Examen de fin de module | Session de juin 2014

Mathématiques 2

CORRIGE

Problème 1

a) En l'an 2000, on a $x=0$ et alors le nombre de nuités est
$N(0) = 0^4 - 32\cdot 0^3 + 342\cdot 0^2 - 1456\cdot 0 + 4000 = \underline{4000}.$

b) Pour montrer que $x = 13$ est un point à tangente horizontale, on doit montrer que $N'(13) = 0$.
Avec $N(x) = x^4 - 32x^3 + 342x^2 - 1456x + 4000$, on a
$N'(x) = 4x^3 - 32\cdot 3x^2 + 342\cdot 2x - 1456\cdot 1 + 0 =$
$= 4x^3 - 96x^2 + 684x - 1456.$
On a $N'(13) = 4\cdot 13^3 - 96\cdot 13^2 + 684\cdot 13 - 1456 = 0$.
Ainsi, $x = 13$ est bien un point à tangente horizontale et, donc, l'affluence a été minimale en 2013.
On a $N(13) = 13^4 - 32\cdot 13^3 + 342\cdot 13^2 - 1456\cdot 13 + 4000 = 1127$.
Le nombre de nuitées en 2013 a donc été de $\underline{1127}$.

c) Pour prouver qu'en 2010 la tendance était à la baisse, on doit montrer que $N'(10) < 0$
(Si $N'(a) < 0$, alors la pente de la tangente en $x = a$ est négative et, donc, la fonction est décroissante, elle "baisse" autour de a).
D'après b), on a $N'(x) = 4x^3 - 96x^2 + 684x - 1456$.
Ainsi $N'(10) = 4\cdot 10^3 - 96\cdot 10^2 + 684\cdot 10 - 1456 = -216 < 0$.
Par conséquent, la tendance était à la baisse en 2010.

d) En S, on a $x = 5$. Pour déterminer si la courbe est convexe ou concave en S, il faut trouver le signe de $N''(x)$ en $x = 5$ (si $N''(5) > 0$, la courbe est convexe, et, si $N''(x) < 0$, la courbe est concave).
D'après b), on a $N'(x) = 4x^3 - 96x^2 + 684x - 1456$.
Ainsi, $N''(x) = (N'(x))' = 4\cdot 3x^2 - 96\cdot 2x + 684\cdot 1 - 0 = 12x^2 - 192x + 684$.
On a $N''(5) = 12\cdot 5^2 - 192\cdot 5 + 684 = 24 > 0$.
Par conséquent, la courbe est <u>convexe en $x = 5$.</u>

e) De manière générale, l'équation de la tangente au graphe de $N(x)$ en $x = a$ est donnée par $y = N'(a)\cdot(x-a) + N(a)$.
Au point T, on a $a = 2$ (puisque T, S, D et M ont tous des abscisses, c'est-à-dire les premières coordonnées, entières).

On a $N(x) = x^4 - 32x^3 + 342x^2 - 1456x + 4000$ et

$N'(x) = 4x^3 - 96x^2 + 684x - 1456$ (d'après b)).

On a alors $N(a) = N(2) = 2^4 - 32 \cdot 2^3 + 342 \cdot 2^2 - 1456 \cdot 2 + 4000 = 2216$ et

$N'(a) = N'(2) = 4 \cdot 2^3 - 96 \cdot 2^2 + 684 \cdot 2 - 1456 = -440$.

Ainsi, l'équation de la tangente en T est $y = -440(x-2) + 2216$

$\Rightarrow y = -440x + 880 + 2216$

$\Rightarrow \underline{\underline{y = -440x + 3096}}$.

Problème 2

On a $f(x) = \dfrac{x^2-10x+25}{x^2-6x}$.

a) Les exclus de f sont les x pour lesquels le dénominateur de f vaut 0, c'est-à-dire $x^2-6x=0$.

C'est une équation du 2e degré de la forme ax^2+bx+c avec $a=1$, $b=-6$ et $c=0$.

Les solutions sont $x_{1,2} = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \dfrac{6\pm\sqrt{36-0}}{2} = \dfrac{6\pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{12}{2}=6 \\ \frac{0}{2}=0. \end{cases}$

Ainsi $x=0$ et $x=6$ sont les exclus de f.

On en conclut que $\underline{\underline{x=0 \text{ et } x=6 \text{ sont les asymptotes verticales de } f}}$.

Comme le degré du numérateur est 2 et le coefficient de x^2 est 1, et comme le degré du dénominateur est aussi 2 et le coefficient de x^2 est aussi 1, on en conclut que $y=\frac{1}{1}$, c'est-à-dire $\underline{\underline{y=1 \text{ est asymptote horizontale de } f}}$.

b) Intersections avec l'axe x: on a $y=0$, c'est-à-dire $f(x)=0 \Rightarrow \dfrac{x^2-10x+25}{x^2-6x}=0$

$\Rightarrow x^2-10x+25=0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=-10$ et $c=5$; les solutions sont $x_{1,2} = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \dfrac{10\pm\sqrt{100-100}}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$; ainsi, l'unique intersection avec l'axe x est en $\underline{\underline{(5;0)}}$.

Intersection avec l'axe y: comme $x=0$ est un exclu de f (voir a)), on ne peut pas calculer $f(0)$ et, donc, f n'a $\underline{\underline{\text{pas d'intersection avec l'axe } y}}$.

c) On a $f(x) = \dfrac{u}{v}$ avec $u = x^2-10x+25$ et $v = x^2-6x$.

Comme $u' = 2x-10\cdot 1+0 = 2x-10$ et $v' = 2x-6\cdot 1 = 2x-6$, on a

$$f'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{(2x-10)\cdot(x^2-6x)-(x^2-10x+25)(2x-6)}{(x^2-6x)^2} =$$

$$= \frac{2x^3-12x^2-10x^2+60x-(2x^3-6x^2-20x^2+60x+50x-150)}{(x^2-6x)^2} =$$

$$= \frac{2x^3-12x^2-10x^2+60x-2x^3+6x^2+20x^2-60x-50x+150}{(x^2-6x)^2} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{4x^2-50x+150}{(x^2-6x)^2}}}.$$

Les extremas de f sont donnés par les x tels que $f'(x)=0$.

$f'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{4x^2-50x+150}{(x^2-6x)^2}=0 \Rightarrow 4x^2-50x+150=0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=4$, $b=-50$ et $c=150$; ses solutions sont

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{50 \pm \sqrt{2500-2400}}{8} = \frac{50 \pm \sqrt{100}}{8} = \frac{50 \pm 10}{8} = \begin{cases} \frac{60}{8} = 7{,}5 \\ \frac{40}{8} = 5. \end{cases}$$

Avec $x = 7{,}5$, on a $f(x) = \dfrac{7{,}5^2 - 10 \cdot 7{,}5 + 25}{7{,}5^2 - 6 \cdot 7{,}5} = \dfrac{5}{9}$.

Avec $x = 5$, on a $f(x) = 0$ (verb)).

Ainsi, les extrema de f sont $\underline{\underline{(5;0) \text{ et } \left(7{,}5; \frac{5}{9}\right)}}$.

d) Tableau de variation :

x		0		5		6		$7{,}5$	
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$

avec $x = -1$, $f'(x) = \dfrac{4 \cdot (-1)^2 - 50 \cdot (-1) + 150}{((-1)^2 - 6 \cdot (-1))^2} > 0$

avec $x = 1$ $f'(x) > 0$

avec $x = 5{,}5$, $f'(x) < 0$

avec $x = 7$, $f'(x) < 0$

avec $x = 8$ $f'(x) > 0$

Problème 3

On a $B(x) = 10x \cdot \sqrt{2x+1}$.

a) Avec $x=4$, $B(x) = 10 \cdot 4 \cdot \sqrt{2 \cdot 4 + 1} = 40 \cdot \sqrt{9} = 40 \cdot 3 = 120$.

b) On a $B(x) = u \cdot v$ avec $u = 10x$ et $v = \sqrt{2x+1}$.

Comme $u' = 10$ et $v' = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \cdot \underbrace{2}_{\text{dérivée interne = dérivée de } 2x+1} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$, on a

$$B'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = 10 \cdot \sqrt{2x+1} + 10x \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+1}} =$$
$$= 10 \cdot \sqrt{2x+1} + \frac{10x}{\sqrt{2x+1}} = \frac{10 \cdot (\sqrt{2x+1})^2}{\sqrt{2x+1}} + \frac{10x}{\sqrt{2x+1}} =$$
$$= \frac{10 \cdot (2x+1)}{\sqrt{2x+1}} + \frac{10x}{\sqrt{2x+1}} = \frac{20x+10}{\sqrt{2x+1}} + \frac{10x}{\sqrt{2x+1}} = \frac{20x+10+10x}{\sqrt{2x+1}} =$$
$$= \frac{30x+10}{\sqrt{2x+1}}.$$

Comme x est le nombre d'années, on a $x \geq 0$.

Ainsi $30x \geq 0$, $30x+10 > 0$, $\sqrt{2x+1} > 0$ et $\frac{30x+10}{\sqrt{2x+1}} > 0$.

On a donc $B'(x) > 0$, ce qui signifie que <u>$B(x)$ est toujours croissante.</u>

c) De manière générale, l'équation de la tangente à la courbe de B au point $x = a$ est $y = B'(a) \cdot (x-a) + B(a)$.

Ici, $a = 12$, et on a $B(12) = 10 \cdot 12 \cdot \sqrt{2 \cdot 12 + 1} = 120 \cdot \sqrt{25} = 120 \cdot 5 = 600$ et

$$B'(12) = \frac{30 \cdot 12 + 10}{\sqrt{2 \cdot 12 + 1}} = \frac{370}{\sqrt{25}} = \frac{370}{5} = 74.$$

L'équation de la tangente est donc $y = 74(x-12) + 600$

$\Rightarrow y = 74x - 888 + 600$

$\Rightarrow y = 74x - 288.$