Lycée Denis-de-Rougemont
Neuchâtel et Fleurier

Mathématiques de niveau 1

Exercices de révision - GEOMETRIE DANS L'ESPACE

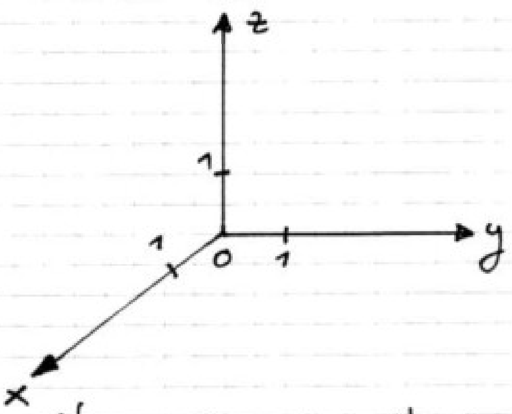
CORRIGÉ

---

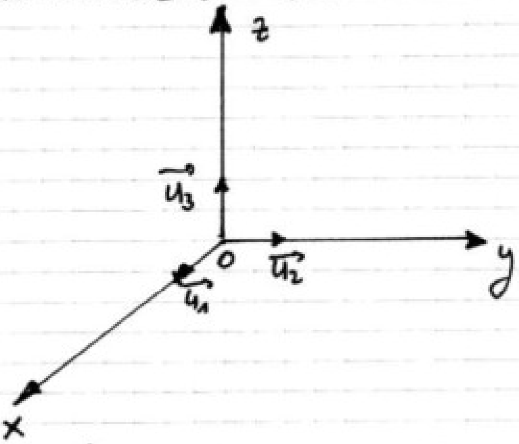
①

Rappel théorique:

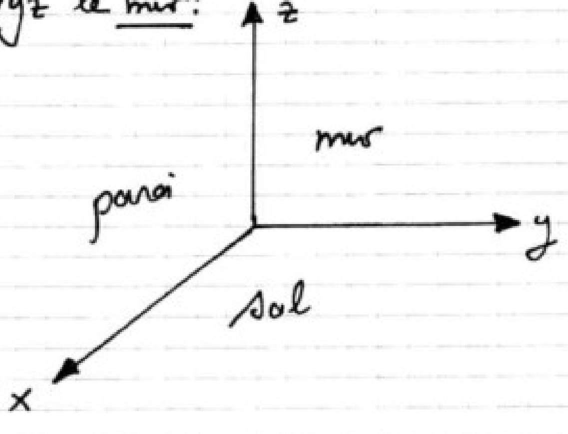
Dans l'espace, il faut trois axes pour pouvoir déterminer la position d'un point : l'axe x (axe des abscisses), l'axe y (axe des ordonnées) et l'axe z (axe des cotes).
On les dispose de la manière suivante :



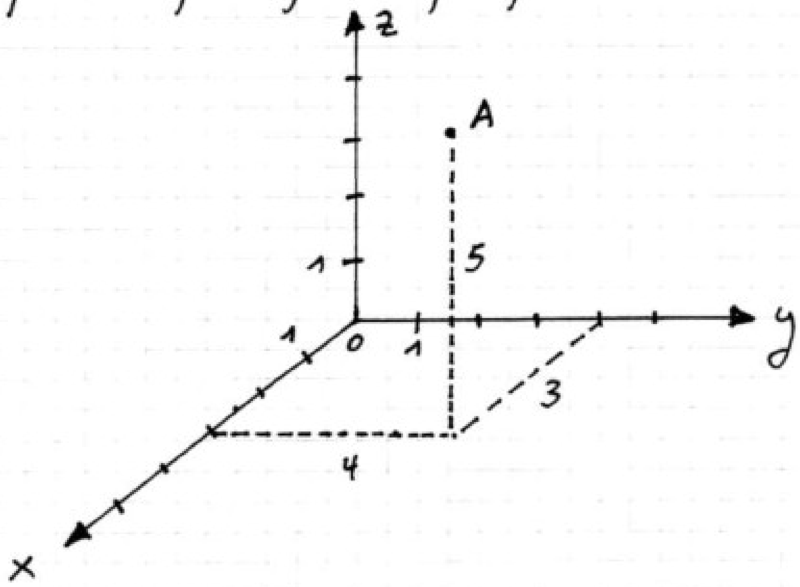
Le point O(0;0;0) est l'origine du système d'axes.
Parfois on dit que l'on munit l'espace d'un repère $\{O; \vec{u_1}; \vec{u_2}; \vec{u_3}\}$. Le repère se présente alors de la manière suivante :



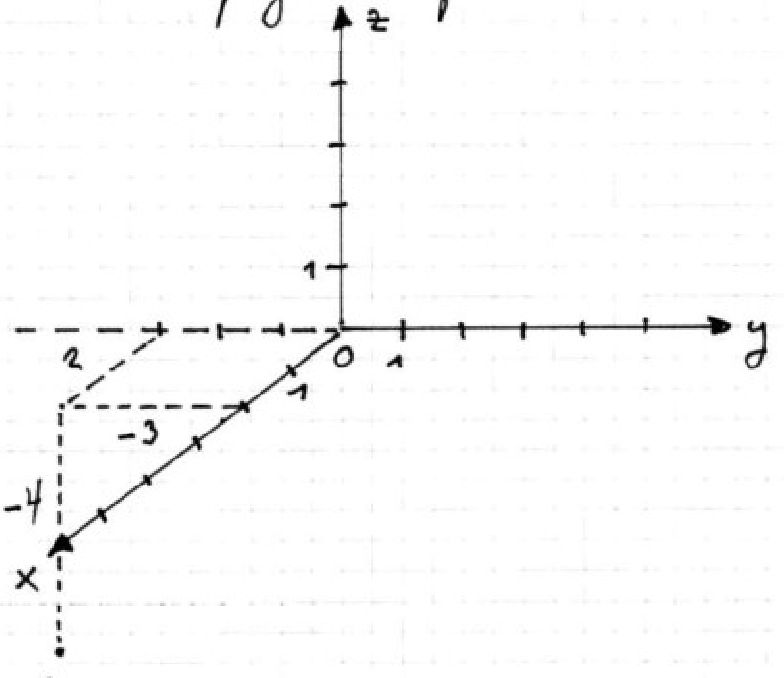
Dans un système d'axe de l'espace, en plus des 3 axes de référence (x, y et z), il y a 3 plans de référence : le plan Oxy est appelé le sol, le plan Oxz la paroi et le plan Oyz le mur :



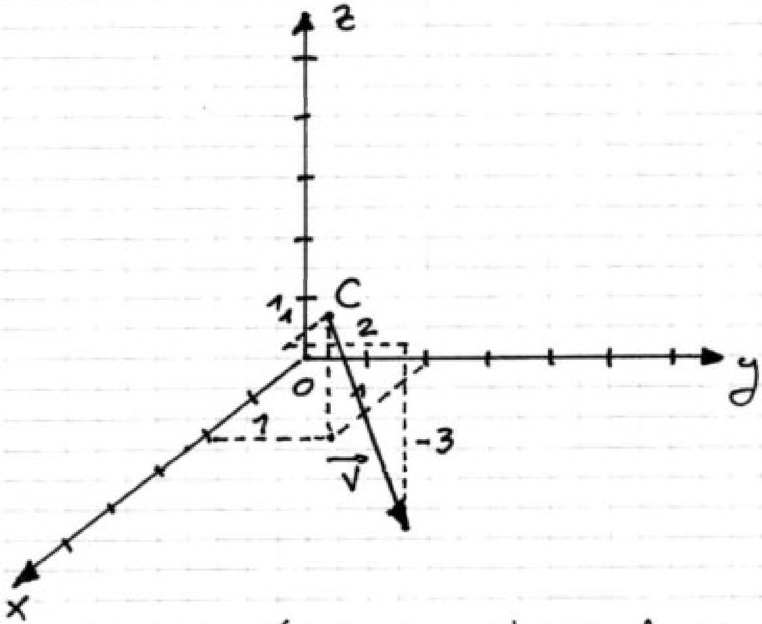
Dans l'espace un point est représenté par 3 <u>coordonnées</u> $(x\,;\,y\,;\,z)$:
x est son abscisse, y son ordonnée et z sa cote.
Pour représenter un point (par exemple $A(3\,;\,4\,;\,5)$) dans le système d'axes de l'espace, on peut par exemple procéder comme suit :



Si on veut représenter un point qui a une ou plusieurs coordonnées négatives (par exemple $B(2\,;\,-3\,;\,-4)$), on dessine les prolongements des axes nécessaires du côté des négatifs et on procède comme suit :



Dans l'espace, un <u>vecteur</u> va être donné par 3 <u>composantes</u> : la première composante décrit le déplacement selon l'axe x, la seconde le déplacement selon l'axe y et la troisième selon l'axe z.
Ainsi, le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ qui a pour origine le point $C(2\,;\,2\,;\,2)$ se représente comme suit :



On rappelle qu'un vecteur donné n'a pas d'origine fixe et peut être dessiné n'importe où dans le système d'axes.

Il existe un lien entre les coordonnées d'un point (par exemple $D(-2;1;-4)$) et le vecteur reliant O à D, noté $\overrightarrow{OD}$: les composantes de $\overrightarrow{OD}$ correspondent aux coordonnées de D : $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Si on a un vecteur $\vec{v}$, le <u>vecteur opposé</u> à $\vec{v}$ est $\vec{v}$.
Ainsi l'opposé du vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est $-\vec{v} = -\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Deux <u>vecteurs</u> $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont <u>parallèles</u> si il existe un nombre réel k tel que $\vec{v} = k \cdot \vec{w}$.
Par exemple, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ sont parallèles car on a :
$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Deux <u>vecteurs</u> $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont <u>pas parallèles</u> si il n'existe pas de nombre réel k tel que $\vec{v} = k \cdot \vec{w}$.
Par exemple, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ne sont pas parallèles car :
si il existait un nombre k tel que $\vec{v} = k \cdot \vec{w}$, on aurait $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,
i.e. $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6k \\ 2k \\ 3k \end{pmatrix}$, i.e., en écrivant cette égalité par ligne :

$$\begin{cases} 3 = -6k & (1) \\ -1 = 2k & (2) \\ 2 = 3k & (3) \end{cases}$$

La relation (1) implique que $k = -\frac{1}{2}$; la relation (2) implique que $k = -\frac{1}{2}$;

La relation (3) implique que $k = \frac{2}{3}$.
Comme les valeurs de k ne sont pas toutes égale, on en déduit que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas parallèles.

Lorsqu'un vecteur est donné par 2 points A et B et que l'on veut chercher les composantes de ce vecteur (noté $\overrightarrow{AB}$), on utilise la relation de Chasles:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

Par exemple, si $A(3;1;6)$ et $B(4;-2;3)$, on a $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

On est souvent intéressé à calculer la longueur d'un vecteur, ce que l'on appelle la norme du vecteur.

Si le vecteur est $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, sa norme, notée $\|\vec{v}\|$ est:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

On sait additionner et soustraire des vecteurs.
Il est possible de les multiplier.
Pour les vecteurs, il existe 2 sortes de multiplication.

Le premier est le produit scalaire de 2 vecteurs.

Le produit scalaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est noté $\vec{v} \cdot \vec{w}$ et est défini comme suit:

Si $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3$

(le produit scalaire est la somme des produit des coordonnées).

Les propriétés du produit scalaire sont les suivantes:

1) $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$
2) $(k\vec{v}) \cdot \vec{w} = k \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$
3) $\vec{v} \cdot (\vec{w_1} + \vec{w_2}) = \vec{v} \cdot \vec{w_1} + \vec{v} \cdot \vec{w_2}$
4) $\vec{v}$ perpendiculaire à $\vec{w} \Longrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$
5) $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \Longrightarrow \vec{v}$ perpendiculaire à $\vec{w}$.

Le deuxième produit est le produit vectoriel de 2 vecteurs.

Le produit vectoriel de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est noté $\vec{v} \wedge \vec{w}$ ou $\vec{v} \times \vec{w}$ et est défini comme suit: si $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$,

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}.$$

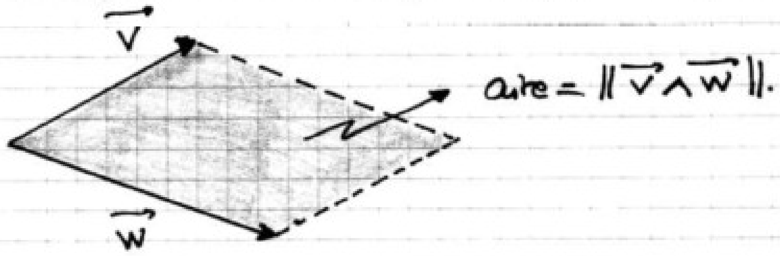
On remarque que le résultat du produit scalaire est un nombre, alors que le résultat du produit vectoriel est un vecteur.

Par exemple, si $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, on a:

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 2 - 4 \cdot 4 \\ 4 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 4 - (-2) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 - 16 \\ -4 - 2 \\ 4 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Les <u>propriétés du produit vectoriel</u> sont les suivantes:

1) $\vec{v} \wedge \vec{w} = - \vec{w} \wedge \vec{v}$
2) $(k\vec{v}) \wedge \vec{w} = k(\vec{v} \wedge \vec{w})$
3) $\vec{v} \wedge (\vec{w_1} + \vec{w_2}) = \vec{v} \wedge \vec{w_1} + \vec{v} \wedge \vec{w_2}$
4) $\vec{v}$ parallèle à $\vec{w} \Longrightarrow \vec{v} \wedge \vec{w} = 0$
5) $\vec{v} \wedge \vec{w} = 0 \Longrightarrow \vec{v}$ parallèle à $\vec{w}$
6) $\vec{v} \wedge \vec{w}$ est un vecteur perpendiculaire à $\vec{v}$ et perpendiculaire à $\vec{w}$
7) $\|\vec{v} \wedge \vec{w}\|$ est exactement égal à l'aire du parallélogramme formé par $\vec{v}$ et $\vec{w}$:



On peut calculer l'<u>angle entre 2 vecteurs</u> $\vec{v}$ et $\vec{w}$: si α est cet angle, on a:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}.$$

Exemple: cherchons l'angle α entre $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On a: $\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 4 = -3 + 2 - 8 = -9$;

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14};$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 4 + 16} = \sqrt{21}.$$

Ainsi: $\cos(\alpha) = \dfrac{-9}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} = -0{,}5245$ et $\alpha = \cos^{-1}(-0{,}5245) = 121{,}66°$.

Une <u>droite</u> dans l'espace est définie par un point et une direction. Cette direction est appelée <u>vecteur directeur</u>. Il existe toujours une infinité de vecteurs directeurs pour une droite.
Pour déterminer un point quelconque $P(x;y;z)$, on part du point connu $A(a;b;c)$ de la droite et on lui ajoute un certain nombre de fois le vecteur directeur choisi $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Le certain nombre de fois est ce qu'on appelle un paramètre.
Les <u>équations paramétriques de la droite</u> sont définies par:

$$\begin{cases} x = a + v_1 \cdot \lambda \\ y = b + v_2 \cdot \lambda \\ z = c + v_3 \cdot \lambda , \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est le paramètre.
En prenant différentes valeurs de λ, on se déplace sur la droite.
On remarque que les équations paramétriques de la droite sont les coordonnées du point plus λ fois les composantes du vecteur directeur.

Lorsqu'on veut <u>dessiner une droite</u> donnée par ses équations paramétriques dans un système d'axes de l'espace, on va chercher ses traces.
Les <u>traces d'une droite</u> sont ses intersections avec les plans de référence (sol, mur et paroi).
La trace dans le sol correspond à poser $z = 0$ dans les équations de la droite, d'en déduire λ, puis les x et y correspondants. On note cette trace T_S.
La trace dans la paroi correspond à poser $y = 0$ dans les équations de la droite, d'en déduire λ, puis les x et z correspondants. On note cette trace T_p.
La trace dans le mur correspond à poser $x = 0$ dans les équations de la droite, d'en déduire λ, puis les y et z correspondants. On note cette trace T_m.
La droite passe alors par T_S, T_p et T_m.

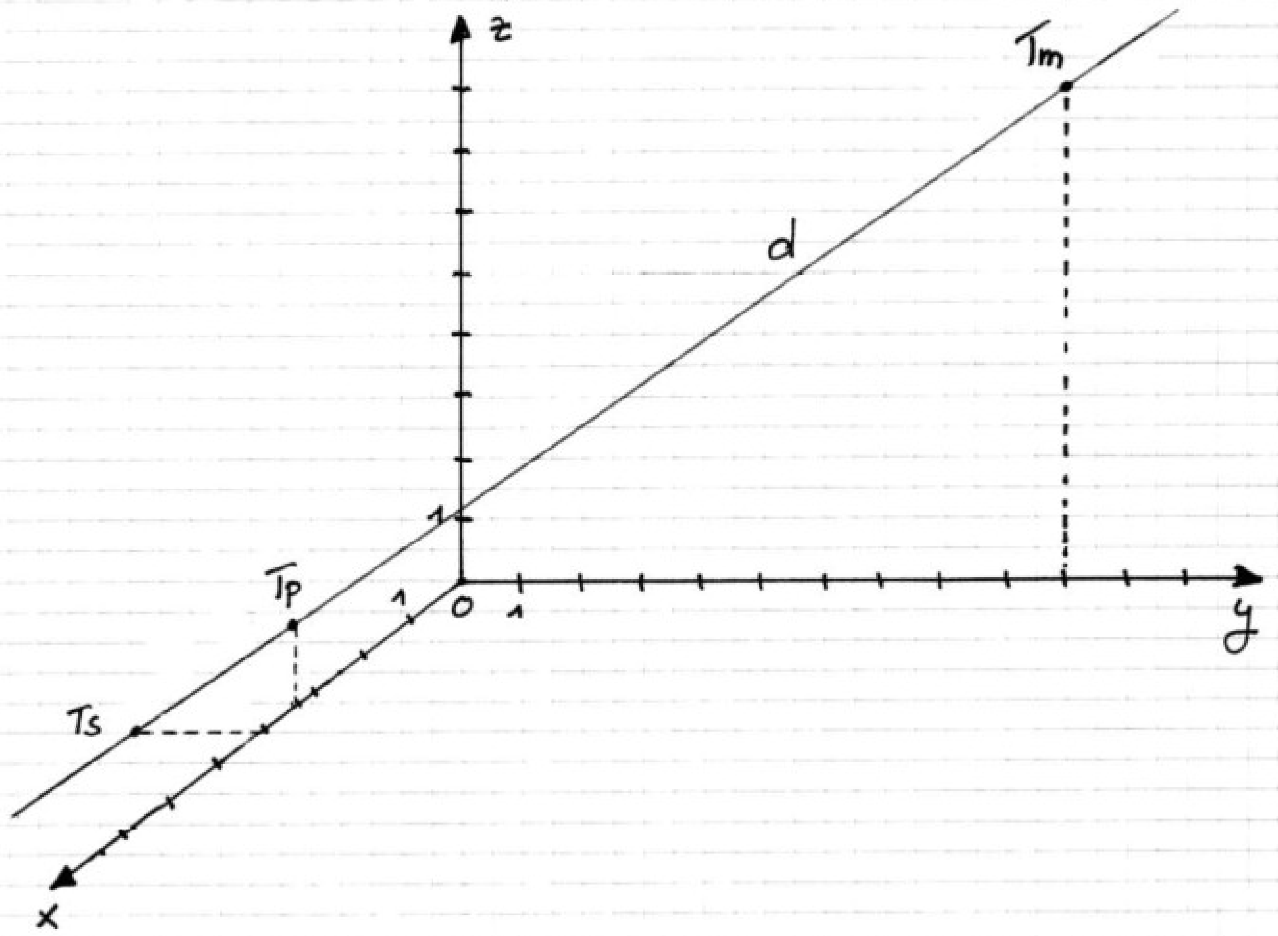
Illustrons ceci par un exemple.
Soit la droite d donnée par les équations paramétriques: $\begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 2 + 2\lambda . \end{cases}$

Trace dans le sol : poser $z=0$;
on a alors $2+2\lambda=0$, i.e. $2\lambda=-2$, i.e $\lambda=-1$;
ainsi $x=3-(-1)=4$ et $y=1+3(-1)=-2$;
donc $T_S(4\,;-2\,;0)$.

Trace dans la paroi : poser $y=0$;
on a alors $1+3\lambda=0$, i.e. $3\lambda=-1$, i.e. $\lambda=-\frac{1}{3}$;
ainsi $x=3-(-\frac{1}{3})=\frac{10}{3}$ et $z=2+2(-\frac{1}{3})=\frac{4}{3}$;
donc $T_P(\frac{10}{3}\,;0\,;\frac{4}{3})$.

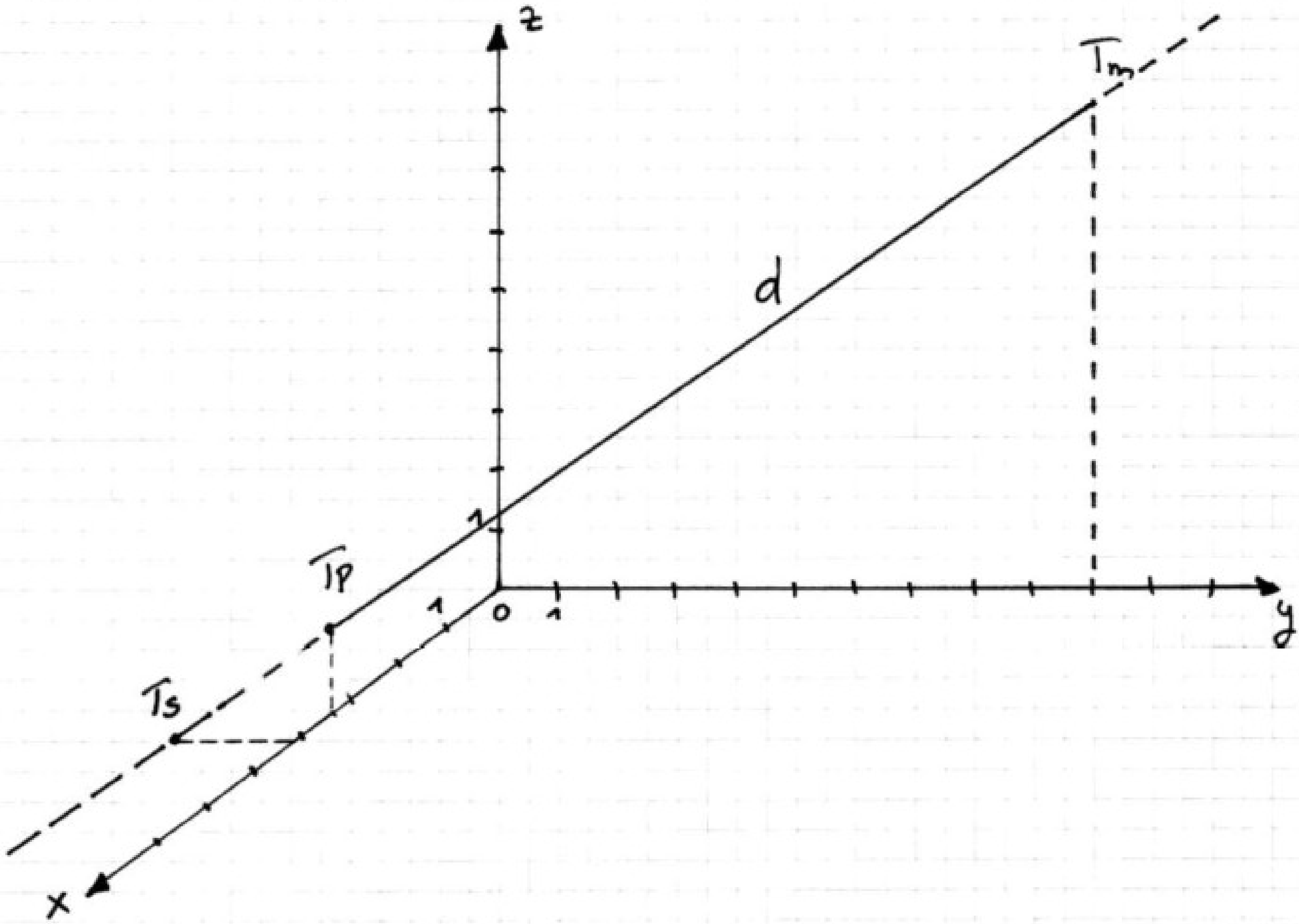
Trace dans le mur : poser $x=0$;
on a alors $3-\lambda=0$, i.e $\lambda=3$;
ainsi $y=1+3\cdot3=10$ et $z=2+2\cdot3=8$;
donc $T_m(0\,;10\,;8)$.

Représentons les traces dans un système d'axes et relions-les :

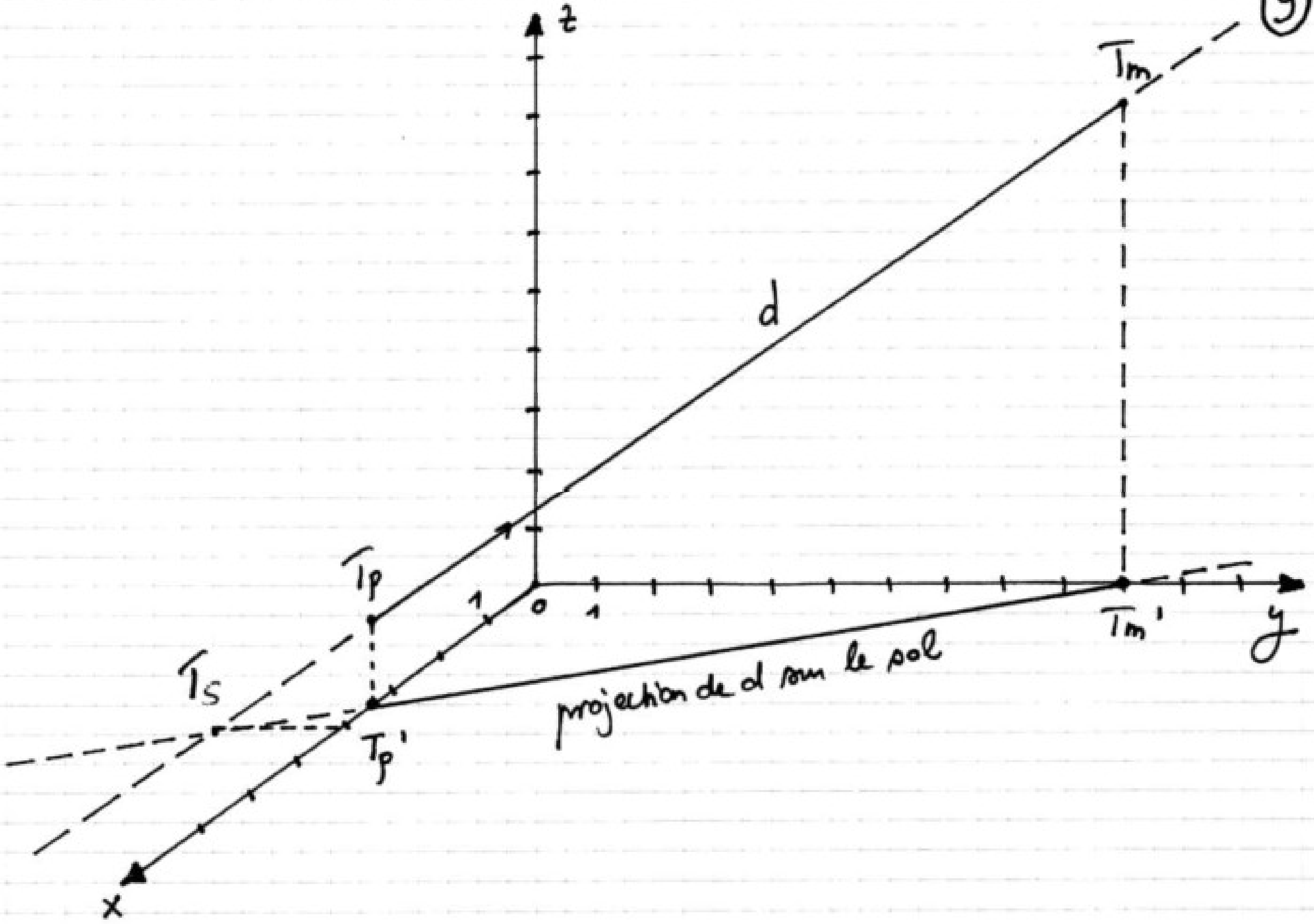


Lorsqu'on dessine une droite (ou un autre objet) dans un système d'axes de l'espace, il faut mettre en évidence les parties visibles (en traits continus) et les parties invisibles (en traits tillés). Les parties invisibles sont celles qui sont derrière un des plans de référence (pour l'observateur) et les parties visibles sont celles qui ne sont pas cachées par un plan de référence.

Ici T_S est derrière la paroi puisque sa deuxième coordonnées est négative. Ainsi, la partie contenant T_S jusqu'à T_P est invisible (en traits tillés). T_P et T_M sont visibles (ils sont sur la partie visible de la paroi et du mur). Le segment T_P et T_M est donc visible (trait continu). Après T_M, on passe derrière le mur : en traits tillés.
La représentation complète de d est donc:



On est aussi parfois intéressé à dessiner les <u>projections de la droite sur les plans de référence.</u>
Pour trouver la projection dans le sol, on projète T_P et T_M dans le sol et on relie ces projections avec T_S:
Dans l'exemple, on a $T_S(4;-2;0)$, $T_P\left(\frac{10}{3};0;\frac{4}{3}\right)$ et $T_M(0;10;8)$; les projections de T_P et T_M dans le sol sont $T_P'\left(\frac{10}{3};0;0\right)$ et $T_M'(0;10;0)$; on relie alors T_S, T_P' et T_M' en tenant compte des parties visibles et invisibles:



Similairement, pour trouver la projection de d dans la paroi, on projète T_S et T_m dans la paroi (mettre la 2^e coordonnée égale à zéro) et on relie ces projections à T_p.
Pour trouver la projection de d dans le mur, on projète T_S et T_p dans le mur (mettre la 1^{er} coordonnée égale à zéro) et on relie ces projections à T_m.

Lorsqu'on a 2 droites, on aimerait souvent connaître la <u>position relative de ces 2 droites.</u>
Il y a 4 possibilités:
1) Soit elles sont confondues;
2) soit elles sont parallèles (sans être confondues);
3) soit elles sont sécantes (un point d'intersection);
4) soit elles sont gauches (pas d'intersection et pas de parallélisme).

Pour déterminer cette position relative, on peut le faire algébriquement ou géométriquement.
Si on connaît les équations paramétriques des droites, on égalise les coordonnées et on résoud. Si on trouve une infinité de solutions, les droites sont confondues

(possibilité 1)) ; si on trouve zéro solution, les droites ne se coupent pas (possibilités 2) ou 4)) ; on regarde alors les vecteurs directeurs de ces droites ; si ils sont parallèles, les droites sont parallèles (possibilité 2)) ; si ils ne sont pas parallèles, les droites sont gauches (possibilité 4)) ; si on trouve exactement une solution, les droites sont sécantes (possibilité 3)).

Illustrons cela par un exemple.

Soient les droites d_1 et d_2 données par les équations paramétriques suivantes :

$$d: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \qquad d': \begin{cases} x = 3\mu \\ y = 1 - \mu \\ z = -1 + 2\mu \end{cases}$$

(lorsqu'on a 2 droites, il faut mettre des lettres différentes pour les paramètres, ceci afin d'éviter des confusions).

On égalise les coordonnées :

coordonnée x : $1 + \lambda = 3\mu$ ①

coordonnée y : $-2 - 2\lambda = 1 - \mu$ ②

coordonnée z : $3 - \lambda = -1 + 2\mu$ ③

On a ainsi 3 équations avec 2 inconnues.

Résolvons les 2 premières:

$$\begin{array}{rl|l} 1+\lambda &= 3\mu & \cdot 1 \\ -2-2\lambda &= 1-\mu & \cdot 3 \\ \hline -5-5\lambda &= 6 & +5 \\ -5\lambda &= 11 & :(-5) \\ \lambda &= -\frac{11}{5} & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl|l} 1+\lambda &= 3\mu & \cdot 2 \\ -2-2\lambda &= 1-\mu & \cdot 1 \\ \hline 0 &= 5\mu+1 & -1 \\ 5\mu &= -1 & :5 \\ \mu &= -\frac{1}{5} & \end{array}$$

La résolution de ① et ② donnent $\lambda = -\frac{11}{5}$ et $\mu = -\frac{1}{5}$.

Vérifions si ces solutions satisfont l'équation ③ :

$$3 - \lambda = 3 - \left(-\frac{11}{5}\right) = \frac{26}{5} \quad \text{et} \quad -1 + 2\mu = -1 + 2\cdot\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{7}{5}.$$

Cela ne marche pas.

Ainsi le système de 3 équations à 2 inconnues n'a pas de solution.

On est donc dans les possibilités 2) ou 4).

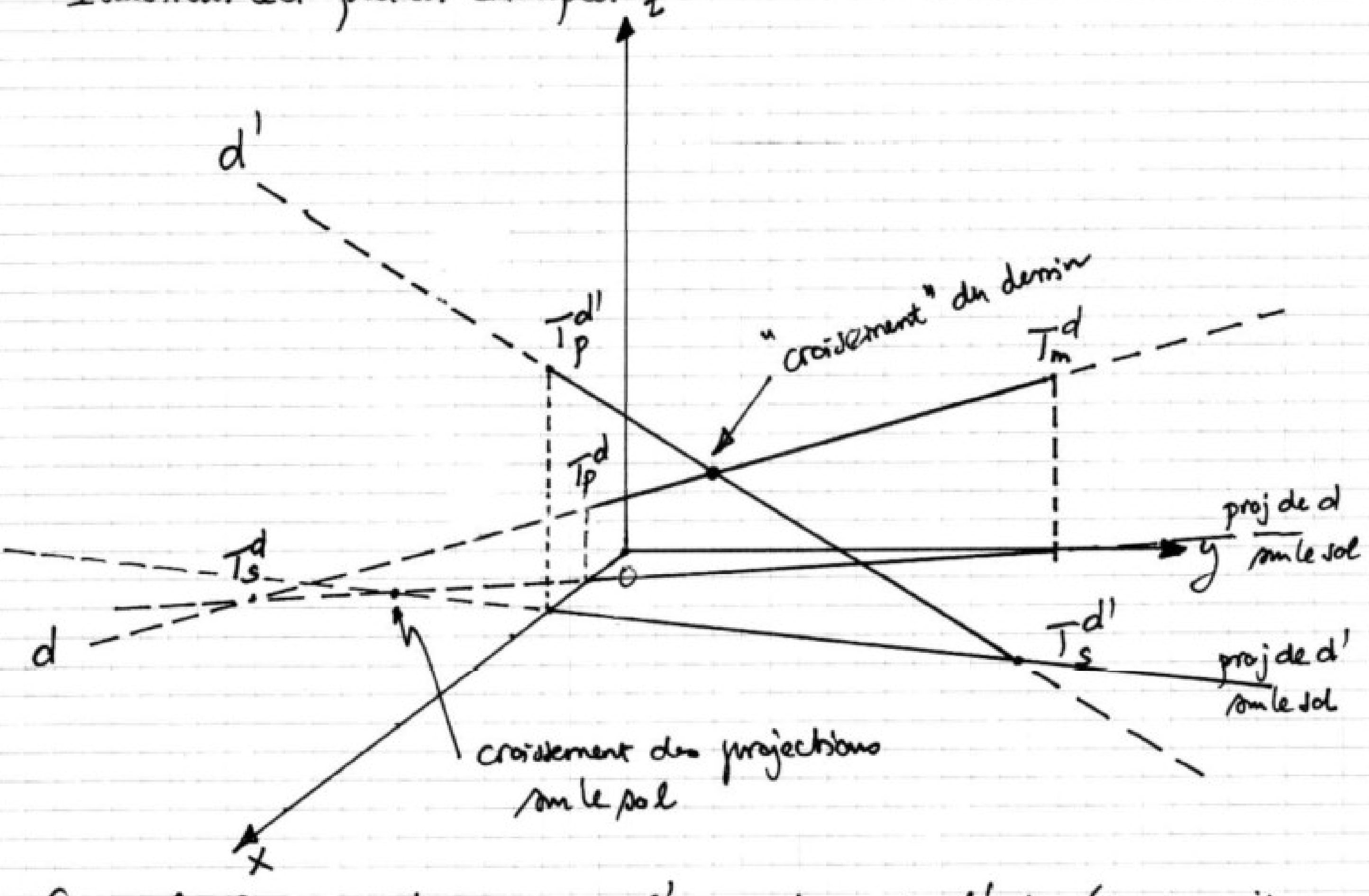
Regardons les vecteurs directeurs de d et d'.

Le vecteur directeur de d est : $\vec{d} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$.

Le vecteur directeur de d' est : $\vec{d}' = \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$.

Les vecteurs ne sont clairement pas parallèle (il n'existe pas de nombre k tel que $\vec{d} = k \cdot \vec{d}'$).
On est donc dans la possibilité 4).
Ainsi d et d' sont gauches.

Lorsque les 2 droites sont dessinées dans un système d'axes, on regarde leurs projections sur les plans de référence. Si les intersections de ces projections ne correspondent pas au point d'intersection du dessin des 2 droites, les droites sont gauches. (Les possibilités de droites confondues et parallèles se voient immédiatement sur le dessin.) Si les intersections des projections correspondent toutes au point d'intersection du dessin, alors les droites sont sécantes.
Illustrons ceci par un exemple:



Comme les 2 croisements ne sont pas l'un en-dessous de l'autre (ce qui serait le cas si les droites étaient sécantes), on en conclut qu'elles sont gauches.

Lorsque 2 droites sont sécantes, on peut chercher la <u>valeur de l'angle aigu entre ces 2 droites</u> (sauf si les droites sont perpendiculaires, il y a toujours un angle aigu et un angle obtus entre deux droites, leur somme étant $180°$:

c'est pourquoi on cherche à priori l'angle aigu).
Si $\vec{d_1}$ est un vecteur directeur de la $1^{ère}$ droite et $\vec{d_2}$ un vecteur directeur de la 2^e droite, alors l'angle aigu α entre les 2 droites est donné par :

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{d_1} \cdot \vec{d_2}|}{\|\vec{d_1}\| \cdot \|\vec{d_2}\|}.$$

On cherche parfois à calculer la <u>distance entre un point et une droite.</u>
Si d, la droite, est donné par un point A et un vecteur directeur $\vec{d}$, la distance d'un point P à la droite d est donnée par

$$\frac{\|\vec{AP} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}.$$

Si 2 points définissent une droite, 3 points non alignés définissent un <u>plan.</u>
En fait, pour déterminer exactement un plan, il faut un point et deux vecteurs non parallèles (si le plan est donné par 3 points A, B et C, il est aussi donné par le point A et les 2 vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ par exemple).
On peut alors définir les <u>équations paramétriques du plan :</u>
Soient $A(a_1; a_2; a_3)$ un point du plan et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$, alors les coordonnées d'un point quelconque $P(x; y; z)$ sont données par les relations

$$\begin{cases} x = a_1 + v_1\lambda + w_1\mu \\ y = a_2 + v_2\lambda + w_2\mu \\ z = a_3 + v_3\lambda + w_3\mu, \end{cases}$$

où λ et μ sont des nombres réels (appelés paramètres).
Ces relations sont les équations paramétriques du plan.

En éliminant λ et μ dans ces 3 relations, on arrive à une équation plus simple pour le plan. C'est <u>l'équation cartésienne du plan.</u>

Si, par exemple, le plan est donné par les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x = 3 + \lambda - 2\mu & (1) \\ y = -2 - 3\lambda + \mu & (2) \\ z = 1 - \lambda + \mu & (3). \end{cases}$$

On va éliminer les paramètres λ et μ.

Eliminons tout d'abord μ dans les couples (1)-(2) et (1)-(3):

$$\begin{array}{ll|l} (1) & x = 3+\lambda-2\mu & \cdot 1 \\ (2) & y = -2-3\lambda+\mu & \cdot 2 \\ \hline & x+2y = -1-5\lambda & (4) \end{array} \qquad \begin{array}{ll|l} (1) & x = 3+\lambda-2\mu & \cdot 1 \\ (3) & z = 1-\lambda+\mu & \cdot 2 \\ \hline & x+2z = 5-\lambda & (5) \end{array}$$

Eliminons maintenant λ dans le couple (4)-(5):

$$\begin{array}{ll|l} (4) & x+2y = -1-5\lambda & \cdot(-1) \\ (5) & x+2z = 5-\lambda & \cdot 5 \\ \hline & 4x-2y+10z = 26. & \end{array}$$

On soustrait 26 des 2 côtés, puis on divise par 2:

on obtient $2x - y + 5z - 13 = 0$, ce qui est l'équation cartésienne du plan.

L'équation cartésienne du plan est donc une équation de la forme

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Les nombres a, b et c ont la propriété que le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est perpendiculaire au plan.

Cette propriété est très utile pour déterminer l'équation cartésienne du plan sans passer par ses équations paramétriques (l'équation cartésienne est toujours la forme utilisée).

Si on doit, par exemple, chercher l'équation cartésienne du plan passant par $A(3;-1;2)$, $B(5;1;1)$ et $C(-1;6;3)$, on va chercher un vecteur perpendiculaire au plan.

Or, on sait que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$.

Ainsi le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est perpendiculaire au plan.

On a:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 - (-1)\cdot 8 \\ (-1)\cdot(-4) - 2\cdot 1 \\ 2\cdot 8 - 2\cdot(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+8 \\ 4-2 \\ 16+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 24 \end{pmatrix}$.

le vecteur est perpendiculaire au plan, donc le vecteur $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$ aussi

$\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 24 \end{pmatrix} \right)$.

On peut donc prendre $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$ pour le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, autrement dit, on peut prendre $a = 5$, $b = 1$ et $c = 12$.

Ainsi l'équation cartésienne du plan s'écrira $5x + y + 12z + d = 0$.

Reste à déterminer d.

Pour cela on utilise un des points connus du plan, par exemple $A(3;-1;2)$.

En remplaçant dans l'équation du plan x par 3, $y = -1$ et z par 2, cela doit jouer puisque A est un point du plan.

On obtient: $5\cdot 3 + (-1) + 12\cdot 2 + d = 0$, i.e.

$15 - 1 + 24 + d = 0$, i.e

$38 + d = 0$, i.e. $d = -38$.

L'équation du plan est donc finalement $5x + y + 12z - 38 = 0$.

Comme cas particulier d'équations cartésiennes, on a:

<u>équation du sol:</u> $z = 0$

<u>équation de la paroi:</u> $y = 0$

<u>équation du mur:</u> $x = 0$.

On peut s'intéresser à la <u>position relatives de 2 plans</u>.

Il y a 3 possibilités:

1) les plans sont confondus;
2) les plans sont parallèles (sans être confondus);
3) les plans sont sécants (ils se coupent selon une droite).

Pour déterminer cette position, on regarde tout d'abord les vecteurs normaux (perpendiculaires au plan):

Si le premier plan a pour équation $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, le vecteur $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ est perpendiculaire au plan;

Si le deuxième plan a pour équation $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, le vecteur $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ est perpendiculaire au plan.

Si $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont parallèles, alors les plans sont parallèles ou confondus.

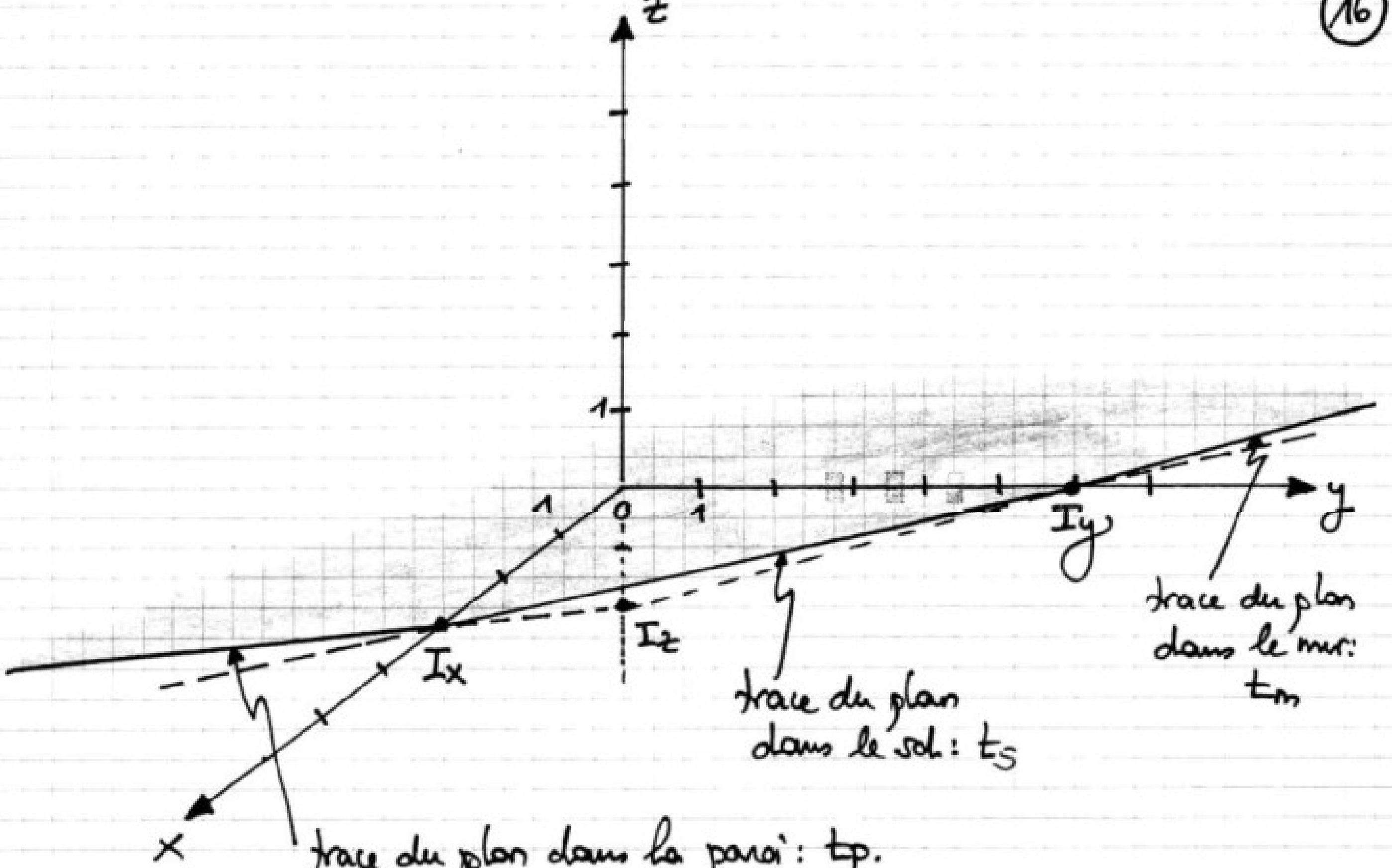
Si un point du premier plan appartient au deuxième plan, les plans sont alors confondus. Si ce point n'appartient pas au deuxième plan, les plans sont parallèles sans être confondus.

Si $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas parallèles, alors les plans sont sécants.
Pour trouver la droite d'intersection, le plus simple est d'en trouver 2 points, i.e. trouver 2 solutions au système $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$.
Par exemple, on peut prendre $x=0$ et résoudre le système de 2 équations à 2 inconnues restant, ce qui nous donne un 1er point, puis prendre $y=0$ et résoudre le système de 2 équations à 2 inconnues restant, ce qui nous donne un 2e point.
Trouver les équations paramétriques de la droite d'intersection des deux plans revient à trouver les équations de la droite passant par 2 points connus (les 2 points que l'on vient de trouver).

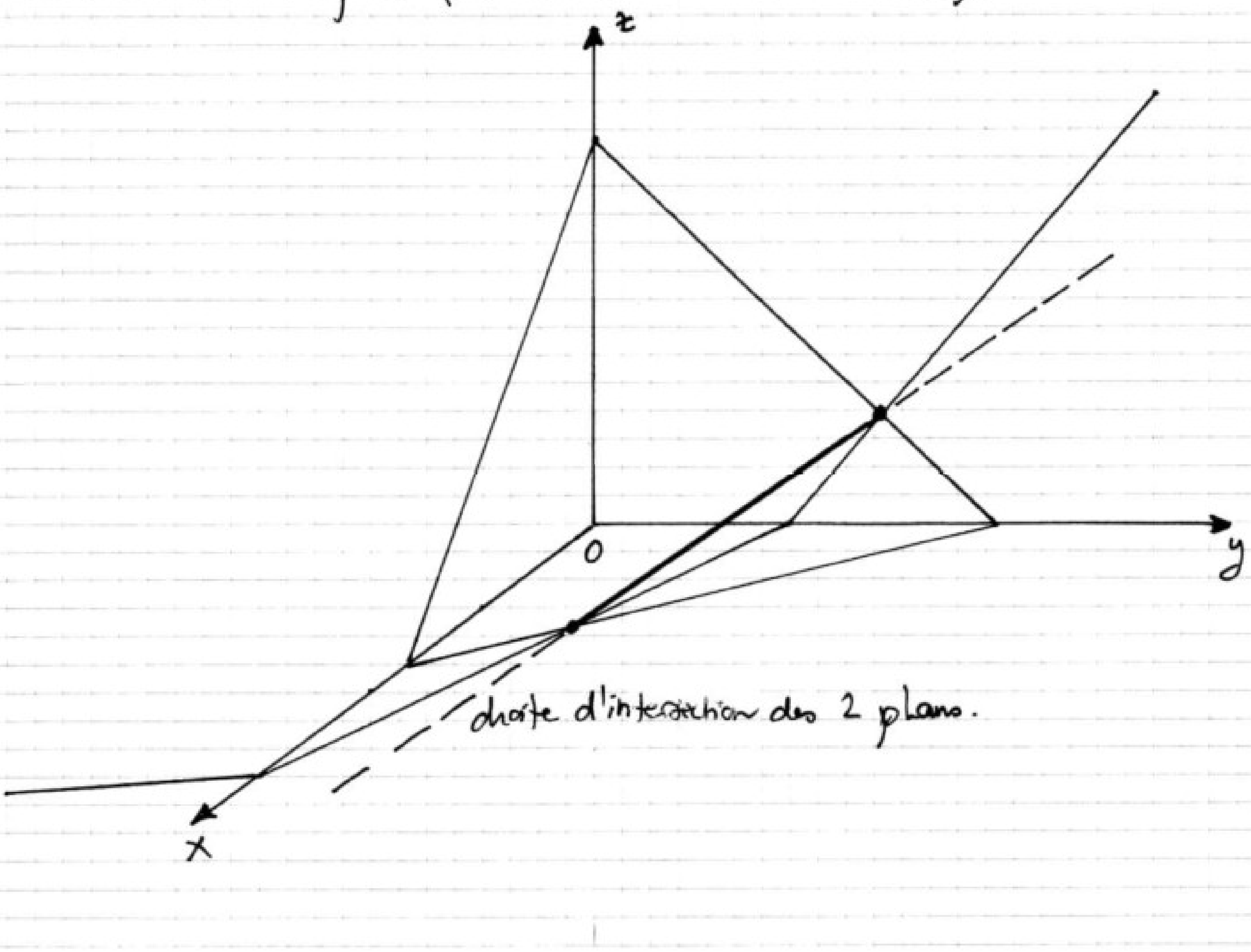
On peut aussi trouver géométriquement la droite d'intersection de deux plans, comme on le verra plus loin.

Lorsqu'on veut <u>dessiner un plan dans un système d'axes</u>, on commence par trouver les <u>intersections du plan avec les axes de référence</u>, puis, en les reliant par paires, on trouve ce qu'on appelle les <u>traces du plan</u>.

Illustrons ceci par un exemple : soit le plan donné par l'équation cartésienne $2x+y-3z=6$.
On cherche les intersections avec les axes :
intersection avec l'axe x : on pose $y=z=0$;
on trouve $2x=6$, i.e. $x=3$;
ainsi $I_x(3;0;0)$.
intersection avec l'axe y : on pose $x=z=0$;
on trouve $y=6$;
ainsi $I_y(0;6;0)$.
intersection avec l'axe z : on pose $x=y=0$;
on trouve $-3z=6$, i.e. $z=-2$;
ainsi $I_z(0;0;-2)$.
Dans un système d'axes, on obtient :



Lorsqu'on cherche à dessiner l'intersection de deux plans, il suffit de relier les intersections des traces dans le sol, des traces dans le mur et des traces dans la paroi (ou au moins deux d'entre elles) :



On doit souvent chercher à calculer la <u>distance d'un point à un plan.</u>

Si le plan est donné par l'équation $ax+by+cz+d=0$ et le point par $(x_0;y_0;z_0)$, alors la distance du point au plan est donnée par: $$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Si on doit calculer <u>l'angle entre une droite et un plan</u>, on calcule tout d'abord l'angle entre un vecteur directeur de la droite et un vecteur normal du plan, puis on trouve l'angle entre la droite et le plan en soustrayant l'angle trouvé à $90°$:
si le vecteur directeur de la droite est $\vec{d}$ et le vecteur normale au plan est $\vec{n}$, alors l'angle entre la droite et le plan est donné par: $$90° - \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{d}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{d}\|\cdot\|\vec{n}\|}\right).$$

Si on doit calculer <u>l'angle aigu entre deux plans</u> (comme pour les droites, il existe un angle aigu et un angle obtus entre 2 plans), cet angle sera égal à l'angle entre 2 normales à chaque plan:
si $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont des normales au plan, alors l'angle entre les deux plans sera donné par: $$\cos^{-1}\left(\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{\|\vec{n_1}\|\cdot\|\vec{n_2}\|}\right).$$

Un autre objet que l'on étudie dans l'espace est la <u>sphère.</u>

Une sphère est caractérisées par un centre et un rayon.
Si le centre est $K(x_0;y_0;z_0)$ et le rayon r, <u>l'équation de la sphère</u> est: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$.

Ainsi, si le centre de la sphère est $(1;-2;3)$ et le rayon 6, l'équation de la sphère est $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=36$ $(=6^2)$.
Inversément, si l'équation de la sphère est:
$(x+3)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=25$,
son centre est $(-3;2;4)$ et son rayon est 5 $(5^2=25)$.

Si l'équation de la sphère n'est pas donné sous la forme ci-dessus, on doit transformer l'équation donnée pour qu'elle soit de la bonne forme.

Par exemple, si on nous donne l'équation suivante :

$x^2+y^2+z^2-2x-4y+8z-43=0$	réorganisation des termes
$x^2-2x+y^2-4y+z^2+8z-43=0$	ajoute et soustraire des nombres
$x^2-2x+1-1+y^2-4y+4-4+z^2+8z+16-16-43=0$	identités remarquables
$(x-1)^2-1+(y-2)^2-4+(z+4)^2-16-43=0$	réduction
$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2-64=0$	$+64$
$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=64$	

L'équation $x^2+y^2+z^2-2x-4y+8z-43=0$ est donc l'équation d'une sphère de centre $(1;2;-4)$ et de rayon 8.

On s'intéresse parfois à la <u>position relative d'une droite et d'une sphère.</u>
On a alors 3 possibilités :

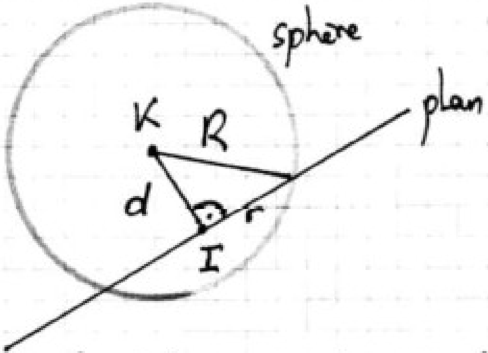
1) Si la distance du centre de la sphère à la droite est strictement inférieure au rayon de la sphère, la droite coupe la sphère en deux points ;
2) Si la distance du centre de la sphère à la droite est égale au rayon de la sphère, la droite est tangente à la sphère (il n'y a qu'une intersection entre la droite et la sphère) ;
3) Si la distance du centre de la sphère à la droite est strictement supérieure au rayon de la sphère, la droite ne coupe pas la sphère.

Pour déterminer le ou les points d'intersections d'une droite et d'une sphère, on substitue les équations paramétriques de la droite dans l'équation de la sphère, ce qui nous donne une équation du 2^e degré avec le paramètre de la droite ; on la résoud, puis on introduit la ou les solutions dans les équations paramétriques de la droite pour obtenir les coordonnées du ou des points d'intersection.

Si on s'intéresse à la <u>position relative d'un plan et d'une sphère</u>, on a aussi 3 possibilités :

1) Si la distance du centre de la sphère au plan est strictement inférieure au rayon de la sphère, le plan coupe la sphère selon un cercle ;
2) Si la distance du centre de la sphère au plan est égale au rayon de la sphère, le plan est tangent à la sphère (il y a un seul point de contact) ;
3) Si la distance du centre de la sphère au plan est strictement supérieure au rayon de la sphère, le plan ne coupe pas la sphère.

Dans le cas 1), on sera intéressé à trouver les coordonnées du centre du cercle d'intersection et son rayon.
Soit I le centre du cercle d'intersection et r son rayon.
Soit K le centre de la sphère et R son rayon.
Le vecteur $\overrightarrow{IK}$ est perpendiculaire au plan.
Connaissant l'équation cartésienne du plan, on peut trouver un vecteur normal au plan et prendre ce vecteur pour $\overrightarrow{IK}$.
On peut alors écrire les équations paramétriques de la droite passant par I et K (on connaît K et $\overrightarrow{IK}$).
En les substituant dans l'équation du plan, on en déduira les coordonnées de I (I est l'intersection de la droite passant par I et K et du plan).
Pour trouver le rayon r du cercle d'intersection, on utilise le théorème de Pythagore :



on calcule d, la distance de K au plan;
avec le théorème de Pythagore, on aura : $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

Dans le cas 2), on est intéressé à trouver les coordonnées du point de contact de la sphère et du plan.
Soit K le centre de la sphère et T le point de contact.
Le vecteur $\overrightarrow{KT}$ est perpendiculaire au plan.
Connaissant l'équation cartésienne du plan, on peut trouver un vecteur normal au plan et prendre ce vecteur pour $\overrightarrow{KT}$.
On peut alors écrire les équations paramétriques de la droite passant par K et T (on connaît K et $\overrightarrow{KT}$).
En les substituant dans l'équation du plan, on en déduira les coordonnées de T (T est l'intersection du plan et de la droite passant par K et T.

Exercice 1

a) Pour vérifier que le triangle ABC est isocèle, on doit calculer la longueur de chacun de ses côtés et vérifier que deux d'entre elles sont égales.

On a : $A(2;4;0)$, $B(4;1;2)$ et $C(0;2;3)$.

Ainsi : $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et

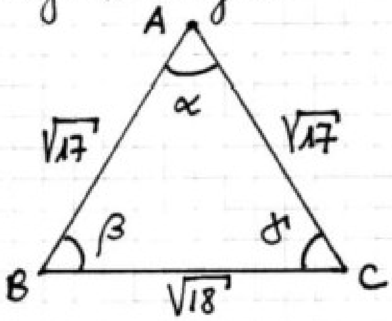
$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Donc : $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17}$,

$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{16+1+1} = \sqrt{18}$ et

$\|\overrightarrow{CA}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+4+9} = \sqrt{17}$.

Comme $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{CA}\|$, les côtés AB et AC du triangle sont égale et <u>le triangle ABC est donc bien isocèle.</u>



Comme le triangle est isocèle ($\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{CA}\|$), les angles en B et en C sont isométriques.

On aura ainsi $\beta = \gamma$.

Calculons α.

On a la relation $\cos(\alpha) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|}$.

On a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{17}$, $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{CA}\| = \sqrt{17}$.

Calculons le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-2) + (-3) \cdot (-2) + 2 \cdot 3 =$$
$$= -4 + 6 + 6 = 8.$$

Ainsi $\cos(\alpha) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|} = \dfrac{8}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{17}} = \dfrac{8}{17}$.

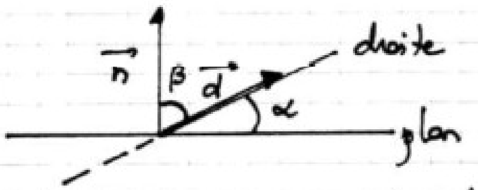
On en déduit que $\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{8}{17}\right) = 61,93°$.

Pour calculer $\beta = \gamma$, on utilise la relation $\alpha + \beta + \gamma = 180°$:

$61,93^\circ + \beta + \gamma = 180^\circ$, i.e. $61,93^\circ + 2\beta = 180^\circ$,
i.e. $2\beta = 118,07^\circ$, i.e. $\beta = 59,04^\circ$!

Ainsi $\underline{\underline{\alpha = 61,93^\circ \text{ et } \beta = \gamma = 59,04^\circ}}$.

b) Pour calculer l'angle entre une droite et un plan, on calcule tout d'abord l'angle aigu entre un vecteur directeur de la droite et une normale au plan, puis on fait $90^\circ -$ cette angle, ce qui nous donne l'angle cherché :



$\alpha = 90^\circ - \beta.$

Un vecteur de la droite AB est, par exemple, le vecteur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

L'équation cartésienne du sol est $z = 0$.
Un vecteur normal à ce plan est donc $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On calcule β, l'angle aigu entre $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$:

On a $\cos(\beta) = \dfrac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}|}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\vec{n}\|}$ (on met une valeur absolue car on veut l'angle aigu).

Comme $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 + (-3) \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$,

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{17}$ et $\|\vec{n}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$, on a

$\cos(\beta) = \dfrac{2}{\sqrt{17} \cdot 1} = \dfrac{2}{\sqrt{17}}$.

Ainsi $\beta = \cos^{-1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{17}}\right) = 60,98^\circ$.

On en conclut que l'angle entre la droite AB et le sol est :
$\alpha = 90 - 60,98^\circ = \underline{\underline{29,02^\circ}}$.

c) La caractéristique d'un plan tangent à une sphère est que la distance du centre de la sphère au plan doit être égal au rayon :
$d(K; \Pi) = r$, où : K est le centre de la sphère,
Π est le plan tangent,
r est le rayon de la sphère.

Comme la sphère est donnée par l'équation $(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 9$, le centre de la sphère est $K(1; -1; 0)$ (le centre de la sphère est dans le sol) et son rayon est $r = 3$ (puisque $3^2 = 9$).

Il nous faut maintenant l'équation cartésienne du plan Π_1 (le plan ABC), qui sera de la forme $ax+by+cz+d=0$, où le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal (perpendiculaire) au plan Π_1.

Le plan Π est le plan ABC. On connaît donc 3 points du plan: $A(2;4;0)$, $B(4;1;2)$ et $C(0;2;3)$.

Pour avoir un vecteur perpendiculaire au plan Π_1, on peut, par exemple, calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

On a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\cdot 3 - 2\cdot(-2) \\ 2\cdot(-2) - 2\cdot 3 \\ 2\cdot(-2) - (-3)\cdot(-2) \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -9+4 \\ -4-6 \\ -4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Comme ce vecteur est parallèle au vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\left(\begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ -10 \end{pmatrix} = -5\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$,

on va prendre $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ comme vecteur perpendiculaire au plan Π_1.

On a ainsi Π: $x+2y+2z+d=0$

Utilisons maintenant un point du plan Π_1, par exemple A, pour déterminer d:

Comme $A(2;4;0)$, en remplaçant x par 2, y par 4 et z par 0 dans l'équation de Π_1, l'égalité doit être vérifiée:

$$2+2\cdot 4+2\cdot 0+d=0$$

i.e. $2+8+d=0$

i.e. $10+d=0$

i.e. $d=-10$.

L'équation du plan Π_1 (plan ABC) est donc: $x+2y+2z-10=0$

On cherche des plans parallèles au plan Π (plan ABC).

Un vecteur perpendiculaire à ces plans sera le même qu'un vecteur perpendiculaire au plan Π_1.

Ainsi un vecteur perpendiculaire à ces plans parallèles sera aussi $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et l'équation de ces plans sera Π: $x+2y+2z+d=0$.

On va déterminer les valeurs possibles de d en tenant compte du

fait que ces plans doivent être tangents à la sphère :
on doit avoir $d(K; \Pi) = r$, où : $K(1; -1; 0)$

$r = 3$

$\Pi: x + 2y + 2z + d = 0$

En utilisant la formule de calcul de la distance d'un point à un plan, on doit avoir :

$$\frac{|1 + 2\cdot(-1) + 2\cdot 0 + d|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 3,$$

i.e $\dfrac{|1-2+d|}{\sqrt{9}} = 3$, i.e. $\dfrac{|-1+d|}{3} = 3$, i.e. $|-1+d| = 9$.

Cette équation a alors 2 solutions :

1) $-1 + d = 9$, i.e. $d = 10$;
2) $-1 + d = -9$, i.e. $d = -8$.

On a donc 2 solutions pour les plans tangents à la sphère et parallèle à Π_1 (plan ABC) :

$$x + 2y + 2z + 10 = 0$$

et $x + 2y + 2z - 8 = 0$

Exercice 2

a) Comme un vecteur normal (perpendiculaire) à Π est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$, l'équation de Π est : $2x - 3y + 6z + d = 0$.

Le plan Π doit être tangent à la sphère s. Ainsi la distance du centre de la sphère au plan Π doit être égal au rayon de la sphère :

$d(K; \Pi) = r$, où : K est le centre de la sphère,
r est le rayon de la sphère.

L'équation de la sphère est : $(x-2)^2 + y^2 + (z+5)^2 = 36$.

Ainsi le centre de la sphère est $K(2; 0; -5)$ (le centre de la sphère est dans la paroi) et le rayon de la sphère est 6 (puisque $6^2 = 36$).

En utilisant la formule de la distance d'un point à un plan, on doit avoir :

$$\frac{|2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + 6 \cdot (-5) + d|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = 6,$$

i.e. $\dfrac{|4 - 30 + d|}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = 6$, i.e. $\dfrac{|-26 + d|}{\sqrt{49}} = 6$, i.e. $\dfrac{|-26 + d|}{7} = 6$,

i.e. $|-26 + d| = 42$.

Cette équation a 2 solutions :

1) $-26 + d = 42$, i.e. $d = 68$;

2) $-26 + d = -42$, i.e. $d = -16$.

On a donc 2 solutions pour le plan Π :

$$2x - 3y + 6z + 68 = 0 \quad \text{et} \quad 2x - 3y + 6z - 16 = 0.$$

On va déterminer lequel choisir en trouvant les points de tangence (on prendra le plan correspondant au point de tangence qui a la plus grande cote possible, i.e. la plus grande 3^e coordonnée).

Afin de déterminer ces points de tangence, on va chercher les équations paramétriques de la droite perpendiculaire aux plans et passant par le centre de la sphère, puis calculer les intersections de cette droite avec les plans, ce qui nous donnera les points de tangence.

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ est perpendiculaire aux plans.

Cela sera donc un vecteur directeur de la droite cherchée.

Ainsi les équations paramétriques de cette droite sont, par exemple,

$$\begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = \quad -3\lambda \\ z = -5 + 6\lambda \end{cases}$$

Intersection de la droite avec le plan $2x-3y+6z+68=0$:

$$2(2+2\lambda)-3(-3\lambda)+6(-5+6\lambda)+68=0 \quad | \text{ distributivité}$$
$$4+4\lambda+9\lambda-30+36\lambda+68=0 \quad | \text{ réduction}$$
$$49\lambda+42=0 \quad | -42$$
$$49\lambda=-42 \quad | :49$$
$$\lambda=-\frac{42}{49}=-\frac{6}{7}$$

Ainsi $x=2+2\cdot\left(-\frac{6}{7}\right)=2-\frac{12}{7}=\frac{2}{7}$

$y=-3\cdot\left(-\frac{6}{7}\right)=\frac{18}{7}$

$z=-5+6\left(-\frac{6}{7}\right)=-5-\frac{36}{7}=-\frac{71}{7}$.

Dans ce cas, le point de tangence est $\left(\frac{2}{7};\frac{18}{7};-\frac{71}{7}\right)$.

Intersection de la droite avec le plan $2x-3y+6z-16=0$:

$$2(2+2\lambda)-3(-3\lambda)+6(-5+6\lambda)-16=0 \quad | \text{ distributivité}$$
$$4+4\lambda+9\lambda-30+36\lambda-16=0 \quad | \text{ réduction}$$
$$49\lambda-42=0 \quad | +42$$
$$49\lambda=42 \quad | :49$$
$$\lambda=\frac{42}{49}=\frac{6}{7}$$

Ainsi $x=2+2\cdot\frac{6}{7}=2+\frac{12}{7}=\frac{26}{7}$

$y=-3\cdot\frac{6}{7}=-\frac{18}{7}$

$z=-5+6\cdot\frac{6}{7}=-5+\frac{36}{7}=\frac{1}{7}$.

Dans ce cas, le point de tangence est $\left(\frac{26}{7};-\frac{18}{7};\frac{1}{7}\right)$.

C'est le dernier point qui a la plus grande cote (3^e coordonnée).
Ainsi le plan tangent cherché est $\underline{\underline{2x-3y+6z-16=0}}$
et le point de tangence est $\left(\frac{26}{7};-\frac{18}{7};\frac{1}{7}\right)$.

b) Le point $A(x;-5;-2)$ est situé sur le plan π : $2x-3y+6z-16=0$.
En remplaçant y par -5 et z par -2, on trouve :

$$2x-3\cdot(-5)+6\cdot(-2)-16=0 \quad | \text{ calculs}$$
$$2x+15-12-16=0 \quad | \text{ calculs}$$
$$2x-13=0 \quad | +13$$
$$2x=13 \quad | :2$$
$$\underline{\underline{x=6,5}}$$

c) Comme t passe par A, est contenue dans le plan Π et est tangente à la sphère S, elle doit passer par le point de tangence. (26)
D'après la question a), ce point de tangence est $T\left(\frac{26}{7};-\frac{18}{7};\frac{1}{7}\right)$.

Il nous suffit donc de trouver les équations paramétriques de la droite passant par A et T.
D'après b), on a $A(6,5;-5;-2)$.
Un vecteur parallèle à la droite passant par A et T est:
$$\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{OT}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}26/7\\-18/7\\1/7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6,5\\-5\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-39/14\\17/7\\15/7\end{pmatrix}.$$

En multipliant ce vecteur par 14, on peut prendre comme vecteur directeur de la droite passant par A et T le vecteur $\begin{pmatrix}-39\\34\\30\end{pmatrix}$.

Les équations paramétriques de la droite passant par A et T sont donc, par exemple:
$$\begin{cases}x=6,5-39\lambda\\y=-5+34\lambda\\z=-2+30\lambda.\end{cases}$$

Exercice 3

La sphère S est centrée en $C(5;4;0)$ et son rayon est 3.
L'équation de la sphère S est donc : $(x-5)^2+(y-4)^2+z^2=9$ $(9=3^2)$.
On remarque que le centre de la sphère est dans le sol.
La droite t passe par $S(2;7;3)$ et un vecteur directeur est $\vec{t}=-\vec{u_1}+4\vec{u_2}+\vec{u_3}$.
Autrement dit, $\vec{t}=\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$.

Ainsi les équations paramétriques de t sont : $\begin{cases} x=2-\lambda \\ y=7+4\lambda \\ z=3+\lambda . \end{cases}$

a) On va chercher la ou les intersections de la droite t avec la sphère s.
Par substitution, on obtient :

$$(2-\lambda-5)^2+(7+4\lambda-4)^2+(3+\lambda)^2=9 \qquad \text{calculs}$$
$$(-\lambda-3)^2+(4\lambda+3)^2+(\lambda+3)^2=9 \qquad \text{identités remarquables}$$
$$\lambda^2+6\lambda+9+16\lambda^2+24\lambda+9+\lambda^2+6\lambda+9=9 \qquad \text{réduction}$$
$$18\lambda^2+36\lambda+27=9 \qquad -9$$
$$18\lambda^2+36\lambda+18=0 \qquad :18$$
$$\lambda^2+2\lambda+1=0 \qquad \text{identité remarquable}$$
$$(\lambda+1)^2=0 \qquad \sqrt{}$$
$$\lambda+1=0 \qquad -1$$
$$\lambda=-1$$

Comme il n'y a qu'une solution pour λ, il n'y a qu'une intersection entre la droite t et la sphère S.
On en conclut donc bien que <u>la droite t est tangente à la droite S.</u>

Avec $\lambda=-1$, on trouve : $\begin{cases} x=2-(-1)=3 \\ y=7+4\cdot(-1)=3 \\ z=3+(-1)=2. \end{cases}$

Le point de contact (point de tangence) est donc <u>$T(3;3;2)$</u>.

b) Le plan Π doit contenir la droite t est être tangent à la sphère S.
Par conséquent, un vecteur normale au plan Π est le vecteur $\overrightarrow{CT}$ où C est le centre de la sphère et T est le point de contact de la droite t avec la sphère S, et donc aussi le point de contact du plan Π avec la sphère S.

On a $\overrightarrow{CT}=\overrightarrow{OT}-\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{CJ} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est normal au plan Π, l'équation du plan Π (28)

sera de la forme : $-2x - y + 2z + d = 0$.

Pour trouver d, on utilise un point connu du plan Π : $T(3;3;2)$.

Par substitution dans l'équation de Π, on obtient :

$-2 \cdot 3 - 3 + 2 \cdot 2 + d = 0$, i.e. $-6 - 3 + 4 + d = 0$,

i.e. $-5 + d = 0$, i.e. $d = 5$.

L'équation du plan Π est donc $\underline{\underline{-2x - y + 2z + 5 = 0}}$.

c) Pour calculer l'angle aigu entre deux droites, il nous faut pour chacune d'elles un vecteur directeur :

pour la droite t : vecteur directeur : $\vec{t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

pour la droite SC : on calcule $\overrightarrow{SC}$:

$$\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix};$$

en divisant le vecteur par 3, on peut prendre comme vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

L'angle α entre les droites t et SC (angle aigu) est donné par la relation :
$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{t} \cdot \vec{d}|}{\|\vec{t}\| \cdot \|\vec{d}\|}.$$

On a : $\vec{t} \cdot \vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) =$

$= -1 - 4 - 1 = -6$;

$|\vec{t} \cdot \vec{d}| = |-6| = 6$;

$\|\vec{t}\| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18}$;

$\|\vec{d}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$.

Ainsi $\cos(\alpha) = \frac{6}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{54}}$ et, donc, $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{6}{\sqrt{54}}\right) = \underline{\underline{35,26°}}$.

d) Comme les droites cherchées doivent être tangentes à la sphère S, il faut que la distance du centre de la sphère aux droites cherchées soit égale au rayon du cercle.

Le centre de la sphère est $C(5;4;0)$. Son rayon est 3.

Les droites passent par $S(2;7;3)$ et ont comme vecteur directeur $\vec{d} = \vec{u_1} - \vec{u_2} + k \cdot \vec{u_3}$, i.e. $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ k \end{pmatrix}$.

La formule de la distance d'un point C à une droite de vecteur directeur $\vec{d}$ est donnée par la formule :

$$d(C;d) = \frac{\|\vec{SC} \wedge \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}.$$

On doit donc avoir : $\dfrac{\|\vec{SC} \wedge \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|} = 3.$

On a :

$\vec{SC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ (voir question c)) ;

$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ k \end{pmatrix}$;

$$\vec{SC} \wedge \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.k - (-3).(-1) \\ -3.1 - 3.k \\ 3.(-1) - (-3).1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3k-3 \\ -3k-3 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\|\vec{SC} \wedge \vec{d}\| = \sqrt{(-3k-3)^2 + (-3k-3)^2 + 0^2} =$$

$$= \sqrt{2(-3k-3)^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(-3k-3)^2} =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{2}\,(-3k-3) = -\sqrt{2}\,(3k+3) \\ \sqrt{2} \cdot [-(-3k-3)] = \sqrt{2}\,(3k+3) \end{cases};$$

$$\|\vec{d}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + k^2} = \sqrt{1+1+k^2} = \sqrt{k^2+2}.$$

On a donc 2 possibilités :

1) $\dfrac{-\sqrt{2}\,(3k+3)}{\sqrt{k^2+2}} = 3$;

2) $\dfrac{\sqrt{2}\,(3k+3)}{\sqrt{k^2+2}} = 3.$

En élevant ces 2 égalités à la puissance, on aboutit les 2 fois à :

$\dfrac{2(3k+3)^2}{k^2+2} = 9$	$\cdot\,(k^2+2)$
$2(3k+3)^2 = 9(k^2+2)$	identité remarquable
$2(9k^2+18k+9) = 9(k^2+2)$	distributivité
$18k^2+36k+18 = 9k^2+18$	$-9k^2$, -18
$9k^2+36k = 0$	mise en évidence
$9k(k+4) = 0$	

Un produit étant nul uniquement si un des facteurs est nul, on aboutit à : soit $k=0$, soit $k+4=0$, i.e $k=-4$.

Si $\underline{\underline{k=0}}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et les équations paramétriques de la tangente sont :

$$\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 7-\lambda \\ z = 3 \end{cases}.$$

Cherchons le point de contact de cette tangente avec la sphère S d'équation $(x-5)^2+(y-4)^2+z^2=9$.

Par substitution, on trouve :

$(2+\lambda-5)^2+(7-\lambda-4)^2+3^2=9$	calculs
$(\lambda-3)^2+(-\lambda+3)^2+9=9$	-9
$(\lambda-3)^2+(-\lambda+3)^2=0$	calculs
$(\lambda-3)^2+(\lambda-3)^2=0$	calculs
$2(\lambda-3)^2=0$	$:2$
$(\lambda-3)^2=0$	$\sqrt{\ }$
$\lambda-3=0$	$+3$
$\lambda=3$	

Avec $\lambda=3$, le point de contact est : $x=2+3=5$
$y=7-3=4$
$z=3$

$\Rightarrow$ le point de contact est $\underline{\underline{(5;4;3)}}$.

Si $\underline{\underline{k=-4}}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ et les équations paramétriques de la tangente sont :

$$\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 7-\lambda \\ z = 3-4\lambda \end{cases}.$$

Cherchons le point de contact de cette tangente avec la sphère S d'équation $(x-5)^2+(y-4)^2+z^2=9$.

Par substitution, on trouve :

$(2+\lambda-5)^2+(7-\lambda-4)^2+(3-4\lambda)^2=9$	calculs
$(\lambda-3)^2+(-\lambda+3)^2+(3-4\lambda)^2=9$	identités remarquables
$\lambda^2-6\lambda+9+\lambda^2-6\lambda+9+9-24\lambda+16\lambda^2=9$	réduction
$18\lambda^2-36\lambda+27=9$	-9
$18\lambda^2-36\lambda+18=0$	$:18$
$\lambda^2-2\lambda+1=0$	identité remarquable
$(\lambda-1)^2=0$	$\sqrt{\ }$
$\lambda-1=0$, i.e. $\lambda=1$	

Avec $\lambda = 1$, le point de contact est : $x = 2+1 = 3$

$y = 7-1 = 6$

$z = 3-4\cdot 1 = -1$

$\Rightarrow$ le point de contact est $\underline{\underline{(3;6;-1)}}$.

Exercice 4

a) Cherchons la distance du centre M de la sphère au plan Π.
Si elle est inférieure au rayon de la sphère, le plan coupe la sphère selon un cercle ; si elle est égale au rayon de la sphère, le plan est tangent à la sphère ; si elle est supérieure au rayon de la sphère, le plan ne coupe pas et n'est pas tangent à la sphère.
L'équation du plan est Π : $3x+y-z-14=0$.
Le centre de la sphère est $M(3;0;12)$ (c'est un point de la paroi).
En utilisant la formule pour la distance d'un point à un plan, on a :

$$\frac{|3\cdot 3+0-12-14|}{\sqrt{3^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{|9-12-14|}{\sqrt{9+1+1}}=\frac{|-17|}{\sqrt{11}}=\frac{17}{\sqrt{11}}\cong 5{,}13.$$

Comme $5{,}13<13$, rayon de la sphère, <u>le plan Π coupe la sphère S selon un cercle.</u>

b) Pour que le point $A(3;a;7)$ soit situé sur Π : $3x+y-z-14=0$, en substituant x par 3, y par a et z par 7 dans l'équation de Π, on pourra en déduire a :

$$\begin{array}{c|l} 3\cdot 3+a-7-14=0 & \text{calcul} \\ 9+a-7-14=0 & \text{Calcul} \\ a-12=0 & +12 \\ \underline{\underline{a=12}} & \end{array}$$

c) Le vecteur $\vec{n}$ est normal (perpendiculaire) à Π : $3x+y-z-14=0$.
Ainsi on peut prendre pour $\vec{n}$: $\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$.
La droite d doit avoir un vecteur directeur perpendiculaire à $\overrightarrow{MA}$ et à $\vec{n}$.
Le vecteur $\vec{d}=\overrightarrow{MA}\wedge\vec{n}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{MA}$ et à $\vec{n}$.
Calculons $\overrightarrow{MA}$:

$$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}=\begin{pmatrix}3\\12\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\0\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\12\\-5\end{pmatrix}.$$

Calculons $\overrightarrow{MA}\wedge\vec{n}=\vec{d}$:

$$\vec{d}=\overrightarrow{MA}\wedge\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\12\\-5\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\cdot(-1)-(-5)\cdot 1\\-5\cdot 3-0\cdot(-1)\\0\cdot 1-12\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12+5\\-15\\-36\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\-15\\-36\end{pmatrix}.$$

En multipliant $\vec{d}$ par -1, un vecteur directeur de la droite cherchée est $\begin{pmatrix}7\\15\\36\end{pmatrix}$.

Comme la droite passe par $A(3;12;7)$, ses équations paramétriques sont :

$$d: \begin{cases} x = 3 + 7\lambda \\ y = 12 + 15\lambda \\ z = 7 + 36\lambda. \end{cases}$$

d) Cherchons à voir si d coupe Π: $3x + y - z - 14 = 0$.

Par substitution des équations paramétriques de d dans l'équation de Π, on obtient

$$\begin{aligned} 3(3+7\lambda) + 12 + 15\lambda - (7+36\lambda) - 14 &= 0 && \text{distributivité} \\ 9 + 21\lambda + 12 + 15\lambda - 7 - 36\lambda - 14 &= 0 && \text{réduction} \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Ceci est toujours vrai. Ainsi toutes les valeurs possibles de λ sont solutions.

On en conclut que d est incluse dans Π.

e) Similairement à a), on va chercher la distance entre le centre de la sphère et la droite d.

Le centre de la sphère est : $M(3;0;12)$

Un point de la droite d est : $A(3;12;7)$

Un vecteur directeur de la droite d est : $\vec{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \\ 36 \end{pmatrix}$.

La distance de M à d est alors donnée par $\dfrac{\|\overrightarrow{AM} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$.

On a :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 5 \end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{AM} \times \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12\cdot 36 - 5\cdot 15 \\ 5\cdot 7 - 0\cdot 36 \\ 0\cdot 15 - (-12)\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -432 - 75 \\ 35 \\ 84 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -507 \\ 35 \\ 84 \end{pmatrix};$$

$$\|\overrightarrow{AM} \times \vec{d}\| = \sqrt{(-507)^2 + 35^2 + 84^2} = \sqrt{257049 + 1225 + 7056} = \sqrt{265330};$$

$$\|\vec{d}\| = \sqrt{7^2 + 15^2 + 36^2} = \sqrt{49 + 225 + 1296} = \sqrt{1570}.$$

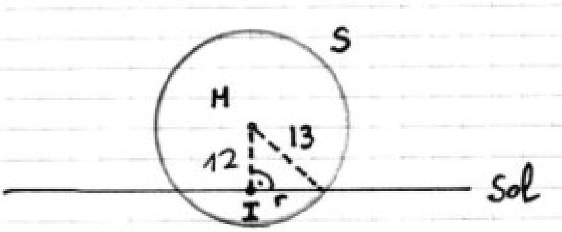
Ainsi la distance entre M et la droite d est : $\dfrac{\sqrt{265'330}}{\sqrt{1570}} = \sqrt{\dfrac{265'330}{1570}} =$

$= \sqrt{169} = 13.$

C'est exactement le rayon de la sphère.

Donc d est tangente à la sphère S.

f)



Le centre du cercle est la projection de M sur le sol. Comme $M(3;0;12)$, on a $I(3;0;0)$.

M se situe à 12 au-dessus de I.

En utilisant Pythagore dans le triangle rectangle, on a :

$$13^2 = 12^2 + r^2,$$
$$\text{i.e. } 169 = 144 + r^2,$$
$$\text{i.e } r^2 = 25 \text{ , i.e } r = 5.$$

Le rayon du cercle vaut donc 5.

g) Pour que le point $B(b;4;0)$ soit un point du cercle C, il faut que la distance du centre I du cercle à B vale le rayon du cercle : on doit avoir $\|\overrightarrow{IB}\| = 5$.

On a :

$$\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OI} = \begin{pmatrix} b \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\|\overrightarrow{IB}\| = \sqrt{(b-3)^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{(b-3)^2 + 16}.$$

Pour avoir $\|\overrightarrow{IB}\| = 5$, on doit donc avoir :

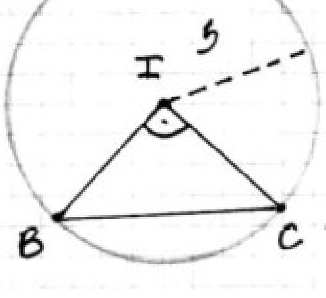
$$\begin{aligned} \sqrt{(b-3)^2+16} &= 5 & &\Big|\ (\ )^2 \\ (b-3)^2 + 16 &= 25 & &\Big|\ -16 \\ (b-3)^2 &= 9 & &\Big|\ \sqrt{\ } \\ b-3 &= \pm 3 \end{aligned}$$

$b - 3 = 3 \Rightarrow b = 6$

$b - 3 = -3 \Rightarrow b = 0.$

Comme on veut $b \neq 0$, on obtient $b = 6$.

h)



L'angle droit est nécessairement en I (sinon le point C ne peut pas être sur le cercle).

On doit ainsi avoir $\overrightarrow{IC} \perp \overrightarrow{IB}$ avec $\|\overrightarrow{IC}\| = \|\overrightarrow{IB}\| = 5$.

Calculons $\overrightarrow{IB}$:

On a $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OI} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si on se restreint au sol, donc à 2 dimensions, on peut dire que $\overrightarrow{IB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

D'après la géométrie plane, on sait qu'un vecteur perpendiculaire à $\overrightarrow{IB}$ et de même longueur est $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On peut donc choisir pour $\overrightarrow{IC}$ soit $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, soit $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si $\overrightarrow{IC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, comme $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OC} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient $\overrightarrow{OC} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où on déduit que :

$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi une des possibilités pour C est $\underline{\underline{(7\,;-3\,;0)}}$.

Si $\overrightarrow{IC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, comme $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OC} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient $\overrightarrow{OC} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où on déduit que :

$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi l'autre possibilité pour C est $\underline{\underline{C(-1\,;3\,;0)}}$.

i) Le triangle BIC est un triangle rectangle isocèle.
Ainsi $\underline{\underline{\widehat{BIC} = 90^\circ \text{ et } \widehat{IBC} = \widehat{ICB} = 45^\circ}}$.

L'aire du triangle BIC est $\frac{5.5}{2} = \underline{\underline{12,5}}$.

Exercice 5

a) Le centre de la sphère est $C(1;0;3)$ (le centre est dans la paroi) et le rayon de la sphère est $\sqrt{38} \cong 6,16$.

La droite d passe par $A(10;0;0)$ et un vecteur directeur est $\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La distance de C à d est donnée par la formule:

$$\frac{\|\vec{CA} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}.$$

On a : $\vec{CA} = \vec{OA} - \vec{OC} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$;

$\vec{CA} \times \vec{d} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1-(-3).3 \\ -3.(-4)-9.1 \\ 9.3-0.(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12-9 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 27 \end{pmatrix}$;

$\|\vec{CA} \times \vec{d}\| = \sqrt{9^2+3^2+27^2} = \sqrt{81+9+729} = \sqrt{819}$;

$\|\vec{d}\| = \sqrt{(-4)^2+3^2+1^2} = \sqrt{16+9+1} = \sqrt{26}$.

Ainsi la distance de C à d est $\frac{\sqrt{819}}{\sqrt{26}} = \sqrt{\frac{819}{26}} = \underline{\underline{\sqrt{31,5} \cong 5,61}}$.

Comme $5,61 < 6,16$ (rayon de la sphère), on en déduit que <u>d coupe la sphère.</u>

b) Les équations paramétriques de d sont : $\begin{cases} x = 10-4\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda. \end{cases}$

L'équation de la sphère est : $(x-1)^2+y^2+(z-3)^2 = 38$.

Par substitution, on obtient:

$(10-4\lambda-1)^2+(3\lambda)^2+(\lambda-3)^2 = 38$	calculs
$(9-4\lambda)^2+9\lambda^2+(\lambda-3)^2 = 38$	identités remarquables
$81-72\lambda+16\lambda^2+9\lambda^2+\lambda^2-6\lambda+9 = 38$	réduction
$26\lambda^2-78\lambda+90 = 38$	-38
$26\lambda^2-78\lambda+52 = 0$	$:26$
$\lambda^2-3\lambda+2 = 0$	

C'est une équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=-3$ et $c=2$.

Le discriminant Δ vaut $\Delta = b^2-4ac = (-3)^2-4.1.2 = 9-8 = 1$.

Les solutions de l'équation sont donc:

$\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+1}{2.1} = \frac{4}{2} = 2$, et

$\lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-1}{2.1} = \frac{2}{2} = 1$.

Avec $\lambda = 2$, on obtient: $x = 10-4\cdot 2 = 10-8 = 2$
$y = 3\cdot 2 = 6$
$z = 2$.

Avec $\lambda = 1$, on obtient: $x = 10-4\cdot 1 = 10-4 = 6$
$y = 3\cdot 1 = 3$
$z = 1$.

Ainsi les points d'intersection sont : $\underline{\underline{I(6;3;1) \text{ et } J(2;6;2)}}$.

c) Pour vérifier que le point $K(0;1;9)$ appartient à la sphère s d'équation $(x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 38$, on remplace x par 0, y par 1 et z par 9 et on regarde si cela joue:

$(0-1)^2 + 1^2 + (9-3)^2 = (-1)^2 + 1 + 6^2 = 1+1+36 = 38 \longrightarrow$ ok.

Le point K appartient donc bien à la sphère.

d) On a $I(6;3;1)$, $J(2;6;2)$ et $K(0;1;9)$.

Calculons les longueurs des côtés du triangle IJK, i.e. $\|\overrightarrow{IJ}\|$, $\|\overrightarrow{JK}\|$ et $\|\overrightarrow{KI}\|$.

On a : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OI} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{IJ}\| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{16+9+1} = \sqrt{26}$;

$\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OJ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{JK}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2 + 7^2} = \sqrt{4+25+49} = \sqrt{78}$;

$\overrightarrow{KI} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{KI}\| = \sqrt{6^2 + 2^2 + (-8)^2} = \sqrt{36+4+64} = \sqrt{104}$.

Ainsi $\underline{\underline{\|\overrightarrow{IJ}\| = \sqrt{26},\ \|\overrightarrow{JK}\| = \sqrt{78} \text{ et } \|\overrightarrow{KI}\| = \sqrt{104}}}$.

Calculons maintenant les angles du triangle :

$\cos(\widehat{JIK}) = \dfrac{\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK}}{\|\overrightarrow{IJ}\| \cdot \|\overrightarrow{IK}\|}$: $\overrightarrow{IJ} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{KI} = -\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} =$

$= (-4)\cdot(-6) + 3\cdot(-2) + 1\cdot 8 =$

$= 24 - 6 + 8 = 26$;

$\|\overrightarrow{IJ}\| = \sqrt{26}$;

$\|\overrightarrow{IK}\| = \|\overrightarrow{KI}\| = \sqrt{104}$;

$$\text{donc } \cos(\widehat{JIK}) = \frac{26}{\sqrt{26}\sqrt{104}} = 0{,}5 \text{ , et, donc,}$$

$$\widehat{JIK} = 60°.$$

$$\cos(\widehat{IJK}) = \frac{\overrightarrow{JI}\cdot\overrightarrow{JK}}{\|\overrightarrow{JI}\|\cdot\|\overrightarrow{JK}\|} : \quad \overrightarrow{JI} = -\overrightarrow{IJ} = -\begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-3\\-1\end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{JK} = \begin{pmatrix}-2\\-5\\7\end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{JI}\cdot\overrightarrow{JK} = \begin{pmatrix}4\\-3\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\-5\\7\end{pmatrix} =$$

$$= 4.(-2) + (-3)\cdot(-5) + (-1)\cdot 7 =$$

$$= -8 + 15 - 7 = 0 ;$$

$$\text{donc } \cos(\widehat{IJK}) = 0 \text{ , et, donc, } \widehat{IJK} = 90°.$$

Comme $\widehat{JIK} + \widehat{IJK} + \widehat{JKI} = 180°$, on a :

$\widehat{JKI} = 180° - 60° - 90° = 30°$.

Ainsi $\underline{\underline{\widehat{JIK} = 60°,\ \widehat{IJK} = 90° \text{ et } \widehat{JKI} = 30°}}$.

e) Pour pouvoir dessiner une droite, il faut trouver ses traces, c'est-à-dire ses intersections avec les plans de référence.

La droite d passe par $A(10;0;0)$ et a pour vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix}$.

Ses équations paramétriques sont donc :

$$d: \begin{cases} x = 10 - 4\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Sa trace dans le sol correspond au point où $z = 0$: on en déduit que $\lambda = 0$ et on a $x = 10$, $y = 0$.

La trace de d dans le sol est donc $T_S(10;0;0)$.

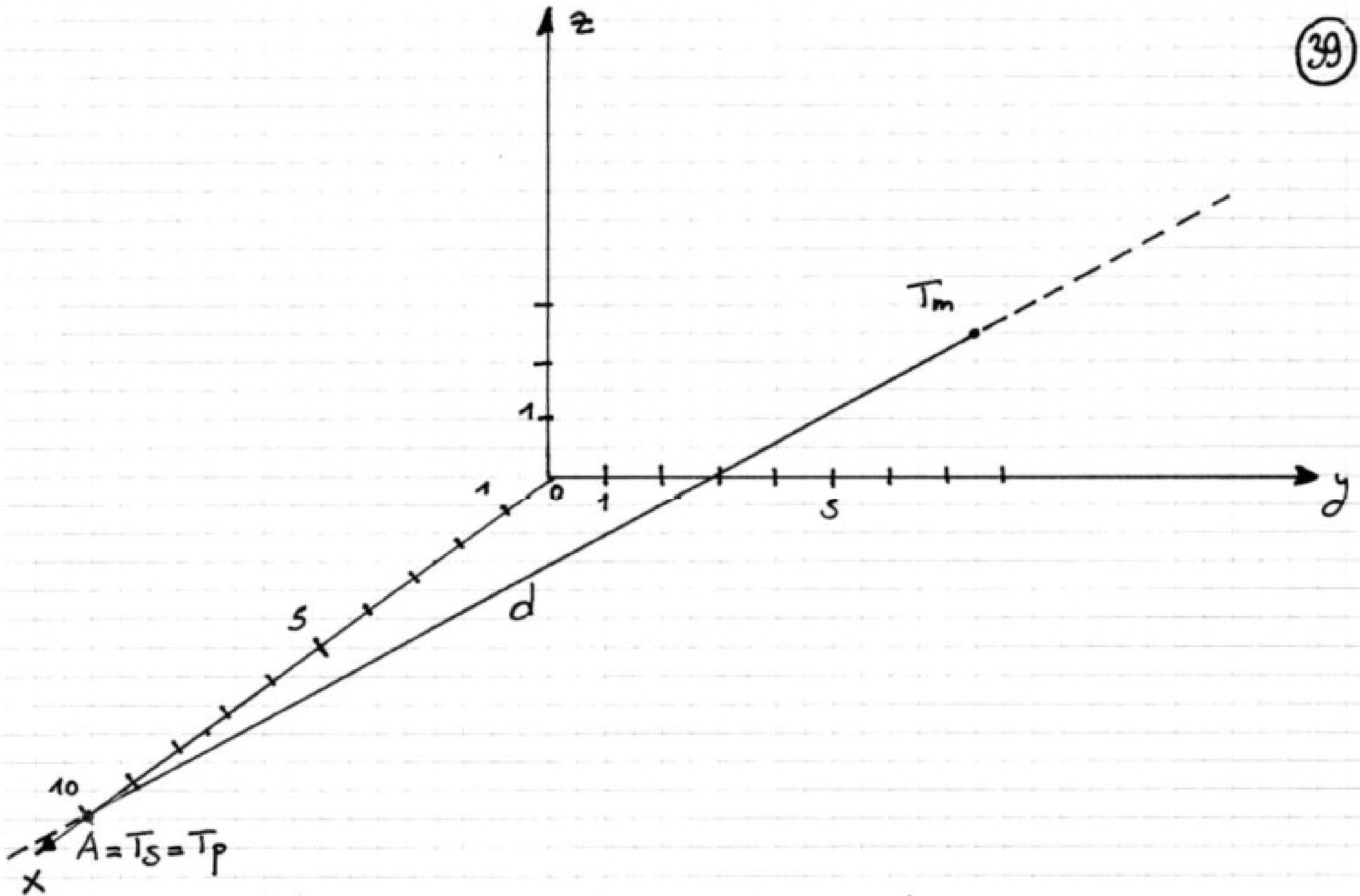
Sa trace dans la paroi correspond au point où $y = 0$: on en déduit que $3\lambda = 0$, i.e. $\lambda = 0$, et on a $x = 10$, $z = 0$.

La trace de d dans la paroi est donc $T_P(10;0;0)$.

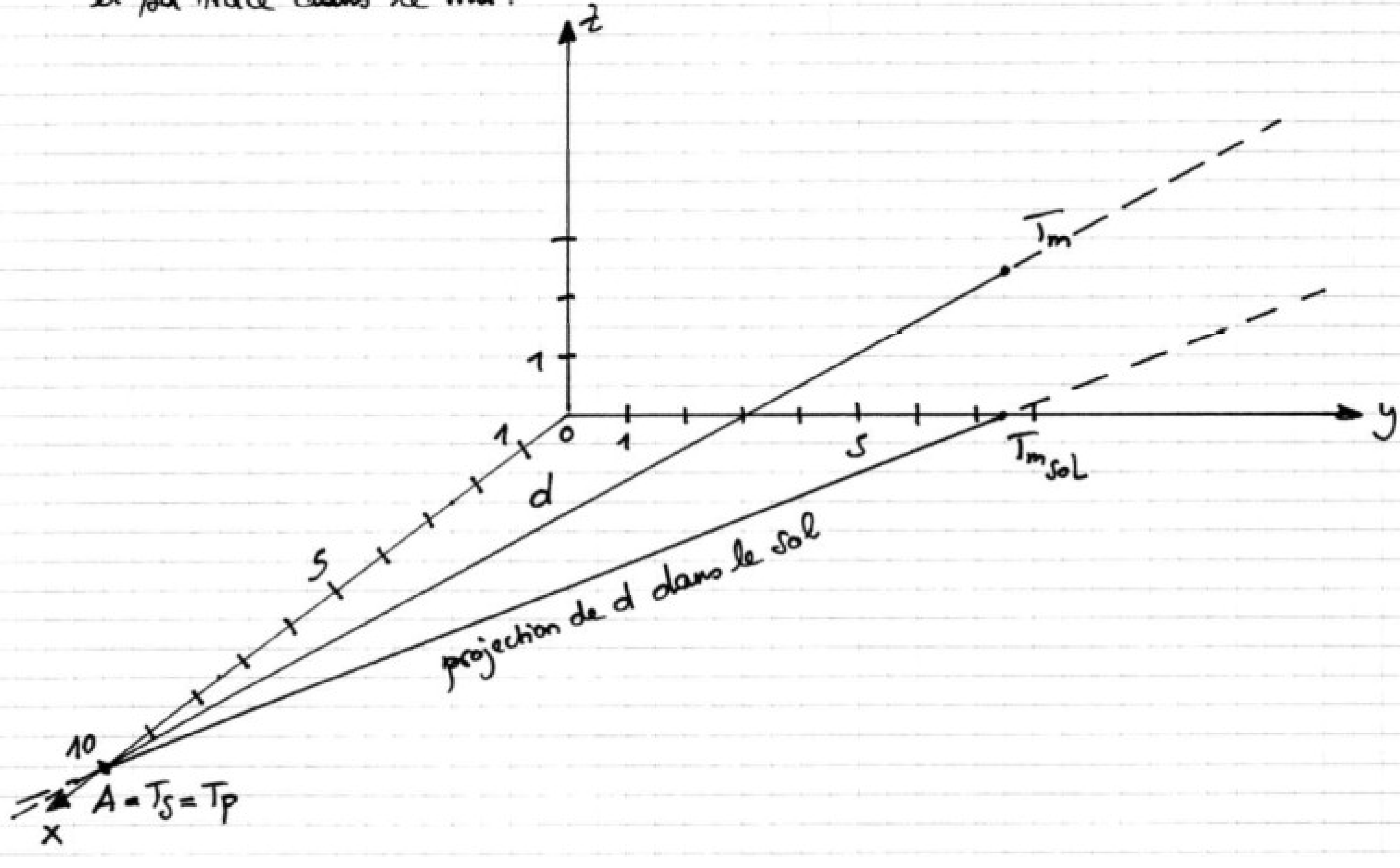
Sa trace dans le mur correspond au point où $x = 0$: on en déduit que $10 - 4\lambda = 0$, i.e. $\lambda = 2{,}5$, et on a $y = 7{,}5$, $z = 2{,}5$.

La trace de d dans le mur est donc $T_m(0;7{,}5;2{,}5)$.

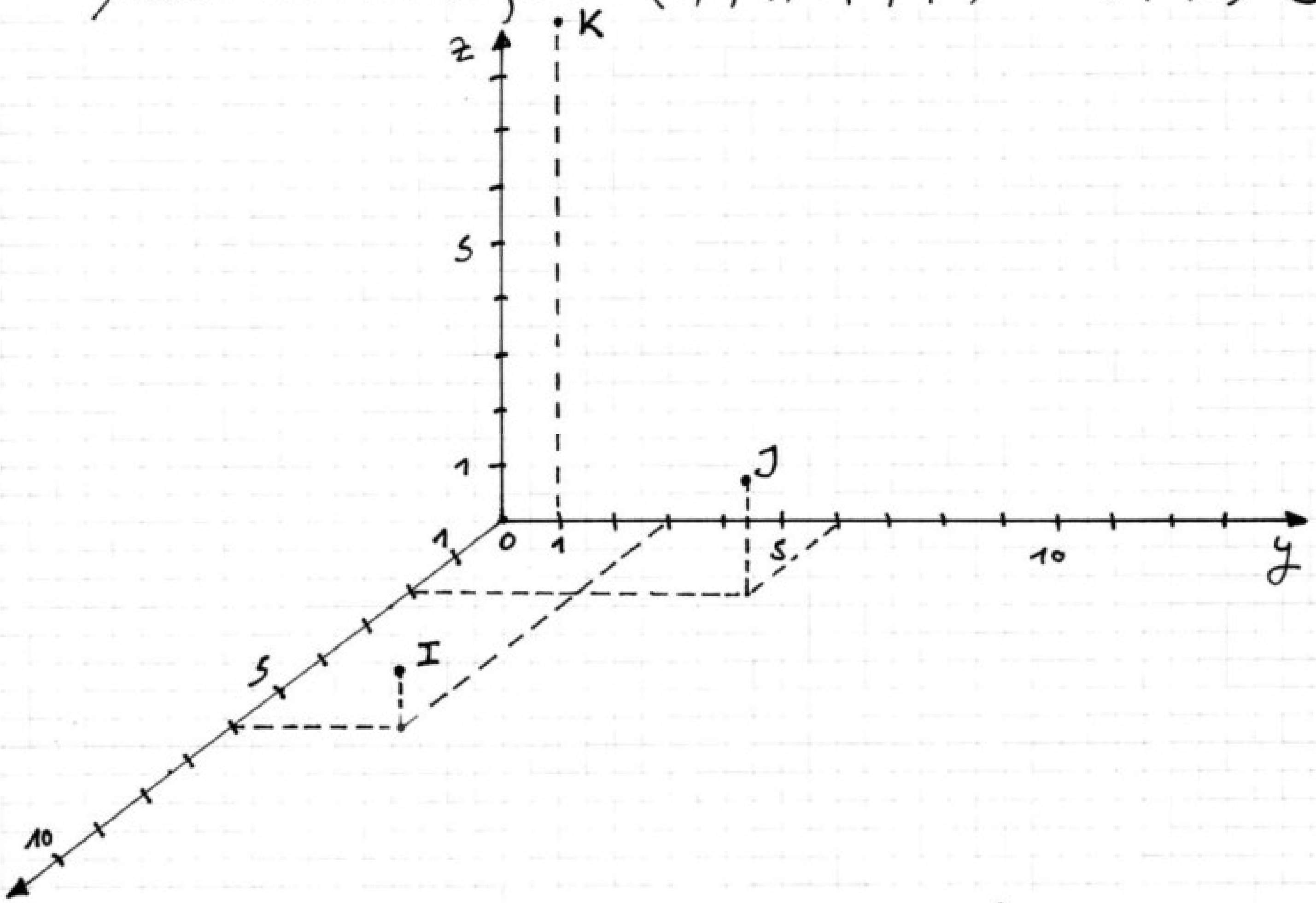
On peut alors dessiner la droite d dans un repère usuel :



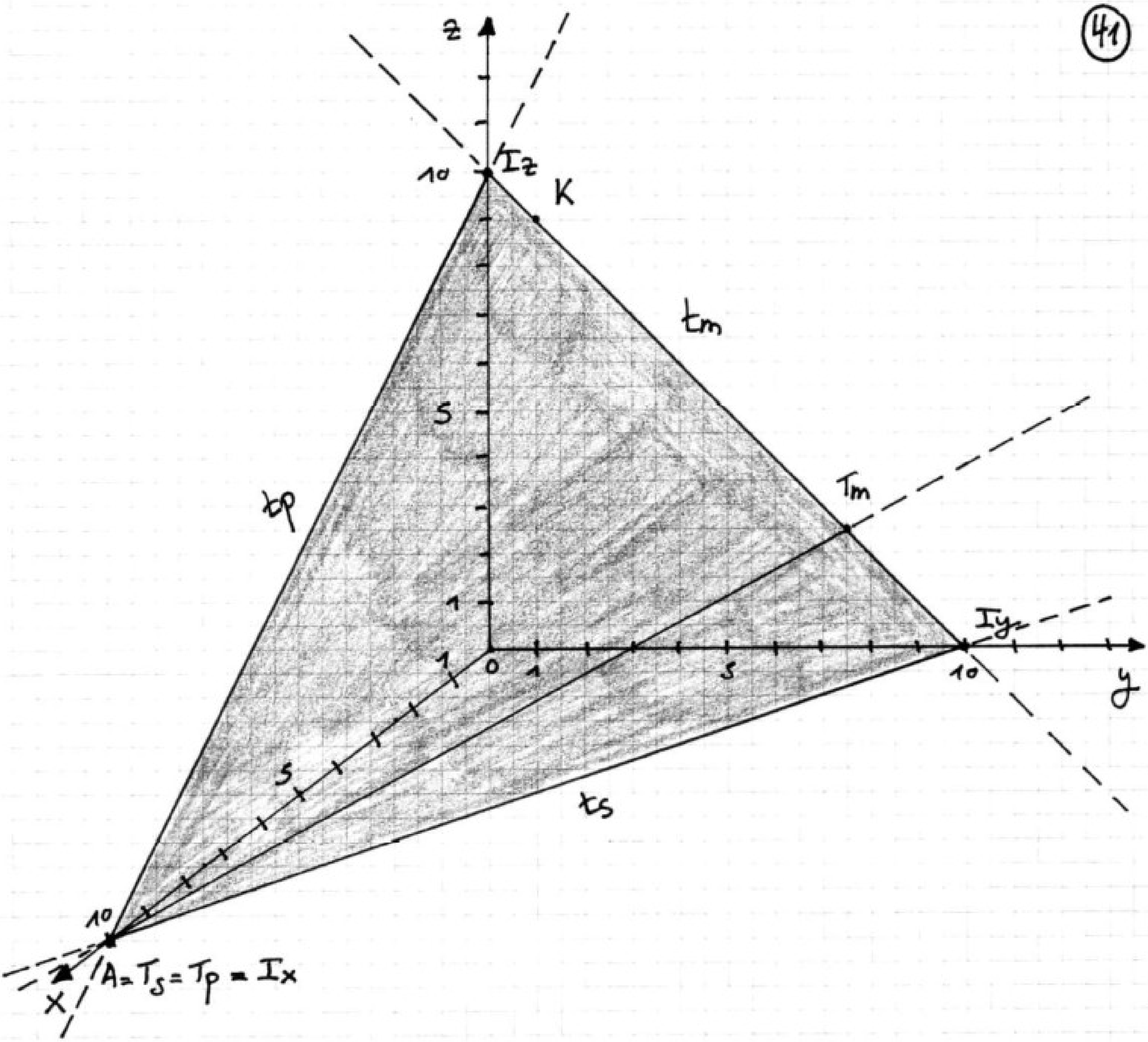
Pour dessiner la projection de d dans le sol, on a déjà un point : T_S.
Il faut un deuxième point.
On va prendre la projection de T_m dans le sol. Comme $T_m\ (0;7{,}5;2{,}5)$, sa projection de T_m dans le sol est $T_{m_{sol}}\ (0;7{,}5;0)$.
On peut alors faire un dessin où on a la droite d, sa projection dans le sol et sa trace dans le mur :



Dessinons maintenant les points $I(6;3;1)$, $J(2;6;2)$ et $K(0;1;9)$:

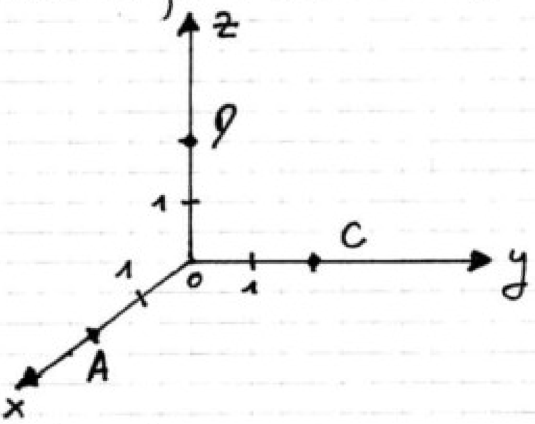


Pour dessiner les traces du plan Π contenant le point K et la droite d, on met la droite d, ses traces et le point K sur le même dessin.
K appartient au mur, T_m aussi.
Comme ce sont 2 points du plan, ce sont 2 points de la trace du plan dans le mur (t_m). On peut alors dessiner t_m en reliant K et T_m.
t_m coupe l'axe y en I_y, intersection du plan avec l'axe y.
t_m coupe l'axe z en I_z, intersection du plan avec l'axe z.
Comme les traces de la droite dans le sol et dans la paroi sont confondues ($T_s = T_p$), elles correspondent forcément à I_x, intersection de plan avec l'axe x.
On peut alors dessiner la trace du plan dans le sol (t_s) en reliant I_x et I_y, et la trace du plan dans la paroi (t_p) en reliant I_x et I_z.
Ainsi les traces du plan Π sont dessinées :

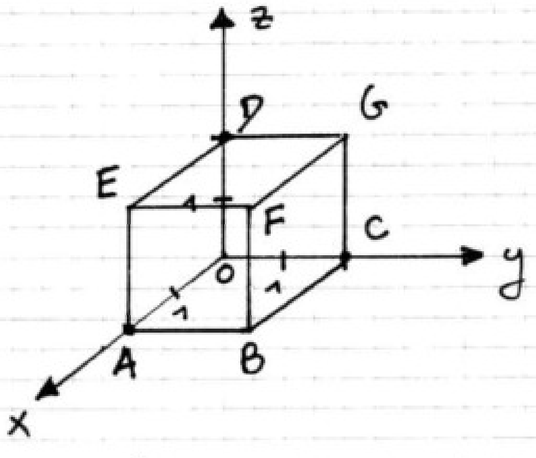

z
10
Iz
K
tm
5
tp
Tm
1
Iy
0
1
5
10
y
1
5
ts
10
A = Ts = Tp = Ix
x

Exercice 6

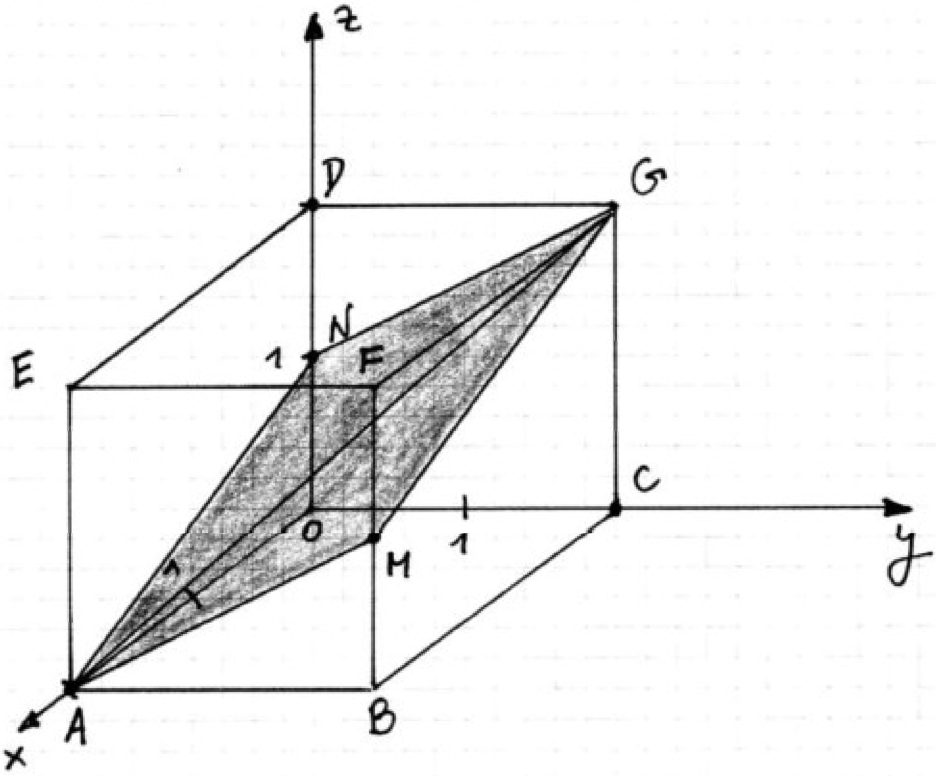
a) Commençons par dessiner les points connus du cube :



Le point B étant dans le sol et le polygone OABC étant un carré, on a alors forcément $B(2;2;0)$.
Le point E étant dans la paroi et le polygone OAED étant un carré, on a alors forcément $E(2;0;2)$.
Le point G étant dans le mur et le polygone OCGD étant un carré, on a alors forcément $G(0;2;2)$.
Les polygones ABFE, BCGF et DEFG étant des carrés, on a alors forcément $F(2;2;2)$.
On peut alors dessiner le cube entier :



Dessinons maintenant la section de ce cube par le plan Π passant par les points $A(2;0;0)$, $G(0;2;2)$ et $M(2;2;1)$.
AG est une diagonale du cube.
Le plan Π, qui contient M, doit aussi contenir N qui est le symétrique de M par rapport à AG. On a clairement $N(0;0;1)$.
Comme AM, MG, GN et NA sont sur les faces du cube, il forme la section du cube par le plan Π contenant A, G et M :



b) Pour trouver l'équation du plan Π qui est de la forme $ax+by+cz+d=0$, on a besoin d'un vecteur perpendiculaire $\vec{n}$ qui sera parallèle au vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Pour trouver un vecteur perpendiculaire au plan Π contenant A, G et M, on va calculer $\overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{AG}$, qui est perpendiculaire à $\overrightarrow{AM}$ et à $\overrightarrow{AG}$, et, donc, à Π.

On a : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On obtient : $\overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2 - 1.2 \\ 1.(-2) - 0.2 \\ 0.2 - 2.(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

En divisant ce vecteur par 2, on peut prendre $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, vecteur qui est perpendiculaire au plan Π.

Ainsi Π aura pour équation : $x - y + 2z + d = 0$.

Pour trouver d, on prend un point du plan (par exemple $A(2;0;0)$) et on remplace dans l'équation de Π : $2 - 0 + 2.0 + d = 0$, i.e. $2 + d = 0$, i.e. $d = -2$.

L'équation de Π est donc : $\underline{\underline{x - y + 2z - 2 = 0}}$.

c) On va calculer la longueur des 4 côtés du quadrilatère AMGN :

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{AM}\| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$;

$\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{HG}\| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$;

$\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{GN}\| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$;

$\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{ON} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{NA}\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.

Ainsi tous les côtés du quadrilatère sont égaux (ils valent tous $\sqrt{5}$) et le quadrilatère est bien un losange.

d) La formule pour calculer l'aire d'un losange est :

$\frac{1}{2} \cdot$ grande diagonale $\cdot$ petite diagonale.

Ici l'aire du losange sera $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AG}\| \cdot \|\overrightarrow{MN}\|$.

On a : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{AG}\| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12}$;

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{MN}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4+4+0} = \sqrt{8}$.

Ainsi l'aire du losange est $\frac{1}{2}\sqrt{12}\sqrt{8} = \frac{1}{2}\sqrt{12 \cdot 8} = \frac{1}{2}\sqrt{96} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{16 \cdot 6} = \frac{1}{2}\sqrt{16}\sqrt{6} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$.

Dans un losange, les angles opposés sont égaux.

Calculons l'angle $\widehat{MAN}$: on a $\cos(\widehat{MAN}) = \dfrac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}}{\|\overrightarrow{AM}\| \cdot \|\overrightarrow{AN}\|}$.

On a : $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{NA} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$;

$\|\overrightarrow{AM}\| = \sqrt{5}$ et $\|\overrightarrow{AN}\| = \sqrt{5}$.

Ainsi $\cos(\widehat{MAN}) = \dfrac{1}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \dfrac{1}{5}$, d'où $\widehat{MAN} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) = 78{,}46°$.

On a donc $\widehat{MGN} = 78{,}46°$

Comme $\widehat{MAN} + \widehat{ANG} + \widehat{MGN} + \widehat{GMA} = 360°$ et que $\widehat{ANG} = \widehat{GMA}$,

on trouve que $2 \cdot 78{,}46° + 2 \cdot \widehat{ANG} = 360°$, i.e

$2\cdot \widehat{ANG} = 360° - 2\cdot 78{,}46° = 203{,}08°$, i.e. $\widehat{ANG} = 101{,}54°$.

Ainsi les angles sont $\widehat{HAN} = \widehat{HGN} = 78{,}46°$ et

$\underline{\underline{\widehat{ANG} = \widehat{AMG} = 101{,}54°.}}$

e) D'après le schéma de la question a), on voit clairement que le plan Π coupe le cube en deux parties égales.
Le volume du cube étant : $2^3 = 8$, le volume de la partie du cube comprise entre le plan Π et le sol est : $\frac{8}{2} = \underline{\underline{4.}}$

f) L'équation de Π est : $x - y + 2z - 2 = 0$.
L'équation de S est : $(x-5)^2 + (y-7)^2 + (z+7)^2 = 79$.
Le centre de la sphère est $K(5;7;-7)$.
Cherchons l'équation de la droite d passant par K et perpendiculaire à Π (son intersection avec Π nous donnera le centre du cercle d'intersection).
Le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ est perpendiculaire à Π.
$\vec{n}$ sera donc un vecteur directeur de d.
Comme d passe par K, les équations paramétriques de d sont :

$$d: \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 7 - \lambda \\ z = -7 + 2\lambda \end{cases}$$

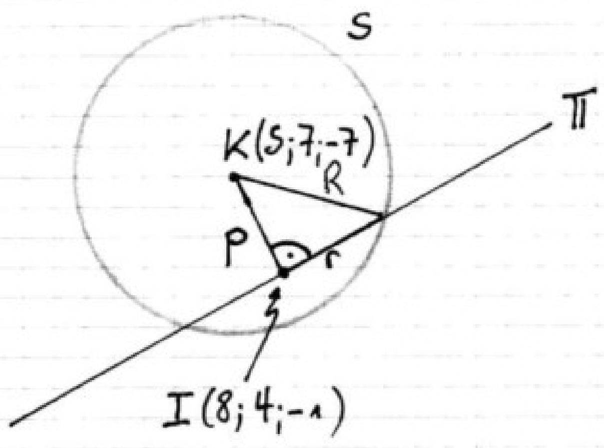
Cherchons l'intersection de d avec le plan Π : $x - y + 2z - 2 = 0$
(cette intersection est le centre cherché du cercle).
Par substitution, on a :

$$\begin{array}{l|l}
5+\lambda-(7-\lambda)+2(-7+2\lambda)-2=0 & \text{distributivité} \\
5+\lambda-7+\lambda-14+4\lambda-2=0 & \text{réduction} \\
6\lambda-18=0 & +18 \\
6\lambda=18 & :6 \\
\lambda=3 &
\end{array}$$

Avec $\lambda = 3$, on obtient : $x = 5+3 = 8$
$y = 7-3 = 4$
$z = -7+2\cdot 3 = -7+6 = -1$.

Ainsi <u>les coordonnées du centre du cercle d'intersection sont $(8;4;-1)$</u>

Cherchons maintenant le rayon de ce cercle.
Schématiquement, on a :



R, le rayon de la sphère, est $\sqrt{79}$.

p vaut $\|\overrightarrow{KI}\|$:

$$\overrightarrow{KI} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix};$$

$$p = \|\overrightarrow{KI}\| = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + 6^2} =$$
$$= \sqrt{9+9+36} = \sqrt{54}.$$

On peut alors appliquer Pythagore dans le triangle rectangle:

$$R^2 = p^2 + r^2,$$
i.e. $(\sqrt{79})^2 = (\sqrt{54})^2 + r^2$,

i.e. $79 = 54 + r^2$, i.e $r^2 = 25$, i.e $r = 5$.

Ainsi <u>le rayon du cercle d'intersection vaut 5.</u>

Exercice 7.

a) Pour vérifier que le triangle ABC est équilatéral, il faut vérifier que ses trois côtés sont isométriques, i.e que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{CA}\|$.

On a:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-9)^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 81 + 1} = \sqrt{98}$;

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-5)^2 + 8^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 64 + 9} = \sqrt{98}$;

$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{CA}\| = \sqrt{9^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{81 + 1 + 16} = \sqrt{98}$.

Comme $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{CA}\| = \sqrt{98}$, on a bien que <u>le triangle ABC est équilatéral.</u>

b) L'équation cartésienne du plan ABC sera de la forme $ax+by+cz+d=0$, où le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est perpendiculaire.

Le plan doit passer par les points A, B, C. Or, on sait que le vecteur $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ (par exemple) est perpendiculaire au plan ABC.

Calculons $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$:

On a: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA} = -\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ainsi: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-9)\cdot 4 - 1\cdot(-1) \\ 1\cdot(-9) - (-4)\cdot 4 \\ (-4)\cdot(-1) - (-9)\cdot(-9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36+1 \\ -9+16 \\ 4-81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 \\ 7 \\ -77 \end{pmatrix}$.

En divisant ce vecteur par (-7), on obtient le vecteur $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$ qui est perpendiculaire au plan ABC. On peut prendre ce vecteur pour le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

L'équation du plan ABC s'écrit donc: $5x - y + 11z + d = 0$.

Pour trouver d, on remplace x, y et z par un point du plan, par exemple $C(0;3;10)$: on obtient: $5\cdot 0 - 3 + 11\cdot 10 + d = 0$,

i.e. $-3 + 110 + d = 0$, i.e. $107 + d = 0$,

i.e. $d = -107$.

L'équation du plan ABC est donc: <u>$5x - y + 11z - 107 = 0$.</u>

c) Un point D de d a pour coordonnées: $x = 3 + 5\lambda$, $y = 1 - \lambda$, $z = 4 + 11\lambda$, pour une certaine valeur de λ.

Il faut trouver les coordonnées de ce point D de telle manière que $\|\overrightarrow{DA}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$.

D'après la question a), on sait que $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{98}$.

En outre : $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3+5\lambda \\ 1-\lambda \\ 4+11\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-3-5\lambda \\ 4-1+\lambda \\ 6-4-11\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5\lambda \\ 3+\lambda \\ 2-11\lambda \end{pmatrix}$;

$$\|\overrightarrow{DA}\| = \sqrt{(6-5\lambda)^2 + (3+\lambda)^2 + (2-11\lambda)^2} =$$
$$= \sqrt{36 - 60\lambda + 25\lambda^2 + 9 + 6\lambda + \lambda^2 + 4 - 44\lambda + 121\lambda^2} =$$
$$= \sqrt{147\lambda^2 - 98\lambda + 49}.$$

On doit donc avoir : $\sqrt{147\lambda^2 - 98\lambda + 49} = \sqrt{98}$.

En élevant cette relation au carré, on obtient : $147\lambda^2 - 98\lambda + 49 = 98$, i.e.

$147\lambda^2 - 98\lambda - 49 = 0$ (par soustraction de 98), i.e.

$3\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$ (par division par 49), ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, avec $a = 3$, $b = -2$ et $c = -1$.

Le discriminant Δ vaut $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 4 + 12 = 16$.

Les solutions de $3\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$ sont alors :

$$\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+\sqrt{16}}{2\cdot 3} = \frac{2+4}{6} = \frac{6}{6} = 1, \text{ et}$$
$$\lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-\sqrt{16}}{2\cdot 3} = \frac{2-4}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Avec $\lambda_1 = 1$, les coordonnées de D sont :

$x = 3 + 5\cdot 1 = 8$, $y = 1 - 1 = 0$, $z = 4 + 11\cdot 1 = 15$.

Avec $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$, les coordonnées de D sont :

$x = 3 + 5\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$, $y = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$, $z = 4 + 11\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

Comme on doit choisir le point D dont les coordonnées sont entières, on obtient : $\underline{D(8\,;0\,;15)}$.

d) Dans un tétraèdre régulier, toutes les arêtes ont la même longueur (un tétraèdre régulier est formé de quatres triangles équilatéraux).

D'après la question a), on sait déjà que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{CA}\| = \sqrt{98}$.

Il reste à vérifier que $\|\overrightarrow{AD}\| = \|\overrightarrow{BD}\| = \|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{98}$.

On a :

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{(-1)^2+(-4)^2+9^2} = \sqrt{1+16+81} = \sqrt{98}$;

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{BD}\| = \sqrt{3^2+5^2+8^2} = \sqrt{9+25+64} = \sqrt{98}$;

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{8^2+(-3)^2+5^2} = \sqrt{64+9+25} = \sqrt{98}$.

Ainsi <u>ABCD est bien un tétraèdre régulier.</u>

e) Pour calculer la valeur de l'angle entre AD (droite) et ABC (plan), on calcule d'abord l'angle entre $\overrightarrow{AD}$ et $\vec{n}$, vecteur perpendiculaire au plan ABC, puis on soustrait ce résultat de 90°.

On a :

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$ (puisque, d'après la question b), l'équation du plan ABC est $5x - y + 11z - 107 = 0$)

Calculons β, l'angle aigu entre $\overrightarrow{AD}$ et $\vec{n}$:

on a :

$$\cos(\beta) = \frac{|\overrightarrow{AD} \cdot \vec{n}|}{\|\overrightarrow{AD}\| \cdot \|\vec{n}\|}.$$

On a : $\overrightarrow{AD} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix} = -1 \cdot 5 + (-4) \cdot (-1) + 9 \cdot 11 =$
$= -5 + 4 + 99 = 98$;

$\|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{98}$ (voir question d));

$\|\vec{n}\| = \sqrt{5^2+(-1)^2+11^2} = \sqrt{25+1+121} = \sqrt{147}$.

Ainsi $\cos(\beta) = \frac{98}{\sqrt{98}\sqrt{147}} = 0,8165$, et, donc, $\beta = \cos^{-1}(0,8165) = \underline{\underline{35,26°}}$.

On en conclut donc que l'angle entre AD et ABC est $90° - 35,26° =$
$= \underline{\underline{54,74°}}$.

f) L'aire d'un tétraèdre est : $\frac{\text{aire de base} \cdot \text{hauteur}}{3}$.

L'aire de base est, par exemple, l'aire du triangle ABC.

La hauteur est la distance du point D à la face ABC.

Calculons l'aire du triangle ABC.

On sait que $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ est l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Ainsi l'aire du triangle ABC sera, par exemple, $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|$.

D'après la question b), on a $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-35\\7\\-77\end{pmatrix}$.

Ainsi $\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-35)^2+7^2+(-77)^2} = \sqrt{1225+49+5929} = \sqrt{7203}$.

Donc l'aire du triangle ABC est $\frac{\sqrt{7203}}{2} \cong 42,435$.

Calculons maintenant la distance du point D au plan ABC.

D'après la question b), l'équation du plan ABC est : $5x-y+11z-107=0$.

Avec $D(8;0;15)$, en utilisant la formule de la distance d'un point à un plan, on obtient :

$$\text{hauteur du tétraèdre} = \frac{|5\cdot 8-0+11\cdot 15-107|}{\sqrt{5^2+(-1)^2+11^2}} = \frac{|40+165-107|}{\sqrt{25+1+121}} = \frac{98}{\sqrt{147}}.$$

On en conclut que le volume du tétraèdre est :

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{7203}}{2}\cdot\frac{98}{\sqrt{147}} = \frac{49}{3}\sqrt{\frac{7203}{147}} = \frac{49}{3}\cdot\sqrt{49} = \frac{49}{3}\cdot 7 = \underline{\underline{\frac{343}{3}}}.$$

Exercice 8

Les équations paramétriques de d sont : $\begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 3 + 4\lambda. \end{cases}$

L'équation de la sphère S est : $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = 9 \quad (= 3^2)$.

a) On doit trouver les intersections de d et S.

Par substitution des équations de d dans celle de S, on obtient :

$$\begin{aligned}
&(5+\lambda-2)^2 + (-1-\lambda+1)^2 + (3+4\lambda+3)^2 = 9 && \text{calculs}\\
&(\lambda+3)^2 + (-\lambda)^2 + (4\lambda+6)^2 = 9 && \text{identités remarquables}\\
&\lambda^2 + 6\lambda + 9 + \lambda^2 + 16\lambda^2 + 48\lambda + 36 = 9 && \text{réduction}\\
&18\lambda^2 + 54\lambda + 45 = 9 && -9\\
&18\lambda^2 + 54\lambda + 36 = 0 && :18\\
&\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0
\end{aligned}$$

C'est une équation du deuxième degré de la forme $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, avec $a = 1$, $b = 3$ et $c = 2$.

Le discriminant Δ vaut $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4.1.2 = 9 - 8 = 1$.

Les solutions de $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ sont donc :

$$\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{1}}{2\cdot 1} = \frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1, \text{ et}$$

$$\lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{1}}{2\cdot 1} = \frac{-3-1}{2} = \frac{-4}{2} = -2.$$

Avec $\lambda_1 = -1$, on obtient : $x = 5 - 1 = 4$

$y = -1 - (-1) = 0$

$z = 3 + 4.(-1) = -1$.

Donc $\underline{\underline{A(4; 0; -1)}}$.

Avec $\lambda_2 = -2$, on obtient : $x = 5 - 2 = 3$

$y = -1 - (-2) = 1$

$z = 3 + 4(-2) = -5$.

Donc $\underline{\underline{B(3; 1; -5)}}$.

b) Les longueurs des côtés du triangle ABC correspondent aux valeurs de $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{BC}\|$, $\|\overrightarrow{CA}\|$.

On a :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix};$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18};$$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$;

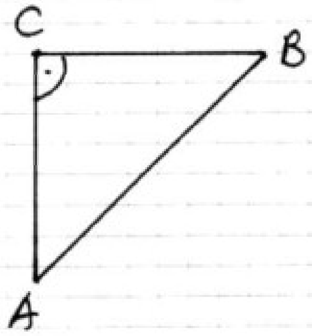
$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{CA}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$.

Ainsi les côtés du triangle ABC valent $\underline{\underline{\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{18},\ \|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{CA}\| = 3.}}$

Le triangle ABC est isocèle. De plus il est rectangle en C :
on a en effet : $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = 18$;
$\|\overrightarrow{BC}\|^2 + \|\overrightarrow{CA}\|^2 = 9 + 9 = 18$.

Le triangle se présente donc comme suit :



Ainsi : $\widehat{ACB} = 90°$, et
$\underline{\underline{\widehat{BAC} = \widehat{ABC} = 45°.}}$

c) Le plan Π, qui doit être tangent à la sphère S en A, est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{CA}$.
D'après b), on a $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Ainsi l'équation de Π sera $2x + y + 2z + d = 0$.
Comme le plan passe par $A(4; 0; -1)$, on remplace ses coordonnées dans l'équation de Π : $2 \cdot 4 + 0 + 2 \cdot (-1) + d = 0$,
i.e. $8 - 2 + d = 0$, i.e. $6 + d = 0$, i.e. $d = -6$.
L'équation du plan Π est donc : $\underline{\underline{2x + y + 2z - 6 = 0.}}$

d) La droite t doit être tangente à la sphère en A (donc t passe par A) et perpendiculaire à la droite AB.
Comme t doit être tangente à la sphère en A, t est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{CA}$ (C est le centre de la sphère).
Ainsi t doit être perpendiculaire à $\overrightarrow{CA}$ et à $\overrightarrow{AB}$.
Comme $\vec{a} \times \vec{b}$ est perpendiculaire à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$, en calculant $\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{AB}$, on aura un vecteur parallèle à t.
On a :

$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ (voir question b)).

Ainsi $\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-4) - 2\cdot 1 \\ 2\cdot(-1) - 2\cdot(-4) \\ 2\cdot 1 - 1\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-2 \\ -2+8 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

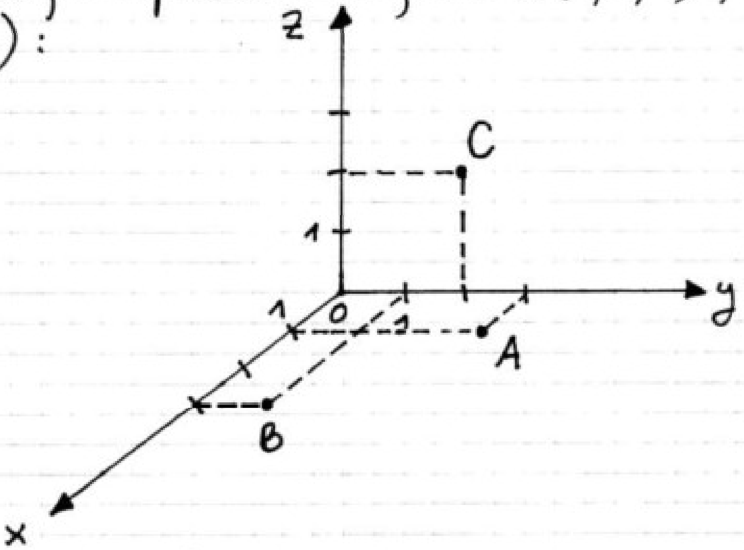
En divisant le vecteur par 3, on obtient le vecteur $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, vecteur que l'on peut prendre comme vecteur directeur de t.
Ainsi les équations paramétriques de t sont :

$$t : \begin{cases} x = 4 - 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1 + \lambda. \end{cases}$$

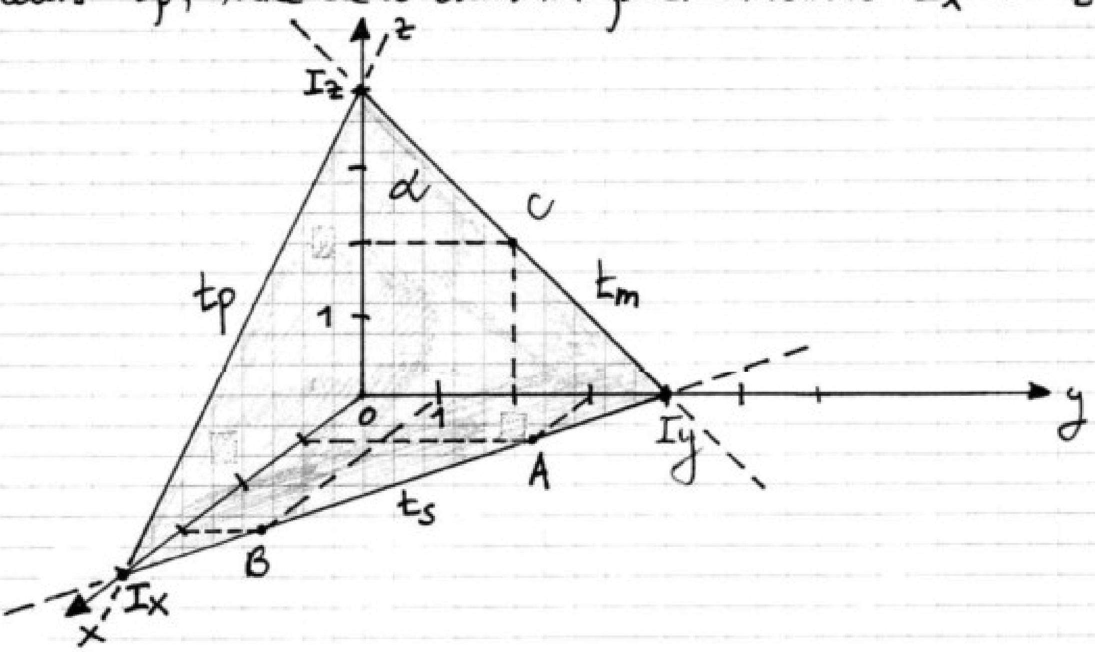
e) On a une sphère de centre C et de rayon r, et 2 points A et B de la sphère.
Une droite tangente à la sphère passant par A est perpendiculaire à $\overrightarrow{CA}$.
Une droite tangente à la sphère passant par B est perpendiculaire à $\overrightarrow{CB}$.
Comme on veut que ces 2 droites soient parallèles, leur vecteur directeur (c'est le même) doit être perpendiculaire à $\overrightarrow{CA}$ et à $\overrightarrow{CB}$.
On sait que $\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{CA}$ et à $\overrightarrow{CB}$.
En prenant $\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}$ comme vecteur directeur des deux droites tangentes, on peut alors écrire leurs équations paramétriques.

Exercice 9

a) Commençons par représenter les points $A(1;3;0)$, $B(3;1;0)$ et $C(0;2;2)$:



A et B sont tous les deux dans le sol. Ils appartiennent donc à t_S, trace du plan α dans le sol.
Les intersections de t_S avec l'axe x et avec l'axe y nous donnent respectivement I_x (intersection de α avec l'axe x) et I_y (intersection de α avec l'axe y).
C et I_y sont dans le mur. Ils appartiennent donc à t_m, trace de α dans le mur.
L'intersection de t_m avec l'axe z nous donnent I_z, intersection de α avec l'axe z.
On trace alors t_p, trace de α dans la paroi en reliant I_x et I_z :



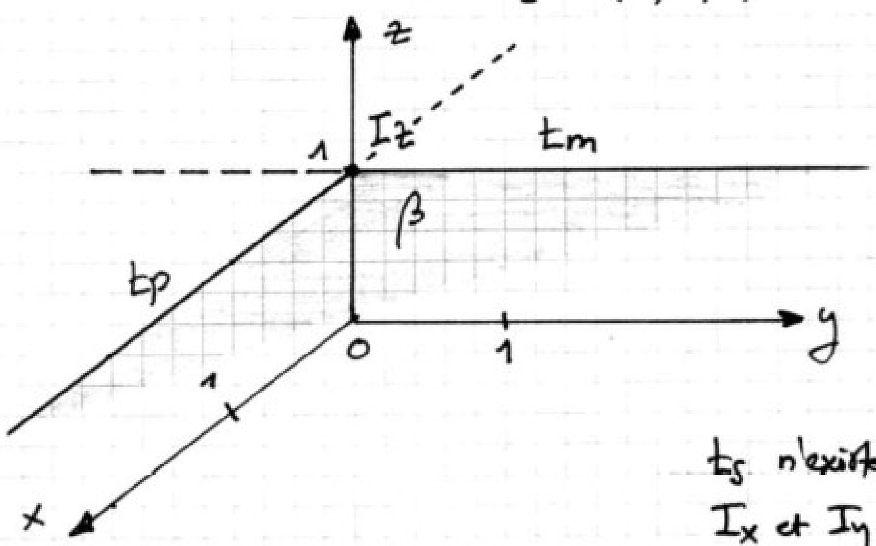
Pour dessiner les traces d'un plan donné par son équation cartésienne, on cherche I_x, I_y, I_z, intersections du plan avec les axes x, y et z respectivement, puis on les relie, ce qui donne les traces.

Ici le plan est β est son équation cartésienne est : $z=1$.

Intersection avec l'axe x : on pose $y=z=0$;
on obtient $0=1$, ce qui est impossible ;
ainsi β ne coupe pas l'axe x (I_x n'existe pas).

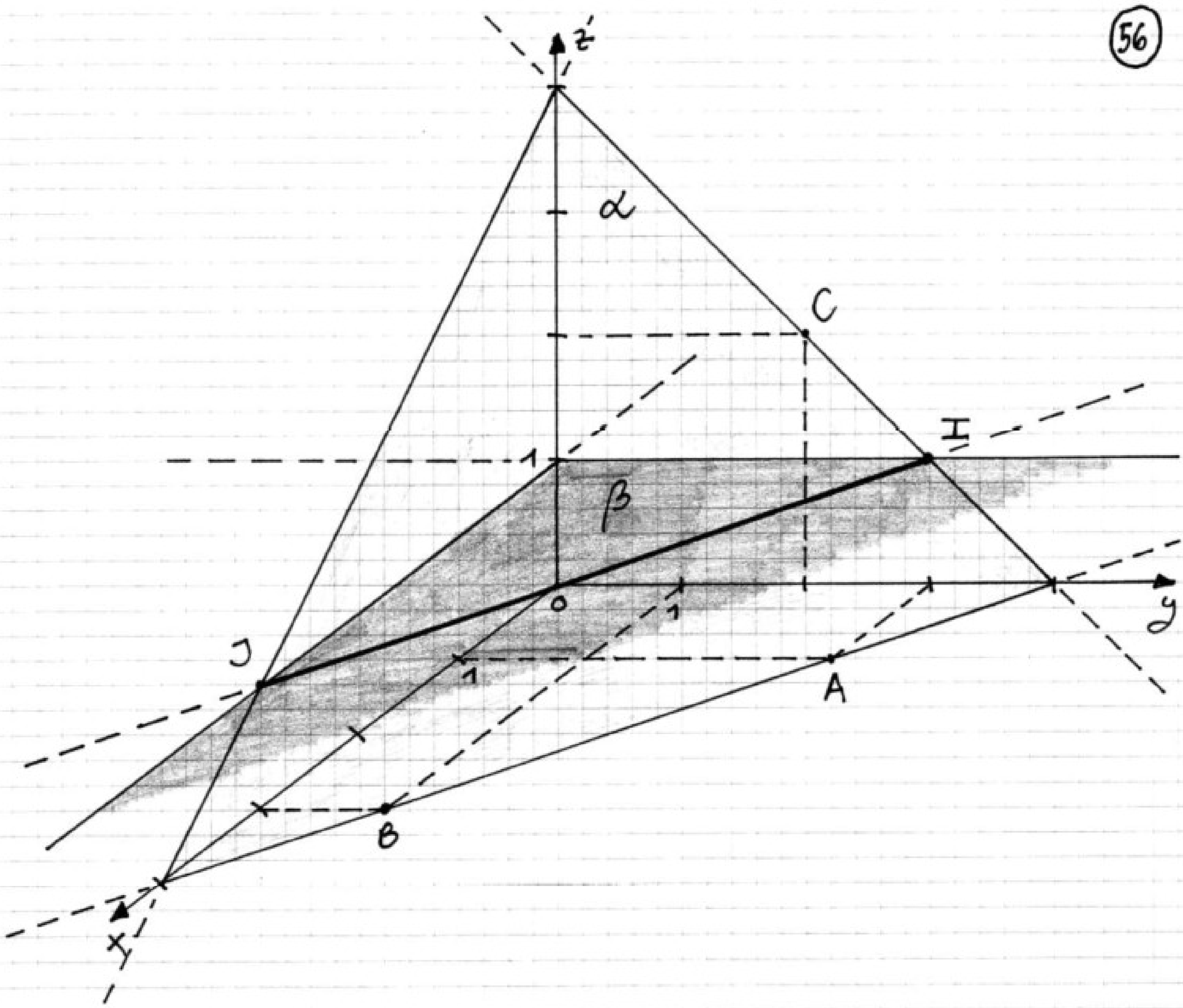
Intersection avec l'axe y : on pose $x=z=0$;
on obtient $0=1$, ce qui est impossible ;
ainsi β ne coupe pas l'axe y (I_y n'existe pas).

Intersection avec l'axe z : on pose $x=y=0$;
on obtient $z=1$;
ainsi $I_z=(0;0;1)$.



t_s n'existe pas (puisque I_x et I_y n'existe pas).

On va dessiner α et β dans le même repère.
Les traces dans le mur de α et de β se coupent en I. I est donc un point de la droite d'intersection de α et β.
Les traces dans la paroi de α et de β se coupent en J. J est donc un point de la droite d'intersection de α et β.
En reliant I et J, on a la droite d'intersection de α et β.
On remarque que, comme l'intersection des traces dans le sol de α et de β n'existe pas (puisque la trace dans le sol de β n'existe pas), la droite d'intersection de α et β est parallèle au sol.



b) L'équation cartésienne de α sera de la forme : $ax+by+cz+d=0$, où le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est perpendiculaire à α.

Comme α est donné par les points A, B et C, on va calculer $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ (par exemple) et on aura $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$, donc à α.

On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ainsi : $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.2 - 0.(-1) \\ 0.(-1) - 2.2 \\ 2.(-1) - (-2).(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

En divisant ce vecteur par (-4), on obtient le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, vecteur perpendiculaire à α. On peut donc le prendre pour le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Ainsi l'équation de α s'écrit : $x+y+z+d=0$.

Pour trouver d, on utilise un point, par exemple $A(1;3;0)$, de α.
En remplaçant x par 1, y par 3 et z par 0 dans l'équation de $\alpha: x+y+z+d=0$, on obtient : $1+3+0+d=0$, i.e $4+d=0$, i.e. $d=-4$.

Par conséquent l'équation de α est : $\underline{\underline{x+y+z-4=0.}}$

c) Pour calculer l'angle entre le sol et α, on va calculer l'angle aigu entre leurs normales (cela donne le même angle).
L'équation du sol est $z=0$.
Un vecteur normal au sol est donc $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
L'équation de α est $x+y+z-4=0$.
Un vecteur normal à α est donc $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'angle entre le sol et α, qui est égal à l'angle aigu entre $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$, est donné par : $\cos(\text{angle entre le sol et } \alpha) = \dfrac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{\|\vec{n_1}\| \cdot \|\vec{n_2}\|}$.

On a :

$\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$;

$\|\vec{n_1}\| = \sqrt{0^2+0^2+1^2} = \sqrt{1} = 1$;

$\|\vec{n_2}\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$.

Ainsi : $\cos(\text{angle entre le sol et } \alpha) = \dfrac{1}{1 \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

On en conclut que l'angle entre le sol et α est $\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \cong \underline{\underline{54,74°}}$.

On remarque que l'angle entre β et α a la même valeur puisque β est parallèle au sol.

d) On a la sphère s d'équation $x^2+y^2+(z-1)^2 = 3$.
Son centre est $K(0;0;1)$ (il est sur l'axe z) et son rayon est $\sqrt{3}$.

1. Pour montrer que la sphère est tangente à α, il suffit de montrer que la distance de K (centre de la sphère) à α est égal au rayon de la sphère.
On a $K(0;0;1)$ et $\alpha: x+y+z-4=0$.
En utilisant la formule de calcul de la distance d'un point à un plan, on trouve :
$$\text{distance de } K \text{ à } \alpha = \frac{|0+0+1-4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}.$$

Ainsi la distance de K à α est égal au de la sphère.
On en conclut que α est tangent à la sphère S.

2. Pour trouver le point de contact T de α et de S, on va chercher l'équation de la droite passant par K (centre de la sphère) et T, puis chercher l'intersection de cette droite et de α (ou S), ce qui nous donnera T.
La droite passant par K et T a un vecteur directeur perpendiculaire à α (puisque α est tangent à S).
Comme $\alpha : x+y+z-4=0$, un vecteur perpendiculaire à α est $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.
On peut donc prendre ce vecteur comme vecteur directeur de la droite KT. Ainsi ses équations paramétriques sont:
$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1+\lambda. \end{cases}$$
Par substitution dans l'équation de α, on obtient:
$\lambda+\lambda+1+\lambda-4=0$, i.e. $3\lambda-3=0$, i.e. $3\lambda=3$, i.e. $\lambda=1$.
Le point de contact a ainsi comme coordonnées: $x=1$
$y=1$
$z=1+1=2$.
Par conséquent, $T(1;1;2)$ est le point de contact.

3. Pour trouver des équations paramétriques de la droite cherchée, il faut un point et un vecteur directeur.
On a le point: $T(1;1;2)$.
Cherchons un vecteur directeur.
La droite est tangente à la sphère; elle est donc perpendiculaire à $\overrightarrow{KT}$.
La droite est parallèle au sol; elle est donc perpendiculaire à un vecteur perpendiculaire au sol.
L'équation du sol est $z=0$. Un vecteur perpendiculaire au sol est donc $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.
Ainsi, la droite cherchée est perpendiculaire à $\overrightarrow{KT}$ et à $\vec{n}$.

Elle sera donc parallèle à $\overrightarrow{KT} \times \vec{n}$, puisque $\overrightarrow{KT} \times \vec{n}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{KT}$ et à $\vec{n}$.
Calculons $\overrightarrow{KT} \times \vec{n}$.
On a :

$$\overrightarrow{KT} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{KT} \times \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 - 1\cdot 0 \\ 1\cdot 0 - 1\cdot 1 \\ 1\cdot 0 - 1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite cherchée.
Les équations paramétriques de cette droite sont donc :

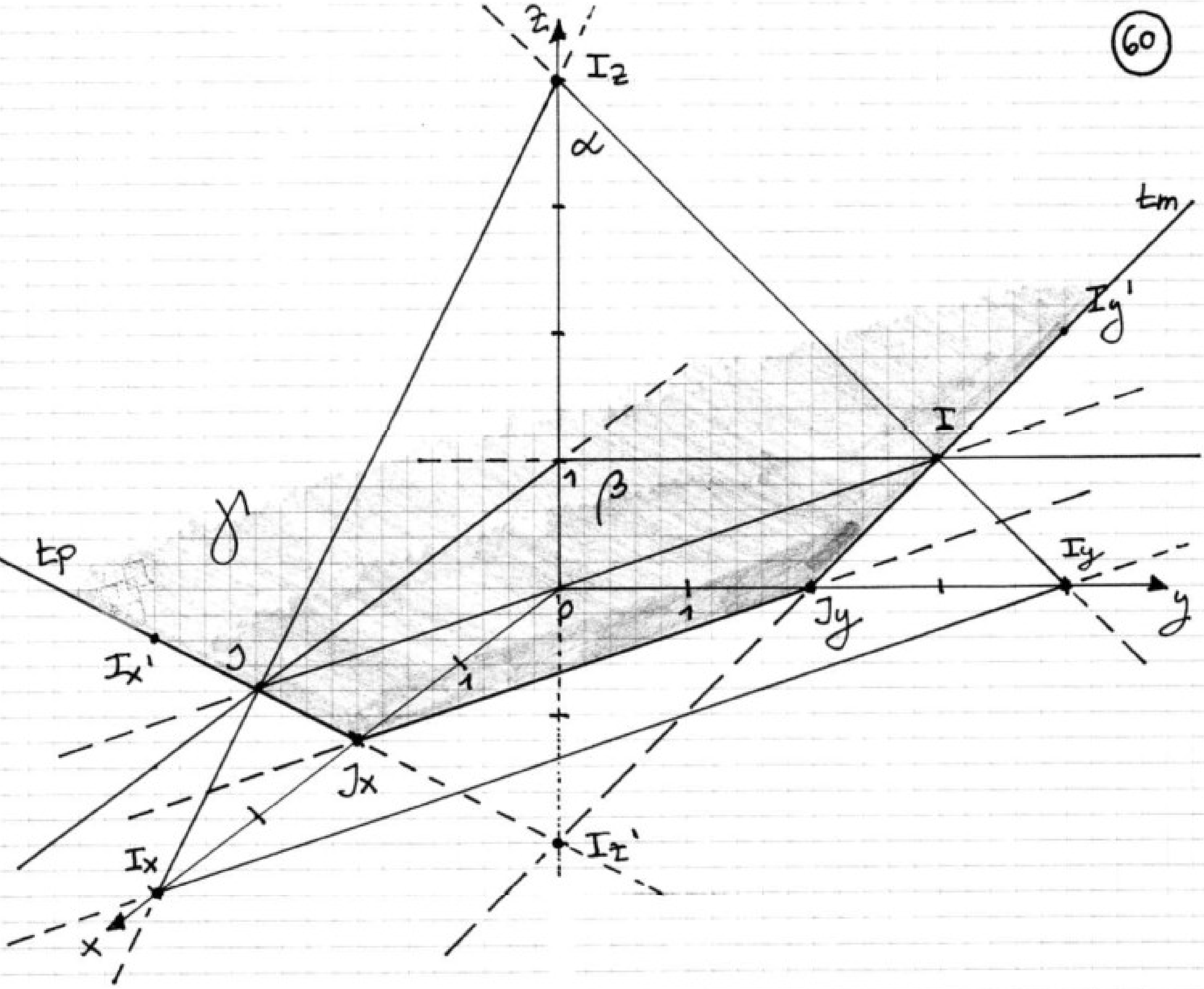
$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2. \end{cases}$$

e) On reprend le dessin effectué au point a).
On effectue une symétrie planaire de α par rapport au plan β.
Les points d'intersection de α et β (droite passant par I et J) ne changent pas par cette transformation.
Comme β est un plan horizontal à hauteur (cote) 1,
l'image de $I_z(0;0;4)$ par la symétrie planaire sera $I_z'(0;0;-2)$ (entre 4 et 1, il y a 3 ; entre 1 et -2, il y a 3 aussi).
L'image de $I_x(4;0;0)$ par la symétrie planaire sera $I_x'(4;0;2)$ et l'image de $I_y(0;4;0)$ par la symétrie planaire sera $I_y'(0;4;2)$

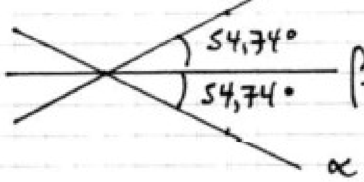
Comme I_z' et I_y' sont dans le mur, en les reliant, on obtient t_m, la trace dans le mur de γ. L'intersection de t_m avec l'axe y nous donne J_y, intersection de γ avec l'axe y.

Comme I_z' et I_x' sont dans la paroi, en les reliant, on obtient t_p, la trace dans la paroi de γ. L'intersection de t_p avec l'axe x nous donne J_x, intersection de γ avec l'axe x.

En reliant J_x et J_y, on a t_s, la trace de γ dans le sol.



L'angle entre α et le sol, est, d'après la question c), 54,74°.
Comme β est parallèle au sol, l'angle entre α et β sera aussi 54,74°.
Par symétrie, l'angle entre γ_1 et β sera également 54,74°.



Par conséquent, l'angle entre α et γ_1 sera $2 \cdot 54{,}74 = \underline{\underline{109{,}48°}}$.

On sait que α est tangente à la sphère S.
On sait que le centre de la sphère ($K(0;0;1)$) est dans le plan β.
L'image par la symétrie planaire de la sphère S est la sphère S.
L'image par la symétrie planaire de α est γ_1.
Comme α est tangent à S, on en conclut que γ_1 est tangent à S.

Exercice 10

1. On va commencer par trouver les équations cartésiennes de d et d', ce qui nous permettra de trouver leurs traces et de les dessiner.

d passe par $A(3;4;2)$ et $B(6;-2;8)$.
d est donc parallèle à $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

En divisant ce vecteur par 3, on peut prendre comme vecteur directeur de d le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ainsi les équations paramétriques de d sont : $d : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 4 - 2\lambda \\ z = 2 + 2\lambda. \end{cases}$

d' passe par $C(2;2;3)$ et est parallèle à $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les équations paramétriques sont donc : $d' \begin{cases} x = 2 - \mu \\ y = 2 - 2\mu \\ z = 3 + \mu \end{cases}$

(on met une autre lettre pour le paramètre pour éviter des confusions avec celui de d).

Cherchons les traces de d :

trace dans le sol : on a $z = 0$, i.e. $2 + 2\lambda = 0$, i.e. $2\lambda = -2$, i.e. $\lambda = -1$;
ainsi $x = 3 - 1 = 2$ et $y = 4 - 2\cdot(-1) = 4 + 2 = 6$;
donc $T_S^d(2;6;0)$.

trace dans le mur : on a $x = 0$, i.e. $3 + \lambda = 0$, i.e. $\lambda = -3$;
ainsi $y = 4 - 2(-3) = 4 + 6 = 10$ et
$z = 2 + 2(-3) = 2 - 6 = -4$;
donc $T_m^d(0;10;-4)$.

trace dans la paroi : on a $y = 0$, i.e. $4 - 2\lambda = 0$, i.e. $2\lambda = 4$, i.e. $\lambda = 2$;
ainsi $x = 3 + 2 = 5$ et $z = 2 + 2\cdot 2 = 2 + 4 = 6$;
donc $T_p^d(5;0;6)$.

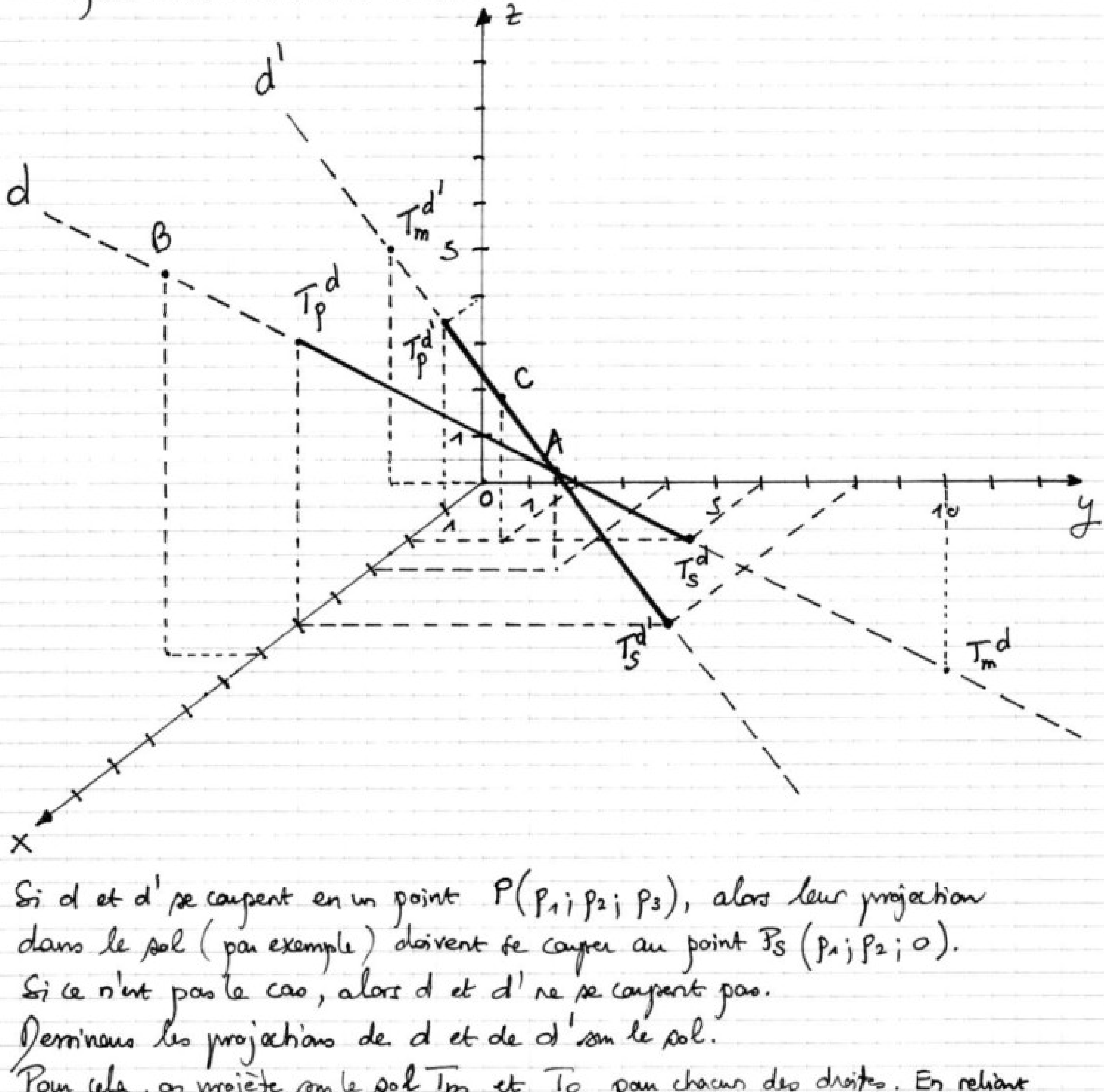
Cherchons les traces de d' :

trace dans le sol : on a $z = 0$, i.e. $3 + \mu = 0$, i.e. $\mu = -3$;
ainsi $x = 2 - (-3) = 5$ et $y = 2 - 2\cdot(-3) = 2 + 6 = 8$;
donc $T_S^{d'}(5;8;0)$.

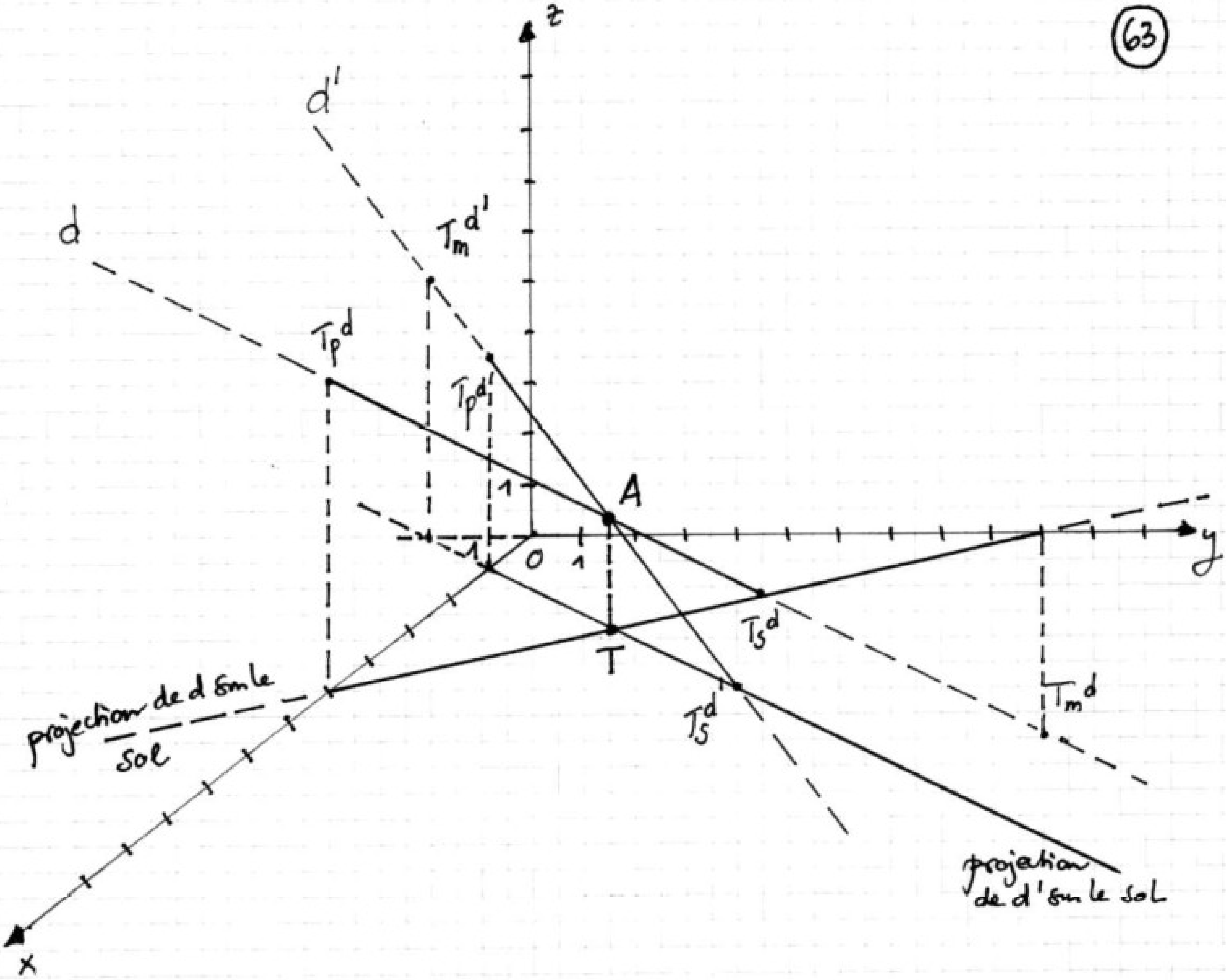
trace dans le mur : on a $x=0$, i.e. $2-\mu=0$, i.e. $\mu=2$;
ainsi $y=2-2.2=2-4=-2$ et $z=3+2=5$;
donc $T_m^{d'}(0;-2;5)$.

trace dans la paroi : on a $y=0$, i.e. $2-2\mu=0$, i.e. $2\mu=2$, i.e. $\mu=1$;
ainsi $x=2-1=1$ et $z=3+1=4$;
donc $T_p^{d'}(1;0;4)$.

On peut alors dessiner les droites :

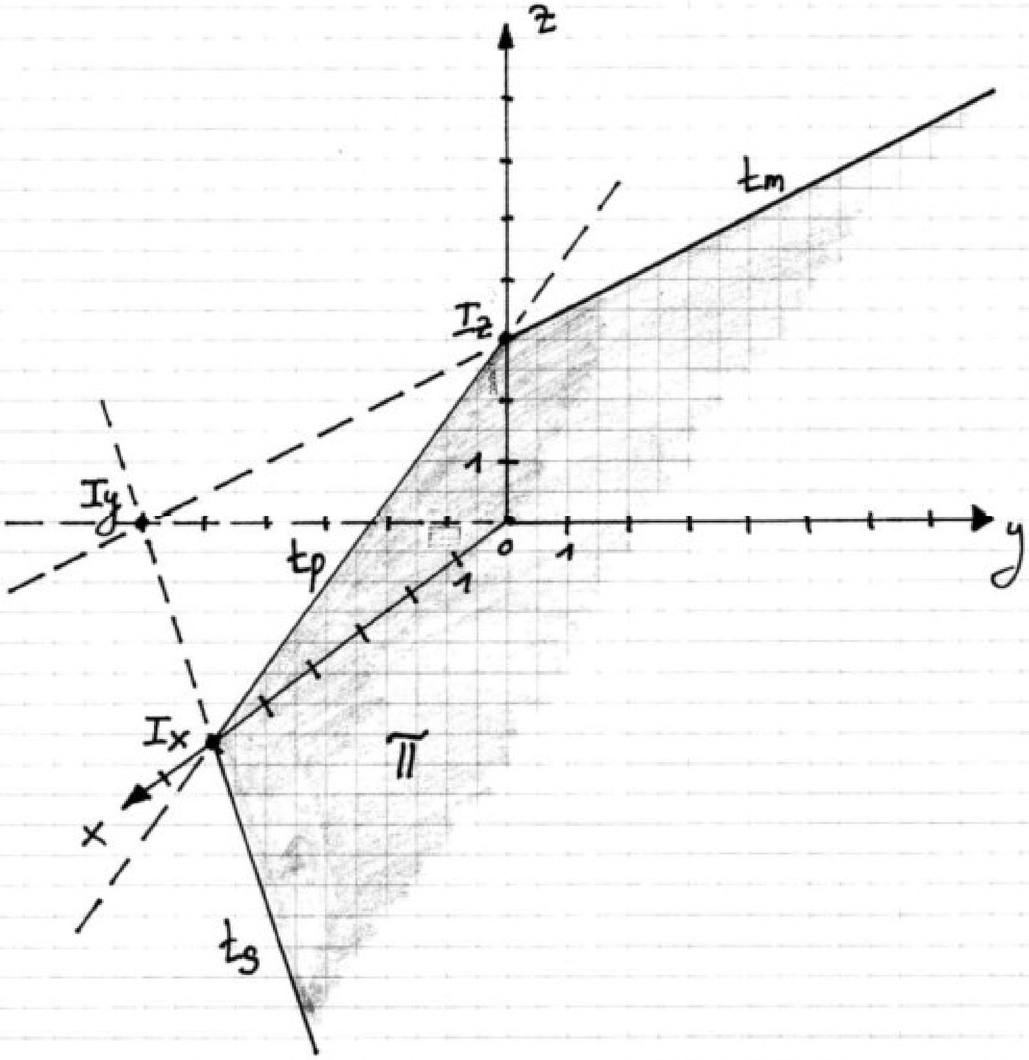


2. Si d et d' se coupent en un point $P(p_1;p_2;p_3)$, alors leur projection dans le sol (par exemple) doivent se couper au point $P_S(p_1;p_2;0)$.
Si ce n'est pas le cas, alors d et d' ne se coupent pas.
Dessinons les projections de d et de d' sur le sol.
Pour cela, on projète sur le sol T_m et T_p pour chacune des droites. En reliant ces projections, on obtient les projections de d et d' sur le sol.
Elle se coupe au point I. On voit que ce point est exactement au-dessous de l'intersection graphique de d et d'.



On en déduit donc que <ins>d et d' se coupent</ins> et que <ins>leur intersection est au point $A(3;4;2)$</ins>.

3. Pour dessiner les parties visibles et invisibles d'un plan, on doit dessiner ses traces. Pour dessiner ses traces, on doit trouver ses intersections avec les axes de référence.
Le plan est Π: $x - y + 2z - 6 = 0$.
Intersection avec l'axe x : on pose $y = z = 0$;
on obtient $x - 6 = 0$, i.e. $x = 6$;
ainsi $I_x\,(6;0;0)$.
Intersection avec l'axe y : on pose $x = z = 0$;
on obtient $-y - 6 = 0$, i.e. $y = -6$;
ainsi $I_y\,(0;-6;0)$.
Intersection avec l'axe z : on pose $x = y = 0$;
on obtient $2z - 6 = 0$, i.e. $2z = 6$, i.e. $z = 3$
ainsi $I_z\,(0;0;3)$.
On peut alors dessiner le plan :



4. On dessine Π et d dans le même système d'axes.

On va projeter verticalement la droite d' sur le plan Π :

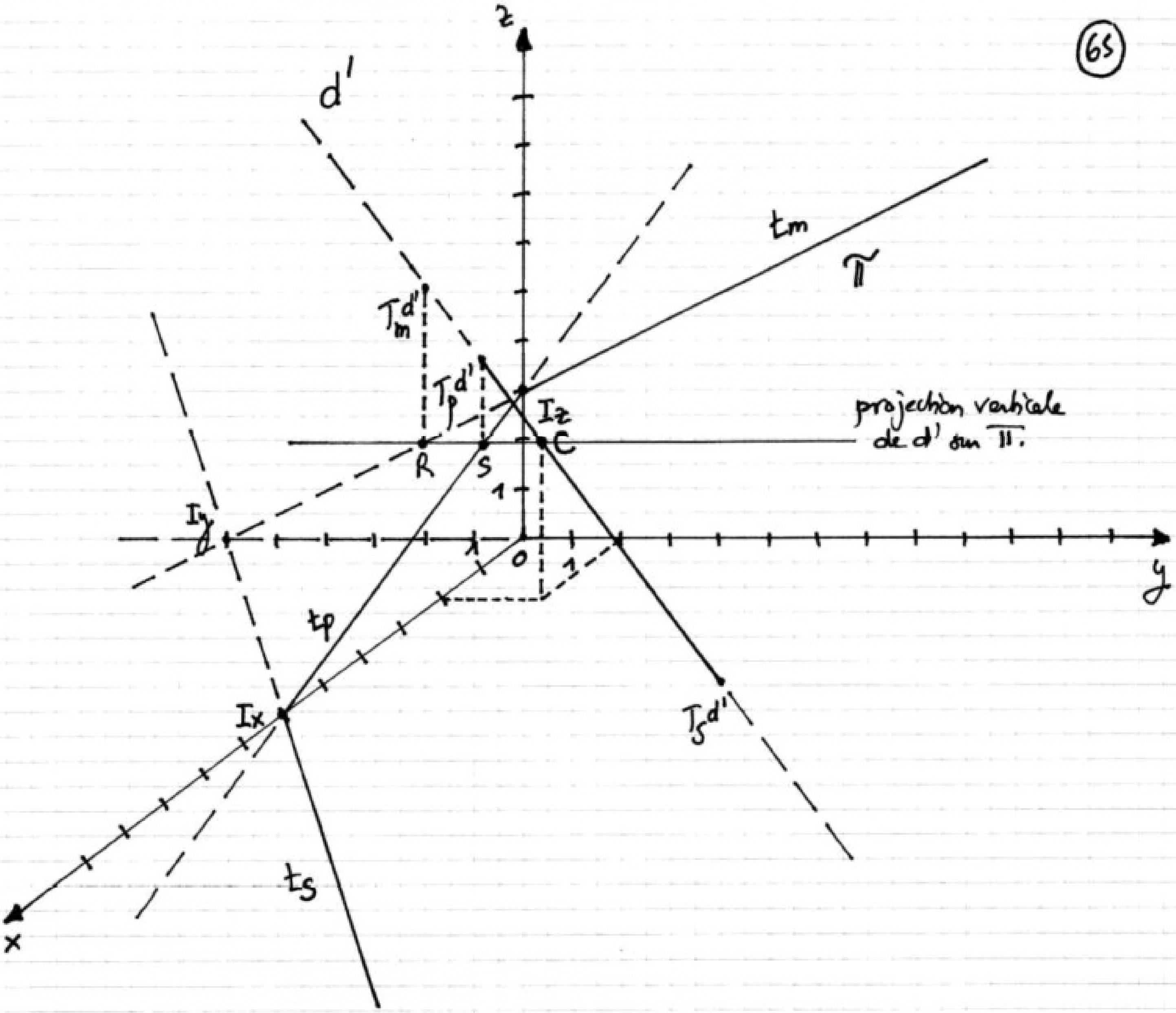
$T_m^{d'}$ va sur le point R ;

$T_p^{d'}$ va sur le point S ;

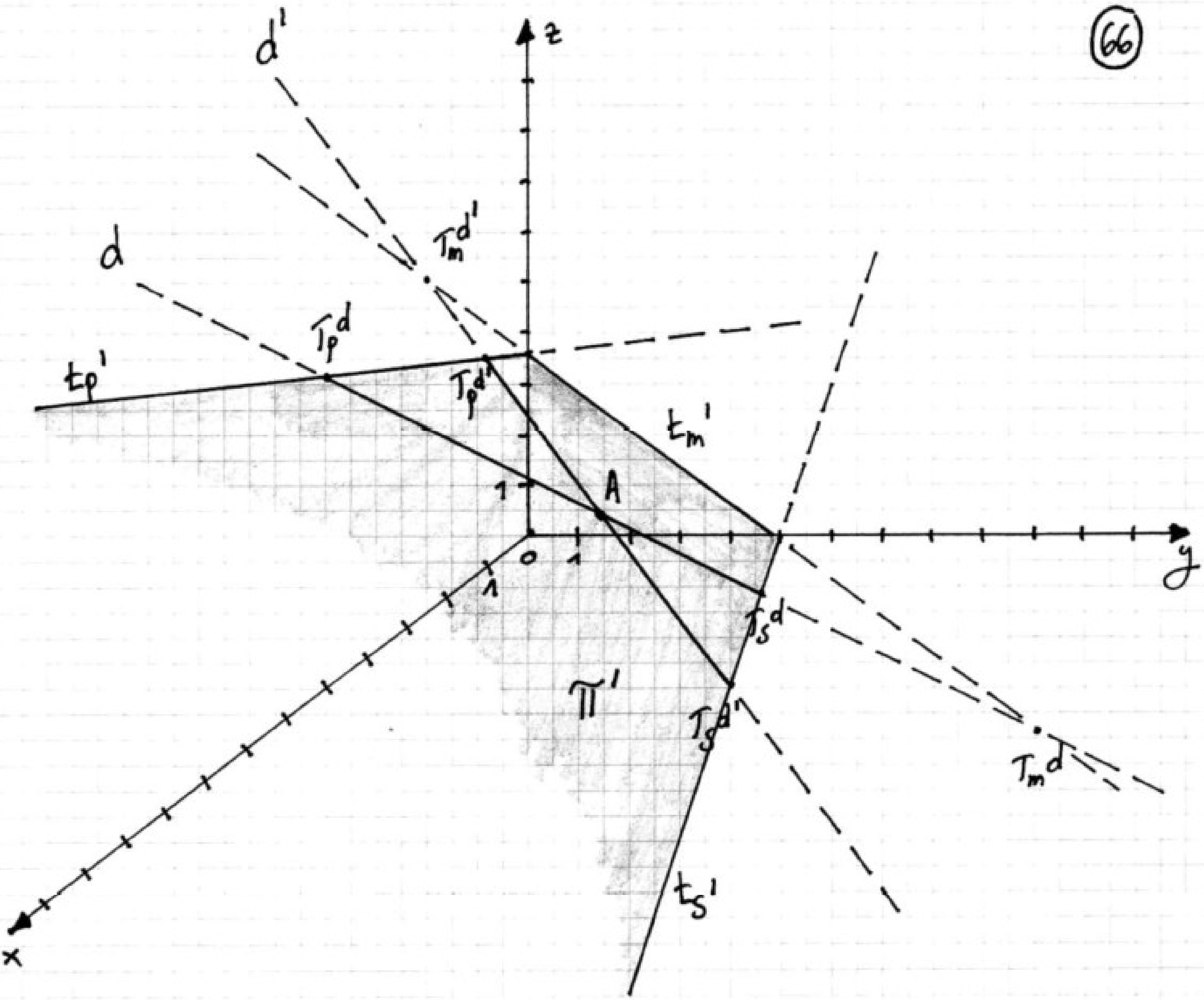
la droite reliant $T_m^{d'}$ et $T_p^{d'}$ est la projection verticale de d' sur Π.

Cette droite coupe alors la droite d' au point C (point de d').

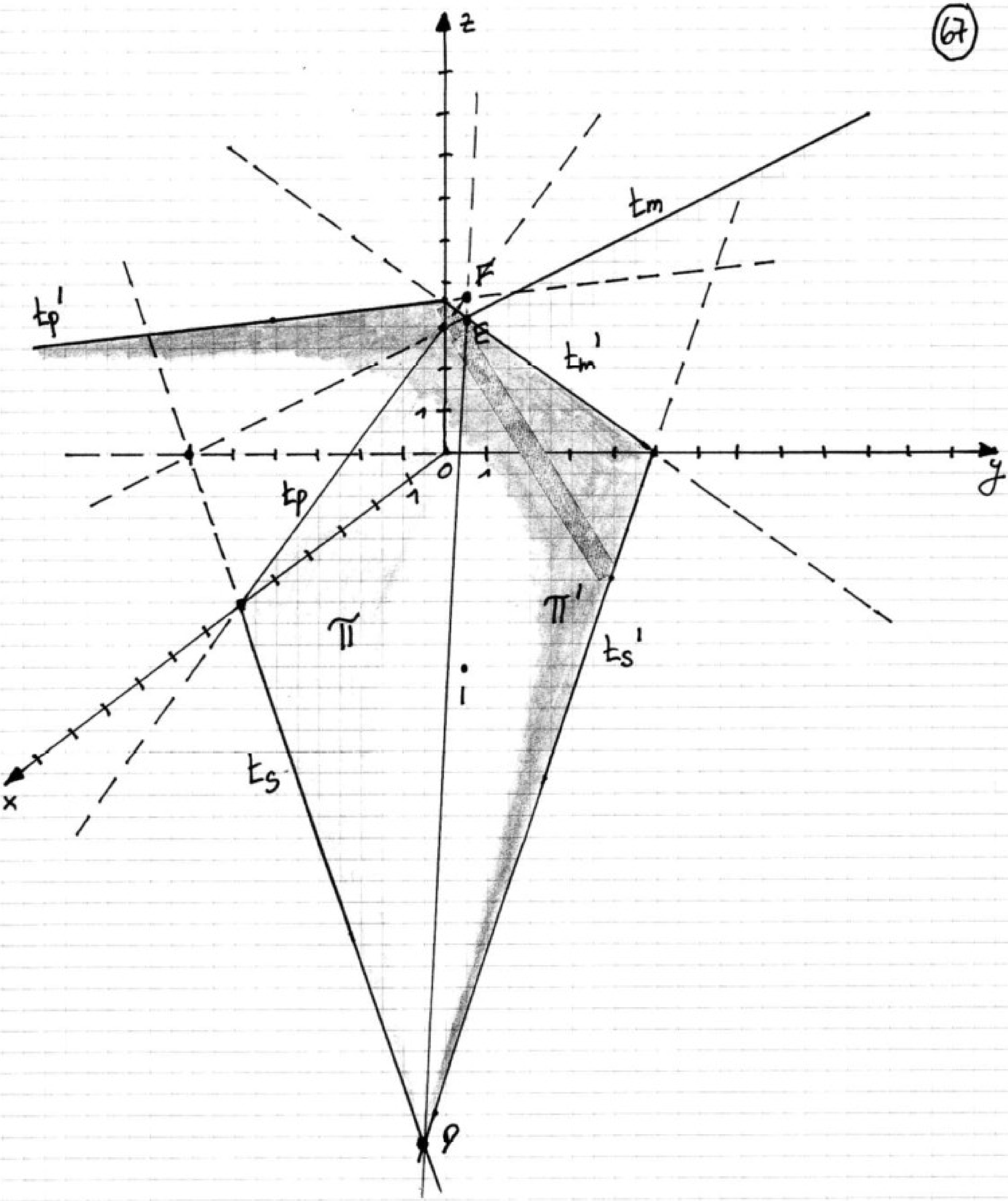
Ainsi <u>l'intersection de d' et Π est le point $C(2;2;3)$</u>.



5. On dessine d et d' comme dans le point 1.
T_s^d et $T_s^{d'}$ appartiennent au plan Π' et, étant dans le sol, à la trace t_s' de Π' dans le sol.
T_m^d et $T_m^{d'}$ appartiennent au plan Π' et, étant dans le mur, à la trace t_m' de Π' dans le mur.
T_p^d et $T_p^{d'}$ appartiennent au plan Π' et, étant dans la paroi, à la trace t_p' de Π' dans la paroi.
On peut donc dessiner les traces de Π' :



6. On dessine Π et Π' dans le même système d'axes.
t_s, t_m, t_p sont les traces de Π dans le sol, le mur, la paroi respectivement.
t_s', t_m', t_p' sont les traces de Π' dans le sol, le mur, la paroi respectivement.
L'intersection de t_s et t_s', noté G, est un point de la droite d'intersection, puisque G appartient à Π et à Π'.
L'intersection de t_m et t_m', noté E, est un point de la droite d'intersection, puisque E appartient à Π et à Π'.
L'intersection de t_p et t_p', noté F, est un point de la droite d'intersection, puisque F appartient à Π et à Π'.
Ainsi la droite d'intersection i de Π et Π' est la droite reliant E, F et G :


z
y
x
0
1
1
1
F
E
t_m
t_m'
t_p'
t_p
t_s
t_s'
π
π'
i
P