Chapitre 1

Sur les nombres

1.1 Les nombres entiers

1.1.1 Définitions et notations

On note

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ l'ensemble des entiers naturels ;

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs.

1.1.2 Démonstration par récurrence

On utilise ce type de démonstration lorsque l'énoncé à démontrer dépend d'un paramètre $n \in \mathbb{N}$.
Soit $P(n)$ un énoncé dépendant de $n \in \mathbb{N}$ et ayant un sens pour tout $n \geqslant n_0 \in \mathbb{N}$ (souvent $n_0 = 0$ ou 1). La démonstration par récurrence de $P(n)$ comporte 2 étapes, la seconde possédant 2 variantes :

1) On montre d'abord que le résultat est vrai pour $n = n_0$.
2) On démontre ensuite, en admettant que le résultat est vrai pour $n \geqslant n_0$, qu'il reste vrai pour $n+1$. On montre donc l'implication

$$P(n) \Longrightarrow P(n+1) \qquad \forall n \geqslant n_0$$

Variante 2') On admet le résultat pour tout k tel que $n_0 \leqslant k \leqslant n$ et on le démontre pour $n+1$. On démontre donc, dans cette variante, l'implication

$$\big[P(k) \quad \forall k \in \{n_0\,,\, n_0+1\,, \ldots,\, n\}\big] \quad \Longrightarrow \quad P(n+1).$$

Exemples 1.1.

(a) Montrons que

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n \geqslant 1.$$

1) L'affirmation est vraie pour $n = 1$ car $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$.
2) Supposons la formule vraie pour $n \geqslant 1$ et montrons-la pour $n+1$.

$$\begin{aligned} S(n+1) &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

ce qui montre que la formule reste vraie pour $n+1$.

(b) Démontrons la formule suivante :

$$S(n) = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

1) La formule est vraie pour $n = 1$ car $1 = \frac{1}{6}1 \cdot 2 \cdot 3$.

2) On suppose que la formule est vraie pour n. Alors

$$\begin{aligned}\underbrace{1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}_{=\frac{1}{6}\cdot n(n+1)(2n+1)} + (n+1)^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + n^2 + 2n + 1 \\ &= \frac{1}{6}\left(n(n+1)(2n+1) + 6n^2 + 12n + 6\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(2n^3 + 9n^2 + 13n + 6\right) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)\end{aligned}$$

ce qui démontre la formule pour $n + 1$.

1.1.3 Nombres premiers

Définition 1.2. On dit qu'un entier $n \in \mathbb{N}$ est *premier* s'il est $\geqslant 2$ et qu'il n'est divisible que par 1 et par lui-même.

Exemple 1.3. 2, 3, 5, 7, 11, ... sont premiers alors que 0, 1, 8, 9, 16, 22 ne le sont pas.

Théorème 1.4. *Tout nombre naturel $n > 1$ s'écrit de manière unique comme produit de nombres premiers, i.e.*

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$$

où $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ sont des premiers uniques et les e_i sont des entiers $\geqslant 1$ également uniquement déterminés par n.

De plus, les nombres premiers $p_1, p_2, \cdots, p_n$ sont les uniques nombres premiers divisant n.

DÉMONSTRATION : (par récurrence)

Ici, le début de la récurrence est $n_0 = 2$.

1) Si $n = 2$, alors le théorème est vrai car 2 est premier.

2') Supposons l'énoncé vrai pour tout entier k tel que $2 \leqslant k \leqslant n$ et considérons $n + 1$.

Si $n + 1$ est un nombre premier, alors l'affirmation est vraie.

Sinon, on a $n + 1 = md$ avec $1 < m, d \leqslant n$. Par hypothèse de récurrence, le théorème est vrai pour d et m. Ainsi

$$\begin{aligned} d &= p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_r^{e_r} \\ m &= q_1^{c_1} q_2^{c_2} \ldots q_s^{c_s} \end{aligned}$$

et donc $n + 1 = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_r^{e_r} q_1^{c_1} q_2^{c_2} \ldots q_s^{c_s}$ où les p_i et les q_j sont des nombres premiers.
L'unicité de cette décomposition est admise sans preuve ici.

□

Théorème 1.5 (Euclide)**.** *Il existe une infinité de nombres premiers*

DÉMONSTRATION :

Supposons, par l'absurde, qu'il existe un nombre fini n de premiers et notons-les p_1, p_2, $\ldots p_n$. Soit

$$N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1.$$

Par les théorèmes précédents, il est alors divisible par un nombre premier c'est-à-dire qu'il existe un p_i qui divise N. Mais comme p_i divise également le produit $p_1 p_2 \cdots p_n$, il doit diviser aussi la différence, c'est-à-dire $N - p_1 p_2 \cdots p_n = 1$ ce qui est absurde. Il existe donc une infinité de nombres premiers.

□

1.1.4 La formule du binôme

Définition 1.6 (Coefficients binomiaux)**.** On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \leqslant n$, $k \in \mathbb{N}$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1}.$$

Remarque 1.7. Par symétrie de la définition, on a toujours

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$$

Exemple 1.8. $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6 \qquad \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!1!} = 4 \qquad \binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$

Propriétés : On a, entre autres,

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$
2. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ pour tout $n \geqslant 1$.
3. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

Le triangle de Pascal

Les formules 1-3 ci-dessus permettent de construire le *triangle de Pascal.*

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & + & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & + & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & + & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & + & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

Les coefficients binomiaux sont utiles pour calculer $(a+b)^n$:

Théorème 1.9 (Formule du binôme)**.** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors*

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.\end{aligned}$$

En particulier, on a

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\end{aligned}$$

Démonstration : Par récurrence :
1) La formule est clairement vraie pour $n = 0$ et 1.
2) Supposons la formule vraie pour $n \geqslant 1$ et montrons-la pour $n+1$.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \\
&= a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \quad + \quad b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k \quad + \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k \quad + \quad \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}a^{n-j+1}b^j \qquad j := k+1 \\
&= \binom{n}{0}a^{n+1} \quad + \quad \left[\binom{n}{1}+\binom{n}{0}\right]a^nb \quad + \quad \left[\binom{n}{2}+\binom{n}{1}\right]a^{n-1}b^2 \quad + \dots \\
&\qquad \dots + \left[\binom{n}{n}+\binom{n}{n-1}\right]ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^nb + \binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 + \dots + \binom{n+1}{n}ab^n + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}
\end{aligned}$$

(par la propriété 3 ci-dessus)

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k.$$

1.2 Les nombres rationnels

On définit

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \; ; \; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^*\}$$

avec l'équivalence

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \Longleftrightarrow mn' = m'n.$$

C'est l'ensemble des *nombres rationnels*.
Dans $\mathbb{Q}$, les 4 opérations sont toujours possibles à l'exception, bien sûr, de la division par 0. On dit que $\mathbb{Q}$ est un *corps*.

Problème : il existe des longueurs dans le plan ne correspondant à aucun nombre rationnel. En effet considérons la diagonale du carré de côté égal à 1. Alors par Pythagore, sa longueur c doit satisfaire $c^2 = 1+1 = 2$, donc $c = \sqrt{2}$. Or

Proposition 1.10. *Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.*

Démonstration : Supposons, par l'absurde, qu'il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ avec $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ et supposons que la fraction est réduite, c'est-à-dire que p et q sont premiers entre eux (pgcd(p,q)=1). En élevant au carré, on obtient

$$\frac{p^2}{q^2} = 2$$

ce qui donne $2q^2 = p^2$. L'entier p^2 est donc pair ce qui signifie que p l'est aussi. Donc $p = 2p'$ et alors on a

$$2q^2 = p^2 = (2p')^2 = 4p'^2.$$

En divisant par 2, on obtient $q^2 = 2p'^2$ ce qui montre que q est également pair ce qui contredit le fait que la fraction est réduite. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

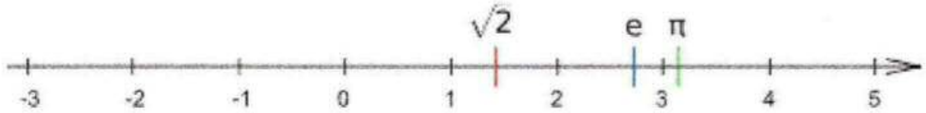
□

De ce fait on introduit

1.3 Les nombres réels

1.3.1 Introduction

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. On peut 'voir' les nombres réels comme toutes les longueurs géométriques obtenues le long d'une droite.
Représentation :



Exemples 1.11. Les nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{5}$, π, $\sqrt{\pi}$, e, e^2, $\ln(5)$ sont tous des nombres réels non rationnels.

L'ensemble $\mathbb{R}$ est un *corps, totalement ordonné, archimédien, complet* :
- totalement ordonné : on peut toujours comparer 2 réels r et u ; soit $u > r$, soit $u < r$, soit $u = r$.
- archimédien : pour tout couple (x, y) de nombres réels, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$
- complet : cf. chapitre 2.

Notation 1.12.

$$\begin{array}{ll} r \in \,]a;b[\iff a < r < b & \text{intervalle ouvert} \\ r \in [a;b] \iff a \leqslant r \leqslant b & \text{intervalle fermé} \\ r \in \,]a;b] \iff a < r \leqslant b & \text{intervalle semi-ouvert} \end{array}$$

Définition 1.13. Si $r \in \mathbb{R}$ et $r \notin \mathbb{Q}$, alors r est dit *irrationnel.*

Exemples 1.14.

$$\pi \text{ (transcendant)} \qquad \sqrt{2} \text{ (algébrique).}$$

Proposition 1.15. *Considérons le nombre $\sqrt{N}$ où $N \in \mathbb{N}$. Alors*

$$\begin{cases} \sqrt{N} \in \mathbb{N} & \textit{si } N \textit{ est un carré dans } \mathbb{N} \\ \sqrt{N} \notin \mathbb{Q} & \textit{sinon.} \end{cases}$$

La démonstration est une généralisation de celle faite pour démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

1.3.2 Développement décimal

Théorème 1.16. *Soit r un nombre réel. Alors r est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique.*

DÉMONSTRATION :
Montrons d'abord que si r est rationnel, alors son développement décimal est périodique. Soit $r = \frac{m}{n}$. On peut supposer $m < n$. Alors

$$r = \frac{m}{n} = 0, c_1c_2c_3c_4\dots$$

où les c_i sont obtenus par une division euclidienne. Les restes successifs r_i sont toujours $< n$. Après au plus n divisions, on retrouvera donc un reste r_j égal à un reste précédent r_i et le processus de division devient périodique.
Le développement devient donc périodique à partir de la décimale c_i. Notons que la longueur de la période est au plus égale à n.

Exemple 1.17.

$$\frac{2}{7} =$$

Montrons la réciproque. Soit

$$r = d_1d_2\dots d_m, e_1e_2\dots e_r\overline{c_1c_2\dots c_n}$$

un nombre réel dont le développement décimal est périodique. On va montrer que $r \in \mathbb{Q}$. Il est clair que le nombre $d_1d_2\dots d_m, e_1e_2\dots e_r$ est rationnel. Il suffit donc de montrer que

$$s = 0, \overline{c_1c_2\dots c_n}$$

est rationnel. Posons $N = c_1c_2\dots c_n$. Alors

$$\begin{aligned} 10^n s &= c_1c_2\dots c_n, \overline{c_1c_2\dots c_n} \\ s &= 0, \overline{c_1c_2\dots c_n} \end{aligned}$$

En soustrayant la seconde ligne à la première, on obtient

$$(10^n - 1)s = c_1c_2\dots c_n = N$$

et donc

$$s = \frac{N}{10^n - 1}.$$

□

Exemples 1.18.
1) Soit $r = 0,34\overline{526}$.

$s = 0,\overline{526}$, $N = 526$, $n = 3$.
Alors

$$s = \frac{526}{10^3 - 1} = \frac{526}{999}$$

et

$$r = \frac{34}{100} + \frac{526}{99900} = \frac{8623}{24975}.$$

2) Soit $s = 0,\overline{13}$. Alors $N = 13$, $n = 2$ et

$$s = \frac{13}{10^2 - 1} = \frac{13}{99}.$$

1.3.3 Majorants et bornes supérieures

Dans cette section, S désignera soit $\mathbb{Q}$ soit $\mathbb{R}$ et A sera un sous-ensemble non vide de S.

Définition 1.19. A est dit **majoré** (resp. **minoré**) dans S s'il existe $s \in S$ tel que $a \leqslant s$ (resp. $a \geqslant s$) pour tout $a \in A$.
L'élément $s \in S$ est appelé **un majorant** (resp. **un minorant**) de A.
Le sous-ensemble A est dit **borné** s'il est à la fois majoré et minoré.

Remarques :
1) L'élément s n'appartient pas nécessairement à A.
2) Si A possède un majorant, alors il en possède une infinité. En effet, si s est un majorant de A, alors tout $t \in S$ tel que $t \geqslant s$ est aussi un majorant.

Définition 1.20 (Borne supérieure ou supremum)**.** Un majorant s de A est appelé la **borne supérieure** ou **supremum** de A s'il est le plus petit des majorants, c'est-à-dire si, pour tout autre majorant s' de A, on a $s \leqslant s'$.
On note alors $s = \sup A$.
Si A n'est pas majoré, on pose $\sup A = \infty$

Définition 1.21 (Borne inférieure ou infimum)**.** Un minorant s de A est appelé la **borne inférieure** ou **infimum** de A s'il est le plus grand des minorants.
On note alors $s = \inf A$.
Si A n'est pas minoré, on pose $\inf A = -\infty$.

Remarque : Si le supremum (resp. l'infimum) existe, il est unique.

Remarque : Si le supremum (resp. l'infimum) de A appartient à A, on dit que c'est le *maximum* (resp. *le minimum*) de A et on le note $\max A$ (resp. $\min A$).

Exemple 1.22. soit $A =]0;1]$, $S = \mathbb{R}$ alors $\sup A = 1 = \max A$ et $\inf A = 0 \notin A$

Propriétés des nombres réels

(C) Dans $\mathbb{R}$, tout sous-ensemble (non vide) possède une borne supérieure et une borne inférieure.

Remarque : Cette propriété n'est pas vraie dans $\mathbb{Q}$:

Exemple 1.23. Considérons le sous-ensemble de $\mathbb{Q}$

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 < 2\}$$

C'est un sous-ensemble borné de $\mathbb{Q}$ car, par exemple, $\frac{3}{2}$ est un majorant de A et $-\frac{3}{2}$ est un minorant de A. Mais il ne possède ni de borne supérieure ni de borne inférieure dans $\mathbb{Q}$.
En revanche, si on considère A comme sous-ensemble de $\mathbb{R}$, alors la propriété (C) ci-dessus assure l'existence d'une borne supérieure $r = \sup A$ et d'une borne inférieure $s = \inf A$. On montre alors facilement que $r^2 = s^2 = 2$ et donc que

$$\sup A = \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad \inf A = -\sqrt{2}.$$

1.4 Les nombres complexes

1.4.1 Définition et propriétés

Dans $\mathbb{R}$,
- 4 opérations possibles ;
- toutes les racines n-ièmes de tous les nombres positifs existent.

MAIS $\sqrt{-1}$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$. Ou autrement dit, le polynôme $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}$.

On introduit alors le nombre i défini par

$$\boxed{i^2 = -1}$$

et l'*ensemble des nombres complexes* est alors

$$\boxed{\mathbb{C} := \{a + bi \ ; \ a, b \in \mathbb{R}\}}$$

Exemples 1.24.
$1+3i$ $\quad \sqrt{2}-\pi i$ $\quad 4,$ $\quad \sqrt{5},$ $\quad \pi^2$ $\quad \frac{2}{3}i,$ $\quad 1-\frac{4}{3}i$ sont des nombres complexes.

Terminologie

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe. Le nombre réel a est appelé la **partie réelle** de z et est noté $\mathcal{R}e(z)$.
Le nombre réel b est la **partie imaginaire** de z et est noté $\mathcal{I}m(z)$.
Si $b = 0$, z est **réel**.
Si $a = 0$, alors z est dit **imaginaire (pur)**

On définit les 4 opérations dans $\mathbb{C}$ de la manière suivante :

Addition :

$z_1 = a + bi \qquad z_2 = c + di$

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Opposé :

Si $z = a + bi$, alors

$$-z = -a - bi.$$

Exemples 1.25.

$$(1 + i) + (3 - 4i) = (1 + 3) + (1 - 4)i = 4 - 3i$$
$$(\sqrt{2} + \sqrt{3}i) + (1 + \frac{3}{2}i) = \sqrt{2} + 1 + (\sqrt{3} + \frac{3}{2})i$$
$$(2 - i) - (1 + 4i) = 2 - 1 - i - 4i = 1 - 5i$$

Multiplication :

Si $z_1 = a + bi$ et $z_2 = c + di$ alors

$$z_1 \cdot z_2 = (a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac - bd + (ad + bc)i$$

car $i^2 = -1$.

Inverse :

Tout nombre complexe $z \neq 0$ a un **inverse** : si $z = a + bi$ alors

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\, i}$$

Vérification :

$$\begin{aligned} z \cdot \frac{1}{z} &= (a + bi) \cdot \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{(a+bi)(a-bi)}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - abi + abi - b^2 i^2}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1. \end{aligned}$$

Donc, en ajoutant simplement à $\mathbb{R}$ le nombre i et tous les nombres de la forme $a + bi$, on obtient un **corps** : les 4 opérations sont possibles.

ATTENTION : $\mathbb{C}$ n'est pas ordonné : $z_1 < z_2$ n'a aucun sens !!!!!

Propriétés dans $\mathbb{C}$

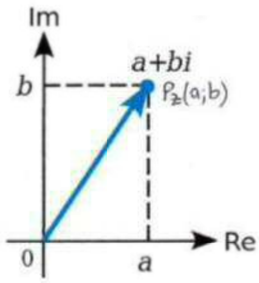
1. Commutativité : $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
   $z_1 z_2 = z_2 z_1$

2. Associativité : $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
   $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$

3. Distributivité de l'addition
   par rapport à la multiplication : $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

1.4.2 Représentation dans le plan, module et argument

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe. On peut lui associer le point $P_z(a\,;\,b)$ du plan.



Définition 1.26. Soit $z = a + bi$.

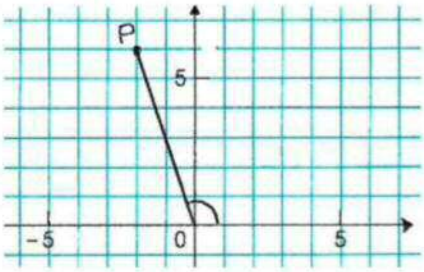
Le **module** de z est le nombre réel $|z| = r = \sqrt{a^2+b^2}$ (toujours $\geqslant 0$).

L' **argument** de z est le nombre réel $\arg(z) = \theta$ défini par les **deux** égalités :

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{|z|}$$
$$\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{|z|}$$

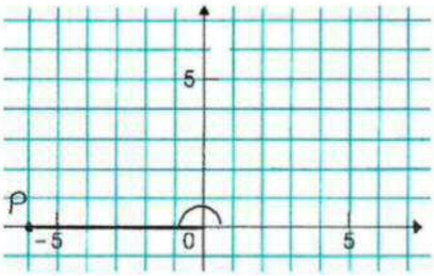
ATTENTION : On a $\tan(\theta) = \frac{b}{a}$ mais θ n'est pas toujours égal à $\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$.

Exemples 1.27. 1) $z = -2+6i \longleftrightarrow P\ (-2,6)$



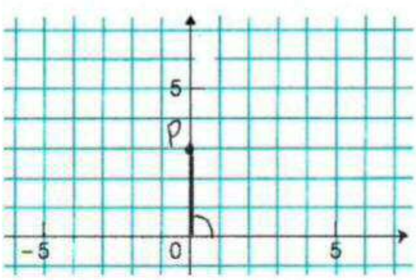
$$|z| = \sqrt{(-2)^2+6^2} = \sqrt{40}$$
$$\arctan(6/-2) = -1.249 \quad \text{Mais } \theta = -1.249+\pi = 1.893.$$

2) $z = -6 \longrightarrow P(-6;0)$



$$r = |z| = 6$$
$$\arg(z) = \pi.$$

3) $z = 3i \longrightarrow P(0;3)$



$$r = |z| = 3$$
$$\arg(z) = \frac{\pi}{2}.$$

1.4.3 Conjugué complexe

Si $z = a + bi$, on définit

$$\boxed{\overline{z} = a - bi.}$$

On a alors

$$z\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Quelques propriétés

1) $z\overline{z} = |z|^2 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}.$

2) $\overline{\overline{z}} = z \quad ; \quad \overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

3) $|\overline{z}| = |z| \quad ; \quad \arg(\overline{z}) = -\arg(z).$

4) $z + \overline{z} = 2a \quad ; \quad z - \overline{z} = 2bi$

5) $\overline{z^2} = (\overline{z})^2$ car

$$\overline{(a+bi)^2} = \overline{a^2 - b^2 + 2abi} = a^2 - b^2 - 2abi = (a-bi)^2 = \left(\overline{a+bi}\right)^2.$$

Conséquence : $\boxed{\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}}$

En effet, d'une part

$$\overline{(z+w)^2} = (\overline{z+w})^2 = (\overline{z} + \overline{w})^2 = \overline{z}^2 + 2\overline{z} \cdot \overline{w} + \overline{w}^2$$

et d'autre part

$$\overline{(z+w)^2} = \overline{z^2 + 2zw + w^2} = \overline{z}^2 + \overline{2zw} + \overline{w}^2.$$

Donc $2\overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{2zw}$ ce qui implique $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

6)

$$\boxed{|zw| = |z| \cdot |w|}$$

Le module d'un produit est égal au produit des modules.

DÉMONSTRATION :

$$\begin{aligned} |zw|^2 &= zw \cdot \overline{zw} = zw\overline{zw} = z\overline{z}w\overline{w} \\ &= |z|^2|w|^2 = (|z||w|)^2 \end{aligned}$$

Comme tout est positif, on a encore $|zw| = |z||w|$.
Corollaire :

$$\boxed{\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}}$$

$$\boxed{\left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|}}$$

7) Inégalité du triangle :

$$|z+w| \leqslant |z|+|w|$$

DÉMONSTRATION :
On a d'abord

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \geqslant \sqrt{a^2} = |a| \geqslant a = \mathcal{R}e(z). \qquad (*)$$

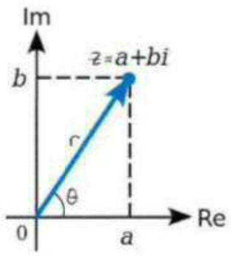
Alors

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \\ &= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \\ &= |z|^2 + z\overline{w} + \overline{\overline{w}z} + |w|^2 \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\mathcal{R}e(z\overline{w}) \\ \text{par } (*) \quad &\leqslant |z|^2 + |w|^2 + 2|z\overline{w}| \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z|+|w|)^2. \end{aligned}$$

Donc $|z+w| \leqslant |z|+|w|$.

1.4.4 Forme trigonométrique

Soit $z = a+bi$ et $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.



On a $a = r\cos(\theta)$ et $b = r\sin(\theta)$. Donc

$$z = a+bi \quad = \quad r\cos(\theta) + r\sin(\theta)i \quad = \quad r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Le nombre z est entièrement déterminé par son module et son argument. On note alors

$$z = [r;\theta] = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

C'est la *forme trigonométrique* de z.

Exemples 1.28. 1) $z = -6 = [6;\pi]$
2) $z = -2+6i = [\sqrt{40}; 1.8925]$
3) $z = 3i = [3;\pi/2]$.

Produit et inverse sous forme trigonométrique

Soient

$$z_1 = [r_1;\theta_1] = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \qquad \text{et} \qquad z_2 = [r_2;\theta_2] = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2).$$

Alors

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_2\sin\theta_1 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right] \\ &= r_1r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|}$ et $\boxed{\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg(z_1) + \arg(z_2)}$

Ainsi

l'argument d'un produit est égal à la somme des arguments.

Il s'ensuit que

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg\left(\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right) = \arg\left(\frac{1}{|z|^2}\right) + \arg(\overline{z}) = 0 - \arg(z) = -\arg(z).$$

On en déduit

$$\boxed{\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) + \arg\left(\frac{1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)}$$

En résumé

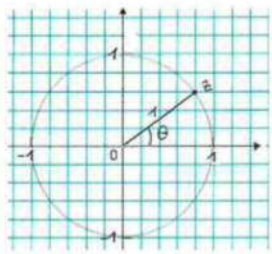
1. $[r_1; \theta_1] \cdot [r_2; \theta_2] = [r_1 r_2; \theta_1 + \theta_2]$
2. $$\frac{[r_1; \theta_1]}{[r_2; \theta_2]} = \left[\frac{r_1}{r_2}; \theta_1 - \theta_2\right]$$
3. $z^n = [r; \theta]^n = [r^n; n \cdot \theta]$

Exemple 1.29. Calculons $z = \dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.
On a $1 + i = [\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}]$ et $1 - i = [\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}]$. Alors

$$\begin{aligned} z &= \frac{[\sqrt{2}; \pi/4]^9}{[\sqrt{2}; -\pi/4]^7} = \frac{[\sqrt{2}^9; 9\pi/4]}{[\sqrt{2}^7; -7\pi/4]} = \frac{[16\sqrt{2}; 9\pi/4]}{[8\sqrt{2}; -7\pi/4]} = \left[\frac{16\sqrt{2}}{8\sqrt{2}}; 9\pi/4 - (-7\pi/4)\right] \\ &= [2; 4\pi] = [2; 0] = 2. \end{aligned}$$

Applications :

Soit $z = [1; \theta] = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.



Alors

$$z^n = [1^n; n\theta] = [1; n\theta] = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Donc

$\boxed{(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$ Formule de Moivre

En particulier, si $n = 3$, on trouve

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) &= (\cos\theta + i\sin\theta)^3 \\ &= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta + 3i^2\cos\theta\sin^2\theta + i^3\sin^3\theta \\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)\end{aligned}$$

On en déduit les formules trigonométriques pour le triple d'un angle :

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \\ \sin(3\theta) &= 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\end{aligned}}$$

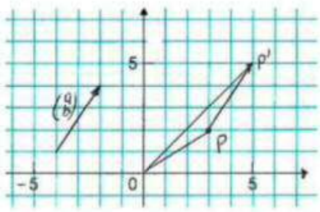
Remarque 1.30.

1. $z = 0$ n'a pas de forme trigonométrique car son argument n'est pas défini. En revanche $|0| = 0$.
2. L'argument n'est défini qu'à un multiple de 2π près. Ainsi
$$[r;\theta] = [r;\theta + k\cdot 2\pi] \qquad k \in \mathbb{Z}.$$
3. On verra au chapitre 2 que
$$[r\,;\,\theta] = re^{i\theta}.$$

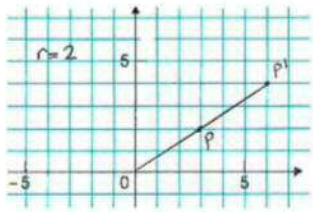
1.4.5 Similitude du plan complexe

On peut faire correspondre à toute **similitude du plan complexe** une **opération algébrique** dans $\mathbb{C}$.

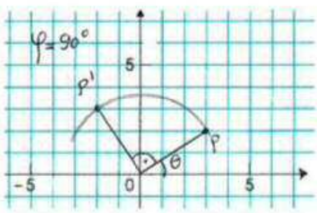
(I) Translation de vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\longleftrightarrow$ Addition du nombre $w = a + bi$.



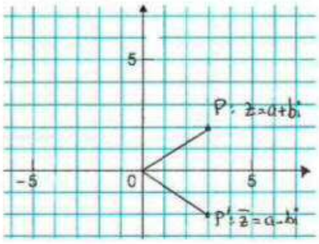
(II) Homothétie de rapport $r \in \mathbb{R}$ $\longleftrightarrow$ Multiplication par $w = r$.



(III) Rotation d'angle φ $\longleftrightarrow$ Multiplication par le nombre $w = [1;\varphi] = \cos\varphi + i\sin\varphi$.
En effet, si $z = [r\,;\,\theta]$ alors $z\cdot w = [r\,;\,\theta + \varphi]$



(IV) Symétrie d'axe Ox $\longleftrightarrow$ prise du conjugué : $z \mapsto \overline{z}$.



(V) etc....

1.4.6 Racines n-ième d'un nombre complexe

Soit $z = [r; \theta]$ un nombre complexe (donné sous forme trigo) et n un entier $\geqslant 1$. On cherche tous les nombre complexes w tels que

$$w^n = z \qquad \text{racines } n\text{-ième de } z.$$

Les w sont donc les solution (dans $\mathbb{C}$) de l'équation $X^n - z = 0$.

Posons $w = [s; \phi]$ et déterminons s et ϕ. On doit avoir

$$[s; \phi]^n = [r; \theta]$$

donc

$$[s^n; n\phi] = [r; \theta + k \cdot 2\pi] \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Ceci donne le système

$$\begin{cases} s^n = r \\ n\phi = \theta + k \cdot 2\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

dont les solutions sont données par

$$\begin{cases} s = \sqrt[n]{r} \\ \phi = \dfrac{\theta}{n} + k \cdot \dfrac{2\pi}{n} \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Il y a donc exactement n racines n-ième de z distinctes données par

$$\boxed{w_k = \left[\sqrt[n]{r}; \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right] \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.}$$

En résumé, on a la formule suivante pour tout $q \in \mathbb{Q}$:

$$\boxed{[r\,;\,\theta]^q = [r^q\,;\,q\theta + kq2\pi] \qquad k \in \mathbb{Z}}$$

Exemples 1.31.

1) $z = 1 = [1; 0]$. Les racines n-ième de 1 sont

$$w_k = \left[\sqrt[n]{1}; 0 + k\frac{2\pi}{n}\right] = \left[1; k\frac{2\pi}{n}\right] \qquad k = 0, 1, 2 \ldots, n-1.$$

(On a $w_0 = [1, 0] = 1$)

Les w_k sont sur les sommets d'un n-gone régulier.
Les w_k sont les racines (les zéros) dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^n - 1$.

2) Si $n = 3$ dans l'exemple 1) ci-dessus, alors on a

$$\begin{aligned}
w_0 &= 1 \\
w_1 &= [1; \frac{2\pi}{3}] = 1(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i =: j \\
w_2 &= [1; 2\cdot\frac{2\pi}{3}] = 1(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i =: \bar{j}
\end{aligned}$$

On peut vérifier directement par calcul que

$$j^3 = \bar{j}^3 = 1.$$

Ainsi, dans $\mathbb{C}$, le polynôme $X^3 - 1$ se décompose en

$$X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1) = (X-1)(X-j)(X-\bar{j}).$$

Cas particulier : racines carrées ($n = 2$)

Le nombre complexe $z = [r, \theta]$ a deux racines carrées qui sont données par

$$\begin{aligned}
w_0 &= [\sqrt{r}; \frac{\theta}{2}] \\
w_1 &= [\sqrt{r}; \frac{\theta}{2} + \pi] = -w_0.
\end{aligned}$$

Dans ce cas précis des racines carrées, on peut également résoudre le problème sans passer par la forme trigonométrique . En effet, si $z = a + bi$ est donné, on cherche $w = u + vi$ tel que $w^2 = z$, i.e

$$(u+vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi = a + bi$$

ce qui donne le système

$$\left\{\begin{array}{ll} u^2 - v^2 = a & \\ 2uv = b & \\ u^2 + v^2 = \sqrt{a^2+b^2} & \text{car "}|\sqrt{z}| = \sqrt{|z|}\text{"} \end{array}\right. \qquad (*)$$

Exemples 1.32.

1) Cherchons les 2 racines carrées du nombre $z = i$. On résoud le système (*)

$$\left\{\begin{array}{l} u^2 - v^2 = 0 \\ 2uv = 1 \\ u^2 + v^2 = 1 \end{array}\right.$$

ce qui donne $u = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ et donc $v = u$.
Les 2 racines carrées de i sont $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ et $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$.

2) Trouver les 2 racines carrées de $z = 3 - 4i$. On a $|z| = \sqrt{9+16} = 5$ et $\arg(z) = -0.92729$.
Ainsi

$$z = [5; -0.9273]$$

et donc

$$w_0 = [\sqrt{5}; -\frac{0.9273}{2}] = \sqrt{5} \cdot \left[\cos\left(-\frac{0.9273}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{0.9273}{2}\right)\right] = 2 - i.$$

Et alors $w_1 = -w_0 = -2 + i$.
Pas de choix canonique.

ATTENTION La notation $\sqrt{z}$ est à éviter. Exemple :

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i \cdot i = -1 \qquad !!!!!!!$$

1.5 Polynômes et racines

1.5.1 Définition et division euclidienne

Soit X une *indéterminée* ou *variable*. Alors $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ avec $a_n \neq 0$ est appelé un polynôme de degré n. On note $n = \deg(P)$. Les nombres a_k sont les *coefficients du polynôme*. Ils peuvent être réels ou complexes.
Deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils sont de même degré et que leurs coefficients sont égaux.
On dit qu'un nombre (réel ou complexe) z_0 est une *racine* de $P(X)$ si $P(z_0) = 0$ autrement dit si

$$a_n z_0^n + \cdots + a_1 z_0 + a_0 = 0.$$

Division euclidienne

Soient $P(X)$ et $D(X)$ deux polynômes. Alors il existe 2 polynômes $Q(X)$ et $R(X)$ avec $\deg(R) < \deg(D)$ tels que

$$P(X) = D(X)Q(X) + R(X).$$

Le polynôme $R(X)$ est le reste de la division de $P(X)$ par $D(X)$.

En particulier si $D(X) = X - z_0$ (degré 1) alors

$$P(X) = Q(X)(X - z_0) + R \quad R \in \mathbb{R}$$

avec $P(z_0) = 0 \Leftrightarrow R = 0$.
En résumé, un polynôme possède z_0 comme racine si et seulement s'il est divisible par $X - z_0$.

Corollaire 1.33. *Un polynôme de degré n possède au plus n racines.*

1.5.2 Théorème fondamental de l'algèbre

Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes joue un rôle capital dans l'existence des zéros d'un polynôme à cause du théorème suivant :

Théorème 1.34 (Théorème fondamental de l'algèbre). *Tout polynôme $P(X)$ de degré $\geqslant 1$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ a (au moins) une racine dans $\mathbb{C}$.*

Sans démonstration.

En utilisant la division euclidienne, on peut formuler ce théorème ainsi :

Tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ se factorise en un produit de polynômes de degré 1.

Polynôme à coefficients réels

Proposition 1.35. *Soit* $P(X) = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0$ *un* **polynôme à coefficients réels** *:* $a_k \in \mathbb{R}$. *Si* $z \in \mathbb{C}$ *est un zéro de* $P(X)$, *alors* $\overline{z}$ *l'est aussi.*

DÉMONSTRATION :
On a par hypothèse $P(z) = 0$, c'est-à-dire

$$a_nz^n + \cdots + a_1z + a_0 = 0.$$

En prenant le conjugué des deux côtés de cette égalité, on obtient

$$\overline{a_n} \cdot \overline{z}^n + \cdots + \overline{a_1} \cdot \overline{z} + \overline{a_0} = 0.$$

Mais comme les a_k sont réels, on a $\overline{a_k} = a_k$ pour tout k et donc $a_n\overline{z}^n + \cdots + a_1\overline{z} + a_0 = 0$ ce qui montre que $P(\overline{z}) = 0$

□

Corollaire 1.36. *Tout polynôme à coefficients réels se factorise en un produit de polynômes du premier ou du deuxième degré.*

DÉMONSTRATION :
Soit $P(X)$ un polynôme réel. Par le théorème fondamental de l'algèbre, il se factorise **dans** $\mathbb{C}$ en produit de facteurs du premier degré :

$$P(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - z_i) \qquad (n = \text{ degré de } P).$$

Si z_i n'est pas réel, alors $\overline{z_i}$ doit aussi apparaître dans cette décomposition par la proposition précédente. En multipliant les 2 termes

$$(X - z_i) \qquad \text{et} \qquad (X - \overline{z_i})$$

on obtient le polynôme

$$X^2 - (z_i + \overline{z_i})X + z_i \cdot \overline{z_i} = X^2 - 2\mathcal{R}e(z_i)X + |z_i|^2$$

qui est à coefficients réels.

□

1.5.3 Equations du second degré

Les solutions de l'équation $aX^2 + bX + c = 0$ sont données par la formule :

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{avec} \quad a, b, c \in \mathbb{C}.$$

1.5.4 Equations de degré 3

Soit $X^3 + aX^2 + bX + c = 0$. En posant $Y = X + \frac{a}{3}$, on se ramène à une équation de la forme

$$Y^3 + pY + q = 0.$$

On pose alors $R = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$. Trois cas peuvent se présenter :

- $R > 0$. Alors on pose

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} \qquad \text{et} \qquad w = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{R}}$$

et les 3 solutions sont

$$Y_1 = v + w \quad \text{(réelle)} \qquad Y_{2,3} = -\frac{v+w}{2} \pm \frac{v-w}{2}\sqrt{3}\cdot i \quad \text{(complexes)}$$

- $R = 0$. Alors il y a deux racines réelles dont une est double :

$$Y_1 = \sqrt[3]{-4q} \qquad \text{et} \qquad Y_{2,3} = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$$

- si $R < 0$, on pose $S = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}$ et $\cos\theta = -\frac{q}{2R}$. Les 3 racines réelles sont alors données par la formule :

$$Y_k = 2\sqrt[3]{S}\cos(\frac{\theta + k\cdot 2\pi}{3}) \quad k = 0, 1, 2.$$

Exemple 1.37.
Considérons l'équation $X^3 - 21X^2 + 123X - 247 = 0$. En posant $Y = X - 7$, on obtient

$$(Y+7)^3 - 21(Y+7)^2 + 123(Y+7) - 247 = 0$$

ou encore

$$Y^3 - 24Y - 72 = 0.$$

Alors $p = -21$ et $q = -72$ ce qui donne $R = (-36)^2 + (-8)^3 = 784 > 0$ et $\sqrt{R} = 28$. On a alors $v = 4$ et $w = 2$ ce qui donne $Y_1 = v + w = 6$ et $Y_{2,3} = -3 \pm \sqrt{3}\cdot i$. Les solutions sont alors

$$X_1 = Y_1 + 7 = 13 \qquad \text{et} \qquad X_{2,3} = Y_{2,3} + 7 = 4 \pm \sqrt{3}i.$$

Remarque générale

Il faut noter que le théorème fondamental de l'algèbre ne donne aucune méthode pour calculer les racines d'un polynôme quelconque.

Galois et Abel ont même démontré qu'il n'existe aucune formule générale pour un polynôme quelconque de degré $\geqslant 5$.