire uniforme s'écrit :

$$\boxed{\theta = \omega \, t + \theta_0}$$

Le mouvement circulaire uniforme est périodique de *période* T. La période est le temps pour décrire un tour complet et s'exprime en seconde (s). Nous avons :

$$T = \frac{\text{périmètre du cercle}}{\text{vitesse linéaire}} = \frac{2\pi \, R}{v}.$$

La vitesse linéaire peut s'exprimer en fonction de la période :

$$v = \frac{2\pi \, R}{T}.$$

En utilisant la relation (1.8), la vitesse angulaire est :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

La *fréquence* N du mouvement circulaire uniforme est le nombre de tours effectués par seconde. La distance parcourue par seconde étant la vitesse linéaire v, nous avons :

$$N = \frac{\text{vitesse linéaire}}{\text{périmètre du cercle}} = \frac{v}{2\pi \, R}.$$

Ainsi, la fréquence est l'inverse de la période :

$$\boxed{N = \frac{1}{T}}$$

La fréquence est exprimée en *hertz* (Hz) : $1\,\mathrm{Hz} = 1\,\mathrm{s}^{-1}$. Finalement :

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\,N} \tag{1.11}$$

Comme la vitesse linéaire est constante, $a_T = 0$ et l'accélération du mobile est centripète : $\vec{a} = a_N\,\vec{N}$. D'après la relation fondamentale de la dynamique, la résultante des forces doit également être centripète ; on l'appelle *force centripète* notée $\vec{F}_c$:

$$\vec{F}_c = \sum_i \vec{F}_i = m\,\vec{a} = m\,a_N\,\vec{N}.$$

Il en suit :

Énoncé *Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces appliquées à un mobile en mouvement circulaire uniforme est dirigée vers le centre de la trajectoire :*

$$\boxed{\sum_i \vec{F}_i = m\,\frac{v^2}{R}\,\vec{N} = m\,\omega^2\,R\,\vec{N}}$$

Remarque : la force centripète est la résultante des forces appliquées au mobile, ce n'est pas une nouvelle force qui doit être ajoutée au bilan des forces !

1.1.4 Exercices

Exercice 1.1 Un point mobile a comme coordonnées cartésiennes dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

$$\overrightarrow{OM}\ \left|\ \begin{array}{l} x = 2t - 2 \\ y = 3t^2 \end{array}\right.$$

Calculer les coordonnées du vecteur vitesse et du vecteur accélération de ce point mobile.

Exercice 1.2 La position d'un enfant sur un manège est repérée par rapport à un référentiel terrestre, en coordonnées cartésiennes, dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ par :

$$\overrightarrow{OM}\ \left|\ \begin{array}{l} x = a\,\cos(\omega\,t) \\ y = a\,\sin(\omega\,t) \end{array}\right.$$

où a et ω sont des constantes positives.

1. Déterminer, dans le même système de coordonnées cartésiennes, les coordonnées du vecteur vitesse et du vecteur accélération de l'enfant.

2. Exprimer le vecteur accélération en fonction du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

Exercice 1.3 Un CD tourne à raison de 8000 tours par minute ; son diamètre est 11,8 cm.

1. Calculer sa vitesse angulaire de rotation en rad/s.
2. Calculer la vitesse linéaire d'un point situé à la périphérie du disque.
3. Quelle est l'accélération de ce même point dans le repère de Frenet ?

Exercice 1.4 Avec quelle fréquence en Hz dois-tu tourner un seau rempli d'eau dans un plan vertical pour que l'eau ne te tombe pas sur la tête ?

1.2 Mouvement dans un champ de force constant

Considérons un point mobile M sur lequel agit, en tout point de l'espace, une force $\vec{F}$. On parle d'un *champ de force* agissant à distance. Si en tout point de l'espace le vecteur force est le même, le champ de force est dit *constant*.

Nous allons établir les équations horaires du mouvement dans les deux cas suivants :

- mouvement d'une masse ponctuelle dans un champ de pesanteur uniforme ;
- mouvement d'une charge ponctuelle dans un champ électrique uniforme.

1.2.1 Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme

Le champ de pesanteur terrestre est caractérisé par le *vecteur champ de pesanteur* $\vec{g}$ dirigé vers le centre de la terre.
Il n'est pas uniforme globalement mais peut être considéré comme tel dans une région limitée de l'espace. Pour deux points situés à la même altitude et distants de 100 km, la direction de $\vec{g}$ varie de moins de 1° et pour une différence d'altitude de 100 km, la norme de $\vec{g}$ varie de 3 % environ.
À l'intérieur d'un cube de 100 km de côtés, le champ de pesanteur peut donc être considéré comme *uniforme*.

Étude dynamique

Le mouvement du point mobile de masse m sera repéré par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen.

La seule force appliquée est le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$ du point mobile. Nous négligeons ici le frottement de l'air et la poussée d'Archimède.

Dans le référentiel terrestre, la relation fondamentale de la dynamique s'applique :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{P} = m\,\vec{a}.$$

L'accélération d'un projectile ponctuel est donnée par :

$$\vec{a} = \frac{\vec{P}}{m} = \frac{m\,\vec{g}}{m} = \vec{g}.$$

Le vecteur accélération est indépendant de la masse du projectile et égal au vecteur champ de pesanteur. C'est un vecteur constant.

Étude cinématique

Nous allons choisir le repère cartésien le plus adapté à l'étude du mouvement (figure 1.8) :

- l'axe Oz est est vertical et dirigé vers le haut ;
- la position M_0 du mobile à l'instant $t = 0$ est sur l'axe Oz ;

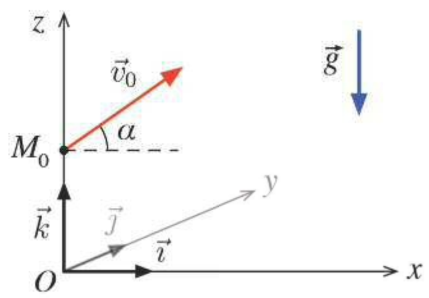


FIGURE 1.8 – Conditions initiales

- le vecteur vitesse $\vec{v}_0$ du mobile à l'instant $t = 0$ est contenu dans le plan Oxz et fait l'angle α avec l'axe Ox ;
- le plan Oxy est un plan horizontal.

Les coordonnées du vecteur accélération dans la base cartésienne sont :

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x = \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0 \\ a_y = \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = 0 \\ a_z = \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = -g \end{array} \right.$$

La vitesse est obtenue en intégrant l'accélération par rapport au temps :

$$\vec{v} \left| \begin{array}{l} v_x = \mathrm{cte} \\ v_y = \mathrm{cte}' \\ v_z = -g\,t + \mathrm{cte}'' \end{array} \right.$$

Les constantes d'intégration sont déterminées en considérant la vitesse initiale :

$$\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 \left| \begin{array}{l} v_{0x} = v_0\,\cos\alpha = \mathrm{cte} \\ v_{0y} = 0 = \mathrm{cte}' \\ v_{0z} = v_0\,\sin\alpha = \mathrm{cte}'' \end{array} \right.$$

Le vecteur vitesse à l'instant t s'écrit donc :

$$\vec{v} \left| \begin{array}{l} v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0\,\cos\alpha \\ v_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \\ v_z = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -g\,t + v_0\,\sin\alpha \end{array} \right. \tag{1.12}$$

La position est obtenue en intégrant la vitesse par rapport au temps :

$$\overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} x = v_0\,\cos\alpha\,t + \mathrm{cte} \\ y = \mathrm{cte}' \\ z = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\,\sin\alpha\,t + \mathrm{cte}'' \end{array} \right.$$

Les constantes d'intégration sont déterminées en considérant la position initiale :

$$\overrightarrow{OM}(t=0) = \overrightarrow{OM_0} \left| \begin{array}{l} 0 = \text{cte} \\ 0 = \text{cte}' \\ z_0 = \text{cte}'' \end{array} \right.$$

Nous obtenons finalement les *équations paramétriques* ou *horaires* du mouvement :

$$\overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} x = v_0 \cos\alpha\, t \\ y = 0 \\ z = -\dfrac{1}{2}\, g\, t^2 + v_0 \sin\alpha\, t + z_0 \end{array} \right. \tag{1.13}$$

Remarques :

- le mouvement suivant l'axe Ox est uniforme ;
- il n'y a pas de mouvement suivant l'axe Oy ; le mouvement s'effectue donc dans le plan Oxz ;
- le mouvement suivant l'axe Oz est uniformément varié ;
- Le mouvement est *indépendant de la masse* m du projectile et ne dépend que des conditions initiales.

Équation de la trajectoire

L'*équation de la trajectoire* ou *équation cartésienne* est obtenue en éliminant le temps t entre $x(t)$ et $z(t)$. L'expression (1.13) permet d'écrire :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \Longrightarrow z = -\frac{1}{2}\, g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha} \right)^2 + v_0 \sin\alpha \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha} \right) + z_0.$$

Finalement :

$$\boxed{z = -\frac{1}{2}\, \frac{g}{(v_0 \cos\alpha)^2}\, x^2 + \tan\alpha\, x + z_0} \tag{1.14}$$

La trajectoire du mobile est une *parabole* d'axe vertical contenue dans le plan Oxz et dont la concavité est orientée vers le bas.

La figure 1.9 montre les vecteurs vitesse et accélération en différents points de la trajectoire.

Calcul de la portée

La *portée horizontale* est la distance horizontale entre le point de lancement M_0 du projectile et le point d'impact P (figure 1.10).

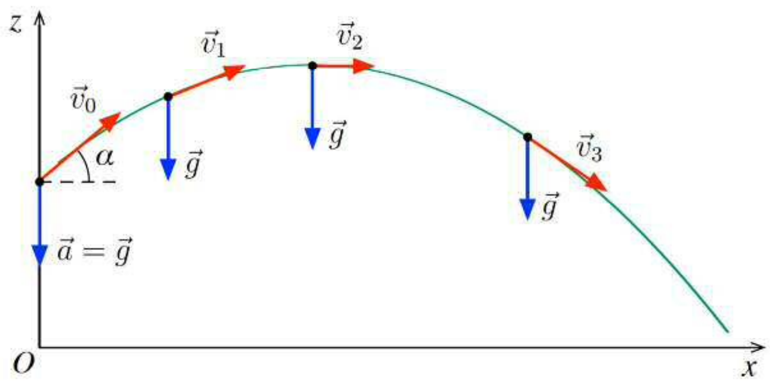


FIGURE 1.9 – Trajectoire du mobile dans le champ de pesanteur

Dans le plan vertical Oxz, les coordonnées cartésiennes de ces deux points sont :

$$M_0 \left| \begin{array}{l} 0 \\ z_0 \end{array} \right. \quad ; \quad P \left| \begin{array}{l} x_{\text{portée}} \\ z_P \end{array} \right.$$

On applique l'équation de la trajectoire (1.14) au point P :

$$z_P = -\frac{1}{2}\,\frac{g}{(v_0\,\cos\alpha)^2}\,{x_{\text{portée}}}^2 + \tan\alpha\; x_{\text{portée}} + z_0.$$

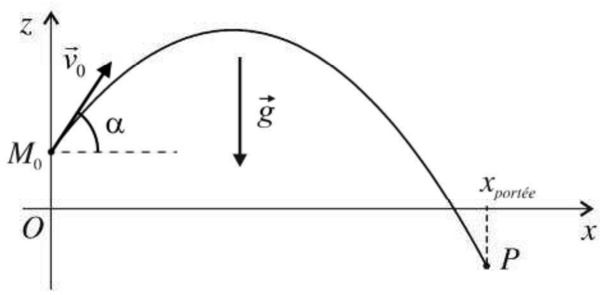


FIGURE 1.10 – Portée horizontale d'un projectile

La portée horizontale est la seule solution acceptable de cette équation du second degré.

Calcul de la flèche

La flèche est l'altitude maximale atteinte par le projectile. On peut la déterminer par les deux méthodes suivantes.

- Au sommet de la trajectoire, la vitesse verticale est nulle : $v_z = 0$. La relation (1.12) donne :

$$v_z = -g\,t + v_0\,\sin\alpha = 0 \Longrightarrow t_{z_{\max}} = \frac{v_0\,\sin\alpha}{g}.$$

  On obtient la flèche en substituant $t_{z_{\max}}$ dans l'équation horaire (1.13) de z :

$$z_{\max} = z(t_{z_{\max}}).$$

- Le sommet de la trajectoire est un maximum de l'équation de la trajectoire (1.14) ; la dérivée de z par rapport à x s'annule en $x_{z_{\max}}$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)_{x_{z_{\max}}} = 0.$$

Cette équation permet de déterminer l'abscisse du sommet de la parabole. Il reste à substituer $x_{z_{\max}}$ dans l'équation de la trajectoire pour obtenir la flèche.

1.2.2 Mouvement dans un champ électrostatique uniforme

Le deuxième cas qui va nous intéresser est le mouvement d'une particule de charge q et de masse m dans un champ électrostatique $\vec{E}$ uniforme. Un tel champ règne par exemple entre les armatures d'un condensateur plan.

Étude dynamique

Les forces exercées sur la particule chargée sont le poids et la force électrostatique. Nous pouvons en général négliger les effets du poids devant ceux de la force électrostatique.

Exercice : comparer ces deux forces dans le cas d'un électron dans un champ électrique d'intensité $E = 10^6\,\mathrm{V/m}$.

La résultante des forces extérieures se réduit à la force électrostatique :

$$\vec{F} = q\,\vec{E}.$$

L'accélération de la particule est donnée par : $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m} = \dfrac{q\,\vec{E}}{m}$.

Étude cinématique

Supposons qu'à l'instant $t = 0$ la particule pénètre dans le champ électrostatique uniforme avec une vitesse $\vec{v}_0$. Le vecteur champ est parallèle à l'axe Oz :

$$F_z = q\,E_z \Longrightarrow a_z = \frac{F_z}{m} = \frac{q\,E_z}{m}.$$

Remarque : le signe de a_z dépend des signes de q et de E_z !

Les équations horaires du mouvement de la particule dans le champ électrostatique uniforme sont (voir relations 1.13) :

$$\overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} x = v_0\,\cos\alpha\,t \\ y = 0 \\ z = \dfrac{1}{2}\dfrac{q\,E_z}{m}\,t^2 + v_0\,\sin\alpha\,t + z_0 \end{array} \right.$$

Exercice : établir ces équations en partant du vecteur accélération !

Équation de la trajectoire

L'équation de la trajectoire devient (voir relation 1.14) :

$$\boxed{z = \frac{1}{2}\,\frac{q\,E_z}{m\,(v_0\,\cos\alpha)^2}\,x^2 + \tan\alpha\;x + z_0}$$

Remarque : dans la plupart des situations la particule pénètre dans le champ à l'origine du repère ; dans ces conditions $z_0 = 0$.

La trajectoire est une parabole contenue dans le plan Oxz. L'orientation de la concavité dépend du signe de $q\,E_z$. Il importe de remarquer que q et E_z sont des valeurs algébriques. La figure 1.11 montre la trajectoire d'une charge négative dans le champ électrostatique uniforme d'un condensateur plan avec $E_z < 0$.

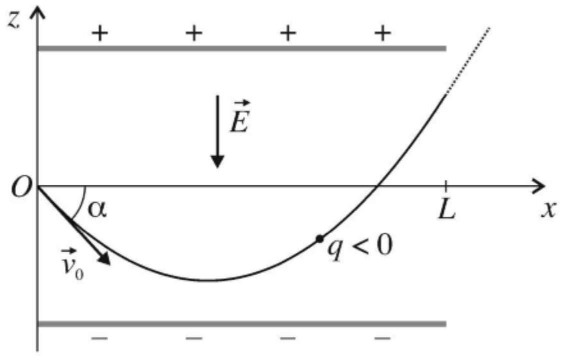


FIGURE 1.11 – Trajectoire d'une charge négative dans un champ électrostatique

1.3 Mouvement des planètes et des satellites

Pour étudier les mouvements des planètes et des satellites, un référentiel terrestre ne peut plus être considéré comme galiléen et, par conséquent, les lois de la dynamique n'y sont plus applicables.

Ces mouvements seront donc décrits :

- dans le référentiel héliocentrique (ou de Copernic) pour les planètes ;
- dans le référentiel géocentrique pour les satellites de la Terre.

1.3.1 Champ de gravitation

La force d'interaction gravitationnelle

Selon la *loi de gravitation* de Newton, deux corps A et B quasi ponctuels ou à symétrie sphérique, de masses M et m et dont les centres O_A et O_B sont distants de r, exercent l'un sur l'autre des forces attractives $\vec{F}_{A/B}$ et $\vec{F}_{B/A}$ de même direction O_AO_B, de même valeur mais de sens opposés (figure 1.12) :

$$\boxed{F_{A/B} = F_{B/A} = F = K\,\frac{m\,M}{r^2}}$$

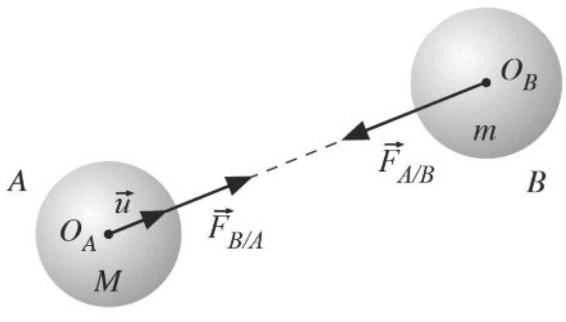


FIGURE 1.12 – Forces d'interaction gravitationnelle

La constante K est appelée *constante de gravitation*. Sa valeur dans le Système international d'unités est :

$$K = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,kg^{-2}\,m^2}.$$

Une expression vectorielle de la force gravitationnelle s'obtient en définissant un *vecteur unitaire* $\vec{u}$, directeur de la droite O_AO_B et orienté de O_A vers O_B (figure 1.12). Ce vecteur ne sert qu'à indiquer la direction et le sens de la force. Sa valeur est égale à 1. On a :

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A} = -K\,\frac{m\,M}{r^2}\,\vec{u} = -F\,\vec{u}.$$

Définition du champ de gravitation

Lorsqu'une masse ponctuelle m subit les forces d'attraction d'un ensemble de masses, chaque terme de la somme vectorielle qui représente la résultante $\vec{F}$ est proportionnelle à m ; il en suit que la résultante est également proportionnelle à m.

La grandeur vectorielle $\vec{F}/m$ est donc indépendante de m et appelée *vecteur champ de gravitation.*

Définition *Il existe un champ de gravitation en un point de l'espace si une particule de masse m, placée en ce point est soumise à une force d'interaction gravitationnelle $\vec{F}$. Le vecteur champ de gravitation $\vec{G}$ est défini par :*

$$\boxed{\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m}}$$

L'intensité du champ de gravitation s'exprime en N/kg.

Le champ de gravitation dépend de la position du point de l'espace considéré ainsi que des positions et des valeurs des masses qui le créent.

Champ créé par une masse ponctuelle

Considérons une masse ponctuelle M située en un point O de l'espace. On place une masse « d'essai » ponctuelle m en un point P à une une distance $r = OP$ de la masse M. La loi de Newton donne la force exercée sur la masse m :

$$\vec{F} = -K\,\frac{m\,M}{r^2}\,\vec{u}$$

où le vecteur unitaire $\vec{u}$ est dirigé de M vers m. Le champ de gravitation créé par la masse M au point P est obtenu en divisant la force par m :

$$\boxed{\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m} = -K\,\frac{M}{r^2}\,\vec{u}} \tag{1.15}$$

Le vecteur champ de gravitation est dirigé vers la masse M (figure 1.13).

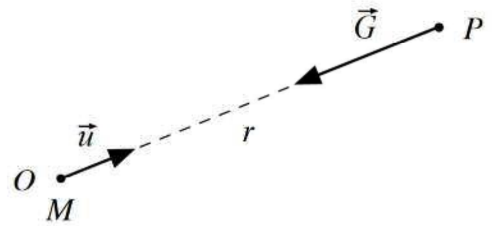


FIGURE 1.13 – Champ de gravitation créé par une masse ponctuelle

Une masse m placée à une distance r de M est alors soumise à la force gravitationnelle :

$$\vec{F} = m\,\vec{G}.$$

Comme la force est attractive, elle est dirigée vers la masse qui crée le champ.

Champ créé par un corps à symétrie sphérique

Considérons une planète (ou le Soleil, ...) que nous représentons par une boule de masse M, de rayon R et de centre O. Supposons qu'elle soit à symétrie sphérique, c'est-à-dire que la matière est distribuée identiquement dans toutes les directions.

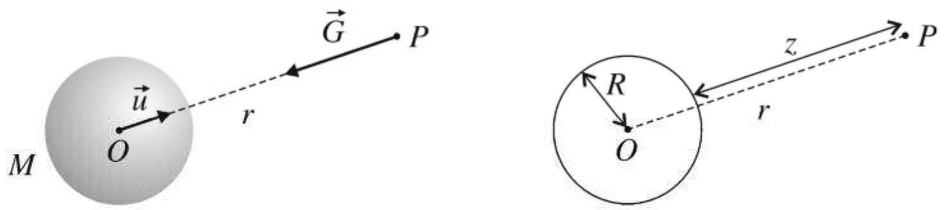


FIGURE 1.14 – Champ de gravitation créé par un corps à symétrie sphérique

Dans un tel cas on peut montrer que si le point P est extérieur à la distribution (figure 1.14), le champ de gravitation $\vec{G}$ créé en P est égal au champ qui serait créé par une masse ponctuelle M située en O :

$$\boxed{\vec{G} = -K\,\frac{M}{r^2}\,\vec{u}}$$

On exprime souvent l'intensité du champ de gravitation d'une planète en fonction de l'altitude z du point P (figure 1.14). Avec $r = R + z$ on obtient :

$$\boxed{G = \frac{K\,M}{(R+z)^2}} \tag{1.16}$$

Si le point P est situé à la surface de la planète, donc $z = 0$, l'intensité du champ vaut :

$$G_0 = \frac{K\,M}{R^2}.$$

Cette relation donne $K\,M = G_0\,R^2$. Remplaçons $K\,M$ dans l'expression (1.16) :

$$G = \frac{G_0\,R^2}{(R+z)^2}.$$

L'intensité G du champ de gravitation créé par une planète de rayon R à une altitude z, en fonction de l'intensité G_0 à la surface de la planète s'écrit finalement :

$$\boxed{G = G_0\left(\frac{R}{R+z}\right)^2}$$

Exemple : la valeur du champ à la surface de la Terre est $G_0 = 9{,}834\,\mathrm{N/kg}$.

Différence entre champ de pesanteur et champ de gravitation

Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est défini par la relation $\vec{P} = m\,\vec{g}$ dans le référentiel terrestre non-galiléen. Le champ de gravitation $\vec{G}$ par contre est défini par la relation $\vec{F} = m\,\vec{G}$

dans le référentiel géocentrique, qui est un référentiel galiléen (en tout cas « plus galiléen » que le référentiel terrestre).

Considérons l'exemple d'une boule suspendue à un ressort en un point de l'équateur terrestre (figure 1.15). Nous allons négliger l'influence de l'air.

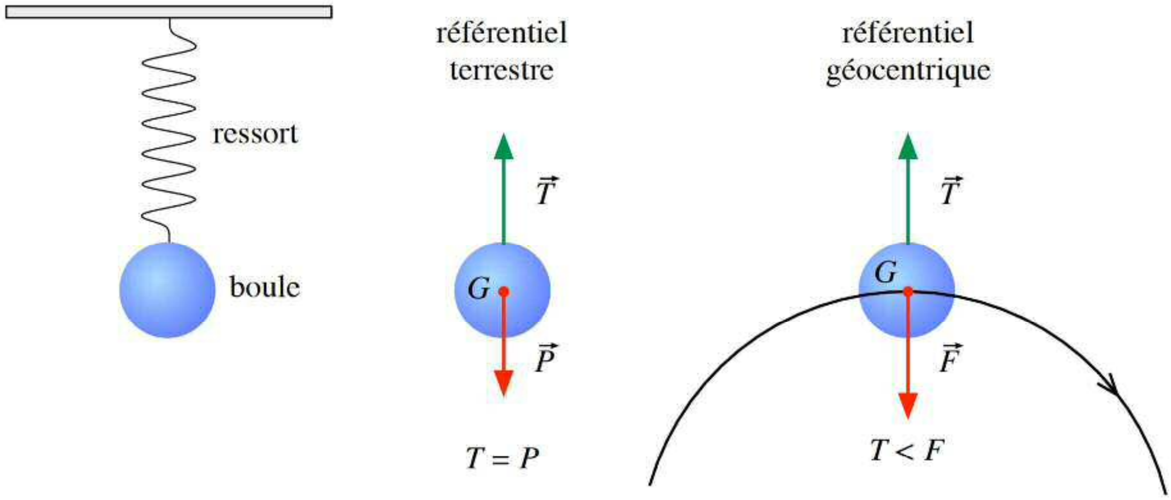


FIGURE 1.15 – Boule suspendue à un ressort dans le champ terrestre

Dans le référentiel terrestre, la boule est en équilibre : $T = P$.

Dans le référentiel géocentrique, la boule effectue un mouvement circulaire uniforme. La projection sur la direction normale donne : $m\,a_N = F - T \Rightarrow T < F$.

Il en suit que $P < F$ et donc $g < G$. La valeur du champ de pesanteur est inférieure à la valeur du champ de gravitation.

Application numérique : avec $G = 9{,}834\,\mathrm{N/kg}$, $a_N = 0{,}034\,\mathrm{m/s^2}$ et $g = G - a_N$ on obtient $g = 9{,}8\,\mathrm{N/kg}$.

1.3.2 Lois de Kepler

Tycho Brahé et ses assistants, parmi lesquels se trouvait Kepler, consignèrent de très nombreuses valeurs de positions de planètes dans le ciel au cours du temps. Kepler établit, à partir de ces observations très précises, trois lois qui régissent le mouvement des planètes. À l'époque, ces lois étaient donc purement expérimentales.

Première loi de Kepler ou loi des orbites elliptiques (1609)

Énoncé *Les planètes décrivent des orbites elliptiques dont le Soleil occupe l'un des foyers.*

Une ellipse est une courbe bien précise. De même qu'un cercle est caractérisé par un point, son centre et une distance, son rayon, une ellipse est caractérisée par deux points,

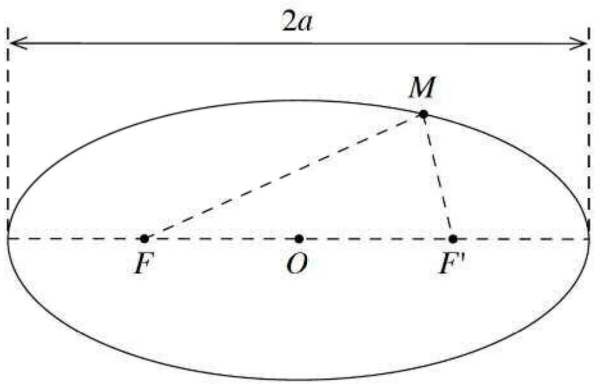


FIGURE 1.16 – Une ellipse et ses caractéristiques

ses foyers F et F', et une distance a nommée *demi-grand axe* (figure 1.16). Un point M de l'ellipse vérifie : $\overline{FM} + \overline{MF'} = 2a$.

Le cercle est un cas particulier d'ellipse dont les foyers sont confondus. Le demi-grand axe est alors le rayon du cercle.

Seconde loi ou loi des aires (1609)

La seconde observation que fit Kepler fut que les planètes ne tournent pas avec une vitesse constante autour du Soleil. Il observa qu'elles ont une vitesse plus grande lorsqu'elles sont plus proches du Soleil.

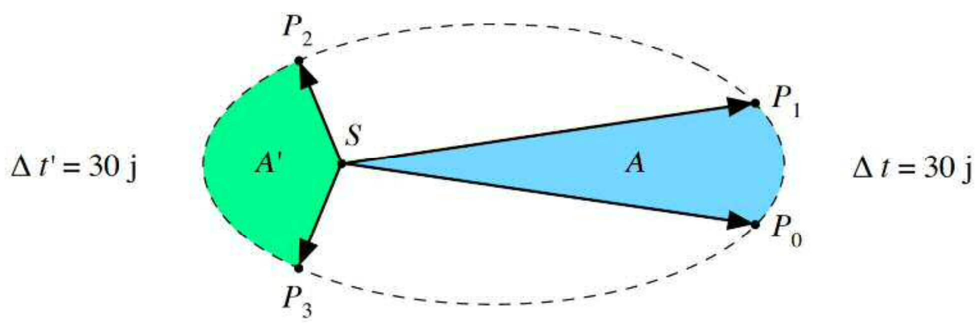


FIGURE 1.17 – Les aires A et A' des surfaces coloriées sont égales

Précisément, cette vitesse varie de façon que l'aire balayée par le rayon vecteur $\overrightarrow{SP}$ pendant un intervalle de temps déterminé (un mois, par exemple) reste constante quelle que soit la position de la planète sur son orbite (figure 1.17).

Énoncé *Le rayon vecteur* $\overrightarrow{SP}$ *allant du Soleil à la planète balaye des surfaces égales pendant des intervalles de temps égaux.*

Dans le cas d'une trajectoire circulaire, le mouvement est donc uniforme.

Troisième loi de Kepler ou loi des périodes (1618)

La troisième loi de Kepler est de nature différente des deux précédentes : elle unifie le mouvement de toutes les planètes en une loi universelle. Pour cette raison, on l'appelle aussi loi harmonique.

Si on appelle T le temps mis par une planète pour faire complètement le tour de son orbite (T définit alors la *période de révolution* de la planète autour du Soleil) et a la longueur du demi-grand axe de l'ellipse (ou son rayon si la trajectoire est circulaire), on a alors la relation suivante :

Énoncé *Le carré de la période de révolution d'une planète autour du Soleil est proportionnel au cube de la demi-longueur de l'axe principal de son orbite.*

Quelles que soient les deux planètes (1) et (2) choisies, ont peut écrire :

$$\frac{{T_1}^2}{{a_1}^3} = \frac{{T_2}^2}{{a_2}^3} = \text{constante.}$$

Ce rapport ne dépend pas de la planète mais uniquement des caractéristiques du Soleil.

1.3.3 Étude dynamique

Nous allons appliquer les lois de la dynamique au mouvement d'une masse m dans un champ de gravitation. Cette masse peut être par exemple un satellite dans le champ de la Terre ou encore la Terre dans le champ du Soleil. Dans le premier cas le référentiel que nous allons choisir est le référentiel géocentrique, dans le deuxième cas c'est celui de Copernic (référentiel héliocentrique).

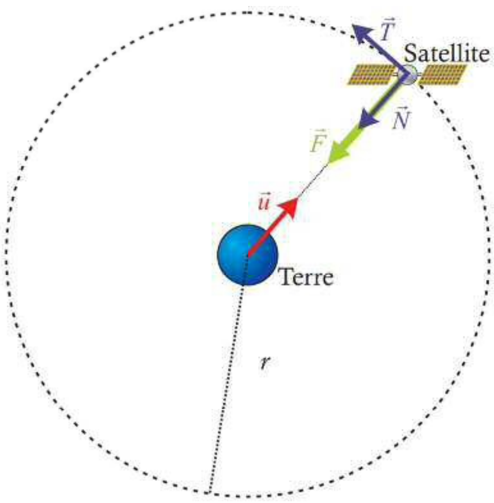


FIGURE 1.18 – Vecteurs unitaires et force de gravitation

La seule force est la force de gravitation $\vec{F} = m\,\vec{G}$ (figure 1.18). La loi fondamentale de la dynamique permet d'obtenir l'accélération de la masse m :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F} = m\,\vec{G} = m\,\vec{a}$$

et en utilisant la relation (1.15) :

$$\vec{a} = \vec{G} = -K\,\frac{M}{r^2}\,\vec{u}$$

où M est la masse du corps qui crée le champ de gravitation. On remarque que l'accélération ne dépend pas de la masse m en mouvement.

La plupart des trajectoires des planètes du système solaire (à l'exception de Mercure) et des satellites de la Terre sont des ellipses faiblement excentriques. Une telle trajectoire peut être considérée, en première approximation, comme circulaire de rayon r.

Nous allons utiliser, dans le plan de la trajectoire, le repère de Frenet dont l'origine est le centre d'inertie de la masse m (figure 1.18).

Dans le cas d'un mouvement circulaire, le vecteur unitaire $\vec{u}$ est parallèle au vecteur unitaire $\vec{N}$ de la base de Frenet et orienté dans le sens contraire de $\vec{N}$. Il en suit que $\vec{u} = -\vec{N}$ et l'expression de l'accélération dans la base de Frenet est :

$$\vec{a} = 0\,\vec{T} + K\,\frac{M}{r^2}\,\vec{N}. \tag{1.17}$$

La relation (1.10) donne l'expression générale de l'accélération dans la base de Frenet en fonction des grandeurs cinématiques :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{T} + \frac{v^2}{r}\,\vec{N}.$$

En identifiant les deux expressions de l'accélération, relations (1.17) et (1.10), l'égalité des coordonnées tangentielles donne :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \Longrightarrow v = \text{constante} \tag{1.18}$$

alors que l'égalité des coordonnées normales permet d'écrire :

$$\frac{v^2}{r} = K\,\frac{M}{r^2} \Longrightarrow v^2 = K\,\frac{M}{r}. \tag{1.19}$$

On déduit de la relation (1.18) que le mouvement est *uniforme*. La relation (1.19) permet d'obtenir l'expression pour la vitesse linéaire constante :

$$v = \sqrt{K\,\frac{M}{r}}.$$

En utilisant la relation (1.8) on obtient l'expression pour la vitesse angulaire :

$$\omega = \frac{v}{r} = \sqrt{K\,\frac{M}{r^3}}$$

Remarques :

- Les vitesses linéaire et angulaire sont indépendantes de la masse en mouvement.
- Quand le rayon de la trajectoire augmente, les vitesses linéaire et angulaire diminuent.

La relation (1.11) permet d'obtenir la période du mouvement circulaire uniforme :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{K\,M}} = \frac{2\pi}{\sqrt{K\,M}}\,r^{\frac{3}{2}} \tag{1.20}$$

On peut en déduire la 3e loi de Kepler dans le cas particulier du mouvement circulaire. En effet :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{(2\pi)^2}{K\,M}.$$

Ce rapport est le même pour toute planète du système solaire ou pour tout satellite de la Terre.

1.3.4 Satellite géostationnaire

Définition

Un satellite est dit géostationnaire s'il reste en permanence à la verticale d'un point de la surface terrestre. Il occupe une position fixe dans le référentiel terrestre.

Conditions de stationnarité

Quelles conditions doit vérifier un satellite pour être géostationnaire ?

- Lorsque la Terre tourne autour de l'axe des pôles, les satellites stationnaires tournent également avec elle. La trajectoire d'un satellite qui serait stationnaire au-dessus de Paris est circulaire dans un plan qui ne passe pas par le centre de la Terre (figure 1.19). Cela est impossible. En effet, la trajectoire d'un satellite est dans un plan passant par le centre de la Terre. Ce n'est donc le cas que si le satellite est stationnaire au-dessus d'un point de l'équateur.

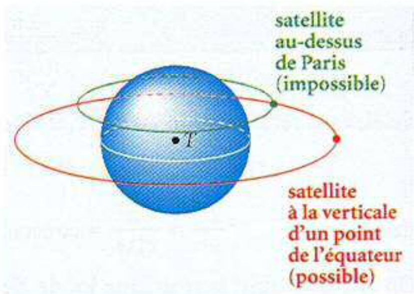


FIGURE 1.19 – Trajectoires de deux satellites « stationnaires »

Un satellite ne peut être géostationnaire que si le plan de son orbite est confondu avec le plan de l'équateur. Tout satellite géostationnaire se trouve à la verticale d'un point de l'équateur terrestre.

- Cette condition étant réalisée, la période de révolution du satellite doit être la même que la période de rotation de la Terre autour de son axe polaire.

  La période de révolution d'un satellite géostationnaire est égale à un jour sidéral. Sa valeur, notée T_S, est égale à : $T_S = 23\,\mathrm{h}\ 56\,\mathrm{min}\ 4\,\mathrm{s} = 86\,164\,\mathrm{s}$.

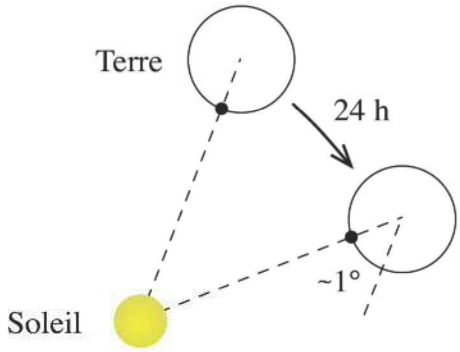


FIGURE 1.20 – Mouvement de la Terre dans le référentiel héliocentrique

  Considérons le mouvement de la Terre dans le référentiel héliocentrique (figure 1.20). Pendant un jour solaire d'une durée de 24 h, la Terre tourne d'un angle d'environ 361°. La durée d'une rotation de 360°, appelée jour sidéral, est inférieure à 24 h.

- Pour rester à la verticale du même point :

  Le sens de rotation du satellite autour de la Terre et celui de la Terre autour de l'axe des pôles doivent être identiques.

Ces trois conditions étant réalisées, on peut désormais déterminer les caractéristiques cinématiques d'un satellite géostationnaire.

Altitude et vitesse

Calculons l'altitude d'un satellite géostationnaire. En utilisant la relation (1.20), avec $r = R_T + z_S$, on obtient une expression reliant période et altitude :

$$T_S = \frac{2\pi}{\sqrt{K\,M_T}}\,(R_T + z_S)^{\frac{3}{2}}$$

d'où :

$$(R_T + z_S)^3 = \frac{{T_S}^2\,K\,M_T}{(2\pi)^2}$$

et finalement :

$$z_S = \sqrt[3]{\frac{{T_S}^2\,K\,M_T}{(2\pi)^2}} - R_T.$$

L'altitude d'un satellite géostationnaire est indépendante de sa masse !

Avec $R_T = 6{,}4 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$, $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ et $T_S = 86\,164\,\mathrm{s}$, l'altitude d'un satellite géostationnaire vaut $z_S = 3{,}58 \cdot 10^7\,\mathrm{m} = 35\,800\,\mathrm{km}$.

La vitesse linéaire en orbite géostationnaire est :

$$v_S = \sqrt{K\,\frac{M_T}{r}} = \sqrt{K\,\frac{M_T}{R_T + z_S}} = 3{,}08\,\mathrm{km/s}.$$

1.4 Mouvement dans un champ magnétique

L'action d'un champ magnétique sur une particule chargée en mouvement et le mouvement qui en résulte est à la base de nombreuses applications : tube de télévision, spectrographe de masse, cyclotron pour n'en citer que quelques unes.

Avant d'étudier ce mouvement, nous allons rappeler les propriétés de la force magnétique subie par une particule chargée : la *force de Lorentz*.

1.4.1 Force de Lorentz

Définition *La force magnétique subie par une particule de charge q et de vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$ s'écrit :*

$$\boxed{\vec{f} = q\,\vec{v} \times \vec{B}}$$

Cette force est appelée force de Lorentz.

L'intensité de $\vec{f}$ s'exprime en newtons (N) lorsque la charge est donnée en coulombs (C), la vitesse en mètres par seconde (m/s) et l'intensité du champ magnétique en teslas (T).

Les caractéristiques de la force de Lorentz sont :

- $\vec{f}$ est perpendiculaire à $\vec{v}$ et $\vec{B}$, et donc au plan défini par $\vec{v}$ et $\vec{B}$;
- le sens de $\vec{f}$ est donné par la *règle de la main droite* : le pouce indique le sens de $q\,\vec{v}$, l'index celui du champ magnétique $\vec{B}$, le majeur donne alors le sens de la force $\vec{f}$;
- l'intensité de $\vec{f}$ est $f = |q \sin\alpha|\, v\, B$, où α est l'angle formé par $\vec{v}$ et $\vec{B}$.

Remarques :

- La force de Lorentz est nulle si la charge est au repos ou si son vecteur vitesse est parallèle au vecteur champ.
- Un vecteur perpendiculaire au plan d'étude sera convenablement représenté par :
  - $\odot$ lorsque le vecteur est dirigé vers l'avant du plan ;
  - $\otimes$ lorsque le vecteur est dirigé vers l'arrière du plan.

1.4.2 Mouvement dans un champ uniforme

Nous allons considérer une particule (ou un faisceau de particules) de charge q, de masse m et de vitesse initiale $\vec{v}_0$, évoluant dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme.

Dans la suite nous allons nous limiter aux cas où $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$ ou $\vec{v}_0 \parallel \vec{B}$.

Étude expérimentale

Nous rappelons ici les résultats d'une expérience réalisée en classe de 2e.

Expérience 1.1 Un faisceau d'électrons pénètre avec la vitesse initiale $\vec{v}_0$ dans une ampoule contenant un gaz raréfié dans laquelle règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ créé par des bobines de Helmholtz.

Observations :

- si $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$, la trajectoire est circulaire. Le rayon de la trajectoire diminue quand l'intensité de $\vec{B}$ augmente. Lorsque la vitesse des électrons croît, le rayon augmente.
- si $\vec{v}_0 \parallel \vec{B}$, le faisceau n'est pas dévié.

Interprétation : la modification de la trajectoire du faisceau d'électrons est due à la présence de la force de Lorentz.

Étude dynamique

Nous allons déterminer les caractéristiques du mouvement de la particule chargée dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

Les forces appliquées à la particule chargée sont :

- la force de Lorentz $\vec{f} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$ en un point de la trajectoire où la vitesse de la particule est $\vec{v}$;
- le poids de la particule $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

Exercice : comparer ces deux forces dans le cas d'un électron se déplaçant à la vitesse $v = 10^6\,\mathrm{m/s}$ dans un champ magnétique d'intensité $B = 10^{-3}\,\mathrm{T}$.

Dans la suite nous allons négliger les effets du poids. Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{f} = q\,\vec{v} \times \vec{B} = m\,\vec{a}$$

ce qui donne pour l'accélération de la particule :

$$\vec{a} = \frac{q\,\vec{v} \times \vec{B}}{m}. \tag{1.21}$$

L'accélération est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs vitesse et champ magnétique.

Au cours du mouvement de la particule dans le champ magnétique, la force de Lorentz est à tout instant perpendiculaire au vecteur vitesse. Elle est donc normale à la trajectoire et ne travaille pas ! Le théorème de l'énergie cinétique permet alors de conclure que l'intensité de la vitesse de la particule est constante :

$$\Delta E_C = W(\vec{f}) = 0 \Longrightarrow E_C = \text{cte} \Longrightarrow v = \text{cte}.$$

Le mouvement de la particule est uniforme.

Étude cinématique

Nous venons de montrer que la valeur de la vitesse de la particule reste constante au cours du mouvement :

$$\boxed{v = v_0 = \text{constante}}$$

Considérons d'abord le cas $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$. La figure 1.21 montre le repère orthonormé utilisé ; son origine coïncide avec la position M_0 de la particule M à l'instant $t = 0$.

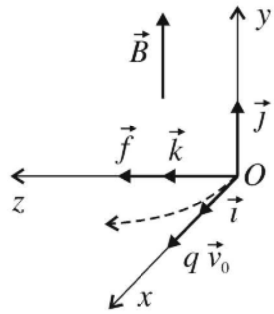


FIGURE 1.21 – Orientation du repère orthonormé

L'accélération est à tout instant perpendiculaire au vecteur champ, donc :

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = 0 \Longrightarrow v_y = \text{constante.}$$

Comme $v_{0y} = 0$ à l'instant $t = 0$, nous avons à tout instant :

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \Longrightarrow y = \text{constante.}$$

En considérant les conditions initiales, il vient $y = 0$. Le mouvement est décrit dans le plan $y = 0$ perpendiculaire à $\vec{B}$; à tout instant, $\vec{v}$ est perpendiculaire à $\vec{B}$.

La relation (1.21) montre que le vecteur accélération est à tout instant perpendiculaire à $\vec{B}$ et est donc contenu dans le plan Oxz. Dans ce plan, nous allons exprimer le vecteur accélération dans la base de Frenet.

La coordonnée tangentielle a_T est nulle car le mouvement est uniforme :

$$a_T = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0.$$

La coordonnée normale est positive et égale à la valeur de l'accélération :

$$a_N = \frac{f}{m} = \frac{|q|\,v\,B}{m}.$$

En remplaçant v par v_0. le vecteur accélération s'écrit :

$$\vec{a} = \frac{|q|\,v_0\,B}{m}\,\vec{N}. \tag{1.22}$$

Identifions les expressions (1.22) et (1.10) de la composante normale de l'accélération :

$$a_N = \frac{v^2}{r} = \frac{{v_0}^2}{r} = \frac{|q|\,v_0\,B}{m}$$

où r est le rayon de courbure de la trajectoire. On a :

$$\boxed{r = \frac{m\,v_0}{|q|\,B}}$$

Comme les grandeurs m, v_0, $|q|$ et B sont constantes, le rayon de courbure est constant. Le mouvement de la particule chargée est donc circulaire.

Énoncé *Lorsque la vitesse initiale $\vec{v}_0$ de la particule chargée est perpendiculaire au champ magnétique $\vec{B}$, la trajectoire est un cercle de rayon*

$$r = \frac{m\,v_0}{|q|\,B}$$

décrit à vitesse constante dans un plan perpendiculaire à $\vec{B}$.

Le temps mis par la particule pour réaliser un tour complet est la période T du mouvement circulaire. On l'obtient en divisant le périmètre du cercle par la vitesse de la particule :

$$T = \frac{2\pi\,r}{v_0} = \frac{2\pi\,m}{|q|\,B}.$$

La période est indépendante de la vitesse de la particule et ne dépend que de sa nature et de l'intensité du champ magnétique.

Dans le cas où $\vec{v}_0 \parallel \vec{B}$, l'accélération à $t = 0$ est nulle. La vitesse $\vec{v}$ à l'instant $t = \delta t$ est :

$$\vec{a} = \frac{\delta\vec{v}}{\delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{\delta t} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{v} = \vec{v}_0$$

où δt est un intervalle de temps très petit. Il n'y a donc pas de variation de vitesse, le vecteur vitesse à l'instant $t = \delta t$ est $\vec{v}_0$ et l'accélération reste nulle. On recommence le raisonnement pour $t = 2\,\delta t, \ldots$ Le vecteur vitesse étant un vecteur constant, le mouvement est rectiligne et uniforme.

Énoncé *Lorsque la vitesse initiale $\vec{v}_0$ de la particule chargée est parallèle au champ magnétique $\vec{B}$, le mouvement est rectiligne uniforme.*

1.4.3 Applications

Spectrographe de masse

Les physiciens et les chimistes utilisent quotidiennement une application importante de la déviation des particules dans un champ magnétique : le spectrographe de masse (figure 1.22). Cet appareil permet de séparer des ions de masses différentes et donc d'analyser la composition atomique et isotopique de la matière.

Les ions, de vitesse initiale quasi nulle, sont tout d'abord accélérés par une tension U jusqu'à une vitesse $\vec{v}_0$ telle que : $\frac{1}{2}\,m\,{v_0}^2 = |q|\,U$ (théorème de l'énergie cinétique).

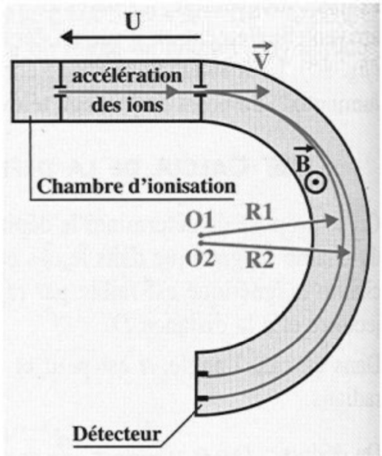


FIGURE 1.22 – Schéma d'un spectrographe de masse

Ils pénètrent ensuite dans une zone semi-circulaire où règne un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme perpendiculaire à $\vec{v}_0$. Leur trajectoire constitue alors un arc de cercle de rayon R tel que $R = \dfrac{m\, v_0}{|q|\, B}$. On obtient $m = \dfrac{|q|\, B^2\, R^2}{2\, U}$ en remplaçant v_0 en fonction de U, q, et m.

Les ions sont enfin recueillis sur un détecteur (plaque photographique, capteur électronique, ...) où la position du point d'impact permet de mesurer le rayon R de la trajectoire.

On en déduit le rapport $\dfrac{|q|}{m}$:

$$\frac{|q|}{m} = \frac{2\, U}{B^2\, R^2}$$

Il est ainsi possible de mesurer la masse des ions incidents, mais aussi d'analyser des mélanges, de séparer des isotopes, de déterminer des abondances isotopiques et de dater des échantillons de matière.

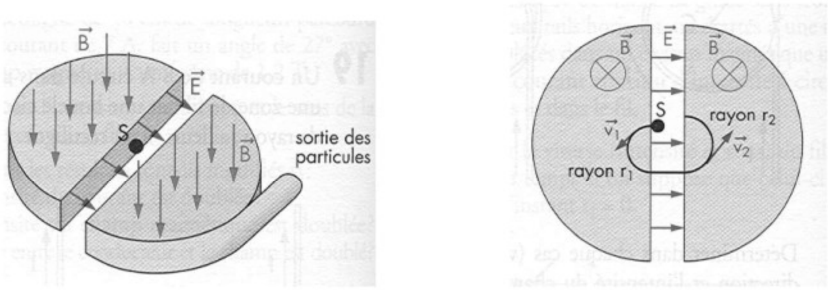
Cyclotron

Le cyclotron est un accélérateur de particules chargées comme des protons (noyaux d'hydrogène) ou des deutérons (noyaux d'hydrogène lourd formés d'un proton et d'un neutron). Ces particules sont accélérées à grande vitesse dans le vide et servent de projectiles que l'on envoie sur des cibles de matière. Les collisions qui en résultent permettent d'étudier la structure de la matière. Le premier cyclotron a été mis en service en 1932 ; son inventeur est le physicien américain Ernest Orlando Lawrence (1901–1958) qui reçut le prix Nobel en 1938.

Un cyclotron est constitué de deux parties creuses demi-cylindriques (figure 1.23a) dont la forme rappelle celle de la lettre D ; en raison de cette forme particulière, on les appelle « dés ».

Les dés sont placés dans un champ magnétique $\vec{B}$ perpendiculaire. On établit un champ électrique entre les dés en leur appliquant une différence de potentiel de l'ordre de 10 kV.

La source S de particules à accélérer est placée près du centre de l'appareil.



(a) Schéma d'ensemble (b) Émission des particules

FIGURE 1.23 – Cyclotron

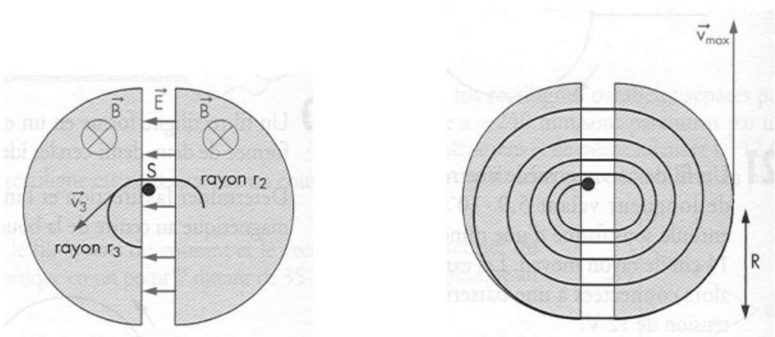
- Les particules de charge q et de masse m sont émises à la vitesse $\vec{v}_1$ par la source. Sous l'effet du champ magnétique, elles parcourent un demi-cercle de rayon r_1, dans le premier dé :

$$r_1 = \frac{m\,v_1}{|q|\,B}.$$

- Elles sont ensuite accélérées par le champ électrique (figure 1.23b) et pénètrent dans le second dé à la vitesse $\vec{v}_2$.
- Leur trajectoire dans le second dé est un demi-cercle de rayon r_2 :

$$r_2 = \frac{m\,v_2}{|q|\,B}.$$

  Comme $v_2 > v_1$, le rayon dans le second dé est plus grand : $r_2 > r_1$.



(a) Inversion du champ (b) Sortie des particules

FIGURE 1.24 – Trajectoire des particules

- Lorsque les particules pénètrent pour la seconde fois dans l'espace entre les dés, il faut, pour qu'elles soient à nouveau accélérées, changer le sens du champ électrique (figure 1.24a). Comme la période de rotation des particules est indépendante de leur vitesse, on inverse le champ électrique en appliquant aux dés une tension alternative qui varie suivant la même période.
- Le processus se répète jusqu'à ce que le rayon de la trajectoire des particules soit maximal, c'est-à-dire égal au rayon R des dés (figure 1.24b). La vitesse maximale

des particules à la sortie de l'appareil vaut :

$$v_{max} = \frac{|q|\, B\, R}{m}.$$