Lycée Denis-de-Rougemont

Neuchâtel et Fleurier

Exercices de révision

Mathématiques de niveau 1

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Exercice 1

On donne une sphère s par son équation $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=9$ et les points $A(2\,;4\,;0)$, $B(4\,;1\,;2)$ et $C(0\,;2\,;3)$.

a) Vérifier que le triangle ABC est isocèle et calculer ses angles.

b) Calculer la valeur de l'angle aigu déterminé par la droite AB et le sol.

c) Établir les équations des plans tangents à s qui sont parallèles au plan ABC.

Exercice 2

a) Trouver l'équation du plan π normal au vecteur $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}$, tangent à la sphère s d'équation $(x-2)^2+y^2+(z+5)^2=36$ et dont le point de tangence a la plus grande cote possible.

b) Le point $A(x\,;-5\,;-2)$ est situé sur le plan π. Calculer x.

c) La droite t passe par A, est contenue dans le plan π et est tangente à la sphère s. Donner une représentation paramétrique de la droite t.

Exercice 3

La sphère s est centrée en $C(5\,;4\,;0)$ et son rayon est égal à 3. La droite t passe par $S(2\,;7\,;3)$ et le vecteur $\vec{t}=-\vec{u}_1+4\vec{u}_2+\vec{u}_3$ est un vecteur directeur de la droite t.

a) Montrer que la droite t est tangente à la sphère s et déterminer le point de contact T.

b) Établir l'équation du plan π contenant la droite t et tangent à la sphère s.

c) Calculer l'angle aigu α formé par les droites t et SC.

d) On considère les droites passant par S et de vecteur directeur $\vec{d}=\vec{u}_1-\vec{u}_2+k\cdot\vec{u}_3$, où k est un nombre réel. Parmi ces droites, déterminer celles qui sont tangentes à la sphère s et calculer les coordonnées de leur point de contact avec la sphère s.

Exercice 4

On envisage le plan π d'équation $3x + y - z - 14 = 0$ et la sphère s centrée en $M(3\ ;\ 0\ ;\ 12)$ et de rayon 13.

a) Quelle est la position de π par rapport à s ?

b) Déterminer a de façon que le point $A(3\ ;\ a\ ;\ 7)$ soit situé sur π.

c) On considère un vecteur $\vec{n}$ normal à π. Donner une représentation paramétrique de la droite d passant par A et normale à la fois au segment MA et au vecteur $\vec{n}$.

d) Quelle est la position de d par rapport à π ?

e) Quelle est la position de d par rapport à s ?

f) La sphère s coupe le sol selon un cercle c.
Calculer les coordonnées du centre I et le rayon r de ce cercle.

g) Déterminer $b \neq 0$ de façon que le point $B(b\ ;\ 4\ ;\ 0)$ soit un point du cercle c.

h) Trouver un point C du cercle c tel que le triangle BIC soit rectangle.

i) Trouver les angles et l'aire du triangle BIC.

Exercice 5

On considère la sphère s d'équation $(x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 38$ et la droite d passant par le point $A(10\ ;\ 0\ ;\ 0)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer la distance du centre de la sphère s à la droite d. En déduire que d coupe s.

b) Déterminer les coordonnées des deux points d'intersection I et J de la droite d et de la sphère s.

c) Vérifier que le point $K(0\ ;\ 1\ ;\ 9)$ appartient à la sphère s.

d) Calculer les longueurs des côtés et les angles du triangle IJK.

e) Dans un repère usuel, dessiner
   1. la droite d, sa projection sur le sol et sa trace dans le mur ;
   2. les points I, J et K ;
   3. les traces du plan π contenant le point K et la droite d.

Exercice 6

On donne un cube $OABCDEFG$ par ses sommets $O(0 ; 0 ; 0)$, $A(2 ; 0 ; 0)$, $C(0 ; 2 ; 0)$, $D(0 ; 0 ; 2)$, B dans le sol, E dans la paroi et G dans le mur.

a) Dessiner la section du cube par le plan π passant par les points A, G et $M(2 ; 2 ; 1)$.

b) Trouver l'équation du plan π.

c) Montrer que la section du cube par le plan π est un losange.

d) Calculer l'aire et les angles de ce losange.

e) Quel est le volume de la partie du cube comprise entre le plan π et le sol ?

f) Le plan π coupe la sphère $s : (x-5)^2 + (y-7)^2 + (z+7)^2 = 79$ selon un cercle c.
Calculer les coordonnées du centre et le rayon du cercle c.

Exercice 7

On donne les points $A(9 ; 4 ; 6)$, $B(5 ; -5 ; 7)$, $C(0 ; 3 ; 10)$ et la droite

$$d : \begin{cases} x = 3 + 5\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 4 + 11\lambda \end{cases}.$$

a) Vérifier que le triangle ABC est équilatéral.

b) Trouver l'équation cartésienne du plan ABC.

c) Trouver un point D de d dont la distance au point A est égale à $\|\overrightarrow{AB}\|$.
Il y a deux réponses possibles. Pour la suite, choisir le point D dont les coordonnées sont entières.

d) Vérifier que $ABCD$ est un tétraèdre régulier.

e) Calculer la valeur de l'angle déterminé par l'arête AD et la face ABC.

f) Calculer le volume de ce tétraèdre.

Exercice 8

La droite d passe par le point $D(5\,;-1\,;3)$ parallèlement au vecteur $\vec{d}=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$.

La sphère s est centrée en $C(2\,;-1\,;-3)$ et son rayon est égal à 3.

a) Déterminer les points A et B communs à d et s.

b) Calculer les longueurs des côtés et les angles du triangle ABC.

c) Donner l'équation du plan π tangent à la sphère en A.

d) Trouver une représentation paramétrique de la droite t tangente à la sphère en A et perpendiculaire à la droite AB.

e) De manière générale, si A et B désignent deux points distincts d'une sphère, peut-on trouver deux droites parallèles, tangentes à la sphère, l'une passant par A et l'autre par B ?
Si oui, expliquer comment calculer un vecteur qui donne leur direction; sinon, expliquer l'impossibilité.

Exercice 9

a) Dans le repère usuel, dessiner
   1. les traces du plan α donné par les points $A(1\,;3\,;0)$, $B(3\,;1\,;0)$ et $C(0\,;2\,;2)$.
   2. les traces du plan β donné par l'équation $z=1$.
   3. la droite d'intersection d de α et β.

b) Trouver une équation cartésienne de α.

c) Calculer l'angle entre le sol et α.

d) On considère la sphère s d'équation $x^2+y^2+(z-1)^2=3$.
   1. Montrer que cette sphère est tangente à α.
   2. Calculer les coordonnées du point de contact T.
   3. Trouver les équations paramétriques de la tangente à la sphère en T qui est parallèle au sol.

e) On considère encore le plan γ qui est le symétrique de α par rapport à β.
   1. Dessiner les traces de γ.
   2. Que vaut l'angle entre α et γ?
   3. Quelle est la position de la sphère s par rapport à γ?

Exercice 10

On donne deux droites d et d' par les informations suivantes :

d passe par $A(3;4;2)$ et $B(6;-2;8)$.

d' passe par $C(2;2;3)$ parallèlement à $\vec{d'} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Représenter soigneusement les parties visibles et invisibles de ces deux droites dans le repère $\{O;\vec{u}_1;\vec{u}_2;\vec{u}_3\}$.
2. Déterminer graphiquement leur position relative. Justifier et dans le cas d'une intersection, donner les coordonnées du point d'intersection.

On considère le plan $\pi : x - y + 2z - 6 = 0$.

3. Dessiner, toujours dans le même repère, les parties visibles et invisibles du plan π.
4. Construire le point I d'intersection de π et de d'.
5. Dessiner les traces du plan π' contenant les droites d et d'.
6. Dessiner la droite i d'intersection des deux plans π et π'.

Pour le dessin, prendre le même repère que ci-contre. Placer l'origine au milieu de la feuille qui aura l'orientation "paysage".