Exercice 1

Calculer y'

a) $$y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 7 \Rightarrow y' = \underline{\underline{2x^2 - 2x}}$$

b) $$y = \frac{1-x}{2x+3} = \frac{u}{v}$$

Avec : $u = 1 - x \Rightarrow u' = -1$; $v = 2x + 3 \Rightarrow v' = 2$

$$\Rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{-(2x+3) - 2(1-x)}{(2x+3)^2} = \underline{\underline{\frac{-5}{(2x+3)^2}}}$$

c) $$y = -\frac{k}{x} = -kx^{-1} \Rightarrow y' = kx^{-2} = \underline{\underline{\frac{k}{x^2}}}$$

d) $$y = \frac{1}{x^n} = x^{-n} \Rightarrow y' = -nx^{-n-1} = \underline{\underline{-\frac{n}{x^{n+1}}}}$$

e) $$y = (x^3 + 2)\cdot(x^2 + 1) = u \cdot v$$

$$\Rightarrow y' = u'v + uv' =$$

Avec : $u = x^3 + 2 \Rightarrow u' = 3x^2$; $v = x^2 + 1 \Rightarrow v' = 2x$

$$3x^2(x^2+1) + 2x(x^3+2) = \underline{\underline{5x^4 + 3x^2 + 4x}}$$

f) $$y = \frac{x^3+2}{x^2+1} = \frac{u}{v}$$

Avec : $u = x^3 + 2 \Rightarrow u' = 3x^2$; $v = x^2 + 1 \Rightarrow v' = 2x$

$$\Rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{3x^2(x^2+1) - 2x(x^3+2)}{(x^2+1)^2} = \underline{\underline{\frac{x^4 + 3x^2 - 4x}{(x^2+1)^2}}}$$

g) $$y = (2x-1)^6 = u^6 \Rightarrow y' = 6u^5 \cdot u' = \underline{\underline{12(2x-1)^5}}$$

Avec $u = 2x - 1 \Rightarrow u' = 2$

h) $$y = (3x^2 - 2x + 5)^4 = u^4$$

Avec $u = 3x^2 - 2x + 5 \Rightarrow u' = 6x - 2$

$$\Rightarrow y' = 4u^3 \cdot u' = \underline{\underline{4(6x-2)(3x^2-2x+5)^3}}$$

i) $$y = \sqrt{x^3 - 12x^2 + 36x + 21} = \sqrt{u}$$

Avec $u = x^3 - 12x^2 + 36x + 21 \Rightarrow u' = 3x^2 - 24x + 36$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = y = \underline{\underline{\frac{3x^2 - 24x + 36}{2\sqrt{x^3 - 12x^2 + 36x + 21}}}}$$

j) $$y = \frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - 4x + 2} = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Avec : $u = x^2 - 5x + 1 \Rightarrow u' = 2x - 5$; $v = x^2 - 4x + 2 \Rightarrow v' = 2x - 4$

$$y' = \frac{(2x-5)(x^2-4x+2) - (2x-4)(x^2-5x+1)}{(x^2-4x+2)^2} = \underline{\underline{\frac{x^2 + 2x - 6}{(x^2-4x+2)^2}}}$$

k) $$y = \sqrt{x^2 + x} = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \underline{\underline{\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}}}$$

Avec $u = x^2 + x \Rightarrow u' = 2x + 1$

m) $$y = \sqrt{625 - 0.09x^2} = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \underline{\underline{\frac{-0.09x}{\sqrt{625 - 0.09x^2}}}}$$

Avec $u = 625 - 0.09x^2 \Rightarrow u' = -0.18x$

n) $$y = 7(5x-3)^3 = 7u^3 \Rightarrow y' = 21u^2 \cdot u' = \underline{\underline{105(5x-3)^2}}$$

Avec $u = 5x - 3 \Rightarrow u' = 5$

Exercice 1 -suite

o) $y = x^2(5-x)^3$

$y = x^2(5-x)^3 = u \cdot v \Rightarrow y' = u'v + uv'$

Observons ensuite $v = (5-x)^3 = v = a^3$

Donc $v = (5-x)^3 = a^3$

$\Rightarrow v' = v'_x = v'_a \cdot a'_x = 3a^2 \cdot (-1) = -3(5-x)^2$

Avec : $\left\| \begin{array}{lll} u = x^2 & \Rightarrow & u' = 2x \\ v = (5-x)^3 & \Rightarrow & v' = ?? \end{array} \right.$

NB: A court de lettre ☺, je choisis "a" pour indiquer une variable

$\| \; x \underset{a'_x=-1}{\mapsto} a = a(x) = (5-x) \underset{v'_a=3a^2}{\mapsto} v = v(a) = a^3$

Enfin : $\left\| \begin{array}{lll} u = x^2 & \Rightarrow & u' = 2x \\ v = (5-x)^2 & \Rightarrow & v' = -3(5-x)^2 \end{array} \right. \Rightarrow y' = u'v + uv' = 2x(5-x)^3 - 3x^2(5-x)^2$

Mieux : $y' = x(5-x)^2(2(5-x) - 3x) = \underline{\underline{x(5-x)^2(10-5x)}}$

NB : Cette dernière forme (*après factorisation*) permet de trouver les zéros de y ', ce qui sera un de nos buts principaux dans l'étude de y '.

---

p) $y = x\sqrt{1-x}$

$y = x\sqrt{1-x} = u \cdot v \Rightarrow y' = u'v + uv'$

Observons ensuite $v = \sqrt{1-x} = v = \sqrt{a}$

Donc $v = \sqrt{1-x} = \sqrt{a}$

$\Rightarrow v' = v'_x = v'_a \cdot a'_x = \dfrac{-1}{2\sqrt{a}}$

Avec : $\left\| \begin{array}{lll} u = x & \Rightarrow & u' = 1 \\ v = \sqrt{1-x} & \Rightarrow & v' = ?? \end{array} \right.$

NB: A court de lettre ☺, je choisis "a" pour indiquer une variable

$\| \; x \underset{a'_x=-1}{\mapsto} a = a(x) = (1-x) \underset{v'_a=\frac{1}{2\sqrt{a}}}{\mapsto} v = v(a) = \sqrt{a}$

Enfin : $\left\| \begin{array}{lll} u = x & \Rightarrow & u' = 1 \\ v = \sqrt{1-x} & \Rightarrow & v' = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} \end{array} \right. \Rightarrow y' = u'v + uv' = \sqrt{1-x} - \dfrac{x}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{2(1-x)}{2\sqrt{1-x}} - \dfrac{x}{2\sqrt{1-x}}$

Mieux : $y' = \underline{\underline{\dfrac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}}}$

NB : Cette dernière forme permet de trouver les zéros de y ', ce qui sera un de nos buts principaux dans l'étude de y '.

---

q) $y = \sqrt{4x-1} \cdot x^2$

$y = \sqrt{4x-1} \cdot x^2 = u \cdot v \Rightarrow y' = u'v + uv'$

Observons ensuite $u = \sqrt{4x-1} = \sqrt{a}$

Donc $u = \sqrt{4x-1} = \sqrt{a}$

$\Rightarrow u' = u'_x = u'_a \cdot a'_x = \dfrac{4}{2\sqrt{a}} = \dfrac{2}{\sqrt{a}}$

Avec : $\left\| \begin{array}{lll} u = \sqrt{4x-1} & \Rightarrow & u' = ?? \\ v = x^2 & \Rightarrow & v' = 2x \end{array} \right.$

NB: A court de lettre ☺, je choisis "a" pour indiquer une variable

$\| \; x \underset{a'_x=4}{\mapsto} a = a(x) = (4x-1) \underset{v'_a=\frac{1}{2\sqrt{a}}}{\mapsto} u = u(a) = \sqrt{a}$

Enfin : $\left\| \begin{array}{lll} u = \sqrt{4x-1} & \Rightarrow & u' = \dfrac{2}{\sqrt{4x-1}} \\ v = x^2 & \Rightarrow & v' = 2x \end{array} \right. \Rightarrow y' = u'v + uv' = \dfrac{2x^2}{\sqrt{4x-1}} + 2x\sqrt{4x-1} = \dfrac{2x^2 + 2x(4x-1)}{\sqrt{4x-1}}$

Mieux : $y' = \underline{\underline{\dfrac{10x^2 - 2x}{\sqrt{4x-1}}}}$

NB : Cette dernière forme permet de trouver les zéros de y ', ce qui sera un de nos buts principaux dans l'étude de y '.

Exercice 1 (suite)

r) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1} = \dfrac{u}{v}$

$$\Rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{\frac{x+1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{\frac{x+1}{2\sqrt{x}} - \frac{2x}{2\sqrt{x}}}{(x+1)^2} = \frac{\frac{1-x}{2\sqrt{x}}}{(x+1)^2} = \underline{\underline{\frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}}}$$

Avec : $\left\| \begin{array}{lll} u = \sqrt{x} & \Rightarrow & u' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ v = x+1 & \Rightarrow & v' = 1 \end{array} \right.$

s) $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2}{x^3} + \sqrt{x} + \dfrac{3}{\sqrt{x}} + (2-x)^7 = u + v + \ldots$

$$\Rightarrow y' = \underline{\underline{x + \frac{6}{x^4} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2\sqrt{x^3}} - 7(2-x)^6}}$$

NB : $\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)' = \left(3x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\dfrac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{3}{2\sqrt{x^3}}$

Exercice 2

Soit $f(x) = (1-2x)^3 \cdot (3x-2)$

a) Calculer $f'(x)$

b) Résoudre $f'(x) = 0$ et indiquer ce que représentent les solutions sur le graphe de f

a) $f(x) = (1-2x)^3 \cdot (3x-2) = u \cdot v \Rightarrow f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$

avec $\left\langle \begin{array}{lll} u = (1-2x)^3 & \Rightarrow & u' = ?? \\ v = 3x-2 & \Rightarrow & v' = 3 \end{array} \right.$

Calcul de u' :

$u : x \mapsto a = 1-2x \mapsto u = a^3$

$a'_x = -2 \qquad u'_a = 3a^2$

$\Rightarrow u'_x = u'_a \cdot a'_x = -6(1-2x)^2$

$\Rightarrow u' = -6(1-2x)^2$

$$\Rightarrow f'(x) = u'v + uv' = -6(1-2x)^2(3x-2) + 3(1-2x)^3$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3(1-2x)^2\left(-2(3x-2) + (1-2x)\right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{3(1-2x)^2(5-8x)}}$$

b) $f'(x)=0 \Rightarrow 3(1-2x)^2(5-8x) = 0 \Rightarrow x = \left\langle \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{8} \end{array} \right.$

Exercice 3

a) $f(x)=x^2(2x-1)= u\cdot v \Rightarrow f'(x)=u'v+uv'$ Avec : $\left\| \begin{array}{lll} u=x^2 & \Rightarrow & u'=2x \\ v=2x-1 & \Rightarrow & v'=2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow f'(x)=u'v+uv'=2x(2x-1)-2x^2=2x((2x-1)-x)=\underline{\underline{2x(3x-1)}}$ $f'(x)=0\Rightarrow x=\left\langle \begin{array}{l} 0 \\ \frac{1}{3} \end{array}\right.$

b) $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-1}=\dfrac{u}{v}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ Avec : $\left\| \begin{array}{lll} u=x^2 & \Rightarrow & u'=2x \\ v=2x-1 & \Rightarrow & v'=2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}=\dfrac{2x(2x-1)-2x^2}{(2x-1)^2}=\dfrac{2x((2x-1)-x)}{(2x-1)^2}=\dfrac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}$ $f'(x)=0\Rightarrow x=\left\langle \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array}\right.$

c) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2}=\dfrac{u}{v}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ Avec : $\left\| \begin{array}{lll} u=2x-1 & \Rightarrow & u'=2 \\ v=x^2 & \Rightarrow & v'=2x \end{array}\right.$

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}=\dfrac{2x^2-2x(2x-1)}{x^4}=\dfrac{2x-2(2x-1)}{x^3}=\dfrac{-2(x-1)}{x^3}$ $f'(x)=0\Rightarrow x=1$

d) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{\sqrt{x}}{3}=x^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}x^{-2}-\dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}=u+v+w$

$\Rightarrow y'=u'+v'+w'=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}-x^{-3}-\dfrac{1}{6}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{-1}{2\sqrt{x^3}}-\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{6\sqrt{x}}$ Zéros de f ' : ??

e) $f(x)=x^3(2x-3)^2=u\cdot v\Rightarrow f'(x)=u'v+uv'$ Avec : $\left\| \begin{array}{lll} u=x^3 & \Rightarrow & u'=3x^2 \\ v=(2x-3)^2 & \Rightarrow & v'=?? \end{array}\right.$

Observons ensuite $v=(2x-3)^2=v=a^2$

NB: A court de lettre ☺, on choisit "a" pour indiquer une variable

$\| \; x \underset{a'_x=2}{\mapsto} a=a(x)=2x-3 \underset{v'_a=2a}{\mapsto} v=v(a)=a^2$

$\Rightarrow v'=v'_x=v'_a\cdot a'_x=2a\cdot(2)=4(2x-3)$

On a : $\left\| \begin{array}{lll} u=x^3 & \Rightarrow & u'=3x^2 \\ v=(2x-3)^2 & \Rightarrow & v'=4(2x-3) \end{array}\right.$ $\Rightarrow f'=u'v+uv'=3x^2(2x-3)^2+4x^3(2x-3)$

Mieux : $f'(x)=x^2(2x-3)\left(\underbrace{3(2x-3)+4x}_{10x-9}\right)=\underline{\underline{x^2(2x-3)(10x-9)}}$ $f'(x)=0\Rightarrow x=\left\langle \begin{array}{l} 0 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{9}{10} \end{array}\right.$

f) $f(x)=\dfrac{x^3}{2(x-1)}=\dfrac{u}{v}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ Avec : $\left\| \begin{array}{lll} u=x^3 & \Rightarrow & u'=3x^2 \\ v=2(x-1) & \Rightarrow & v'=2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}=\dfrac{6x^2(x-1)-2x^3}{4(x-1)^2}=\dfrac{2x^2(3(x-1)-x)}{4(x-1)^2}=\dfrac{x^2(2x-3)}{2(x-1)^2}$ $f'(x)=0\Rightarrow x=\left\langle \begin{array}{l} 0 \\ \frac{3}{2} \end{array}\right.$

Exercice 3 (suite)

g) $f(x) = f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ Avec : $\left\| \begin{array}{lll} u = x^2 & \Rightarrow & u' = 2x \\ v = \sqrt{x^2-1} & \Rightarrow & v' = ?? \end{array}\right.$

Observons ensuite $v = \sqrt{x^2-1} = \sqrt{a}$

NB: A court de lettre ☺, on choisit "a" pour indiquer une variable

$\| \; x \underset{a_x'=2x}{\mapsto} a = a(x) = x^2 - 1 \underset{v_a'=\frac{1}{2\sqrt{a}}}{\mapsto} v = v(a) = \sqrt{a}$

$\Rightarrow v' = v_x' = v_a' \cdot a_x' = \dfrac{1}{2\sqrt{a}} a' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

On a : $\left\| \begin{array}{lll} u = x^2 & \Rightarrow & u' = 2x \\ v = \sqrt{x^2-1} & \Rightarrow & v' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} \end{array}\right.$ $\Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'v-uv'}{v^2} = \dfrac{2x\sqrt{x^2-1} - \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{\dfrac{2x(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}} - \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \dfrac{2x(x^2-1)-x^3}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{x^3-2x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \left\langle \begin{array}{l} 0 \\ \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$

h) $f(x) = f(x) = \dfrac{x^2(2x-1)}{2x+1} = \dfrac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ Avec : $\left\| \begin{array}{lll} u = x^2(2x-1) & \Rightarrow & u' = ?? \\ v = 2x+1 & \Rightarrow & v' = 2 \end{array}\right.$

Observons ensuite $u = x^2(2x-1) = a \cdot b$

NB: A court de lettre ☺, on choisit "a" et "b" pour indiquer les variables

$\Rightarrow u' = a' \cdot b + a \cdot b' = 2x(2x-1) + 2x^2 = 6x^2 - 2x$ Avec : $\left\| \begin{array}{lll} a = x^2 & \Rightarrow & a' = 2x \\ b = 2x-1 & \Rightarrow & b' = 2 \end{array}\right.$

On a : $\left\| \begin{array}{lll} u = x^2(2x-1) & \Rightarrow & u' = 6x^2-2x \\ v = 2x+1 & \Rightarrow & v' = 2 \end{array}\right.$ $\Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'v-uv'}{v^2} = \dfrac{(6x^2-2x)(2x+1) - 2x^2(2x-1)}{(2x+1)^2}$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{(6x^2-2x)(2x+1) - 2x^2(2x-1)}{(2x+1)^2} = \dfrac{8x^3+4x^2-2x}{(2x+1)^2} = \dfrac{2x(4x^3+2x^2-x)}{(2x+1)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \left\langle \begin{array}{l} 0 \\ \dfrac{-2\pm\sqrt{20}}{8} = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4} \end{array}\right.$