Lycée Denis-de-Rougemont
Niveau 10

Mathématiques de niveau 2

TRIGONOMETRIE

CORRIGE DES EXERCICES

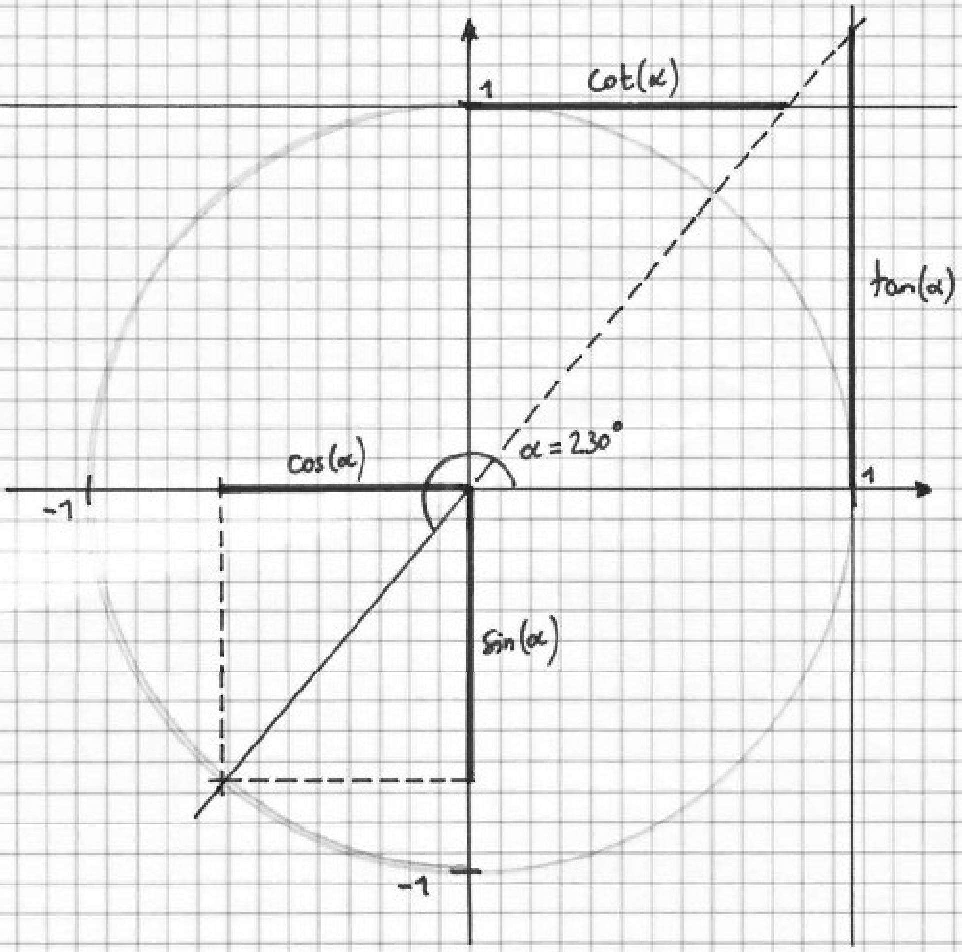
Exercice 3.1.

On utilise l'équivalence $2\pi \leftrightarrow 360°$ ou l'équivalente $\pi \leftrightarrow 180°$.

degrés	$90°$	$135°$	$30°$	$18°$	$22,5°$	$720°$	$270°$	$1°$	$x°$
radians	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{8}$	4π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi x}{180}$

radians	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{20}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	6π	1	$2,5$	x
degrés	$60°$	$9°$	$67,5°$	$120°$	$-90°$	$1080°$	$\frac{180°}{\pi}$	$\frac{450°}{\pi}$	$\frac{180x°}{\pi}$

Exercice 3.2.



Si $\alpha = 1{,}9$ rad, alors $\alpha = \frac{180 \cdot 1{,}9}{\pi}^{\circ} = 108{,}86^{\circ}$.

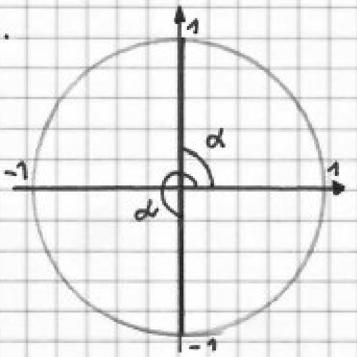
Si $\alpha = 14{,}2\pi$ rad, alors $\alpha = 180 \cdot 14{,}2^{\circ} = 2556^{\circ} = 7 \cdot 360^{\circ} + 36^{\circ} = 36^{\circ} + 7$ tours complets.

Par des mesures sur le cercle trigonométrique, on obtient :

α	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\tan(\alpha)$	$\cot(\alpha)$	$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$	$\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$
230°	−0,64	−0,77	1,19	0,84	1,19	0,84
1,9	−0,32	0,95	−2,93	−0,34	−2,93	−0,34
14,2 π	0,81	0,59	0,73	1,38	0,73	1,38

Exercice 3.3.

a.

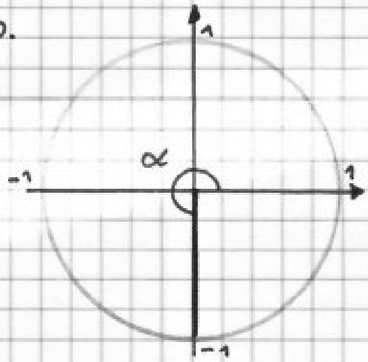


$\cos(\alpha^\circ) = 0$

$\Rightarrow \alpha = 90^\circ$ ou 270° ou 450° ou...

$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 90^\circ + k \cdot 180^\circ, \ k \in \mathbb{Z}.}}$

b.

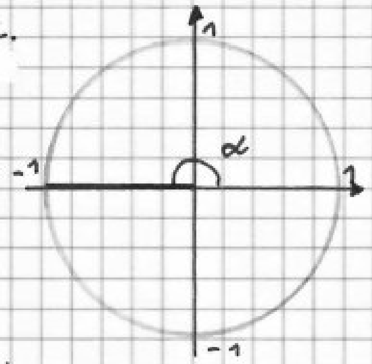


$\sin(\alpha^\circ) = -1$

$\Rightarrow \alpha = 270^\circ$ ou 630° ou...

$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 270^\circ + k \cdot 360^\circ, \ k \in \mathbb{Z}}}$

c.

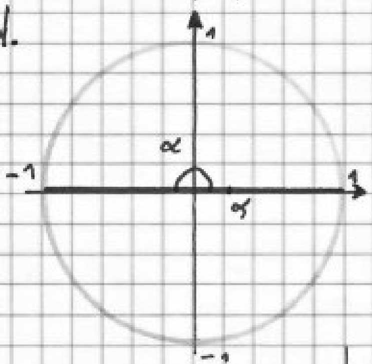


$\cos(\alpha) = -1$

$\Rightarrow \alpha = \pi$ ou 3π ou...

$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = \pi + k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z}}}$

d.

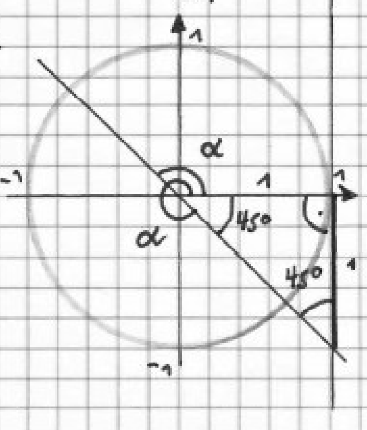


$\sin(\alpha^\circ) = 0$

$\Rightarrow \alpha = 0$ ou 180° ou 360° ou...

$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = k \cdot 180^\circ, \ k \in \mathbb{Z}}}$

e.

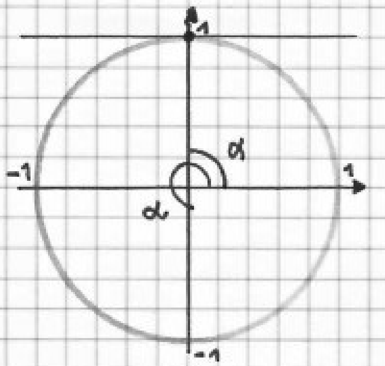


$\tan(\alpha^\circ) = -1$

$\Rightarrow \alpha = 135^\circ$ ou 315° ou...

$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 135^\circ + k \cdot 180^\circ, \ k \in \mathbb{Z}}}$

f.

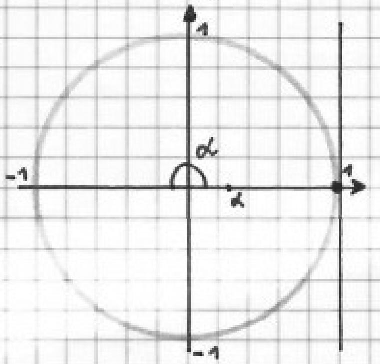


$\cot(\alpha) = 0$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$ ou $\frac{5\pi}{2}$ ou...

$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}.}}$

g.

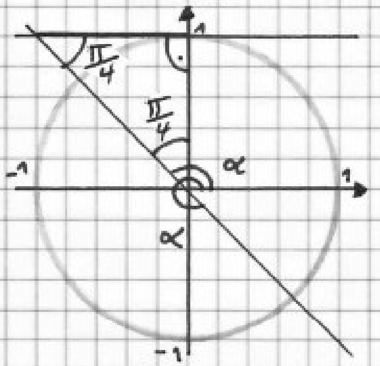


$\tan(\alpha°) = 0$

$\Rightarrow \alpha = 0°$ ou $180°$ ou $360°$ ou..

$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}.}}$

h.



$\cot(\alpha) = -1$

$\Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4}$ ou $\frac{7\pi}{4}$ ou $\frac{11\pi}{4}$ ou...

$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}.}}$

Exercice 3.4.

a. $2578^\circ = 7 \cdot 360^\circ + 58^\circ \Rightarrow \underline{\underline{58^\circ}}.$

$5555^\circ = 15 \cdot 360^\circ + 155^\circ \Rightarrow \underline{\underline{155^\circ}}.$

$-1111^\circ = -4 \cdot 360^\circ + 329^\circ \Rightarrow \underline{\underline{329^\circ}}.$

$-9876^\circ = -28 \cdot 360^\circ + 204^\circ \Rightarrow \underline{\underline{204^\circ}}.$

b. $\frac{97\pi}{6} = 8 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}.$

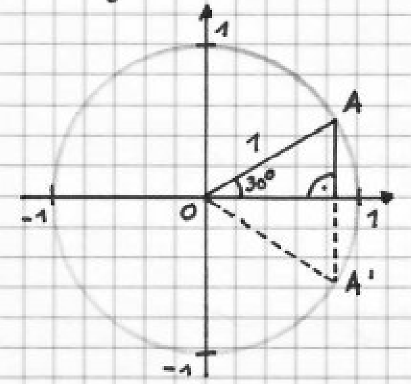
$\frac{111\pi}{8} = 6 \cdot 2\pi + \frac{15\pi}{8} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{15\pi}{8}}}.$

$\frac{-304\pi}{3} = -51 \cdot 2\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{2\pi}{3}}}.$

$\frac{-123\pi}{4} = -16 \cdot 2\pi + \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{5\pi}{4}}}.$

Exercice 3.5

a. $\alpha = \frac{\pi}{6} = 30°$.



Le triangle OAA' est équilatéral.

Ainsi $AA' = 1 \Rightarrow \underline{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}}$

Par Pythagore : $\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2$

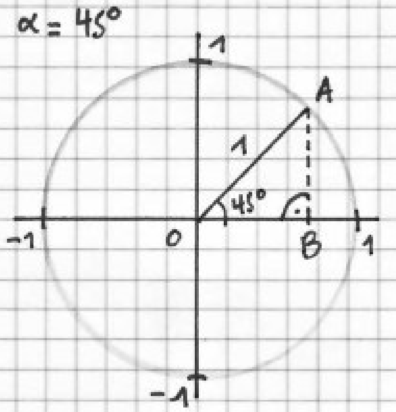
$\Rightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \underline{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}}$.

$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin(\pi/6)}{\cos(\pi/6)} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\Rightarrow \underline{\underline{\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}}}$.

$\cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\tan(\pi/6)} = \frac{1}{1/\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \underline{\underline{\cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}}}$.

b. $\alpha = 45°$



Le triangle OAB est isocèle rectangle.

Ainsi $OB = AB$.

Par Pythagore : $OB^2 + AB^2 = 1 \Rightarrow 2OB^2 = 1 \Rightarrow OB^2 = \frac{1}{2}$

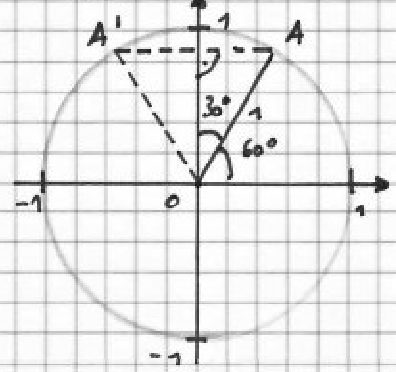
$\Rightarrow OB = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\Rightarrow \underline{\underline{\cos(45°) = \sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}}}$.

$\tan(45°) = \frac{\sin(45°)}{\cos(45°)} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\tan(45°) = 1}}$.

$\cot(45°) = \frac{1}{\tan(45°)} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\cot(45°) = 1}}$.

c. $\alpha = \frac{\pi}{3} = 60°$.



Le triangle OAA' est équilatéral.

Ainsi $AA' = 1 \Rightarrow \underline{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}}$.

Par Pythagore : $\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2$

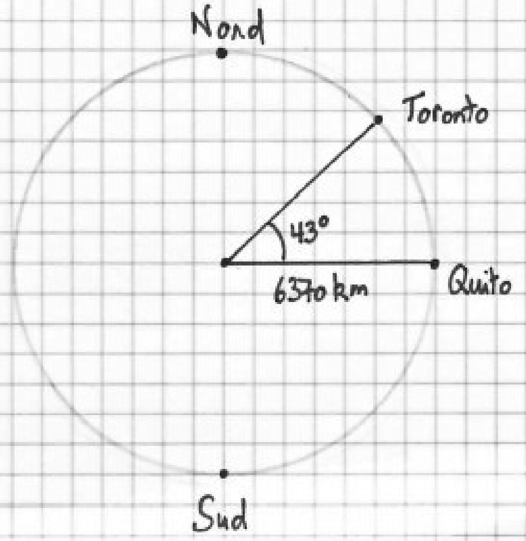
$\Rightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \underline{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}}$.

$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin(\pi/3)}{\cos(\pi/3)} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3}$.

$\Rightarrow \underline{\underline{\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}}}$.

$\cot\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\tan(\pi/3)} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \underline{\underline{\cot\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}}}$.

Exercice 3.6.



La circonférence terrestre, i.e. la longueur du méridien, i.e. le périmètre du cercle de rayon 6370 km est $2 \cdot \pi \cdot 6370$ km.

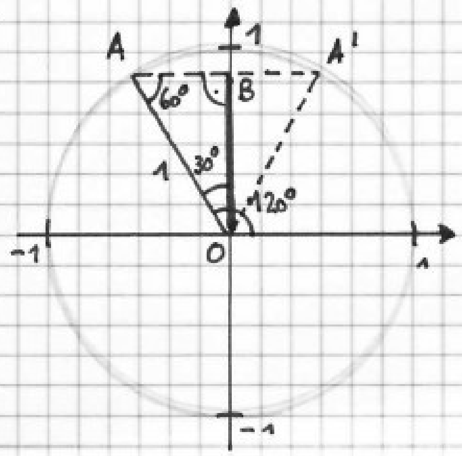
Le périmètre correspond à un angle au centre de 360°.
L'arc de cercle correspondant à 1° est $\frac{2\pi \cdot 6370}{360}$ km.

Ainsi, l'arc de cercle correspondant à 43°, i.e. la distance entre Toronto et Quito, vaut

$$\frac{2\pi \cdot 6370}{360} \cdot 43 \cong \underline{\underline{4780,6 \text{ km.}}}$$

Exercice 3.7.

a.



Le triangle OAA' est équilatéral.

Ainsi $AA' = 1$ et $AB = \frac{1}{2}$.

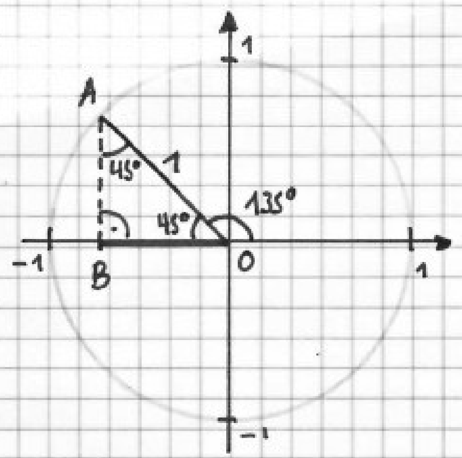
Par Pythagore, on a $AO^2 = AB^2 + OB^2$

$$\Rightarrow OB^2 = OA^2 - AB^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow OB = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ainsi $\underline{\underline{\sin(120°) = \frac{\sqrt{3}}{2}}}$.

b.



Le triangle OAB est isocèle rectangle.

Ainsi $OB = AB$.

Par Pythagore, on a $OB^2 + AB^2 = OA^2$

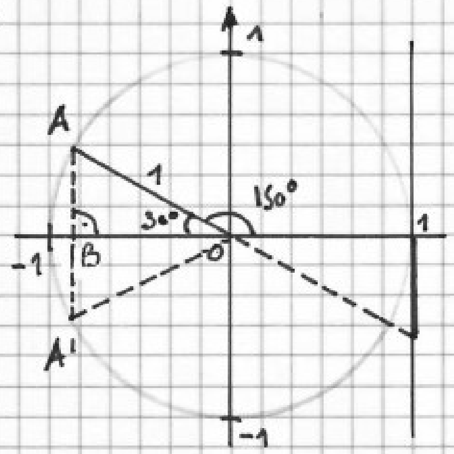
$$\Rightarrow OB^2 + OB^2 = OA^2 \Rightarrow 2OB^2 = OA^2 \Rightarrow OB^2 = \frac{OA^2}{2}$$

$$\Rightarrow OB^2 = \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow OB = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Comme $\cos(135°)$ doit être négatif, on conclut que

$$\underline{\underline{\cos(135°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}}}.$$

c.



Le triangle OAA' est équilatéral.

Ainsi $AA' = 1$ et $AB = \frac{1}{2}$.

On a donc $\sin(150°) = \frac{1}{2}$.

Par Pythagore, on a $OB^2 + AB^2 = OA^2$

$$\Rightarrow OB^2 = OA^2 - AB^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow OB = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Comme $\cos(150°)$ doit être négatif, on conclut que

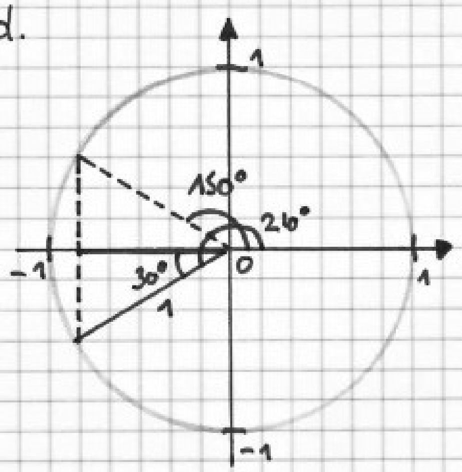
$$\cos(150°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ainsi $\tan(150°) = \frac{\sin(150°)}{\cos(150°)} = \frac{1/2}{-\sqrt{3}/2} =$

$$= \frac{1}{2} : \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Donc $\underline{\underline{\tan(150°) = -\frac{\sqrt{3}}{3}}}$.

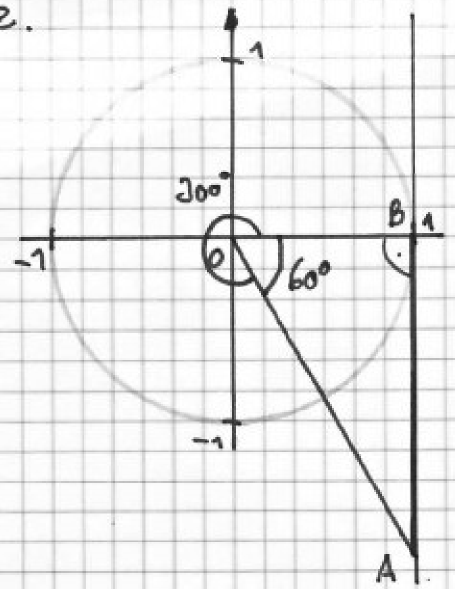
d.



D'après ce qui a été fait dans c., $\cos(150°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On en conclut que $\cos(210°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ aussi.

e.



Le triangle OAB est un demi-triangle équilatéral.

Comme $OB = 1$, on a $OA = 2$.

Par Pythagore, on a $OB^2 + AB^2 = OA^2$

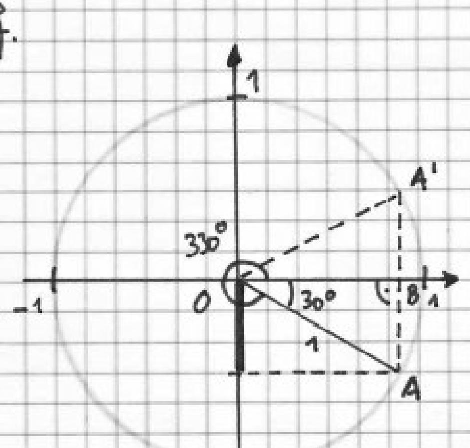
$\Rightarrow AB^2 = OA^2 - OB^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$

$\Rightarrow AB = \sqrt{3}$.

Comme $\tan(300°)$ doit être négatif, on conclut que

$\tan(300°) = -\sqrt{3}$.

f.



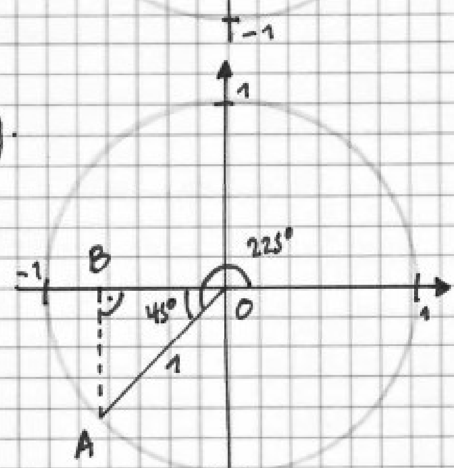
Le triangle OAA' est équilatéral.

Comme $OA = 1$, on a $AB = \frac{1}{2}$.

Comme $\sin(330°)$ doit être négatif, on conclut que

$\sin(330°) = -\frac{1}{2}$.

g.



Le triangle OAB est isocèle rectangle: $AB = OB$

Par Pythagore, on a $AB^2 + OB^2 = OA^2$

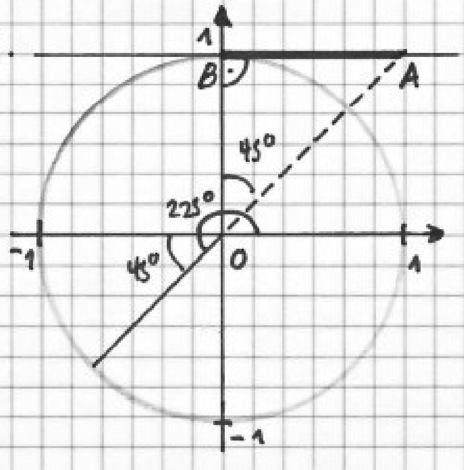
$\Rightarrow OB^2 + OB^2 = OA^2 \Rightarrow 2OB^2 = OA^2 \Rightarrow OB^2 = \frac{OA^2}{2}$

$\Rightarrow OB^2 = \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow OB = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Comme $\cos(225°)$ doit être négatif, on conclut que

$\cos(225°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

h.



Le triangle OAB est isocèle rectangle.

On a $AB = OB = 1$.

Ainsi $\underline{\underline{\cot(225°) = 1.}}$

Exercice 3.8.

Les relations fondamentales que l'on utilise sont: $\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1$, $\tan(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ et $\cot(\alpha)=\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$.

a. $1+\tan^2(\alpha)=1+\left(\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right)^2=1+\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}=\frac{\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}=\frac{1}{\cos^2(\alpha)}$. CQFD

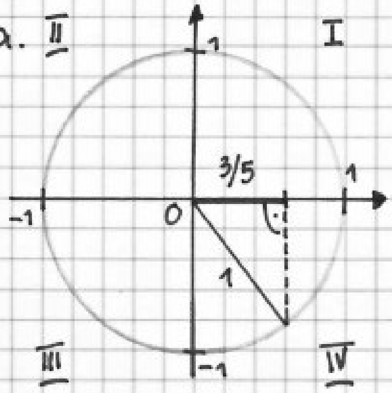
b. $\frac{\sin^2(\alpha)}{1-\cos(\alpha)}=\frac{\sin^2(\alpha)(1+\cos(\alpha))}{(1-\cos(\alpha))(1+\cos(\alpha))}=\frac{\sin^2(\alpha)(1+\cos(\alpha))}{1-\cos^2(\alpha)}=\frac{\sin^2(\alpha)(1+\cos(\alpha))}{\sin^2(\alpha)}=$

$=1+\cos(\alpha)$ CQFD

c. $1+\cot^2(\alpha)=1+\left(\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\right)^2=1+\frac{\cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)}=\frac{\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)}=\frac{1}{\sin^2(\alpha)}$ CQFD

Exercice 3.9.

a.



Par Pythagore: $\sin^2(t)+\left(\frac{3}{5}\right)^2=1^2$

$\Rightarrow \sin^2(t)=1^2-\left(\frac{3}{5}\right)^2=1-\frac{9}{25}=\frac{25}{25}-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$

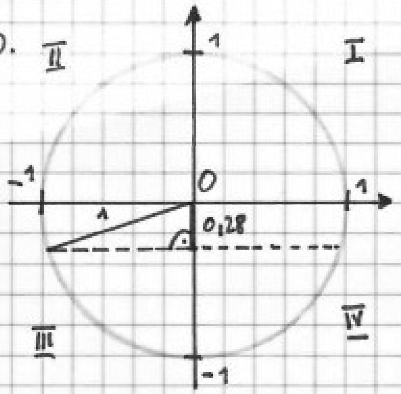
$\Rightarrow \sin(t)=\pm\sqrt{\frac{16}{25}}=\pm\frac{4}{5}$.

Comme $\sin(t)<0$, on conclut que $\sin(t)=-\frac{4}{5}$.

De plus $\tan(t)=\frac{\sin(t)}{\cos(t)}=\frac{-4/5}{3/5}=-\frac{4}{5}:\frac{3}{5}=-\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{3}=-\frac{4}{3}$.

Et $\cot(t)=\frac{1}{\tan(t)}=\frac{1}{-4/3}=-\frac{3}{4}$.

b.



Par Pythagore: $\cos^2(t)+(-0{,}28)^2=1^2$

$\Rightarrow \cos^2(t)=1^2-0{,}28^2=1-0{,}0784=0{,}9216$

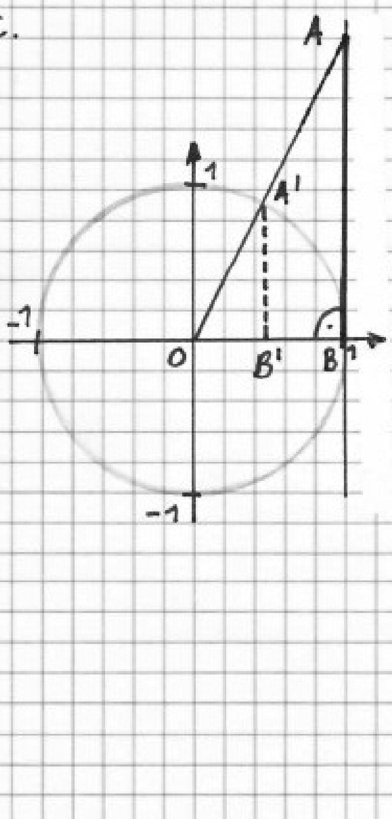
$\Rightarrow \cos(t)=\pm\sqrt{0{,}9216}=\pm 0{,}96$.

Comme $\cos(t)<0$, on conclut que $\cos(t)=-0{,}96$.

De plus $\tan(t)=\frac{\sin(t)}{\cos(t)}=\frac{-0{,}28}{-0{,}96}=\frac{7}{24}$.

Et $\cot(t)=\frac{1}{\tan(t)}=\frac{1}{7/24}=\frac{24}{7}$.

c.



Les triangles OAB et $OA'B'$ sont semblables.

Le facteur de similitude pour passer de OAB à $OA'B'$ est $\frac{OA'}{OA}$.

On a $OA'=1$.

De plus $OB=1$ et $AB=2\ (=\tan(t))$. Par Pythagore, on a

$OA^2=OB^2+AB^2=1^2+2^2=1+4=5$, d'où $OA=\sqrt{5}$.

Ainsi le facteur de similitude pour passer de OAB à $OA'B'$ est

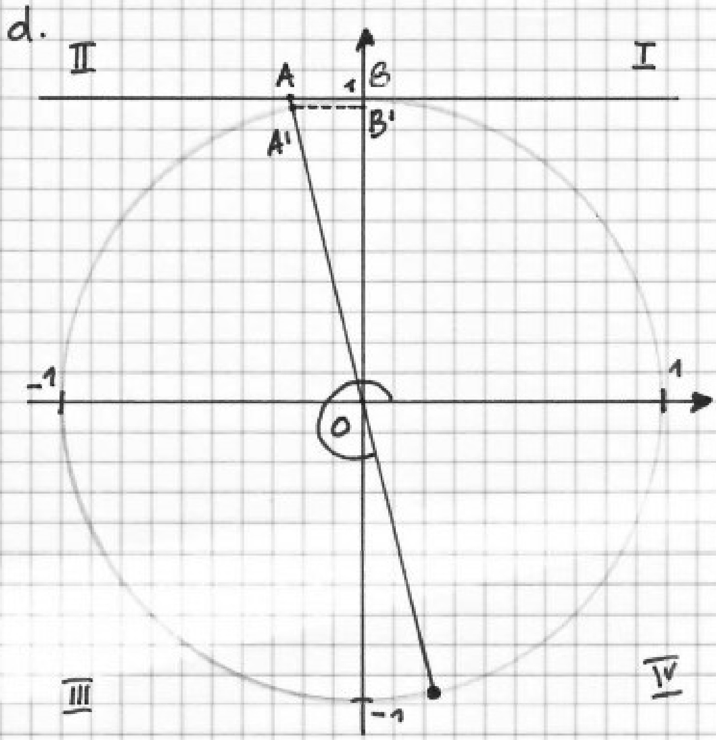
$\frac{OA'}{OA}=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

On a alors $\cos(t)=OB'=\frac{1}{\sqrt{5}}OB=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 1=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

$\sin(t)=A'B'=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot AB=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 2=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, et

$\cot(t)=\frac{1}{\tan(t)}=\frac{1}{2}$.

d.



Les triangles OAB et OA'B' sont semblables.
Le facteur de similitude pour passer de OAB à OA'B' est $\frac{OA'}{OA}$.

On a $OA' = 1$.

On a de plus $OB = 1$ et $AB = \frac{9}{40}$

Par Pythagore : $OA^2 = OB^2 + AB^2$

$$= 1^2 + \left(\frac{9}{40}\right)^2 = 1 + \frac{81}{1600} = \frac{1681}{1600}.$$

Ainsi $OA = \sqrt{\frac{1681}{1600}} = \frac{41}{40}$

Donc le facteur de similitude est

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{1}{41/40} = \frac{40}{41}.$$

On a alors $A'B' = \frac{40}{41} \cdot AB = \frac{40}{41} \cdot \frac{9}{40} = \frac{9}{41}$

et $OB' = \frac{40}{41} \cdot OB = \frac{40}{41} \cdot 1 = \frac{40}{41}$.

Comme $\cos(t) > 0$ et $\sin(t) < 0$, puisque t est dans le quadrant IV, on conclut que $\underline{\underline{\cos(t) = \frac{9}{41}}}$ et $\underline{\underline{\sin(t) = -\frac{40}{41}}}$.

De plus $\underline{\underline{\tan(t)}} = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = \frac{-40/41}{9/41} = -\frac{40}{41} : \frac{9}{41} = -\frac{40}{41} \cdot \frac{41}{9} = \underline{\underline{-\frac{40}{9}}}.$

Exercice 3.10

a) $$\frac{\tan(x)}{1+\tan^2(x)} = \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{1+\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2} = \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{1+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}} = \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}} = \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{\frac{1}{\cos^2(x)}} =$$

$$= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} : \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{\cos^2(x)}{1} = \frac{\sin(x)\cos(x)}{1} = \underline{\underline{\sin(x)\cos(x).}}$$

b) $$\frac{1-\sin^2(x)}{\sin(x)\cos(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)\cos(x)} = \underline{\underline{\frac{1}{\sin(x)}}}.$$

c) $$\frac{1-(\sin(x)-\cos(x))^2}{\sin(x)} = \frac{1-(\sin^2(x)-2\sin(x)\cos(x)+\cos^2(x))}{\sin(x)} = \frac{1-(1-2\sin(x)\cos(x))}{\sin(x)} =$$

$$= \frac{1-1+2\sin(x)\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\sin(x)} = \underline{\underline{2\cos(x).}}$$

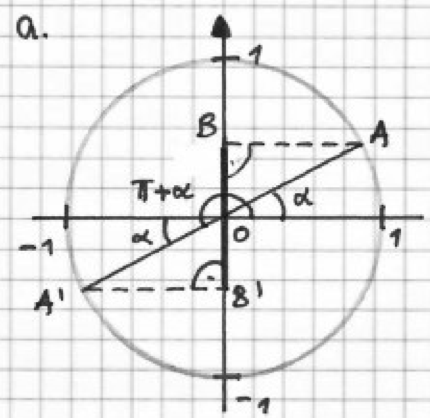
d. $$(\sin(x)+\cos(x))^2+(\sin(x)-\cos(x))^2 =$$

$$= \sin^2(x)+2\sin(x)\cos(x)+\cos^2(x)+\sin^2(x)-2\sin(x)\cos(x)+\cos^2(x) =$$

$$= 2\sin^2(x)+2\cos^2(x) = 2(\sin^2(x)+\cos^2(x)) = 2\cdot 1 = \underline{\underline{2.}}$$

Exercice 3.11.

a.

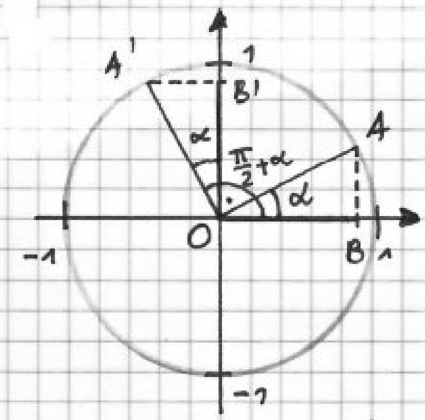


Les triangles OAB et OA'B' sont isométriques.

On a ainsi OB = OB'.

Comme l'un est positif et l'autre négatif, on a

$$\underline{\underline{\sin(\pi+\alpha) = -\sin(\alpha).}}$$

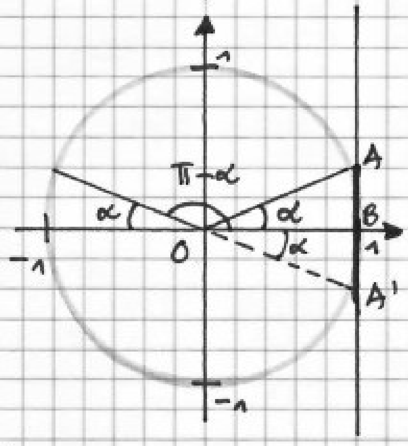


Les triangles OAB et OA'B' sont isométriques.

On a ainsi A'B' = AB.

Comme l'un est positif et l'autre négatif, on a

$$\underline{\underline{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin(\alpha).}}$$



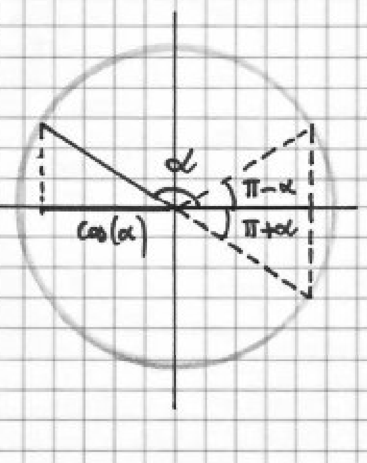
Les triangles OAB et OA'B sont isométriques.

On a ainsi AB = A'B.

Comme l'un est positif et l'autre négatif, on a

$$\underline{\underline{\tan(\pi-\alpha) = -\tan(\alpha).}}$$

b)



On a $\underline{\underline{-\cos(\alpha) = \cos(\pi+\alpha)}}$ et $\underline{\underline{-\cos(\alpha) = \cos(\pi-\alpha)}}$.

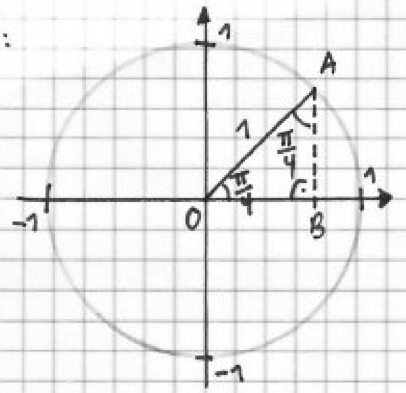
Similairement, on a:

$$\sin(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$
$$-\sin(\alpha) = \sin(\pi+\alpha)$$
$$-\cos(\alpha) = \cos(\pi+\alpha)$$
$$\cos(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$
$$-\sin(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$

Exercice 3.12

α	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\tan(\alpha)$	$\cos(2\alpha)$	$\sin(2\alpha)$	$2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$	$\frac{1-\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	0	1	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\alpha = \frac{\pi}{4}$:



Le triangle OAB est isocèle rectangle: on a $OB = AB$, i.e. $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Par Pythagore, on a $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\Rightarrow 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

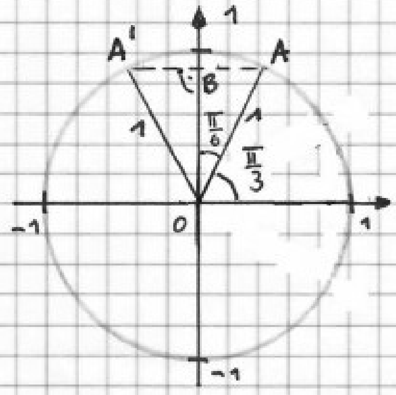
Comme $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$, on a $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

De plus $\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

On a alors $2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cdot\frac{2}{4} = 1$ et

$\frac{1-\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} = \frac{1-0}{1} = 1$.

$\alpha = \frac{\pi}{3}$



Le triangle OAA' est équilatéral: $OA = OA' = AA' = 1$.

Ainsi $AB = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

Par Pythagore: $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$

$\Rightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin(\pi/3)}{\cos(\pi/3)} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{1} = \sqrt{3}$.

De plus, $\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ (par symétrie dans le triangle OAA' (puisque $\widehat{AOA'} = 2\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$) et

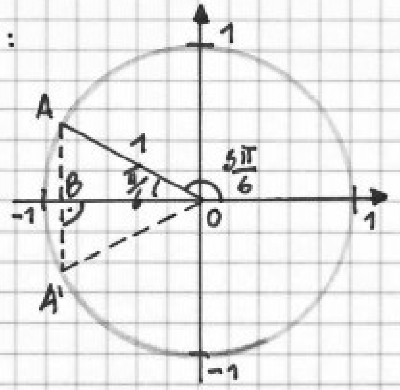
$\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

On a alors $2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et

$\frac{1-\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} = \frac{1-(-1/2)}{\sqrt{2}/2} = \frac{3/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{3}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} =$

$= \sqrt{3}$.

$\alpha = \frac{5\pi}{6}$:



Le triangle OAA' est équilatéral : $OA = OA' = AA' = 1$.

Ainsi $AB = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

Par Pythagore : $\cos^2\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1^2$

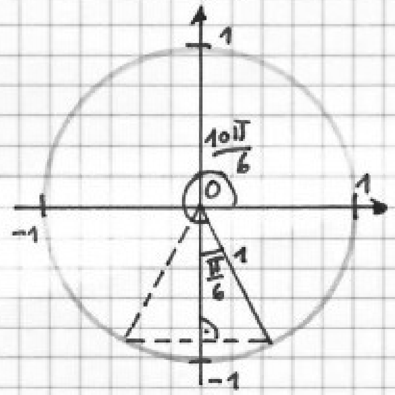
$\Rightarrow \cos^2\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Comme $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) < 0$, on obtient $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{\frac{3}{4}} =$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi $\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = \dfrac{1/2}{-\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.



De plus, $\cos\left(2 \cdot \frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{10\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ et

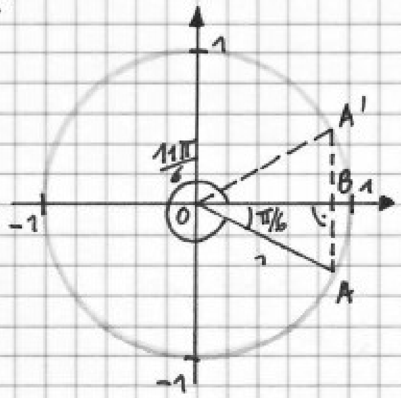
$\sin\left(2 \cdot \frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{10\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ en procédant comme ci-dessus.

On a alors $2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et

$\dfrac{1-\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} = \dfrac{1-\frac{1}{2}}{-\sqrt{3}/2} = \dfrac{1/2}{-\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} =$

$= -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\alpha = \frac{11\pi}{6}$



Le triangle OAA' est équilatéral : $OA = OA' = AA' = 1$

Ainsi $AB = \frac{1}{2}$. Comme $\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) < 0$, on obtient

$\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

Par Pythagore : $\cos^2\left(\frac{11\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\frac{11\pi}{6}\right) = 1^2$

$\Rightarrow \cos^2\left(\frac{11\pi}{6}\right) = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Comme $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) > 0$, on obtient $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi $\tan\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)} = \dfrac{-1/2}{\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} =$

$= -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

On a $2 \cdot \frac{11\pi}{6} = \frac{22\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} + \frac{10\pi}{6} = 2\pi + \frac{10\pi}{6}$

Ainsi, en utilisant les résultats ci-dessus, on a :

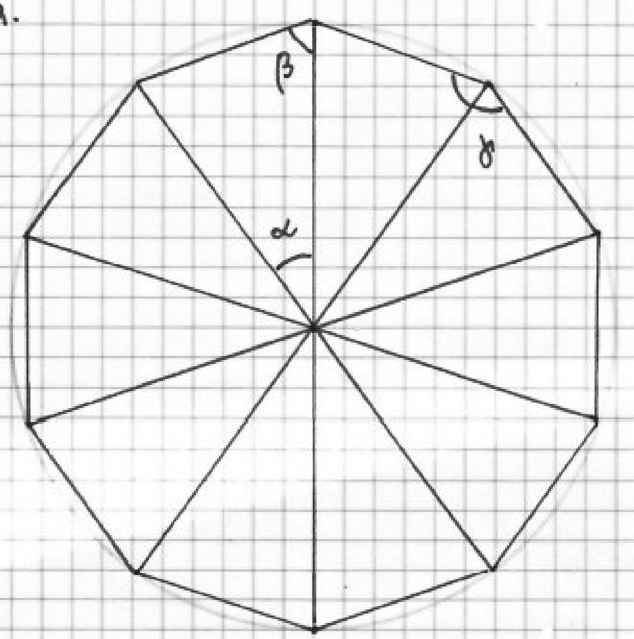
$\cos\left(2 \cdot \frac{11\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{10\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(2 \cdot \frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On a alors $2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et

$\dfrac{1-\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Exercice 3.13

a.



On a $\alpha = \frac{360°}{10} = 36°$

Chaque triangle du décagone est isocèle.

Ainsi $2\beta + \alpha = 180°$

$\Longrightarrow 2\beta = 180° - 36° = 144°$

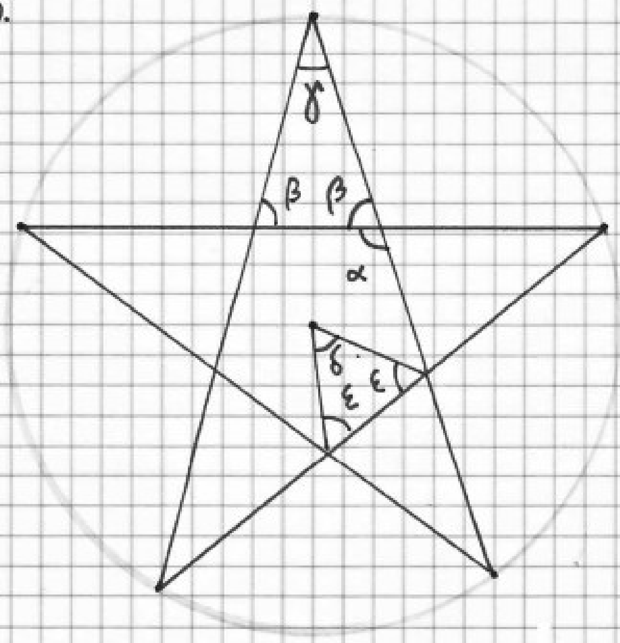
$\Longrightarrow \beta = 72°$.

Comme $\gamma = 2\beta$, on a $\gamma = \underline{\underline{144°}}$.

Avec la correspondance $180° \longleftrightarrow \pi$, on a

$\gamma = 144° \longleftrightarrow \frac{\pi}{180} \cdot 144 = \underline{\underline{\frac{4\pi}{5}}}$.

b.



On a $\delta = \frac{360°}{5} = 72°$.

Ainsi $2\varepsilon = 180° - 72° = 108° \Longrightarrow \varepsilon = 54°$.

Comme $\alpha = 2\varepsilon$, on a $\alpha = 108°$.

Donc $\beta = 180° - 108° = 72°$.

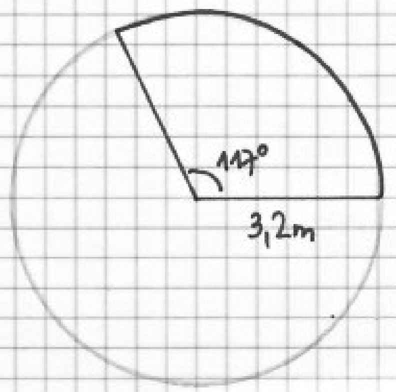
Par conséquent $\gamma = 180° - 2 \cdot 72° =$

$= 180° - 144° = \underline{\underline{36°}}$.

Avec la correspondance $180° \longleftrightarrow \pi$, on a

$\gamma = 36° \longleftrightarrow \frac{\pi}{180} \cdot 36 = \underline{\underline{\frac{\pi}{5}}}$.

Exercice 3.14



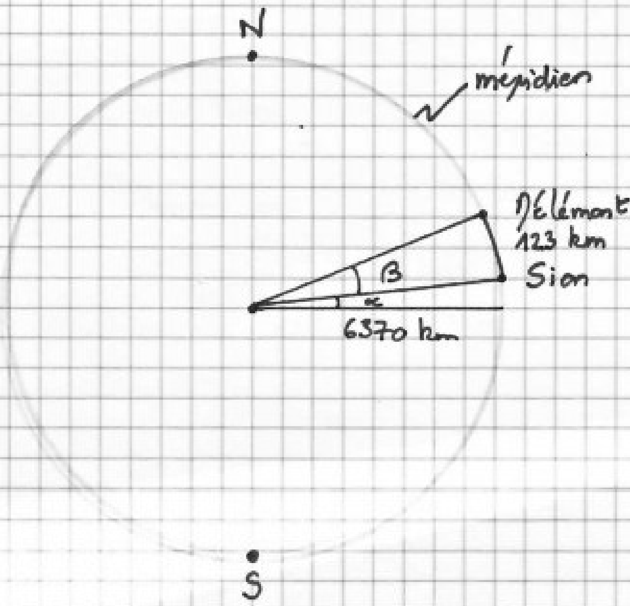
Le périmètre du cercle vaut $2 \cdot \pi \cdot 3{,}2 = 6{,}4\pi$.

Il correspond à un angle au centre de $360°$.

Ainsi $360° \longleftrightarrow 6{,}4\pi$.

On a donc $117° \longleftrightarrow \frac{6{,}4\pi}{360} \cdot 117 = \underline{\underline{2{,}08\pi = 6{,}536 \text{ m}}}$.

Exercice 3.15



On a $\alpha = 46°14' = 46° + \frac{14}{60} = 46,2\overline{3}\,°$.

Le périmètre de la Terre est $2\pi \cdot 6370 =$
$= 40'023,89$ km.

Cette distance correspond à 360°.

Ainsi la distance entre Sion et Délémont correspond à $\beta = \frac{360°}{40'023,89} \cdot 123 = 1,106°$.

Ainsi la latitude de Délémont est $\alpha + \beta =$

$46,2\overline{3} + 1,106 = 47,34° = 47° + 0,34 \cdot 60$

$= 47°\,20,38' = 47°20' + 0,38 \cdot 60 =$

$= \underline{\underline{47°20'22,82''\ N.}}$

Exercice 3.16.

Le périmètre du circuit est $2 \cdot \pi \cdot 65 = 408,407$ m.

On a 30 km/h $\Leftrightarrow$ 30 km en 1h $\Leftrightarrow$ $30'000$ m en 3600s $\Leftrightarrow$ $8,\overline{3}$ m en 1s $\Leftrightarrow$ $8,\overline{3}$ m/s.

$408,407$m (périmètre du circuit) correspond à un angle au centre de 2π rad.

Ainsi 1m sur le circuit correspond à un angle au centre de $\frac{2\pi}{408,407} = \frac{2\pi}{2\pi \cdot 65} = \frac{1}{65}$ rad.

Donc $8,\overline{3}$ m sur le circuit correspond à un angle de $\frac{1}{65} \cdot 8,\overline{3} = 0,1282$ rad.

Comme le coureur effectue $8,\overline{3}$ m en 1s, l'angle sera de $0,1282$ rad.

Sa vitesse angulaire est donc <u>$0,1282$ rad/s.</u>

On a $0,1282 \text{ rad} = \frac{0,1282}{2\pi} \cdot 360° = 7,3456°$.

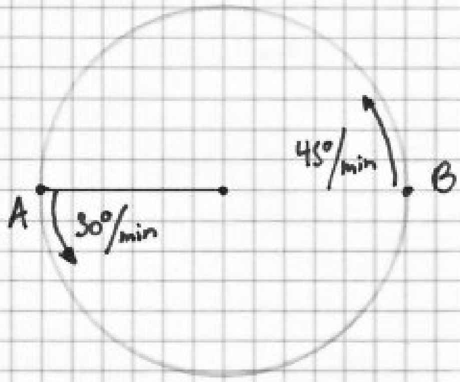
Sa vitesse angulaire est donc <u>$7,3456$ deg/s.</u>

On a 30km/h $\Leftrightarrow$ 30km en 1h $\Leftrightarrow$ $30'000$m en 60min $\Leftrightarrow$ 500m en 1min.

Ainsi, en 1 min, le coureur effectue $\frac{500}{408,407} = 1,2243$ tours.

Sa vitesse angulaire est donc <u>$1,2243$ tours/min.</u>

Exercice 3.17



Position de A : $30 \cdot t$, où t est le nb de minutes (le point 0 est la position de départ de A).

Position de B : $180 + 45t$.

Points de rencontre : position de B = position de A + $k \cdot 360$, $k \in \mathbb{Z}$.

On doit donc avoir : $180 + 45t = 30t + k \cdot 360$

$\Rightarrow 15t = k \cdot 360 - 180$

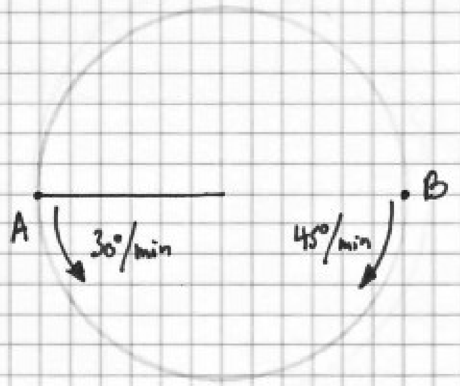
$\Rightarrow t = k \cdot 24 - 12$

Avec $k = 1$, on a $t = 24 - 12 = 12$ min.

Avec $k = 2$, on a $t = 2 \cdot 24 - 12 = 48 - 12 = 36$ min.

Etc.

L'horaire des rencontres est $t = k \cdot 24 - 12$ (min) avec $k \in \mathbb{N}^*$.



Position de A : $30 \cdot t$, où t est le nb de minutes (le point 0 est la position de départ de A).

Position de B : $180 - 45t$.

Points de rencontre : position de B = position de A + $k \cdot 360$, $k \in \mathbb{Z}$.

On doit donc avoir : $180 - 45t = 30t + k \cdot 360$

$\Rightarrow 180 - k \cdot 360 = 75t$

$\Rightarrow t = 2{,}4 - k \cdot 4{,}8$.

Avec $k = 0$, on a $t = 2{,}4$ min.

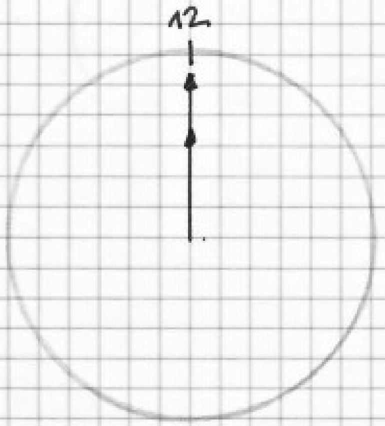
Avec $k = -1$, on a $t = 2{,}4 - 4{,}8 \cdot (-1) = 2{,}4 + 4{,}8 = 7{,}2$ min

Avec $k = -2$, on a $t = 2{,}4 - 4{,}8 \cdot (-2) = 2{,}4 + 9{,}6 = 12$ min.

Etc.

L'horaire des rencontres est donc $t = 2{,}4 + k \cdot 4{,}8$ (min) avec $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.18



La grande aiguille met 60 min pour faire un tour complet.
La petite aiguille met 12h pour faire un tour complet.

La grande aiguille met 60 min pour faire 360°

$\Rightarrow 1^\circ$ en $\frac{60}{360}$ min $= \frac{1}{6}$ min $= 10\,s$

$\Rightarrow$ en $1\,s$, elle fait $0{,}1^\circ$

$\Rightarrow$ en $t\,s$, elle fait $0{,}1 \cdot t$ degrés.

La petite aiguille met 12h pour faire 360°

$\Rightarrow 1^\circ$ en $\frac{12}{360}\,h = \frac{1}{30}\,h = 2\,\text{min} = 120\,s$

$\Rightarrow$ en $1\,s$, elle fait $\frac{1}{120}$ degré.

$\Rightarrow$ en $t\,s$, elle fait $\frac{1}{120} \cdot t$ degrés.

Les 2 aiguilles sont au même endroit à midi.
La prochaine fois qu'elles seront au même endroit, la grande aiguille aura fait $360^\circ + \alpha$ et la petite aiguille α degrés.

Le temps mis par la grande aiguille pour effectuer $360^\circ + \alpha$ est $(360 + \alpha) \cdot 10$.
Le temps mis par la petite aiguille pour effectuer α degrés est $120 \cdot \alpha$.

Ces temps doivent être égaux $\Rightarrow (360 + \alpha) \cdot 10 = 120 \cdot \alpha$

$$\Rightarrow 360 + \alpha = 12 \cdot \alpha \Rightarrow 360 = 11\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{360}{11}$$

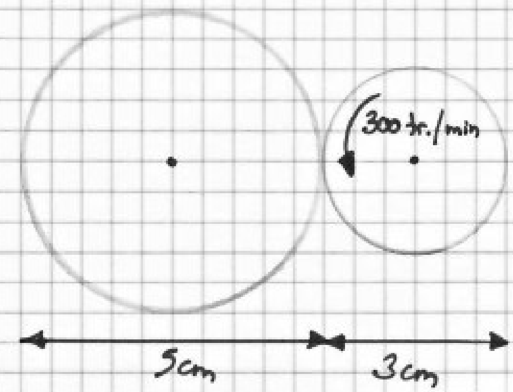
Avec $\alpha = \frac{360}{11}$ degrés, le temps pour la 1e rencontre est $120 \cdot \frac{360}{11} = \frac{43'200}{11}$ secondes.

On a $\frac{43'200}{11}$ secondes $= \frac{720}{11}$ minutes $= \frac{12}{11}$ heures $= 1h + \frac{1}{11}\,h = 1h + \frac{60}{11}$ min

$$= 1h\,5\text{min} + \frac{5}{11}\,\text{min} = 1h\,5\text{min} + \frac{300}{11}\,s = 1h\,5\text{min}\,27s + \frac{3}{11}\,s = 1h\,5\text{min}\,27{,}\overline{27}\,s.$$

Ainsi le temps entre 2 rencontres des aiguilles est $\underline{\underline{1h\,5\text{min}\,27{,}\overline{27}\,s}}$.

Exercice 3.19



Le périmètre du petit pignon est $2 \cdot \pi \cdot \frac{3}{2} = 3\pi$ cm.
Le périmètre du grand pignon est $2 \cdot \pi \cdot \frac{5}{2} = 5\pi$ cm.

En 1 min, le petit pignon fait 300 tours. Un point sur son bord effectue donc $300 \cdot 3\pi = 900\pi$ cm en 1 min.
Un point sur le bord du grand pignon effectue ainsi aussi 900π cm en 1m.
En divisant cette longueur par la longueur d'un tour du grand pignon ($900\pi : 5\pi = 180$), on obtient que le grand pignon tourne à 180 tours par minute.
Comme 1 min = 60 s, on obtient 180 tours en 60 s, d'où <u>3 tours par seconde.</u>
En partant de 180 tours par minute et en utilisant que 1 tour = 2π rad, on obtient $180 \cdot 2\pi$ rad en 1 minute, i.e. <u>360π rad par minute.</u>

Exercice 3.20

a. $\sin^3(x) + \sin(x) \cdot \cos^2(x) = \sin(x)\left(\underbrace{\sin^2(x) + \cos^2(x)}_{1}\right) = \underline{\underline{\sin(x).}}$

b. $$\frac{\frac{1}{\cos(x)}}{\frac{\cos(x)}{\sin(x)} + \frac{\sin(x)}{\cos(x)}} = \frac{\frac{1}{\cos(x)} \cdot \cos(x)}{\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} + \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) \cdot \cos(x)} = \frac{1}{\frac{\cos^2(x)}{\sin(x)} + \sin(x)} =$$

$$= \frac{1 \cdot \sin(x)}{\left(\frac{\cos^2(x)}{\sin(x)} + \sin(x)\right) \cdot \sin(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x) + \sin^2(x)} = \frac{\sin(x)}{1} = \underline{\underline{\sin(x).}}$$

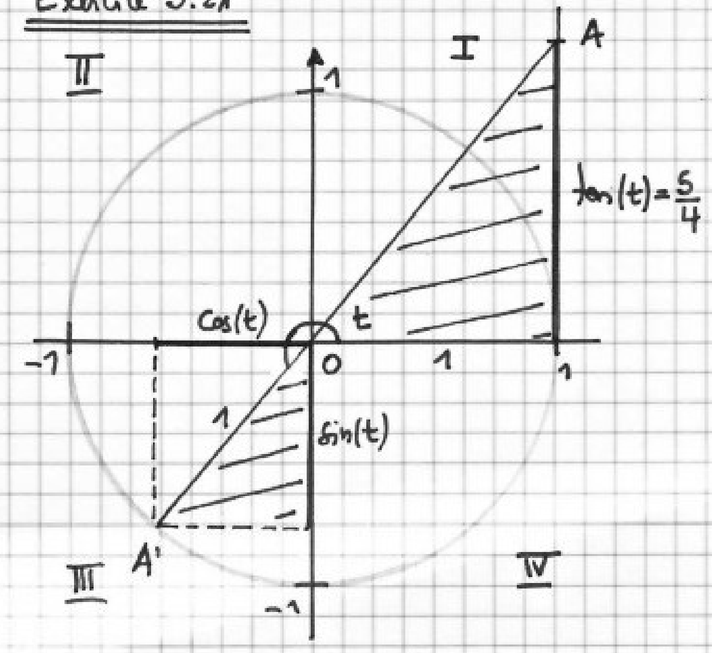
c. $$\frac{\cos^2(x)}{1-\sin(x)} = \frac{1-\sin^2(x)}{1-\sin(x)} = \frac{(1+\sin(x))(1-\sin(x))}{1-\sin(x)} = \underline{\underline{1+\sin(x).}}$$

d. $$(1-\sin^2(x))(1+\tan^2(x)) = (1-\sin^2(x))\left(1+\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2\right) =$$

$$(1-\sin^2(x))\left(1+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\right) = (1-\sin^2(x))\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} =$$

$$= (1-\sin^2(x))\,\frac{1}{\cos^2(x)} = \cos^2(x)\,\frac{1}{\cos^2(x)} = \underline{\underline{1.}}$$

Exercice 3.21



Par Pythagore, on a

$$OA^2 = 1^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 1 + \frac{25}{16} = \frac{41}{16}$$

et $OA = \sqrt{\frac{41}{16}} = \frac{\sqrt{41}}{4}$.

Les 2 triangles hachurés sont homothétiques.

Le rapport est $\frac{OA'}{OA} = \frac{1}{\sqrt{41}/4} = \frac{4}{\sqrt{41}}$.

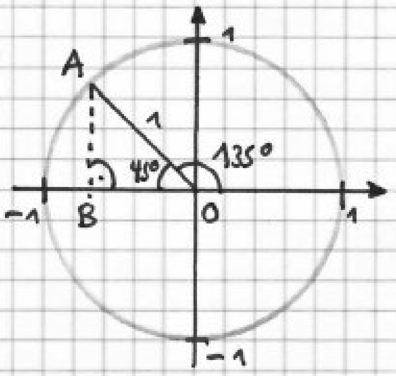
Ainsi $\cos(t) = \frac{4}{\sqrt{41}} \cdot 1 = \frac{4}{\sqrt{41}}$ auquel on ajoute un "$-$" puisque $\cos(t) < 0$.

De plus $\sin(t) = \frac{4}{\sqrt{41}} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{\sqrt{41}}$ auquel on ajoute un "$-$" puisque $\sin(t) < 0$.

On a donc $\cos(t) = -\frac{4}{\sqrt{41}}$ et $\sin(t) = -\frac{5}{\sqrt{41}}$.

Exercice 3.22

On a $\cos(-945°) = \cos(-945° + k.360°) = \cos(-945° + 3.360°) = \cos(135°)$.



Le triangle OAB est isocèle rectangle : on a $AB = OB$.

Par Pythagore, on a : $OB^2 + AB^2 = 1^2$

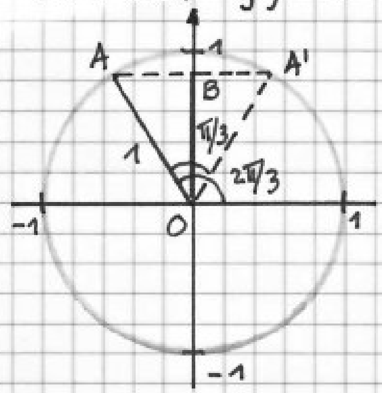
$$\Longrightarrow OB^2 + OB^2 = 1$$

$$\Longrightarrow 2OB^2 = 1 \Longrightarrow OB^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow OB = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Comme $\cos(135°) < 0$, on obtient $\cos(-945°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

On a $\sin\left(-\frac{10\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{10\pi}{3} + k.2\pi\right) = \sin\left(-\frac{10\pi}{3} + 4\pi\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.



Le triangle OAA' est équilatéral : $OA = OA' = AA' = 1$.

Ainsi $AB = \frac{1}{2}$.

Par Pythagore, on a $OB^2 = OA^2 - AB^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Ainsi $OB = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc $\sin\left(-\frac{10\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 3.23

a. On a $\beta = 180° - 90° - 27° = \underline{\underline{63°}}$.

De plus, on a $\sin(\alpha) = \dfrac{a}{c} \Rightarrow \sin(27°) = \dfrac{7,8}{c} \Rightarrow c = \dfrac{7,8}{\sin(27°)} \cong \underline{\underline{17,18 \text{ cm}}}$.

Avec Pythagore, $b^2 = c^2 - a^2 \cong 17,18^2 - 7,8^2 \cong 234,35 \Rightarrow \underline{\underline{b \cong 15,31 \text{ cm}}}$.

b. Avec Pythagore, $b^2 = c^2 - a^2 = 9,2^2 - 6,3^2 = 44,95 \Rightarrow \underline{\underline{b \cong 6,7 \text{ cm}}}$.

De plus, on a $\sin(\alpha) = \dfrac{a}{c} = \dfrac{6,3}{9,2} = 0,68 \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}(0,68) \cong \underline{\underline{43,22°}}$.

Et on a $\beta \cong 180° - 90° - 43,22° \cong \underline{\underline{46,78°}}$.

c. On a $\alpha = 180° - 90° - 10° = \underline{\underline{80°}}$.

De plus, on a $\cos(\alpha) = \dfrac{b}{c} \Rightarrow \cos(80°) = \dfrac{b}{4,8} \Rightarrow b = 4,8 \cdot \cos(80°) \cong \underline{\underline{0,83 \text{ cm}}}$.

Avec Pythagore, on a $a^2 = c^2 - b^2 \cong 4,8^2 - 0,83^2 \cong 22,35 \Rightarrow \underline{\underline{a \cong 4,73 \text{ cm}}}$.

d. Avec Pythagore, on a $c^2 = a^2 + b^2 = 13,4^2 + 20^2 = 579,56 \Rightarrow \underline{\underline{c \cong 24,07 \text{ cm}}}$.

De plus, on a $\tan(\alpha) = \dfrac{a}{b} = \dfrac{13,4}{20} = 0,655 \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(0,655) = \underline{\underline{33,22°}}$.

Et on a $\beta \cong 180° - 90° - 33,22° \cong \underline{\underline{56,78°}}$.

e. Si aire $= 6 \text{cm}^2$, on doit avoir $\dfrac{a \cdot b}{2} = 6 \Rightarrow a \cdot b = 12 \Rightarrow b = \dfrac{12}{a} = \dfrac{12}{5} = \underline{\underline{2,4 \text{ cm}}}$.

Avec Pythagore, on a $c^2 = a^2 + b^2 = 5^2 + 2,4^2 = 30,76 \Rightarrow \underline{\underline{c \cong 5,55 \text{ cm}}}$.

De plus, on a $\tan(\alpha) = \dfrac{a}{b} = \dfrac{5}{2,4} \cong 2,08 \Rightarrow \alpha \cong \tan^{-1}(2,08) \cong \underline{\underline{64,36°}}$.

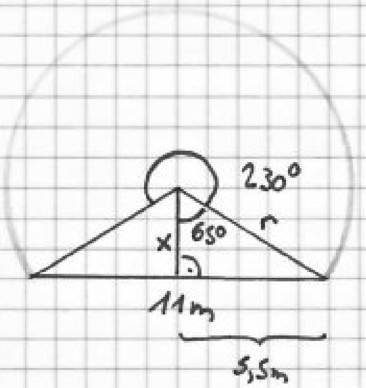
Et on a $\beta \cong 180° - 90° - 64,36° \cong \underline{\underline{25,64°}}$.

f. Par Pythagore, on a $c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + (2a)^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2 \Rightarrow c = \sqrt{5a^2} = \underline{\underline{\sqrt{5}\,a}}$.

De plus, on a $\tan(\alpha) = \dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) \cong \underline{\underline{26,57°}}$.

Et on a $\beta \cong 180° - 90° - 26,57° = \underline{\underline{63,43°}}$.

Exercice 3. 24



On a $\sin(65°) = \frac{5{,}5}{r} \Longrightarrow r = \frac{5{,}5}{\sin(65°)} \cong \underline{\underline{6{,}069\ m}}$.

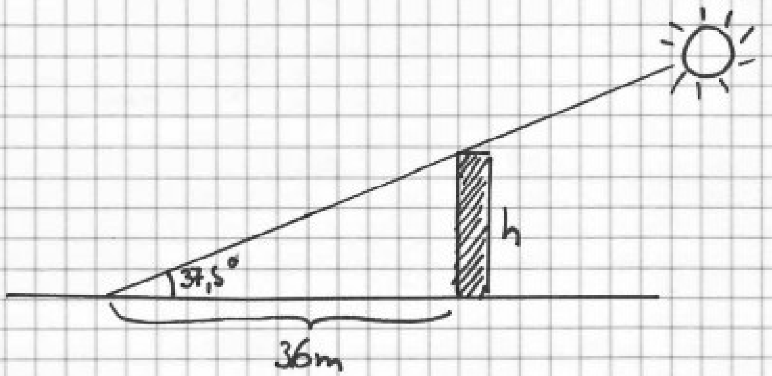
Par Pythagore, on a $x^2 = r^2 - 5{,}5^2 \cong 6{,}069^2 - 5{,}5^2 \cong 6{,}578$

$\Longrightarrow x \cong 2{,}56\,m$.

La hauteur maximale est donc $x + r \cong$

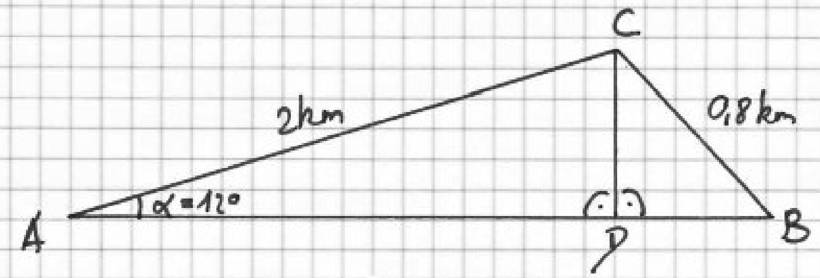
$\cong 2{,}56 + 6{,}069 \cong \underline{\underline{8{,}63\ m}}$.

Exercice 3.25



On a $\tan(37{,}5°) = \frac{h}{36} \Rightarrow h = 36 \cdot \tan(37{,}5°) = \underline{\underline{27{,}62\ m}}$.

Exercice 3.26.



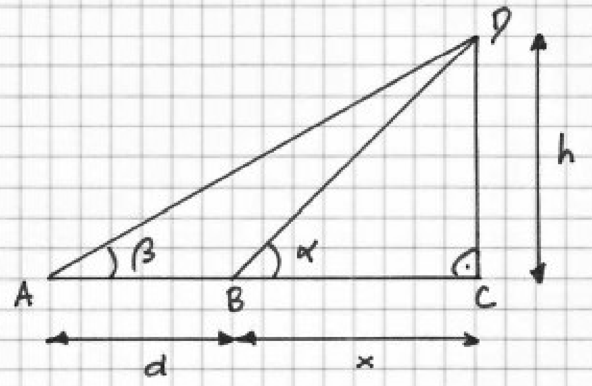
On a $\cos(\alpha) = \dfrac{AD}{AC} \Rightarrow AD = AC \cdot \cos(\alpha) = 2 \cdot \cos(12°) \cong 1,956$ km.

De plus $\sin(\alpha) = \dfrac{CD}{AC} \Rightarrow CD = AC \cdot \sin(\alpha) = 2 \cdot \sin(12°) \cong 0,416$ km.

Par Pythagore : $DB^2 = CB^2 - CD^2 \cong 0,8^2 - 0,416^2 \cong 0,467 \Rightarrow DB \cong 0,683$ km.

Ainsi $AB = AD + DB \cong 1,956 + 0,683 = \underline{\underline{2,64 \text{ km.}}}$

Exercice 3.27.



Dans le triangle BCD, on a $\tan(\alpha) = \frac{opp}{adj} = \frac{h}{x}$.

Dans le triangle ACD, on a $\tan(\beta) = \frac{opp}{adj} = \frac{h}{x+d}$.

On a donc les 2 relations suivantes : $\tan(\alpha) = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x\tan(\alpha)$

et $\tan(\beta) = \frac{h}{x+d} \Rightarrow h = (x+d)\tan(\beta)$.

On en déduit que $x\tan(\alpha) = (x+d)\tan(\beta)$

$$\Rightarrow x\tan(\alpha) = x\tan(\beta) + d\tan(\beta)$$

$$\Rightarrow x\tan(\alpha) - x\tan(\beta) = d\tan(\beta)$$

$$\Rightarrow \left(\tan(\alpha) - \tan(\beta)\right)x = d\tan(\beta)$$

$$\Rightarrow x = \frac{d\tan(\beta)}{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}.$$

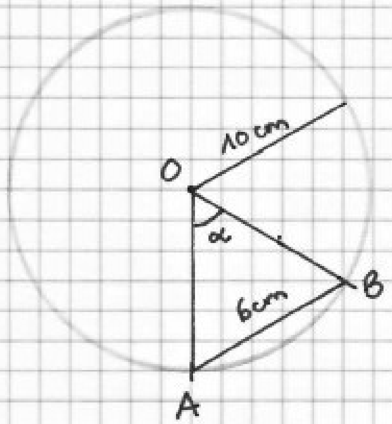
Avec cette relation, on trouve $h = \frac{d\tan(\alpha)\tan(\beta)}{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}$.

Avec $\alpha = 38,6°$, $\beta = 18,3°$ et $d = 25$ m, on trouve :

$$x = \frac{25 \cdot \tan(18,3°)}{\tan(38,6°) - \tan(18,3°)} \cong 17,68 \text{ m et}$$

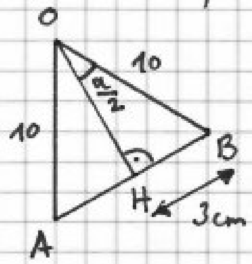
$$h = \frac{25 \cdot \tan(38,6°) \cdot \tan(18,3°)}{\tan(38,6°) - \tan(18,3°)} \cong 14,12 \text{ m}.$$

Exercice 3.28



On va commencer par chercher l'angle α.

Le triangle OAB est isocèle ; on peut alors le partager en 2 :



On a : $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{opp}{hyp} = \frac{3}{10} = 0,3$.

Ainsi $\frac{\alpha}{2} = \sin^{-1}(0,3) \cong 17,46°$ et $\alpha \cong 34,915°$

Cherchons maintenant la longueur de l'arc de cercle AB.

Le périmètre du cercle entier est $2 \cdot \pi \cdot 10 = 20\pi$.

Il correspond à un angle au centre de $360°$.

Ainsi, un angle de $1°$ correspond à un arc de cercle de $\frac{20\pi}{360} = \frac{\pi}{18}$.

La longueur de l'arc AB, ayant un angle au centre de $34,915°$, est donc $\frac{\pi}{18} \cdot 34,915° \cong 6,09$ cm.

Le périmètre du secteur circulaire OAB est donc $2 \cdot 10 + 6,09 = \underline{\underline{26,09 \text{ cm}}}$.

L'aire du cercle entier est $\pi \cdot 10^2 = 100\pi$.

Il correspond à un angle au centre de $360°$.

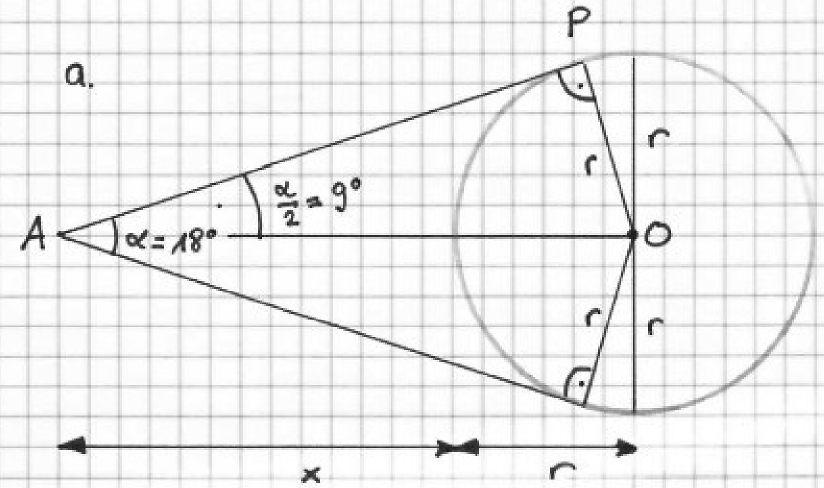
Ainsi, un angle de $1°$ correspond à un arc de cercle de $\frac{100\pi}{360} = \frac{5\pi}{18}$.

L'aire du secteur circulaire OAB, ayant un angle au centre de $34,915°$, est donc

$$\frac{5\pi}{18} \cdot 34,915° \cong \underline{\underline{30,47 \text{ cm}^2}}$$

Exercice 3.29

a.



Le triangle OAP est rectangle puisque AP est tangente au cercle.
Calculons le rayon du cercle.
Le périmètre du cercle est 50m. Ainsi $2\pi r = 50 \Rightarrow r = \frac{25}{\pi}$.
Dans le triangle AOP, on a $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{opp}{hyp} = \frac{r}{x+r}$

$$\Rightarrow (x+r)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = r \quad \Rightarrow \quad x\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + r\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = r$$

$$\Rightarrow x\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = r - r\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{r - r\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{r\left(1-\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

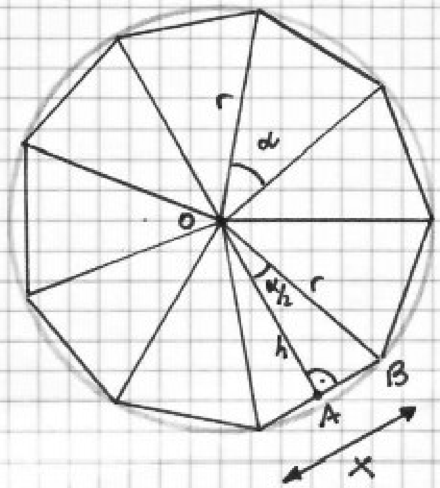
Avec $r = \frac{25}{\pi}$ et $\frac{\alpha}{2} = 9°$, $x = \frac{\frac{25}{\pi}(1-\sin(9°))}{\sin(9°)} \cong \underline{\underline{42,91\,m}}$.

b. D'après a., on a $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r}{x+r}$.

Avec $x = 100$ et $r = \frac{25}{\pi}$, on trouve $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{25}{\pi}}{100+\frac{25}{\pi}} \cong 0,074$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \sin^{-1}(0,074) \cong 4,23° \quad \Rightarrow \alpha \cong 2 \cdot 4,23° \cong \underline{\underline{8,45°}}$$

Exercice 3.30



Le périmètre du polygone est $9x$. Son aire est $9 \cdot \frac{x \cdot h}{2}$.

Dans le triangle rectangle OAB, on a $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} = \frac{x/2}{r}$ et

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{h}{r}.$$

On obtient ainsi $\frac{x}{2} = r\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow x = 2r\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

et $h = r\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

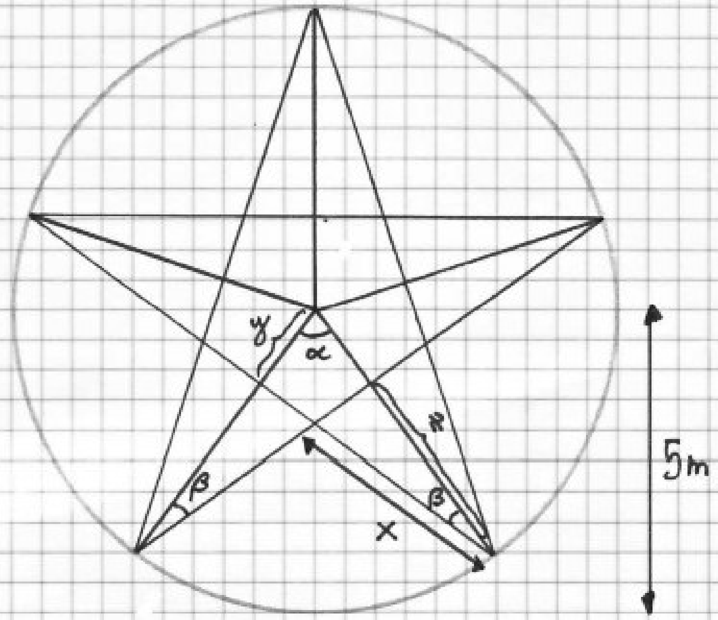
On a $\alpha = \frac{360°}{9} = 40°$ et, donc, $\frac{\alpha}{2} = 20°$. De plus, $r = 3{,}45$ m.

Ainsi $x = 2 \cdot 3{,}45 \cdot \sin(20°) \cong 2{,}36$ et $h = 3{,}45 \cdot \cos(20°) \cong 3{,}24$.

Le périmètre du polygone est donc $9 \cdot 2{,}36 = \underline{\underline{21{,}24 \text{ m}}}$.

L'aire du polygone est $9 \cdot \frac{2{,}36 \cdot 3{,}24}{2} \cong \underline{\underline{34{,}43 \text{ m}^2}}$.

Exercice 3.31



Le périmètre de l'étoile est $10x$.

On a $\alpha = \frac{360°}{5} = 72°$.

En outre $2\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow \beta = 90 - \alpha = 90 - 72 = 18°$

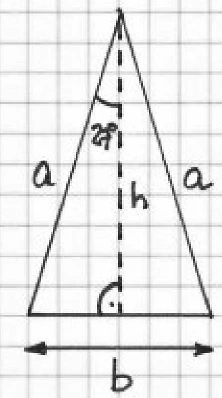
De plus $\cos(\alpha) = \frac{adj}{hyp} = \frac{y}{5} \Rightarrow y = 5\cos(72°)$.

Ainsi $z = 5 - y = 5 - 5\cos(72°)$.

De plus $\cos(\beta) = \frac{adj}{hyp} = \frac{z}{x} \Rightarrow x = \frac{z}{\cos(\beta)} = \frac{5 - 5\cos(72°)}{\cos(18°)} \cong 3{,}63$.

Ainsi le périmètre de l'étoile est $10 \cdot x \cong \underline{\underline{36{,}33\ m}}$.

Exercice 3.32.



On doit avoir: $\frac{b \cdot h}{2} = 120$ ①

et : $\tan(27°) = \frac{b/2}{h}$ ②

① $\Rightarrow bh = 240$

② $\Rightarrow \frac{b}{2} = h\tan(27°) \Rightarrow b = 2h\tan(27°)$.

Par substitution de ② dans ①, on obtient:

$$2h\tan(27°) \cdot h = 240$$

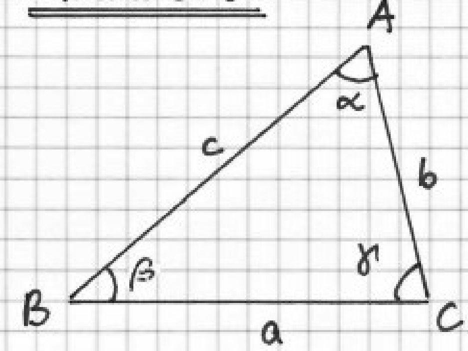
$$\Rightarrow 2h^2\tan(27°) = 240$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{120}{\tan(27°)} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{120}{\tan(27°)}} \cong \underline{\underline{15,346\ m}}.$$

Ainsi $b = 2h\tan(27°) \cong 2 \cdot 15,346 \cdot \tan(27°) \cong \underline{\underline{15,64\ m}}.$

Finalement, $a = \sqrt{h^2 + b^2} = \underline{\underline{21,91\ m}}.$

Exercice 3.33



On a le théorème du cosinus :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

Et le théorème du sinus :

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}.$$

a. On a : $c = 10$, $\alpha = 65°$ et $\gamma = 43°$ $\Rightarrow \beta = 180° - 65° - 43° = \underline{\underline{72°}}$

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \Rightarrow a = \frac{c\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} = \frac{10 \cdot \sin(65°)}{\sin(43°)} \cong \underline{\underline{13,289}}.$$

$$\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \Rightarrow b = \frac{c\sin(\beta)}{\sin(\gamma)} = \frac{10 \cdot \sin(72°)}{\sin(43°)} \cong \underline{\underline{13,945}}.$$

b. On a : $a = 7,32$, $b = 4,65$ et $\gamma = 71,6°$.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) = 7,32^2 + 4,65^2 - 2 \cdot 7,32 \cdot 4,65 \cdot \cos(71,6°) \cong 53,717$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{c = 7,329}}.$$

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{a\sin(\gamma)}{c} \cong \frac{7,32 \cdot \sin(71,6°)}{7,329} \cong 0,948$$

$$\Rightarrow \alpha = \sin^{-1}(0,948) = \underline{\underline{71,386°}}$$

$$\beta = 180° - \alpha - \gamma = 180° - 71,386° - 71,6° = \underline{\underline{37,014°}}.$$

c. $a = 2$, $b = \sqrt{6}$ et $c = 1 + \sqrt{3}$.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \Rightarrow \cos(\beta) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2^2 + (1+\sqrt{3})^2 - (\sqrt{6})^2}{2 \cdot 2 \cdot (1+\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{4 + 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 6}{4(1+\sqrt{3})} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{4(1+\sqrt{3})} = \frac{2(1+\sqrt{3})}{4(1+\sqrt{3})} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{60°}}.$$

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{a\sin(\beta)}{b} = \frac{2\sin(60°)}{\sqrt{6}} = \frac{2\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3}{6}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \underline{\underline{45°}}.$$

$$\gamma = 180° - 60° - 45° = \underline{\underline{75°}}.$$

d. On a : $\alpha = 54,08°$, $\beta = 88,94°$ et aire $= 12,52\ m^2$.

$$\gamma = 180° - 54,08° - 88,94° = \underline{\underline{36,98°}}$$

D'après "Formulaires et tables" p. 35, on a

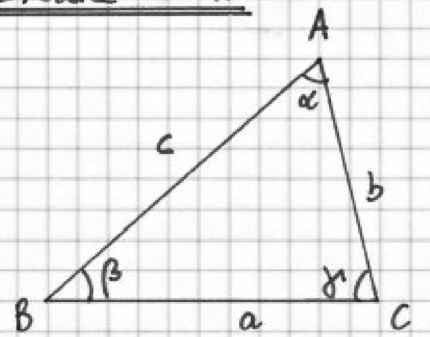
$$\text{aire} = \frac{1}{2} bc \sin(\alpha) = \frac{a^2 \sin(\beta) \sin(\gamma)}{2 \sin(\alpha)}.$$

Ainsi $a^2 = \dfrac{2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \text{aire}}{\sin(\beta) \cdot \sin(\gamma)} = \dfrac{2 \cdot \sin(54{,}08) \cdot 12{,}52}{\sin(88{,}94) \cdot \sin(36{,}98)} \cong 33{,}717 \Rightarrow \underline{\underline{a \cong 5{,}807\,m.}}$

$$\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{a}{\sin(\alpha)} \Rightarrow b = \frac{a \sin(\beta)}{\sin(\alpha)} \cong \frac{5{,}807 \cdot \sin(88{,}94)}{\sin(54{,}08)} \cong \underline{\underline{7{,}168\,m.}}$$

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \Rightarrow c = \frac{b \sin(\gamma)}{\sin(\beta)} \cong \frac{7{,}168 \cdot \sin(36{,}98)}{\sin(88{,}94)} \cong \underline{\underline{4{,}312\,m.}}$$

Exercice 3. 34.



On a :

théorème du cosinus : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ab\cos(\beta)$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$

théorème du sinus : $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

$\text{aire} = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha) = \frac{1}{2}ac\sin(\beta) = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma)$.

a. On a : $\text{aire} = 24$, $\sin(\alpha) = \frac{12}{13}$, $b+c = 17$ et $c > b$.

$\text{aire} = 24 \Rightarrow \frac{1}{2}bc\sin(\alpha) = 24 \Rightarrow \frac{1}{2}bc.\frac{12}{13} = 24 \Rightarrow \frac{12}{26}bc = 24$
$\Rightarrow 12bc = 624 \Rightarrow bc = 52$.

$b + c = 17 \Rightarrow c = 17 - b$.

Ainsi $b(17-b) = 52 \Rightarrow 17b - b^2 = 52 \Rightarrow b^2 - 17b + 52 = 0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $Ab^2 + Bb + C = 0$, où $A = 1$, $B = -17$ et $C = 52$.

On a $\Delta = B^2 - 4AC = (-17)^2 - 4.1.52 = 289 - 208 = 81$ et $\sqrt{\Delta} = 9$.

Les solutions sont donc : $b_1 = \frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{17+9}{2.1} = \frac{26}{2} = 13$ et

$b_2 = \frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{17-9}{2.1} = \frac{8}{2} = 4$.

Avec $b_1 = 13$, on a $c_1 = 17 - b_1 = 17 - 13 = 4$.

Avec $b_2 = 4$, on a $c_2 = 17 - b_2 = 17 - 4 = 13$.

Or, on doit avoir $c > b$. Le cas $b_1 = 13$ et $c_1 = 4$ est donc exclu.

Donc, on a $\underline{b = 4 \text{ et } c = 13}$.

Avec $\sin(\alpha) = \frac{12}{13}$, on a $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) \cong \underline{67,38°}$.

De plus, on a $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) = 4^2 + 13^2 - 2.4.13\cos(67,38°) =$
$= 16 + 169 - 104\cos(67,38°) = 145 \Rightarrow a = \sqrt{145} \cong \underline{12,04}$.

On a $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \Rightarrow \sin(\beta) = \frac{b\sin(\alpha)}{a} = \frac{4.\frac{12}{13}}{\sqrt{145}} \cong 0,307$

$\Rightarrow \beta \cong \sin^{-1}(0,307) \cong \underline{17,86°}$.

Finalement, $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 67,38° - 17,86° = \underline{94,76°}$.

b. On a : $c = 8$, $\alpha = \frac{\pi}{9}$, $b = 2a$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \Rightarrow a^2 = (2a)^2 + 8^2 - 2.2a.8\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$

$$\Rightarrow a^2 = 4a^2 + 64 - 32a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$$

$\Rightarrow 3a^2 - 32a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + 64 = 0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $Aa^2 + Ba + C = 0$, avec $A = 3$, $B = -32\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ et $C = 64$.

On a: $\Delta = B^2 - 4AC = \left(-32\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 64 = 1024\cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right) - 768$.

Les solutions sont: $a_1 = \frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{32\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + \sqrt{1024\cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right) - 768}}{2 \cdot 3} \cong 6,957$

et $a_2 = \frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{32\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) - \sqrt{1024\cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right) - 768}}{2 \cdot 3} \cong 3,067$.

Avec $a_1 \cong 6,957$, on a $b_1 = 2a_1 \cong 2 \cdot 6,957 = 13,914$.

Avec $a_2 \cong 3,067$, on a $b_2 = 2a_2 \cong 2 \cdot 3,067 = 6,134$.

Avec $a_1 \cong 6,957$ et $b_1 \cong 13,914$, on a: $\frac{a_1}{\sin(\alpha)} = \frac{b_1}{\sin(\beta)} \Rightarrow \sin(\beta) = \frac{b_1 \sin(\alpha)}{a_1}$

$$\Rightarrow \sin(\beta) \cong \frac{13,914 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}{6,957} \cong 0,684 \Rightarrow \beta \cong \sin^{-1}(0,684) \cong 0,753 \text{ rad.}$$

Avec $a_2 \cong 3,067$ et $b_2 \cong 6,134$, on a: $\frac{a_2}{\sin(\alpha)} = \frac{b_2}{\sin(\beta)} \Rightarrow \sin(\beta) = \frac{b_2 \sin(\alpha)}{a_2}$

$$\Rightarrow \sin(\beta) \cong \frac{6,134 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}{3,067} \cong 0,684 \Rightarrow \beta \cong \sin^{-1}(0,684) \cong 0,753 \text{ rad}$$

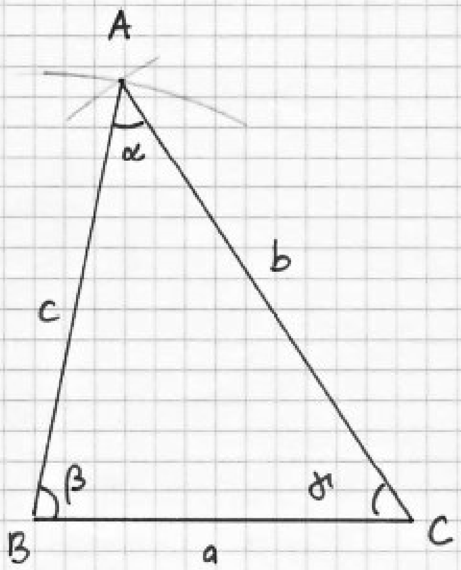
Finalement, on a: $\gamma \cong \pi - \frac{\pi}{9} - 0,753 \cong 2,04$ rad.

On a donc 2 solutions:

1) $a = 6,957$, $b = 13,914$, $c = 8$, $\alpha = \frac{\pi}{9}$, $\beta = 0,753$ rad et $\gamma = 2,04$ rad;

2) $a = 3,067$, $b = 6,134$, $c = 8$, $\alpha = \frac{\pi}{9}$, $\beta = 0,753$ rad et $\gamma = 2,04$ rad.

Exercice 3.35



On a : $a = x$, $c = x+1$, $b = x+2$ $\Big\}\ x \in \mathbb{N}$, $\beta = 2\alpha$

On a les théorèmes du cosinus et du sinus :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \quad (1)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \quad (2)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \quad (3)$$

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \quad (4)$$

(1) s'écrit : $x^2 = (x+2)^2 + (x+1)^2 - 2(x+2)(x+1)\cos(\alpha)$.

(2) s'écrit : $(x+2)^2 = x^2 + (x+1)^2 - 2x(x+1)\cos(\beta)$.

(3) s'écrit : $(x+1)^2 = x^2 + (x+2)^2 - 2x(x+2)\cos(\gamma)$.

(4) s'écrit : $\dfrac{x}{\sin(\alpha)} = \dfrac{x+2}{\sin(\beta)} = \dfrac{x+1}{\sin(\gamma)}$.

On a $\sin(\beta) = \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$.

On obtient $\dfrac{x}{\sin(\alpha)} = \dfrac{x+2}{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)} \Rightarrow x = \dfrac{x+2}{2\cos(\alpha)} \Rightarrow \cos(\alpha) = \dfrac{x+2}{2x}$.

Par substitution dans (1), on a : $x^2 = (x+2)^2 + (x+1)^2 - 2(x+2)(x+1)\dfrac{x+2}{2x}$

$$\Rightarrow x^2 = (x+2)^2 + (x+1)^2 - \frac{(x+2)^2(x+1)}{x}$$

$$\Rightarrow x^3 = x(x+2)^2 + x(x+1)^2 - (x+2)^2(x+1)$$

$$\Rightarrow x^3 = (x+2)^2(x-(x+1)) + x(x+1)^2$$

$$\Rightarrow x^3 = (x+2)^2\cdot(-1) + x(x+1)^2$$

$$\Rightarrow x^3 = x(x+1)^2 - (x+2)^2$$

$$\Rightarrow x^3 = x(x^2+2x+1) - (x^2+4x+4)$$

$$\Rightarrow x^3 = x^3 + 2x^2 + x - x^2 - 4x - 4$$

$$\Rightarrow 0 = x^2 - 3x - 4.$$

On a : $a=1$, $b=-3$ et $c=-4$; $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\cdot1\cdot(-4) = 9 + 16 = 25$; $\sqrt{\Delta} = 5$.