Lycée Jean-Piaget

Série 2
Analyse
Limites et continuité d'une fonction
Corrigé des exercices

Exercice 1

Par observation du graphe, on a :

$\lim_{x \to -7} f(x)$ n'existe pas : $\lim_{x \to -7^-} f(x)$ n'existe pas car $f(x)$ n'est pas définie pour $x < -7$;

$\lim_{x \to -5} f(x) = 2$;

$\lim_{x \to -4} f(x)$ n'existe pas : $\lim_{x \to -4^+} f(x)$ n'existe pas car $f(x)$ n'est pas définie pour $-4 < x < -3$;

$\lim_{x \to -4^-} f(x) = 1$;

$\lim_{x \to -3} f(x)$ n'existe pas : $\lim_{x \to -3^-} f(x)$ et $\lim_{x \to -3^+} f(x)$ n'existent pas car $f(x)$ n'est pas définie pour $-4 < x < -3$ et $-3 < x < -2$;

$\lim_{x \to -2} f(x)$ n'existe pas : $\lim_{x \to -2^-} f(x)$ n'existe pas car $f(x)$ n'est pas définie pour $-3 < x < -2$;

$\lim_{x \to -2^+} f(x) = 1$;

$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$;

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$;

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$;

$\lim_{x \to 4} f(x)$ n'existe pas, car :

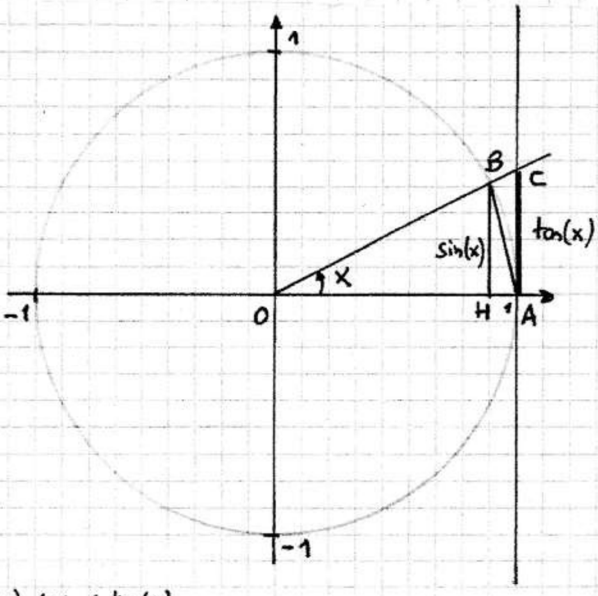
$\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$;

$\lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$;

$\lim_{x \to 5} f(x) = 0$;

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -3$.

Exercice 2



Soit le cercle trigonométrique et soit un angle positif x en radians. L'arc de cercle AB correspond à cette angle x.

On a clairement:

aire triangle OAB $\leq$ aire secteur circulaire OAB $\leq$ aire triangle OAC.

On a aire triangle OAB $= \frac{OA \cdot HB}{2} = \frac{1 \cdot \sin(x)}{2} =$
$= \frac{\sin(x)}{2}$, aire secteur circulaire OAB $=$
$= \pi \cdot OA^2 \cdot \frac{x}{2\pi} = \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{x}{2\pi} = \frac{x}{2}$ et
aire triangle OAC $= \frac{OA \cdot AC}{2} = \frac{1 \cdot \tan(x)}{2} = \frac{\tan(x)}{2}$.

On obtient ainsi $\frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan(x)}{2} \Rightarrow \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$.

De $\sin(x) \leq x$, comme $x > 0$, on obtient $\frac{\sin(x)}{x} \leq 1$.

De $x \leq \tan(x)$, on tire $x \leq \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \Rightarrow x\cos(x) \leq \sin(x)$ (puisque $\cos(x) > 0$ si $x > 0$)
$\Rightarrow \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x}$.

On a ainsi $\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$ pour toute valeur de $x > 0$.

De plus, on a vu en a. que $\lim_{x \to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$.

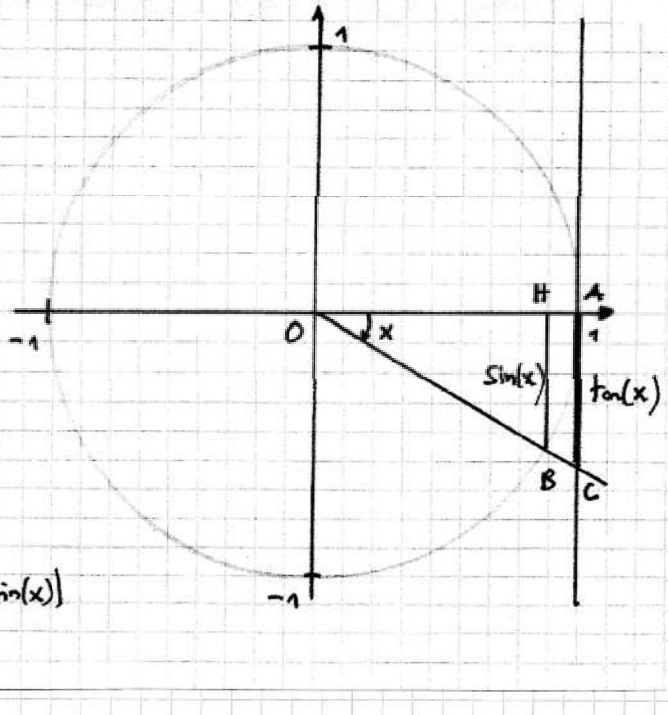
Par passage à la limite $x \to 0$, on obtient $\lim_{x\to 0} \cos(x) \leq \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$
$\Rightarrow 1 \leq \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$, ce qui implique forcément que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Reste à considérer maintenant le cas où x est un angle négatif en radians.

L'arc de cercle AB correspond en valeur absolue à cette angle x.

On a clairement: aire triangle OAB $\leq$ aire secteur circulaire OAB $\leq$ aire triangle OAC.

On a aire triangle OAB $= \frac{OA \cdot HB}{2} = \frac{1 \cdot |\sin(x)|}{2} = \frac{|\sin(x)|}{2}$, aire secteur circulaire OAB $=$
$= \pi \cdot OA^2 \cdot \frac{|x|}{2\pi} = \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{|x|}{2\pi} = \frac{|x|}{2}$ et
aire triangle OAC $= \frac{OA \cdot AC}{2} = \frac{1 \cdot |\tan(x)|}{2} =$
$= \frac{|\tan(x)|}{2}$.



On obtient ainsi:

$\frac{|\sin(x)|}{2} \leq \frac{|x|}{2} \leq \frac{|\tan(x)|}{2}$
$\Rightarrow |\sin(x)| \leq |x| \leq |\tan(x)|$.

De $|\sin(x)| \leq |x|$, comme $|x| > 0$, on obtient $\frac{|\sin(x)|}{|x|} \leq 1$.

De $|x| \leq |\tan(x)|$, on obtient
$|x| \leq \left|\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right| = \frac{|\sin(x)|}{|\cos(x)|} \Rightarrow |x| \cdot |\cos(x)| \leq |\sin(x)|$
$\Rightarrow |\cos(x)| \leq \frac{|\sin(x)|}{|x|} = \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|$

On a ainsi $|\cos(x)| \leq \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \leq 1$ pour toute valeur de $x<0$.

De plus, on a vu en a. que $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x)=1$. Cela signifie que $\lim\limits_{x\to 0} |\cos(x)| = 1$ aussi.

Par passage à la limite $x \to 0$, on obtient $\lim\limits_{x\to 0} |\cos(x)| \leq \lim\limits_{x\to 0} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \leq 1$

$\Rightarrow 1 \leq \lim\limits_{x\to 0} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \leq 1$, ce qui implique forcément que $\lim\limits_{x\to 0} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| = 1$.

Or, si $x<0$, $\sin(x)<0$ et $\frac{\sin(x)}{x}>0$. Ainsi $\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| = \frac{\sin(x)}{x}$.

On a donc bien $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 0$, pour $x>0$ et pour $x<0$.

Exercice 3

On a $f(x) = \frac{3-2x}{x+1}$.

Domaine de définition: on doit avoir $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Parité: $f(-x) = \frac{3-2(-x)}{-x+1} = \frac{3+2x}{-x+1} \neq \pm f(x) \Rightarrow f$ n'est ni paire, ni impaire.

Intersection avec l'axe x: $f(x)=0 \Rightarrow \frac{3-2x}{x+1}=0 \Rightarrow 3-2x=0 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \Rightarrow$ point $(\frac{3}{2};0)$.

Intersection avec l'axe y: $x=0 \Rightarrow f(x)=\frac{3}{1}=3 \Rightarrow$ point $(0;3)$.

Asymptotes verticales: on a $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{3-2x}{x+1} = \frac{5}{0_-} = -\infty$ et

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{3-2x}{x+1} = \frac{5}{0+} = +\infty$;

$x=-1$ est une asymptote verticale.

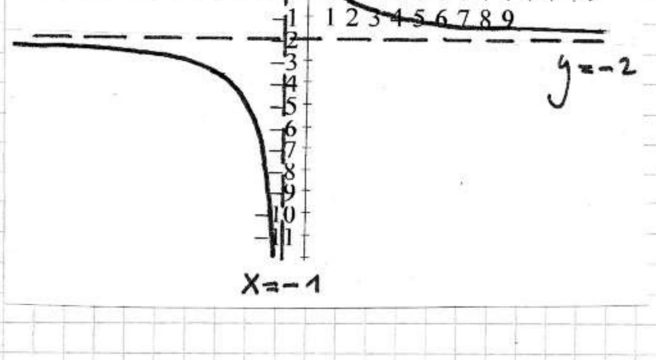
Asymptote non verticale: on a $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{3-2x}{x+1} = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{x(\frac{3}{x}-2)}{x(1+\frac{1}{x})} = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{\frac{3}{x}-2}{1+\frac{1}{x}} =$

$= \frac{-2}{1} = -2$; $y=-2$ est une asymptote horizontale.

Tableau de signes:

x		-1		$\frac{3}{2}$	
$f(x)$	$-$	//	$+$	0	$-$

Graphe:



Exercice 4

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ n'existe pas car f n'est pas définie pour $x > 1$.

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ n'existe pas car f n'est pas définie pour $x < -2$ et $x > 2$.

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$.

Exercice 5

$$\lim_{x \to 3} (3x+1) = 3 \cdot 3 + 1 = 10.$$

$$\lim_{x \to -1} (x^4 - 2x^3 - 4x + 11) = (-1)^4 - 2(-1)^3 - 4(-1) + 11 = 1 + 2 + 4 + 11 = 18.$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2}{1+x^3} = \frac{3 \cdot 1^2}{1+1^3} = \frac{3}{2}.$$

$$\lim_{x \to -5} 2x = 2 \cdot (-5) = -10.$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(5-x)(x+3)} = \frac{(3-3)(3+2)}{(5-3)(3+3)} = 0.$$

$$\lim_{x \to 4} \sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-4^2} = \sqrt{9} = 3.$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x+2)}{(x-2)} = \frac{3+2}{3-2} = 5.$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x+1) = 2+1 = 3.$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x-1}$$ n'existe pas car $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{0_-} =$

$$= -\infty \text{ et } \lim_{x \to 1^+} \frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{0_-} = -\infty.$$

$$\lim_{x \to 2} \sqrt[3]{2-5x} = \sqrt[3]{2-5 \cdot 2} = \sqrt[3]{-8} = -2.$$

Exercice 6

$$\lim_{x\to\pm\infty}(-4x^2) = -4\lim_{x\to\pm\infty} x^2 = -4.(+\infty) = -\infty.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x^2-2}{4x^2-2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(5-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(4-\frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{5-\frac{2}{x^2}}{4-\frac{2}{x^2}} = \frac{5-0}{4-0} = \frac{5}{4}.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^4}{1+x^3} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\cdot 3x}{x^3\left(\frac{1}{x^3}+1\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{\frac{1}{x^3}+1} = \frac{3\cdot(-\infty)}{0+1} = -\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4}{1+x^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\frac{1}{x^3}+1} = \frac{3.(+\infty)}{0+1} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x} = 0.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-3)^2}{x^5+3x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-6x+9}{x^5+3x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}{x^2\left(x^3+\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}}{x^3+\frac{3}{x}} =$$

$$= \frac{1-0+0}{(\pm\infty)^3+0} = \frac{1}{\pm\infty} = 0.$$

$\lim_{x\to\pm\infty}(x^2+3x-7) = +\infty$ (parabole tournée vers le haut).

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-2x+2}{3x^3-2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(x-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}{x^3\left(3-\frac{2}{x^3}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{3-\frac{2}{x^3}} = \frac{-\infty}{3} = -\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-2x+2}{3x^3-2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{3-\frac{2}{x^3}} = \frac{+\infty}{3} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3}{1-5x} = \frac{3}{\mp\infty} = 0.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-x-x^2}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}-1\right)}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}-1\right) = -1.$$

Exercice 7

1. Les asymptotes verticales sont aux exclus du domaine de définition.

$f(x)=\dfrac{x}{x^2-x-2}$: $x^2-x-2=0 \Rightarrow (x+1)(x-2)=0 \Rightarrow x=-1$ et $x=2$ (exclus) ;

on a $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\dfrac{-1}{0+}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\dfrac{-1}{0-}=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\dfrac{2}{0-}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\dfrac{2}{0+}$;

ainsi $x=-1$ et $x=2$ sont des asymptotes verticales

$g(x)=\dfrac{2-2x}{2x^2-5x+3}$: $2x^2-5x+3=0 \Rightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{4}= \begin{cases}\frac{3}{2}\\ 1\end{cases}$ (exclus) ;

on peut alors écrire $g(x)=\dfrac{-2(x-1)}{(x-\frac{3}{2})(x-1)}=\dfrac{-2}{x-\frac{3}{2}}$;

Comme $g(1)=\dfrac{-2}{1-\frac{3}{2}}=4$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=0$, on en conclut que seul $x=\frac{3}{2}$ est asymptote verticale.

$h(x)=\dfrac{x+2}{x^2-1}$: $x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=-1$ et $x=1$ (exclus).

on a $\lim\limits_{x\to-1^-} h(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x+2}{x^2-1}=\dfrac{1}{0+}=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to-1^+} h(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x+2}{x^2-1}=\dfrac{1}{0_-}=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to1^-} h(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x+2}{x^2-1}=\dfrac{3}{0-}=-\infty$ et

$\lim\limits_{x\to1^+} h(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+2}{x^2-1}=\dfrac{3}{0+}=+\infty$;

ainsi $x=-1$ et $x=1$ sont des asymptotes verticales.

2. $f(x)=\dfrac{x+2}{3x^2+1}$: comme $3x^2+1\geqslant 1$, il n'y a pas d'exclu et donc pas d'asymptote verticale ;

on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x+2}{3x^2+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x(1+\frac{2}{x})}{x(3x+\frac{1}{x})}=$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1+\frac{2}{x}}{3x+\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{\pm\infty}=0$; ainsi $y=0$ est asymptote horizontale.

$g(x)=\dfrac{-6x^2+2}{-7x^2-14}$: comme $-7x^2-14=-7\underbrace{(x^2+1)}_{\geqslant 1}\leqslant -7$, il n'y a pas d'exclu et donc pas d'asymptote verticale ;

on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-6x^2+2}{-7x^2-14}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2(-6+\frac{2}{x^2})}{x^2(-7-\frac{14}{x^2})}=$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-6+\frac{2}{x^2}}{-7-\frac{14}{x^2}}=\dfrac{-6}{-7}=\dfrac{6}{7}$; ainsi $y=\frac{6}{7}$ est asymptote horizontale.

$h(x) = \dfrac{x^3-8x^2+7}{4x^2+4}$: Comme $4x^2+4 = 4\underbrace{(x^2+1)}_{\geqslant 1} \geqslant 4$, il n'y a pas d'exclu et donc pas d'asymptote verticale ;
comme le degré du numérateur est 1 de plus que celui du dénominateur, on effectue la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} x^3-8x^2+7 & 4x^2+4 \\ \cline{2-2} -(x^3 \quad +x) & \frac{1}{4}x-2 \\ \cline{1-1} -8x^2-x+7 & \\ -(-8x^2 \quad -8) & \\ \cline{1-1} -x+15 & \end{array}$$

on en déduit alors que $y = \frac{1}{4}x-2$ est une asymptote oblique lorsque $x \to \pm\infty$.
(En fait, on peut écrire $h(x) = \frac{1}{4}x - 2 + \frac{-x+15}{4x^2+4}$; comme

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x+15}{4x^2+4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(-1+\frac{15}{x})}{x(4x+\frac{4}{x})} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-1+\frac{15}{x}}{4x+\frac{4}{x}} = \frac{-1}{\pm\infty} = 0$$

et on en déduit que $h(x)$ se rapproche de $\frac{1}{4}x-2$ lorsque $x \to \pm\infty$).

<u>Exercice 8</u>

On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x} \overset{y=2x}{=} 2\lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y} = 2.1 = 2.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\cdot\frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \pm\infty.\ 1 = \pm\infty.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\cdot\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x\cos(x)}\cdot\frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x\cos(x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} =$$

$$= \frac{1}{0.1}\cdot 1 = \pm\infty.1 = \pm\infty.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{2x} = \frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x} \overset{y=3x}{=} \frac{3}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y} = \frac{3}{2}.1 = \frac{3}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(5x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\cdot\frac{\sin(5x)}{\cos(5x)} = \lim_{x\to 0}\frac{5}{2\cos(5x)}\cdot\frac{\sin(5x)}{5x} = \lim_{x\to 0}\frac{5}{2\cos(5x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{5x} \overset{y=5x}{=}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{5}{2\cos(y)}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y} = \frac{5}{2.1}\cdot 1 = \frac{5}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x^2(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} \overset{\cos^2(x)+\sin^2(x)=1}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos(x)} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos(x)} = 1^2\cdot\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\sin(x)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 0.1 = 0.$$

Exercice 9

$\lim\limits_{x\to 0}|x|$: on a $|x|=\begin{cases} x \text{ si } x\geq 0\\ -x \text{ si } x<0\end{cases}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}|x|=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$; $\lim\limits_{x\to 0^-}|x|=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0$;

ainsi $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$: on a $\frac{|x|}{x}=\begin{cases}\frac{x}{x} \text{ si } x>0\\ \frac{-x}{x} \text{ si } x<0\end{cases}=\begin{cases}1 \text{ si } x>0\\ -1 \text{ si } x<0\end{cases}$; comme $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1$ et

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ n'existe pas.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\text{"}\frac{0}{0}\text{"}$: on amplifie par le conjugué de $\sqrt{1+x}-1$, c'est-à-dire $\sqrt{1+x}+1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}.$$

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+1}{|x^2-4|}$: comme $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+1)=2^2+1=5$ et $\lim\limits_{x\to 2}|x^2-4|=|2^2-4|=0^+$, on a

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+1}{|x^2-4|}=\frac{5}{0^+}=+\infty.$$

Exercice 10

On a $f(x)=\frac{-2x^3-6x^2+20x}{5x^2-15x+10}=\frac{-2x(x^2+3x-10)}{5(x^2-3x+2)}=\frac{-2x(x+5)(x-2)}{5(x-1)(x-2)}=\frac{-2x(x+5)}{5(x-1)}$ $(x\neq 2)$.

Domaine de définition: $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$

Parité: ni paire, ni impaire parce que le domaine de définition n'est pas symétrique par rapport à $x=0$.

Intersections avec l'axe x: $f(x)=0 \Rightarrow \frac{-2x(x+5)}{5(x-1)}=0 \Rightarrow -2x(x+5)=0$

$\Rightarrow$ soit $x=0$, soit $x=-5$

$\Rightarrow$ points $(0;0)$ et $(-5;0)$

Intersection avec l'axe y: $x=0 \Rightarrow f(x)=\frac{0}{10}=0 \Rightarrow$ point $(0;0)$

Tableau de signes:

x		-5		0		1		2	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$-$

Asymptotes verticales: $x=1$ est asymptote verticale: $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-2x(x+5)}{5(x-1)}=$

$=\frac{-2\cdot 1\cdot(1+5)}{5\cdot 0_-}=\frac{-12}{0_-}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{-2x(x+5)}{5(x-1)}=$

$=\frac{-2\cdot 1\cdot(1+5)}{5\cdot 0_+}=\frac{-12}{0_+}=-\infty.$

$x = 2$ n'est pas une asymptote verticale (c'est un trou) : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) =$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{-2x(x+5)}{5(x-1)} = \frac{-2 \cdot 2(2+5)}{5 \cdot (2-1)} = \frac{-28}{5}.$$

Asymptotes non verticales : Comme le degré du numérateur est 1 de plus de celui du dénominateur, on effectue la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} -2x^3 - 6x^2 + 20x & 5x^2 - 15x + 10 \\ \cline{2-2} -(-2x^3 + 6x^2 - 4x) & -\frac{2}{5}x - \frac{12}{5} \\ \cline{1-1} -12x^2 + 24x & \\ -(-12x^2 + 36x - 24) & \\ \cline{1-1} -12x + 24 & \end{array}$$

Ainsi $y = -\frac{2}{5}x - \frac{12}{5}$ est asymptote oblique.

Graphe :