OSCILLATIONS
MOUVEMENTS HARMONIQUES

1. Introduction

1.1. Exemples

Fréquentes sont les situations où des mouvements d'oscillation apparaissent et les exemples ne manquent pas. Les phénomènes cités ci-dessous sont parfois compliqués mais la théorie qui les décrit a toujours comme base celle qui est exposée dans ce chapitre:

- Un musicien frappe ou gratte une corde de son instrument: chaque point de la corde a alors un mouvement d'oscillation assez simple.

- Un enfant sur une escarpolette (une balançoire); a) il se laisse aller après avoir été lancé. le mouvement est aussi assez simple; b) quelqu'un peut *un peu* le pousser, à la bonne *fréquence* et à la bonne *phase* pour *entretenir* les oscillations; le mouvement est déjà moins simple; c) encore moins simple est la situation, pourtant banale, où le gosse entretient lui-même les oscillations en effectuant des mouvements adéquats sur son siège; c'est l'oscillation dite *paramétrique*, qu'il n'est pas nécessaire de connaître pour se balancer joyeusement.

- Le balancier de la pendule du salon a un mouvement d'oscillation assez simple. Par *assez simple*, on entend que cela pourrait être plus simple, en particulier si les frottements ne venaient pas amortir le mouvement pour empêcher l'amplitude de rester constante. Quantité d'autres exemples, moins apparents mais pourtant communs:

- Les champs **E** et **B** d'une onde électromagnétique comme la lumière ou une onde radio ou TV; ils vibrent à des fréquences extrêmement élevées. Ils mettent ainsi en mouvement, à la même fréquence, les électrons libres du fil métallique de l'antenne, engendrant un courant que le récepteur auquel l'antenne est branchée se chargera de décoder pour en extraire l'information, acoustique ou autre.

- Les atomes ou les ions dans une molécule ou dans un solide ont des mouvements de vibration autour d'une position d'équilibre; cette agitation est une manifestation de la température ou d'une autre action extérieure supplémentaire comme la lumière.

La liste est à compléter !

1.2. Définitions et limites de l'étude

Un phénomène physique est dit **périodique** lorsque certaines grandeurs qui le caractérisent (position, vitesse, courant électrique, etc.) reprennent les mêmes valeurs à intervalle de temps régulier.

Cet intervalle de temps particulier est nommé **période**, se note le plus souvent T et se mesure en seconde dans le système d'unités MKSA.

Un événement est dit *fréquent* lorsqu'il se reproduit souvent. On appelle alors **fréquence** le *nombre* d'événements identiques *par* unité de temps, en l'occurence *par* seconde. La fréquence est donc l'inverse de la période. On note f la fréquence (parfois ν, lettre grecque qui se prononce "nu") et on a, par définition:

$$f = 1/T \qquad \text{avec } [f] = \mathrm{s}^{-1} = \mathrm{Hz}, \text{ le hertz.}$$

La *pulsation* ω se définit par : $\omega = 2\pi f$. Ce n'est pas une vitesse angulaire !!

La **période** d'un mouvement oscillatoire est toujours un **aller et retour**, le sytème repasse deux fois par la même position: une fois dans chaque sens, mais le **vecteur** vitesse par exemple ne doit être qu'une seule fois le même par période

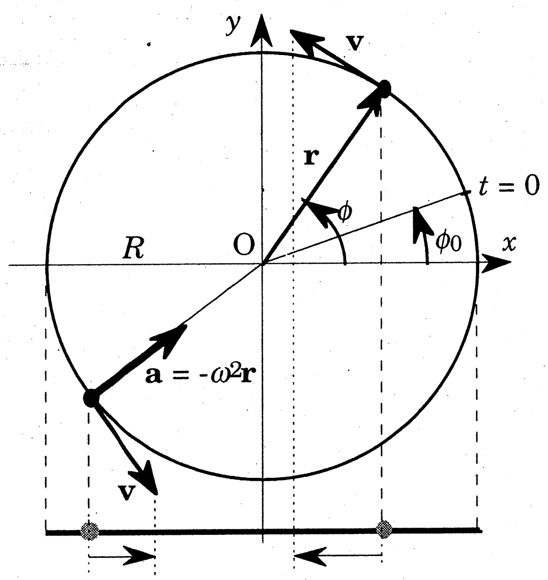
Un **mouvement harmonique** (MH en abrégé) est un mouvement périodique particulièrement simple et le seul qu'on étudiera dans ces pages. Ce nom vient de ce que l'équation d'un tel mouvement est une fonction harmonique bien connue, le *sinus* ou le *cosinus*. Un mouvement périodique est en général beaucoup plus compliqué en ce sens que son équation de mouvement s'exprime par une série *infinie* de sinus ou/et de cosinus qu'on appelle *série de Fourier*. Toutes les oscillations qu'on examinera seront donc des MH. On fera si nécessaire les approximations adéquates pour qu'ils le soient.

D'autre part, ne seront étudiés que les MH **libres**, c-à-d sans action perturbatrice extérieure telle des frottements provoquant un ralentissement, un amortissement du mouvement, ou une force périodique d'entretien pouvant provoquer une forte augmentation de l'amplitude de l'oscillation (résonance, cf p. 16). Bien que ces deux aspects soient absolument fondamentaux, surtout le deuxième, dans tous les domaines de la physique, ils ne seront qu'effleurés et laissés en *perspective*.

Un MH se fait symétriquement, de part et d'autre d'une position médiane qui est la **position d'équilibre** statique stable. Cette position sera le plus naturellement et le plus souvent choisie comme **origine des coordonnées**. Si le mouvement spontané se fait sous l'influence d'une force elle sera dite **force de rappel**, car elle tend à ramener le système vers sa position d'équilibre. De par son "élan" le système dépassera cette position, mais la force alors changera de sens pour **rappeler** le système, et ainsi de suite indéfiniment puisqu'il y a pas d'amortissement.

1.3. MCU : le retour ! (rappel et compléments)

En cinématique, on décrit la position d'un point matériel tournant à vitesse angulaire ω sur la circonférence d'un cercle de rayon R par le rayon-vecteur $\mathbf{r}(t)$, de norme $r = R$. L'angle que fait ce vecteur $\mathbf{r}(t)$ avec l'axe Ox est noté $\phi(t)$ et cet angle vaut ϕ_0 en $t = 0$. Dans un mouvement circulaire uniforme (MCU), la vitesse angulaire, qui se définit tout à fait généralement comme $\omega = \mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$, est ici constante; on écrit alors $\phi(t) = \omega t + \phi_0$.



Les coordonnées du mobile, ou les composantes du vecteur-position dans le repère Oxy sont:

$$x = R\cos\phi = R\cos(\omega t + \phi_0)$$
$$y = R\sin\phi = R\sin(\omega t + \phi_0)$$

La projection du MCU sur un axe, par exemple Ox, est un mouvement de va-et-vient, de même période que le MCU.
C'est un **mouvement harmonique** parce que son équation du mouvement est de la forme:

$$x(t) = R\cos\phi = R\cos(\omega t + \phi_0)$$

Fig. 1. Un mouvement harmonique (linéaire) est la *projection* d'un **MCU**.

Ce mouvement de va-et-vient est donc un MCU "vu sur la tranche", et c'est un mouvement harmonique, comme on vient de le voir et comme on va encore le montrer.

La vitesse et l'accélération du mobile en projection sur Ox sont:

$$\dot{x}(t) = -\,\omega R\sin(\omega t + \phi_0)$$

$$\ddot{x}(t) = -\,\omega^2 R\cos(\omega t + \phi_0) = -\,\omega^2 x(t)$$

l'accélération a donc un signe opposé à celui de la position, comme on pouvait s'y attendre en voyant les sens opposés des vecteurs **r** et **a** dans le MCU. Cette simple constatation est la **relation de base de tout MH libre**. On la réécrit:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

En mots: la **somme** de l'accélération et du produit de la position par une constante **positive** est nulle. La positivité de la constante est absolument indispensable. La relation ci-dessus fait partie du vaste monde des:

1.4. Equations différentielles

Dans une équation algébrique, l'inconnue est un nombre. Dans une équation différentielle (ED en abrégé), **l'inconnue est une fonction**. Une ED peut contenir la fonction, ses dérivées et la variable. L'ED ci-dessus contient la fonction x et sa deuxième dérivée par rapport au temps; elle ne contient ni la première dérivée ni la variable indépendante t. Elle est particulièrement simple.

Résoudre une ED est évidemment trouver la (ou les) fonction(s) qui est (sont) solution(s). D'une équation algébrique, on parle de son degré; d'une ED on parle de son **ordre**. Celle ci-dessus est du 2ème ordre parce que la fonction inconnue y apparaît jusqu'à la 2ème dérivée. De plus, elle est dite **linéaire** parce la fonction et ses dérivées (ici seulement la 2ème) n'apparaissent qu'au premier degré. Les ED linéaires forment une classe à part parmi l'univers des ED: elles sont résolubles. Il n'y a que très peu d'ED non linéaires qui peuvent se résoudre analytiquement, les autres n'ont pas de solutions calculables exactement et se résolvent par approximations en utilisant des méthodes numériques: elles sont l'écrasante majorité.

Une des préoccupations majeures du scientifique est de pouvoir comprendre et décrire l'évolution d'un phénomène, très souvent en fonction du temps. C'est le cas, par exemples, de l'économiste qui doit prévoir le devenir d'un marché financier, du démographe qui veut deviner le futur d'une population, du spécialiste en assurances (actuaire) pour fixer les primes d'assurance-vie et au moins rentrer dans ses frais, du médecin épidémiologiste pour suivre l'évolution d'une maladie planétaire, du microbiologiste qui examine la croissance de sa culture de bactéries, du chimiste qui veut connaître la vitesse d'une réaction chimique, et bien sûr du physicien pour qui c'est quasiment le pain quotidien. La liste n'est pas du tout exhaustive mais c'est très souvent une ED qui est l'élément essentiel de ces analyses. Les ED non-linéaires étaient jusqu'à il y a peu de dizaines d'années laissées de côté parce qu'estimées trop compliquées et sans grand intérêt autre que purement mathématique. La situation a changé lorsqu'on s'est aperçu qu'elles sont le point de départ de l'étude des phénomènes *chaotiques*, pouvant apparaître dans beaucoup de domaines, comme ceux cités ci-dessus. Ce n'est pas notre propos.

Une ED, linéaire ou non, comporte donc des dérivées de la fonction inconnue; résoudre l'ED revient souvent à **intégrer** ces dérivées pour aboutir à la fonction-solution. Or, dans le cas qui nous occupe, ce n'est pas nécessaire de résoudre puisque la fonction-solution nous est connue, c'est $x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)$! Alors qu'est-ce qui nous intéresse ?

Connaître complètement un m.h. revient à traiter deux problèmes:

a) Trouver la période d'oscillation du système, pour cela il faut savoir ce que vaut ω puisque $\omega = 2\pi f$ et $f = 1/T$;

b) trouver la position en fonction du temps. c'-à-d tout connaître de $x(t)$, donc connaître aussi l'amplitude A et le déphasage ϕ_0. Ce sera l'objet de § 5.

Quelques méthodes efficaces sont présentées maintenant.

2. Utilisation de la deuxième loi de Newton

2.1. Principe

On ne l'avait pas dit à l'époque, mais la deuxième loi de Newton est une équation différentielle! Ce n'était pas une cachotterie, ce n'était tout simplement pas nécessaire de le mentionner. Mais en effet: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ comporte la 2[ème] dérivée de la position $\mathbf{r}(t)$. Ainsi par exemple, en intégrant deux fois $\mathbf{a} = \mathbf{const}$ on obtient l'équation de l'évolution temporelle du vecteur-position pour un MUA:

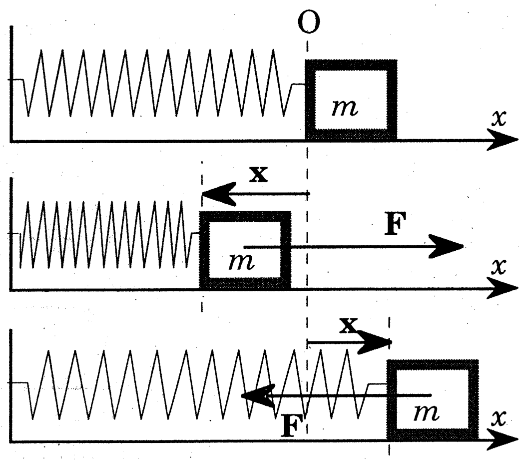
$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 .$$

Il "suffira" donc de poser l'équation $F_r = ma_x$, où F_r est la force de rappel.

2.2. Masse accrochée à un ressort

C'est la "tarte à la crème" du m.h. comme l'est le plan incliné de la dynamique élémentaire et le condensateur-plan de l'électrostatique.

Les frottements de tout genre sont donc supposés négligeables.



Considérons une masse m pouvant glisser sans frottement sur une surface horizontale. Elle est accrochée à un ressort de masse négligeable et de raideur k ; l'autre extrémité du ressort est fixe. On déplace la masse de sa position de repos O et on la lâche. Elle se met à osciller sous l'action du ressort qui agit sur elle avec la **force** élastique proportionnelle à la déformation x dont le vecteur est *toujours* en sens opposé au vecteur-position, que le ressort soit allongé ou comprimé:

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{x}.$$

C'est le mouvement de m qu'on examine et par conséquent, ce sont les forces qui agissent sur m qui interviennent, et pas d'autres. La **force de rappel** est ici la force élastique de la part du ressort; les autres forces, poids et soutien, se compensent en permanence et n'interviennent donc pas. Selon l'axe Ox, on écrit:

(x) : $F = - kx$ d'une part, et : $F = ma = m\ddot{x}$ d'autre part

Ce qui donne:

$$-kx = m\ddot{x} \quad \text{c'est-à-dire:} \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

En regardant cette dernière équation, on constate qu'elle est la même que celle écrite à la fin du § 1.3. à condition de poser : $\omega^2 = k/m$. Tout est là.

Comme $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$, on a : $T = 2\pi/\omega$ et on en tire la période d'oscillation du système:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Vérification expérimentale pour se convaincre que cette théorie n'a rien de surréaliste:

Soit un ressort à boudin dont on détermine tout d'abord la rigidité k statiquement.

Pour cela on le suspend verticalement, on lui accroche une masse m_1 et on mesure son allongement d. On a évidemment $m_1 g = kd$.

$m_1 =$ $d =$ $\Rightarrow$ $k =$

On *calcule* alors la période qu'il aurait en oscillant avec une masse m_2 qui lui serait accrochée:

$m_2 =$ $T_{calc} =$

On accroche ensuite la masse m_2 (qui peut être la même que m_1) au ressort et on le fait osciller selon un axe vertical. On *mesure* la période:

$10\,T =$ $T_{mes} =$

Comparaison (écart relatif) :

2.3. Pendule simple

Un pendule **simple** est constitué d'une masse ponctuelle accrochée à un fil de masse négligeable et inextensible. Un extrémité du fil est fixe et le système oscille librement dans un plan vertical.

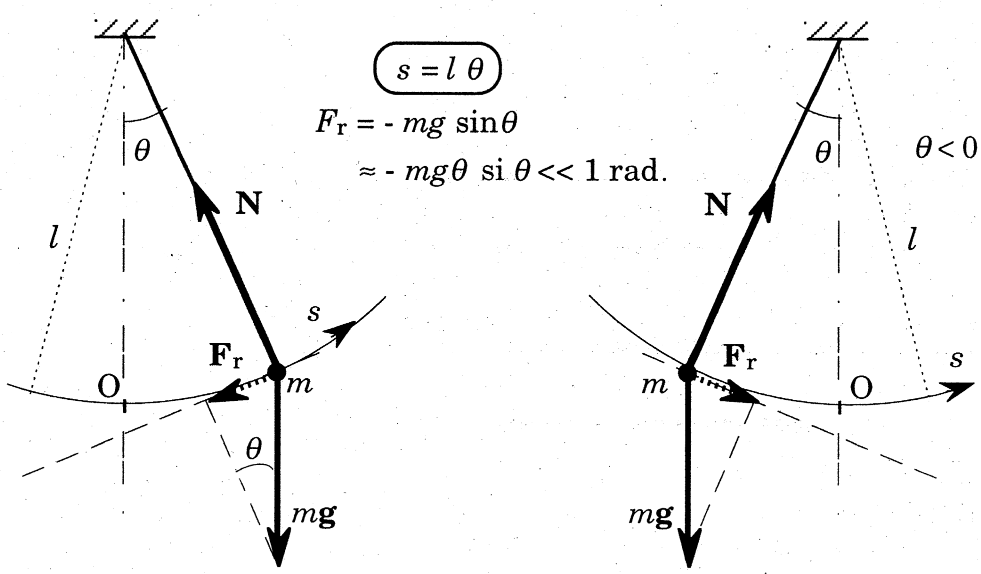


Fig. 3. La projection du vecteur-poids sur la tangente est toujours une **force de rappel**.

L'équation de Newton s'écrit : $m\mathbf{g} + \mathbf{N} = m\mathbf{a}$ (Comment est le vecteur **a** ?)

Le mouvement de m étant circulaire, il est judicieux de choisir un système d'axes mobile, l'un étant tangent et l'autre normal à la trajectoire. Dans ce système, l'éq. de Newton devient :

(axe tangent): $-mg \sin\theta = ma_t$

(axe normal): $-mg \cos\theta + N = ma_n$

On ne s'intéresse qu'à la position $s(t)$, donc la composante normale n'intervient pas. L'accélération tangentielle a_t s'exprime avec l'accélération angulaire α :

$a_t = \ddot{s} = \alpha l$, mais $\alpha = \ddot{\theta}$ par définition. Or, $s = \theta l$, donc $\ddot{s} = \ddot{\theta} l$ et $a_t = \ddot{\theta} l$.

Remplaçant dans l'équation ci-dessus pour l'axe tangent (et simplifiant par m):

$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0$; c'est l'ED du mouvement du pendule.

Elle est en fait assez indigeste parce que le terme en sinus de la fonction $\theta(t)$ l'empêche d'être linéaire. Le mouvement, solution de cette ED, n'est pas un MH. Elle va devenir linéaire en faisant une approximation assez restrictive : il ne faut considérer que des angles θ assez faibles pour, lorsqu'ils sont exprimés en radian, qu'on puisse les confondre avec leur sinus: $\theta \approx \sin\theta$. L'ED devient ainsi:

$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\ \theta = 0$; cette ED est celle d'un mouvement harmonique.

Ou bien (ce qui revient au même), avec $s = \theta l$: $\ddot{s} + \frac{g}{l}\ s = 0$

De nouveau, on identifie le facteur de la position s avec le carré de la pulsation ω :

$\omega^2 = \frac{g}{l}$, d'où la période d'oscillation $T = \frac{2\pi}{\omega}$, c-à-d : $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Remarques:

- La période ne dépend ni de la masse pendue m, ni de l'angle d'oscillation θ, pourvu qu'il soit faible;
- Si on veut connaître comment varie la période pour des angles non faibles, il faut se donner beaucoup de peine et cette fois *résoudre* l'ED comportant le sinus. On obtient une solution sous forme de développement en série infinie, ce qui donne pour la période l'expression exacte mais partielle:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\theta}{2} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 \sin^4\frac{\theta}{2} + \ldots\right]$$

L'écart relatif à la valeur approximative est de l'ordre de 0,5 % si θ reste inférieur à 10 degrés et de l'ordre de 4 % pour $\theta = 45$ degrés.

Vérification expérimentale pour se convaincre que ...

On fait osciller un pendule simple en respectant la condition des petits angles. On mesure la longueur l (du point de suspension au milieu de m) et la période T. On en déduit la valeur de l'accélération de pesanteur g:

$l =$; $10\,T =$; $T =$ $\Rightarrow$ $g =$

On se souvient peut-être d'une manipulation de TP où la méthode expérimentale était moins fruste (graphe de T^2 en fonction de l , la pente de la droite contenait g); mais à cette époque, la théorie reliant T à l n'était pas connue. Voilà qui est fait.

3. Utilisation de la conservation de l'énergie

3.1. Principe

L'absence de forces dissipatives (frottements) permet de faire intervenir fructeusement la conservation de l'énergie mécanique. On sait bien que:

$E_{mec} = E_{cin} + E_{pot}$, par définition. En dérivant par rapport au temps, cela donne:

$$\dot{E}_{cin} + \dot{E}_{pot} = \dot{const} = 0$$

L'objectif de ce § 3. est aussi de trouver l'ED du m.h. Cette ED, on vient de l'écrire, même si ce n'est pas vraiment apparent. Pour que cela se mette à sauter au yeux, calculons tout d'abord la dérivée de l'énergie cinétique:

$$\dot{E}_{cin} = \frac{dE_{cin}}{dt} = \frac{dE_{cin}}{dv}\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)\dot{v} = \frac{1}{2}2mv\,\dot{v} = m\,\dot{x}\,\ddot{x}$$

résultat acquis, car valable dans toutes les situations de dynamique du point matériel. Pour la dérivée de l'énergie potentielle, cela dépend des cas, c'est-à-dire du genre d'énergie potentielle en jeu. Il est temps de passer à des

3.2. Exemples

3.2.1. Masse accrochée à un ressort

L'énergie potentielle élastique d'un ressort de raideur k est posée nulle à l'origine des coordonnées, là où le ressort est au repos. Pour toute position, elle s'écrit :

$E_{pot} = \frac{1}{2} k\, x^2$; sa dérivée par rapport au temps devient:

$$\dot{E}_{pot} = \frac{dE_{pot}}{dt} = \frac{dE_{pot}}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} kx^2\right)\dot{x} = \frac{1}{2} 2\, kx\, \dot{x} = k\, x\, \dot{x}$$

La relation $\dot{E}_{cin} + \dot{E}_{pot} = 0$ s'écrit maintenant: $m\, \dot{x}\, \ddot{x} + k\, x\, \dot{x} = 0$.

en divisant par m et par la *vitesse*, qui n'est jamais identiquement nulle:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

même ED que celle obtenue par la dynamique de Newton.

3.2.2. Pendule simple

On choisit le zéro de l'énergie potentielle en O, point le plus bas (!) de la trajectoire; elle s'écrit (voir Fig. 3.):

$$E_{pot} = mgl\,(1 - \cos\theta)$$

Dérivant cette expression par rapport au temps et ne prenant que $\sin\theta \approx \theta$:

$$\dot{E}_{pot} = mgl\ \theta\dot{\theta}$$

La relation $\dot{E}_{cin} + \dot{E}_{pot} = 0$ s'écrit maintenant: $m\, \dot{s}\, \ddot{s} + mgl\theta\dot{\theta} = 0$

où on a remplacé x par s, qu'on remplace alors par $s = l\theta$; ainsi, divisant l'équation par $m\, l^2$ et par la vitesse angulaire (qui est la dérivée de θ par rapport au temps et n'est bien sûr pas ω), non identiquement nulle:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

qui est l'équation cherchée, quoique déjà trouvée par ailleurs.

4. Utilisation du théorème du moment cinétique

4.1. Principe

Si le corps qui oscille ne peut pas être considéré comme un point matériel parce que l'oscillation implique une rotation, la deuxième loi de Newton est insuffisante, tous les point du corps n'ayant pas la même accélération. Il est nécessaire d'utiliser ce qui a été mis en place en "dynamique des rotations" et faire intervenir les trois types de **moments**: les moments **de forces M**, les moments **d'inertie** I et les moments **cinétiques L**, qu'on ne confondra pas, sous peine de graves ennuis ! Seul le deuxième cité n'est pas vectoriel, les deux autres le sont mais s'il s'agit d'une rotation autour d'un axe fixe, tel Oz, seule la composante M_z de **M** et L_z de **L** apparaissent, le mouvement de rotation ayant lieu dans le plan Oxy.

Il faut encore préciser par rapport à quel axe ces moments sont définis, ce qui ce note par un indice: le point d'intersection de l'axe avec le plan d'oscillation.

Rappelons ces relations fondamentales:

$$\sum M_{z,\mathrm{O}} = \frac{\mathrm{d}L_{z,\mathrm{O}}}{\mathrm{d}t} \quad \text{où } L_{z,\mathrm{O}} = I_{\mathrm{O}}\dot{\theta} \Rightarrow \sum M_{z,\mathrm{O}} = I_{\mathrm{O}}\ddot{\theta}$$

4.2. Exemples

4.2.1. Pendule simple

L'axe de rotation ne coïncide pas avec le centre de gravité du système, le moment d'inertie du point matériel pendu n'est pas nul, il vaut simplement: $I_{\mathrm{O}} = ml^2$.

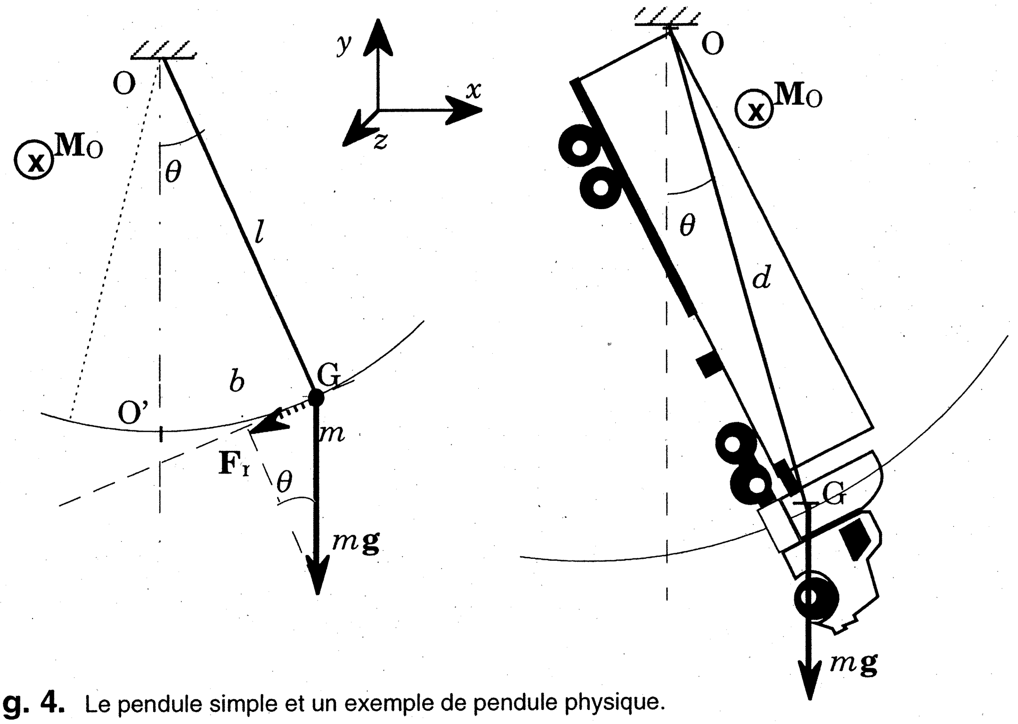


Fig. 4. Le pendule simple et un exemple de pendule physique.

La seule force de moment non nul par rapport à O est le poids $m\mathbf{g}$ dont le bras de levier est $b = l \sin \theta$. L'application du théorème donne:

$$\sum M_{z,\mathrm{O}} = I_{\mathrm{O}}\ddot{\theta} \iff -mgl\sin\theta = ml^2\ddot{\theta}$$

Faisant l'approximation des petits angles et simplifiant, il vient:

$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$, l'ED du pendule simple, maintenant bien connue.

Le signe (-) pour le moment du poids s'explique facilement: la composante z de $\mathbf{M}_{\mathrm{O}}$ est orientée selon -Oz, dans la convention du trièdre **direct** Oxyz. D'autre part, on se souvient que la composante de la force de rappel est négative, comme est aussi **négatif** un moment de **rappel**.

Notons qu'on peut établir cette ED au moyen de l'expression première du théorème, sans faire apparaître le moment d'inertie. Ce n'est possible que parce qu'il s'agit d'un point matériel. On a:

$$\sum M_{z,\mathrm{O}} = \frac{\mathrm{d}L_{z,\mathrm{O}}}{\mathrm{d}t} \quad \text{où } L_{z,\mathrm{O}} = \left\| \mathbf{OG} \wedge m\mathbf{v} \right\| = lmv = lml\dot{\theta} = ml^2\dot{\theta}$$

ce qui correspond à ce qui survient en utilisant le moment d'inertie, qui ici est simplement ml^2.

4.2.2. Pendule physique

La seule force de moment non nul est encore le poids $m\mathbf{g}$, appliqué au centre de gravité G du solide, à la distance d = OG de l'axe de rotation. Comme pour le pendule simple, le bras de levier du poids est $d \sin\theta$, qu'on approxime tout de suite par θd.

$\sum M_{z,\mathrm{O}} = I_\mathrm{O}\ddot{\theta}$ donne: $-mgd\,\theta = I_\mathrm{O}\ddot{\theta}$, c'est-à-dire :

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{I_\mathrm{O}}\theta = 0$$

C'est le type standard de l'ED d'un MH libre; on pose donc que ω^2 est le coefficient de θ. On aboutit alors sur l'expression de la période de petites oscillations de n'importe quel pendule physique:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_\mathrm{O}}{mgd}}$$

où d est la distance entre le centre de gravité G et l'axe de rotation O. Notons bien que I_O est le moment d'inertie par rapport à ce dernier axe, il s'exprime avec celui passant par G en ajoutant le terme de Steiner, ainsi:

$$I_\mathrm{O} = I_\mathrm{G} + md^2$$

La période devient:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_\mathrm{G} + md^2}{mgd}}$$

ici aussi la masse totale n'intervient pas car tout moment d'inertie I_G peut s'exprimer par kmr^2 où k est une constante numérique (1/2 pour un cylindre plein, etc.) et où r est une distance caractéristique du solide (son rayon pour un cylindre etc.). On pourrait avoir besoin finalement de l'expression:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{kr^2 + d^2}{gd}}$$

où on a pu simplifier par m. Ces expressions de T sont très remarquables et efficaces car elles permettent la détermination indirecte mais expérimentalement simple et précise du moment d'inertie d'un solide rigide quelconque, aussi tarabiscoté soit-il, en mesurant sa période d'oscillation. Il faudra pourtant auparavant connaître la position d de son centre de gravité, ce qui peut se faire statiquement (comment ?).

4.2.3. Pendule de torsion

Soit un corps solide rigide de masse m. Soit aussi un fil de masse négligeable attaché à un point fixe. L'autre bout du fil est attaché au solide qui ainsi pend; l'axe vertical du fil passe alors par le cdg G du solide. Une sollicitation extérieure initiale imprime une rotation d'un angle θ_0 dans plan horizontal au solide puis disparaît. Le solide effectue alors une oscillation dans ce plan en tordant le fil dans un sens puis dans l'autre. C'est un pendule de torsion. Sa période dépend, on s'en doute, des caractéristiques du solide et de celles du fil, qui se laisse tordre plus ou moins facilement et a donc une certaine élasticité, il fonctionne comme un ressort.

Pour un ressort (à boudin, à lame, etc.) la déformation x du ressort est proportionnelle à la force qui la produit: $F = kx$, où k est la constante du ressort, caractérisant sa rigidité et contenant des particularités géométriques et métallurgiques. La situation est semblable pour la torsion, sauf que la déformation torsion θ est proportionnel au moment de force qui le produit: $M = C\,\theta$. La constante C, dite astucieusement *constante de torsion*, contient les caractéristiques géométriques et matérielles du fil (sa longueur, son diamètre s'il est cylindrique et la substance qui le constitue).

Comme pour le ressort où la force élastique agit en force de rappel, le moment de torsion agit comme un **moment de rappel** sur le corps accroché au fil. Il est donc **négatif**. Si le système est libre, donc sans frottement notable, il n'y a pas d'autre moment ni force modifiant le mouvement. A l'instar du ressort et à l'encontre du pendule, il n'est pas nécessaire de faire d'approximation pour que l'ED soit linéaire, l'angle de rotation reste proportionnel à sa cause.

Soit I_G le moment d'inertie du solide accroché à un fil de constante de torsion C. Le théorème du moment cinétique fait écrire:

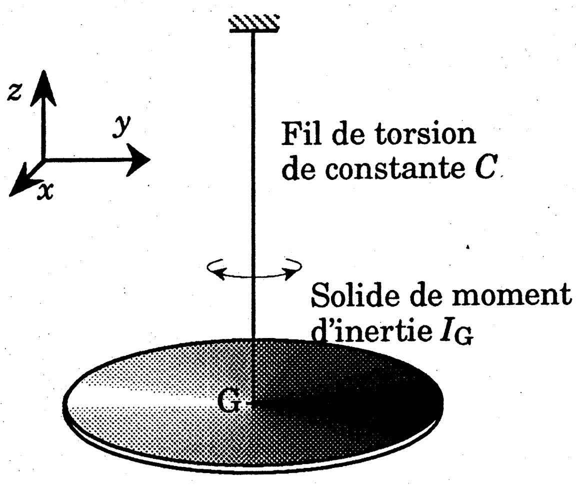


Fig. 5. Un exemple de pendule de torsion.

$$M_G = I_G\,\ddot{\theta} \quad \text{c'-à-d:} \quad -C\theta = I_G\ddot{\theta}$$

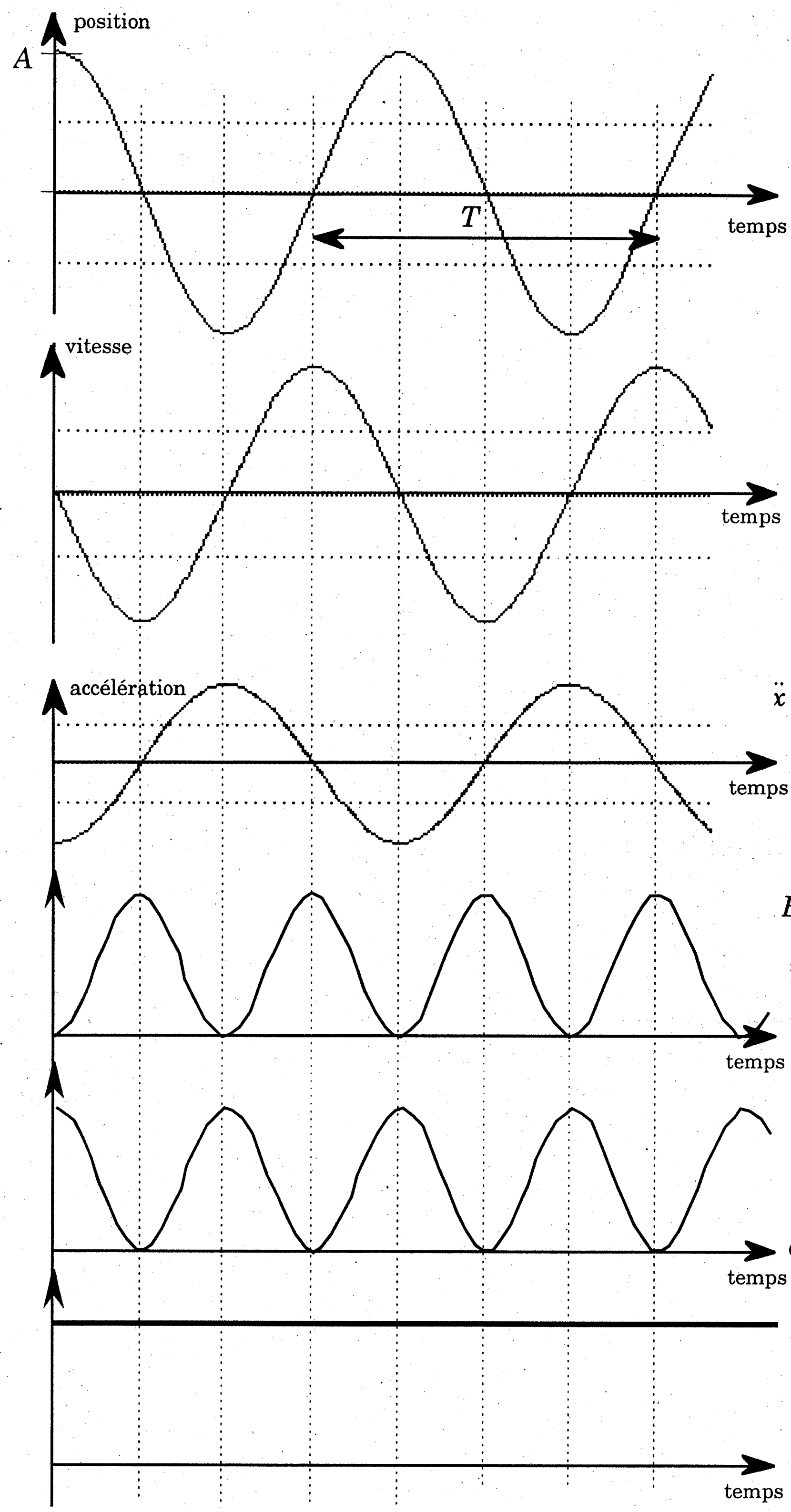
$$\Leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{C}{I_G}\theta = 0$$

c'est l'ED caractéristique d'un m.h.

On pose $C/I_G = \omega^2$, ce qui fournit la période d'oscillation:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_G}{C}}$$

Ici aussi, la mesure de la période permet la détermination aisée du moment d'inertie du solide si la constante de torsion du fil est connue par ailleurs; la réciproque est évidemment envisageable: détermination de C si I_G est connu.



$$x = A\cos\omega t$$

$$\dot{x} = v_x = -\,\omega A\sin\omega t$$

$$\ddot{x} = \dot{v}_x = a_x = -\,\omega^2 A\cos\omega t$$

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\,\omega^2 A^2\sin^2\omega t$$

où: $\sin^2\omega t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)$

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t$$

où: $\cos^2\omega t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t)$

$$E_{\text{mec}} = \frac{1}{2}m\,\omega^2 A^2\sin^2\omega t + \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t = \frac{1}{2}kA^2 = const \quad \text{car : } \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Fig.6. Grandeurs physiques oscillantes d'un mouvement harmonique. Cas d'une masse *m* accrochée à un ressort de constante *k*.

5. Conditions initiales

5.1. Définition

On l'a dit et constaté, l'ED du MH est du deuxième ordre. Résoudre cette ED n'est pas nécessaire puisqu'on en connait la solution: un sinus ou un cosinus de ωt. Cette connaissance n'est donc pas complète puisqu'il subsiste l'indétermination: sinus ou cosinus? Pour lever cette indétermination, il est nécessaire de dire quelque mots sur la résolution d'une ED.

Pour trouver une fonction dont on connait la deuxième dérivée, on sait qu'il est nécessaire d'intégrer *deux* fois, ce qui fait apparaître *deux* constantes d'intégration successives et à priori arbitraires. Si elles peuvent parfois le rester en mathématiques, il en n'est souvent pas de même en physique. Il est possible de lever l'indétermination en particularisant la fonction. Voyons d'abord un exemple purement mathématique:

Soit: $y' = 2x \Rightarrow y = x^2 + c$. Si de plus, on sait que, par exemple, $y = 5$ lorsque $x = 1$, alors: $c = y - x^2 = 4$ et la fonction est entièrement connue: $y = x + 4$.

En physique, ces valeurs particulières sont souvent les *conditions initiales*, qui doivent donc être au nombre de *deux* pour l'ED du MH. Cela veut dire qu'il faut connaître, en un instant t^* particulier, la valeur de la position $x(t^*)$ *et* la valeur de la vitesse $v(t^*)$. Cet instant sera volontiers choisi en $t^* = 0$, d'où le nom donné à ces conditions.

5.2. Exemples

Une masse m oscille au bout de son ressort k. Dire par exemple que la masse est initialement tirée puis lâchée en $t = 0$ impose des conditions initiales sans équivoque. En effet, cela se traduit par :

en $t = 0$, $x = x_{\max}$ et $v = 0$. Comment utiliser cela?

Prenons par exemple une fonction $x(t) = A\cos(\omega t + \phi_o)$, elle est solution de l'ED quels que soient A et ϕ_o. Le but est ici de trouver ces deux constantes au moyen des deux conditions initiales.

On a, posant $t = 0$ dans la solution:

$x_{\max} = x(0) = A\cos\phi_o$ d'une part; posant ensuite $t = 0$ dans $v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi_o)$, on a: $v(0) = -A\omega \sin\phi_o$ d'autre part.

Cette dernière relation donne: $\sin\phi_o = 0$ puisque $A\omega \neq 0$, $\Rightarrow \phi_o = 0$.

Ceci dans la première relation donne à son tour: $A = x_{\max}$, car $\cos 0 = 1$.

Avec ces conditions, la solution complète est ainsi: $x(t) = x_{\max} \cos \omega t$.

Comme deuxième exemple, prenons maintenant la même solution de la même ED mais avec d'autres conditions initiales simples:

en $t = 0$, $x = 0$ et $v = v_{\max}$. Cela signifie concrètement qu'on a enclenché le chronomètre au moment où m passait au point milieu de son mouvement. Dans la solution $x(t) = A\cos(\omega t + \phi_o)$, cela donne:

$0 = A\cos\phi_o$ d'où $\cos\phi_o = 0$, donc $\phi_o = \pm \pi/2$;

et $v(0) = v_{\max} = -A\omega \sin(\pm \pi/2) = -(\pm A\omega) \Rightarrow A = -(\pm)v_{\max}/\omega$. La solution complète est ainsi:

$x(t) = -(\pm v_{\max}/\omega)\cos(\omega t \pm\pi/2)$ qui s'écrit plus simplement: $x(t) = -v_{\max}/\omega \sin \omega t$.

(S'en convaincre en dessinant un cercle trigonométrique et en y voyant que $\cos(\alpha-\pi/2) = \sin\alpha$ et que $\cos(\alpha+\pi/2) = -\sin\alpha$).

Une équation algébrique possède **une** (ou pas de) solution, sans ambiguité. La situation est différente pour une ED: elle possède une **classe** de solutions: toutes les paraboles $y = x^2 + c$ pour l'ED citée en début de §, **toutes** les fonctions sinus ou cosinus de ωt. pour l'ED du MH. De plus, lorsque l'ED est **linéaire**, toute

combinaison linéaire de solutions est encore solution (se montre facilement). Ainsi, $\cos \omega t$ et $\sin \omega t$ étant tous deux solution, alors $A\cos \omega t + B\sin \omega t$ est aussi solution, comme on le vérifie en la réintroduisant dans l'ED. Il y a ainsi deux façons **équivalentes** de donner la solution générale de notre ED:

soit: $x(t) = C\cos(\omega t + \phi_0)$, où C et ϕ_0 sont des constantes arbitraires,

soit: $x(t) = A\cos \omega t + B\sin \omega t$, où A et B en sont deux autres.

Puisqu'il n'y a que deux conditions initiales, ces quatre constantes doivent être liées deux à deux. Montrer cela en :

Exercice:

Voir que $C = (A^2 + B^2)^{1/2}$ et $\tan \phi_0 = -B/A$.

Indication: utiliser une (bonne) relation trigonométrique pour transformer la première forme de solution puis *identifier* les deux formes.

Autres exercices:

1) Exprimer la solution complète $x(t)$ d'un MH en calculant A et B avec les deux types de conditions initiales proposées en exemples à la page précédente.

2) Une masse $m = 0{,}1$ kg oscille parce qu'elle est accrochée à un ressort de constante $k = 200$ N/m. Elle a été initialement éloignée de 4 cm de sa position de repos puis lâchée. A quelle vitesse passe-t-elle en $x = 0$ et en $x = 2$ cm ?

Rép: 1,79 m/s; 1,55 m/s.

3) Un pendule simple effectue de petites oscillations avec une période de 1,5 s et une amplitude maximum de 10°. Calculer la durée minimum pour passer de $\theta = -5°$ à $\theta = +5°$.

Rép: 0,25 s.

4) Un ressort de constante $k = 1{,}25 \cdot 10^5$ N/m est au repos. Un wagon de masse $m =$ 20 tonnes le percute ce qui le comprime de 10 cm; le wagon reste ensuite accroché au ressort. Calculer:

a) le temps mis par le ressort pour se comprimer complètement lors du choc;
b) la vitesse du wagon avant le choc;
c) la vitesse du wagon lorsque le ressort est déformé de 8 cm;
d) la déformation du ressort lorsque le wagon a une vitesse de 0,1 m/s.

Rép: a) 0,63 s; b) 0,25 m/s; c) 0,15 m/s; d) 9,17 cm.

6. Perspectives

6.1. Frottement, amortissement

La Nature est infiniment compliquée et les possibilités du cerveau humain sont (très) limitées. Pour un peu la comprendre, il est nécessaire de simplifier la description des phénomènes. C'est ce que fit Galilée au début du 17ème siècle pour décrire et comprendre la chute des corps et les mouvements, inaugurant ainsi la méthode scientifique et signant par là l'acte de naissance de la physique!

Les frottements compliquent souvent énormément la description des faits. Lorsque ce n'est pas trop aberrant, l'idée est, dans un premier temps au moins, d'en faire abstraction; c'est ce qui a été fait tout au long de ce chapitre. Les résultats obtenus sont donc d'autant plus approximatifs que les frottements oubliés étaient importants. Aller plus loin dans l'analyse est évidemment de tenir compte de ces facteurs dissipatifs, ce qui implique de savoir quel genre de frottement intervient sur le système oscillant. On se souvient qu'on en distinguait essentiellement de deux types: les frottements entre surfaces solides et sèches, indépendants de la vitesse, et les frottements dans les fluides, qui dépendent fortement de la vitesse.

Une situation souvent traitée est de prendre en compte les frottements dits *visqueux*: la force de frottement est simplement proportionnelle à la vitesse (instantanée). Ce cas particulier n'est pas rare et rend bien compte des phénomènes en microphysique par exemple pour décrire les vibrations d'atomes dans des solides, tenant ainsi valablement compte des multiples interactions entre les diverses particules (voir l'établissement de la loi d'Ohm en électrocinétique).

L'effet des frottements est naturellement de diminuer progressivement l'amplitude du mouvement, laquelle, on l'a vu, restait constante pour un m.h. libre. Le type de frottement conditionne le type de décroissance. On montrerait que pour un frottement visqueux, cette décroissance est simplement exponentielle. L'équation du mouvement, solution de l'ED du MH amorti alors est de la forme:

$$x(t) = A(t)\sin \omega t$$

avec $A(t) = A_0\exp(-\lambda t)$

où λ est le facteur d'amortissement.

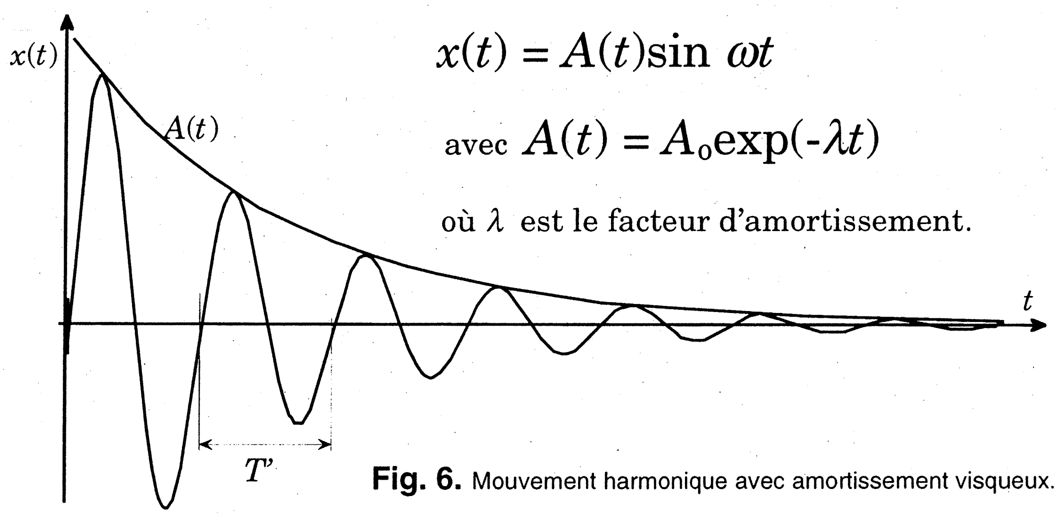


Fig. 6. Mouvement harmonique avec amortissement visqueux.

La conservation de l'énergie mécanique n'est bien sûr plus utilisable, par contre, la deuxième loi de Newton est adaptée. Pour une masse accrochée à un ressort, elle s'écrit en tant qu'ED du mouvement:

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \;\Rightarrow\; -kx - f\dot{x} = m\ddot{x} \;\Leftrightarrow\; m\ddot{x} + f\dot{x} + kx = 0$$

où f est le facteur de proportionnalité reliant la force de frottement et la vitesse. Il ne serait pas très difficile de montrer que l'amortissement $\lambda = f/2m$.

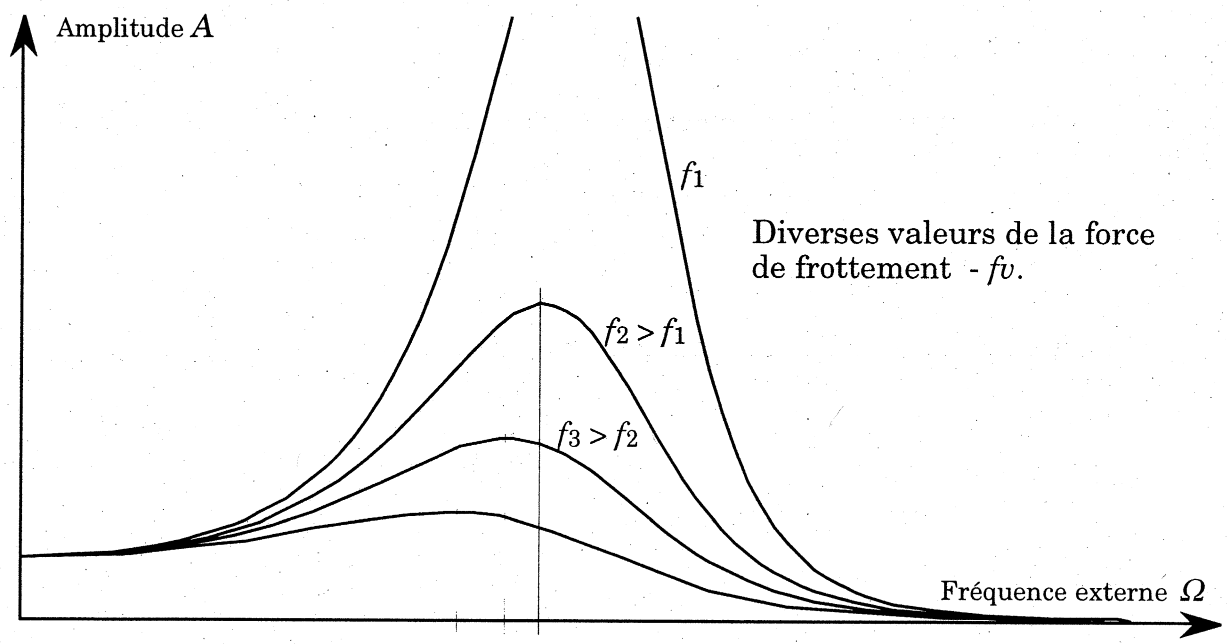
On montrerait aussi que si l'amplitude A du mouvement est très affectée par les frottements, par contre, la période d'oscillation l'est beaucoup moins. Elle est un petit peu plus longue: $T' > T$. On parle de pseudo-période.

6.2 Oscillations forcées, résonance

Le phénomène de **résonance** intervient dans tous les domaines de la physique: en mécanique, en électricité, en physique ondulatoire, atomique, nucléaire ... Mais le banal exemple de l'escarpolette est illustratif. Lorsqu'un enfant est assis sur la planchette et est trop jeune pour intuitivement faire les mouvements adéquats et se transformer en un oscillateur paramétrique, il a besoin de son grand père pour l'aider. Il faut que celui-ci donne de brefs et faibles poussées à une fréquence très proche de la fréquence propre du mouvement d'oscillations libres et *au bon moment*, on dit *en phase*. Cette **force périodique extérieure** peut ne servir qu'à compenser les pertes d'énergie mécanique dues aux frottements. Il faut se placer dans cette situation de régime établi d'une force extérieure périodique mais d'amplitude maximum fixe. L'équation de Newton servant d'ED est un peu plus compliquée et généralement, on ne la résout pas explicitement parce que ce qui est le plus intéressant est d'examiner comment varie l'amplitude du mouvement en fonction de la fréquence (pulsation) Ω de la force extérieure. Cette ED s'écrit:

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \;\Rightarrow\; m\ddot{x} + f\dot{x} + kx = F_{ext}\cos(\Omega t + \phi_0)$$

qui est celle du MH amorti à laquelle on ajouté un second membre: la force périodique de pulsation Ω variable; la pulsation naturelle du système libre mais amorti est toujours notée ω.



Un système oscillant est mis en mouvement par une force périodique. La fréquence d'oscillation du système sera celle de la force, mais l'amplitude d'oscillation dépendra fortement de la différence entre la fréquence de la force et celle du système qui oscillerait sans intervention. Lorsque la fréquence de la force externe augmente et s'approche de la fréquence propre du système, l'amplitude se met à croître et elle passe par un maximum lorsque les deux fréquences coïncident: $\omega = \Omega$, **c'est la résonance**. Le pic de résonance est d'autant plus élevé et pointu que les frottements sont faibles. Pour des frottements nuls (f = 0), l'amplitude serait infinie (=> catastrophe); les frottements ne sont donc jamais vraiment inexistants.

On peut observer un phénomène de résonance par exemple en voiture lorsque l'une des roues est mal équilibrée: à une valeur particulière de la vitesse du véhicule, certains de ses éléments se mettent à vibrer parce leur fréquence propre est voisine de la fréquence de rotation des roues. Ces vibrations sont néfastes et les conséquences peuvent être la rupture de certaines pièces vitales.

OSCILLATIONS - EXERCICES

Questions

1. Comment varie la période d'oscillation pour un ressort lorsqu'on fait varier la masse qui y est accrochée ? Graphe sommaire de $T = f(m)$.

2. Même question pour un pendule si on en fait varier la longueur du fil. Graphe sommaire (mais convenable) de $T = f(l)$.

3. Qu'en est-il de la période d'oscillation d'une masse accrochée à un ressort si l'expérience se fait sur la Lune. Même question pour le pendule. Etoffer la réponse.

4. Montrer que dans tout m.h. la période est: la racine de l'opposé du quotient de la position par l'accélération, le tout multiplié par 2π. C'est ça!

Problèmes

N.B. Sauf mention contraire, les frottements sont toujours négligés, même si ce n'est parfois pas très réaliste.

A) Calcul de la période

La connaissance de la période est très utile, d'abord parce qu'elle est souvent facile à mesurer directement (chronomètre) et surtout parce qu'elle est reliée à des grandeurs moins facilement mesurables, comme g pour le pendule, etc.

1. Une masse m est pendue à un ressort de raideur k et oscille librement.

2. Une masse m est fixée à deux ressorts identiques (raideur k) mis "en parallèle". Il est judicieux de trouver d'abord la "raideur équivalente".

3. Une masse m est fixée à deux ressorts différents (raideur k_1 et k_2) mis "en série". Il est judicieux de trouver d'abord la "raideur équivalente".

4. Une masse m de mercure est dans un tube en **U** tenu verticalement; le liquide occupe une longueur L du tube dont la section est uniforme. On souffle brièvement par une des branches pour mettre le mercure en mouvement.

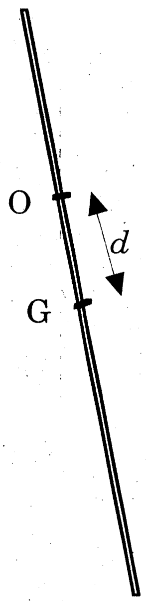
5. On creuse un incroyable tunnel rectiligne au travers de la Terre et passant par son centre. De la surface, on laisse tomber une masse dans ce trou vertical. Se convaincre que m effectue des mouvements d'aller et retour et que c'est harmonique si la Terre est supposée avoir une masse volumique uniforme.

Que suggère l'expression de T ? On écrira l'expression pour T^2 et on ouvrira son cours au chapitre "Gravitation".

6. Même question mais le tunnel est plus réaliste: il est toujours rectiligne mais ne passe plus par le centre de la Terre.

7. Un pendule effectue de petites oscillations dans un wagon qui descend librement une pente d'inclinaison α.

B) Calcul plus généraux



8. Une tige mince (longueur l, masse m) effectue de petites oscillations autour du point O qui est à la distance d du centre de gravité G.

a) Etablir l'ED du mouvement pour l'angle θ.

b) Ecrire l'expression de la période d'oscillation.

c) Esquisser le graphe de T^2 en fonction de d.

d) Calculer d^*, valeur de d fonction de l pour laquelle la tige oscille le plus rapidement.

Rép: d) $d^* = l(2\sqrt{3})^{-1}$.

D'autres exercices à la page 14 du cours.