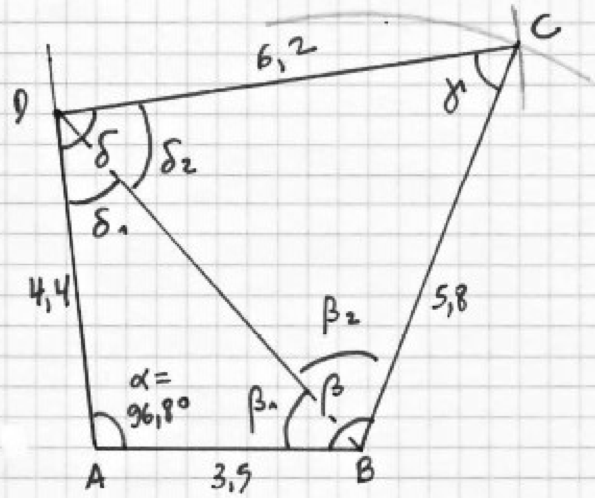
Ainsi $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+5}{2\cdot 1} = \frac{8}{2} = 4$ et $x_2 = \frac{3-5}{2\cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$.

Comme nous considérons des longueurs, la solution $x_2 = -1$ est exclue.

On obtient donc $x = 4$.

Les côtés du triangle cherché seront donc $\underline{\underline{a = 4,\ c = 5 \text{ et } b = 6.}}$

Exercice 3.36



On a les théorèmes du sinus et du cosinus :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{bc})$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\widehat{ac})$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{ab})$$
$$\frac{a}{\sin(\widehat{bc})} = \frac{b}{\sin(\widehat{ac})} = \frac{c}{\sin(\widehat{ab})}.$$

Dans le triangle ABC avec $a = AB$, $b = BD$ et $c = DA$, on a

$$BD^2 = AB^2 + DA^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos(\alpha) =$$
$$= 3{,}5^2 + 4{,}4^2 - 2 \cdot 3{,}5 \cdot 4{,}4 \cdot \cos(96{,}8°) =$$
$$\cong 12{,}25 + 19{,}36 - (-3{,}65) \cong 35{,}26$$
$$\Rightarrow BD \cong \sqrt{35{,}26} \cong 5{,}94.$$

De plus, $\frac{AB}{\sin(\delta_1)} = \frac{BD}{\sin(\alpha)} \Rightarrow \sin(\delta_1) = \frac{AB\sin(\alpha)}{BD} \cong \frac{3{,}5 \cdot \sin(96{,}8°)}{5{,}94} \cong 0{,}59$

$$\Rightarrow \delta_1 = \sin^{-1}(0{,}59) = 35{,}8°.$$

Finalement, $\beta_1 = 180° - \alpha - \delta_1 = 180° - 96{,}8 - 35{,}8 = 47{,}4°$.

Dans le triangle BCD, on a $a = BC$, $b = CD$ et $c = BD$.

Ainsi $BC^2 = CD^2 + BD^2 - 2 \cdot CD \cdot BD \cdot \cos(\delta_2)$

$$\Rightarrow 5{,}8^2 = 6{,}2^2 + 5{,}94^2 - 2 \cdot 6{,}2 \cdot 5{,}94 \cdot \cos(\delta_2)$$
$$\Rightarrow 33{,}64 = 38{,}44 + 35{,}28 - 73{,}656 \cdot \cos(\delta_2)$$
$$\Rightarrow 73{,}656 \cdot \cos(\delta_2) = 40{,}08 \Rightarrow \cos(\delta_2) = 0{,}544$$
$$\Rightarrow \delta_2 = \cos^{-1}(0{,}544) \cong 57°$$

De plus, $\frac{BC}{\sin(\delta_2)} = \frac{CD}{\sin(\beta_2)} \Rightarrow \sin(\beta_2) = \frac{CD\sin(\delta_2)}{BC} \cong \frac{6{,}2 \cdot \sin(57°)}{5{,}8} \cong 0{,}9$

$$\Rightarrow \beta_2 = \sin^{-1}(0{,}9) = 63{,}75°.$$

Finalement, $\gamma = 180° - \beta_2 - \delta^2 = 180° - 63{,}75° - 57° = 59{,}25°$.

Ainsi les autres angles du quadrilatère sont : $\beta = \beta_1 + \beta_2 = 47{,}4° + 63{,}75° = \underline{\underline{111{,}15°}}$

$\gamma = \underline{\underline{59{,}25°}}$

$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 35{,}8° + 57° = \underline{\underline{92{,}8°}}$

On a : aire quadrilatère = aire triangle ABD + aire triangle BCD.

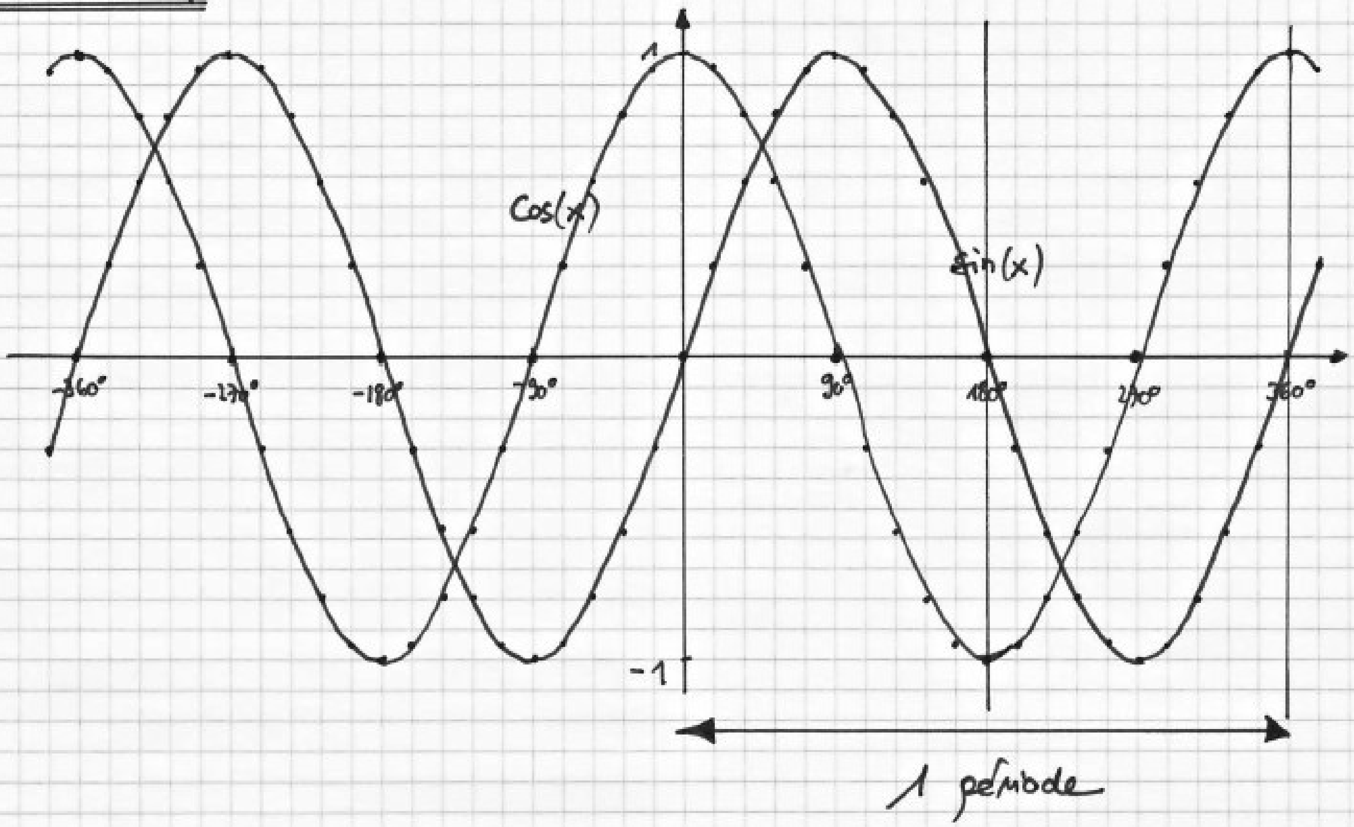
D'après "Formulaires et tables" p. 35, on a

aire triangle ABC $= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot 3{,}5 \cdot 4{,}4 \cdot \sin(96{,}8^\circ) = 7{,}64$ et

aire triangle BCD $= \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD \cdot \sin(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot 5{,}8 \cdot 6{,}2 \cdot \sin(59{,}25^\circ) = 15{,}45$.

Ainsi aire quadrilatère $= 7{,}64 + 15{,}45 = \underline{\underline{23{,}09}}$.

Exercice 3.37



Exercice 3.38

$f(x) = \tan(x)$.

Domaine: Comme $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, il faut que $\cos(x) \neq 0$, autrement dit que $x = 90° + k \cdot 180°$, $k \in \mathbb{Z}$

Ainsi $\underline{\underline{D = \mathbb{R} - \{ 90° + k \cdot 180°, k \in \mathbb{Z} \}}}$.

Zéros: $\tan(x) = 0 \Longrightarrow \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = 0 \Longrightarrow \sin(x) = 0 \Longrightarrow \underline{\underline{x = k \cdot 180°, k \in \mathbb{Z}}}$.

Période: cherchons si il existe $k \neq 0$ tel que $\tan(x+k) = x$;

on a $\tan(x+k) = \tan(x) \Longrightarrow \dfrac{\sin(x+k)}{\cos(x+k)} = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$\Longrightarrow \sin(x+k)\cos(x) = \cos(x+k)\sin(x)$

$\Longrightarrow \sin(x+k)\cos(x) - \cos(x+k)\sin(x) = 0$;

on sait que $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\alpha) - \cos(\alpha)\sin(\alpha)$;

ainsi $\sin(x+k)\cos(x) - \cos(x+k)\sin(x) = \sin(x+k-x) = \sin(k)$;

on doit donc avoir $\sin(k) = 0$;

on a donc $k = n \cdot 180$, $n \in \mathbb{Z}$;

on en conclut que $\underline{\underline{\text{la période de } \tan(x) \text{ est } 180°}}$ (on prend $n=1$).

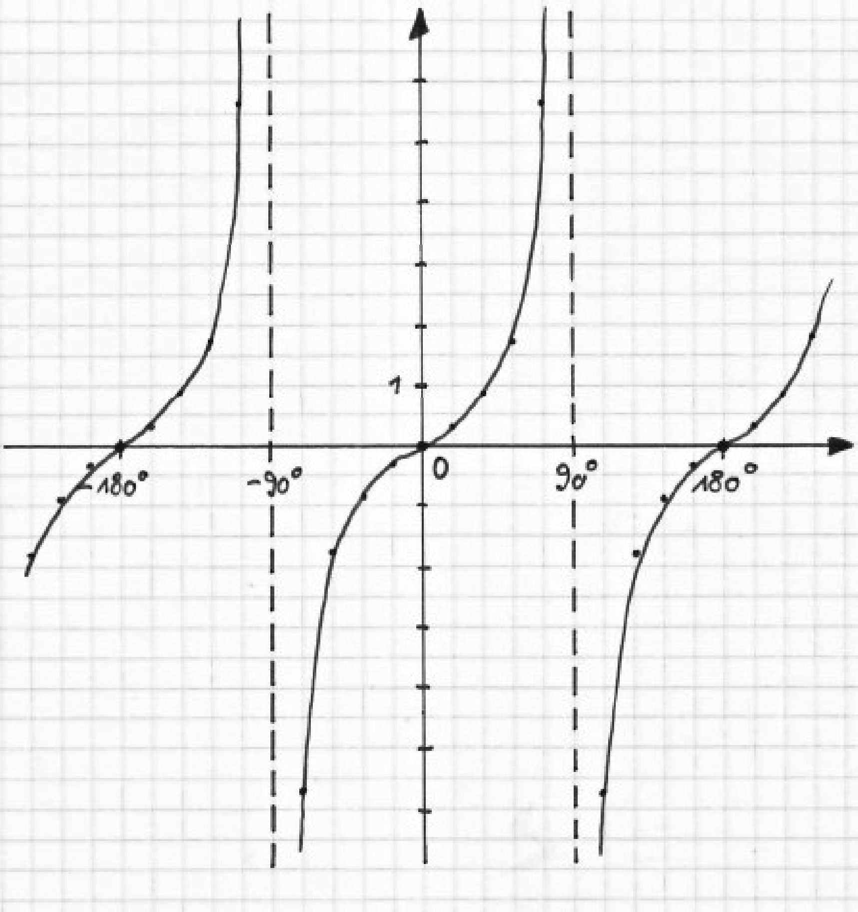
Parité: On a $\tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$

$\Longrightarrow$ $\underline{\underline{f \text{ est impaire}}}$.

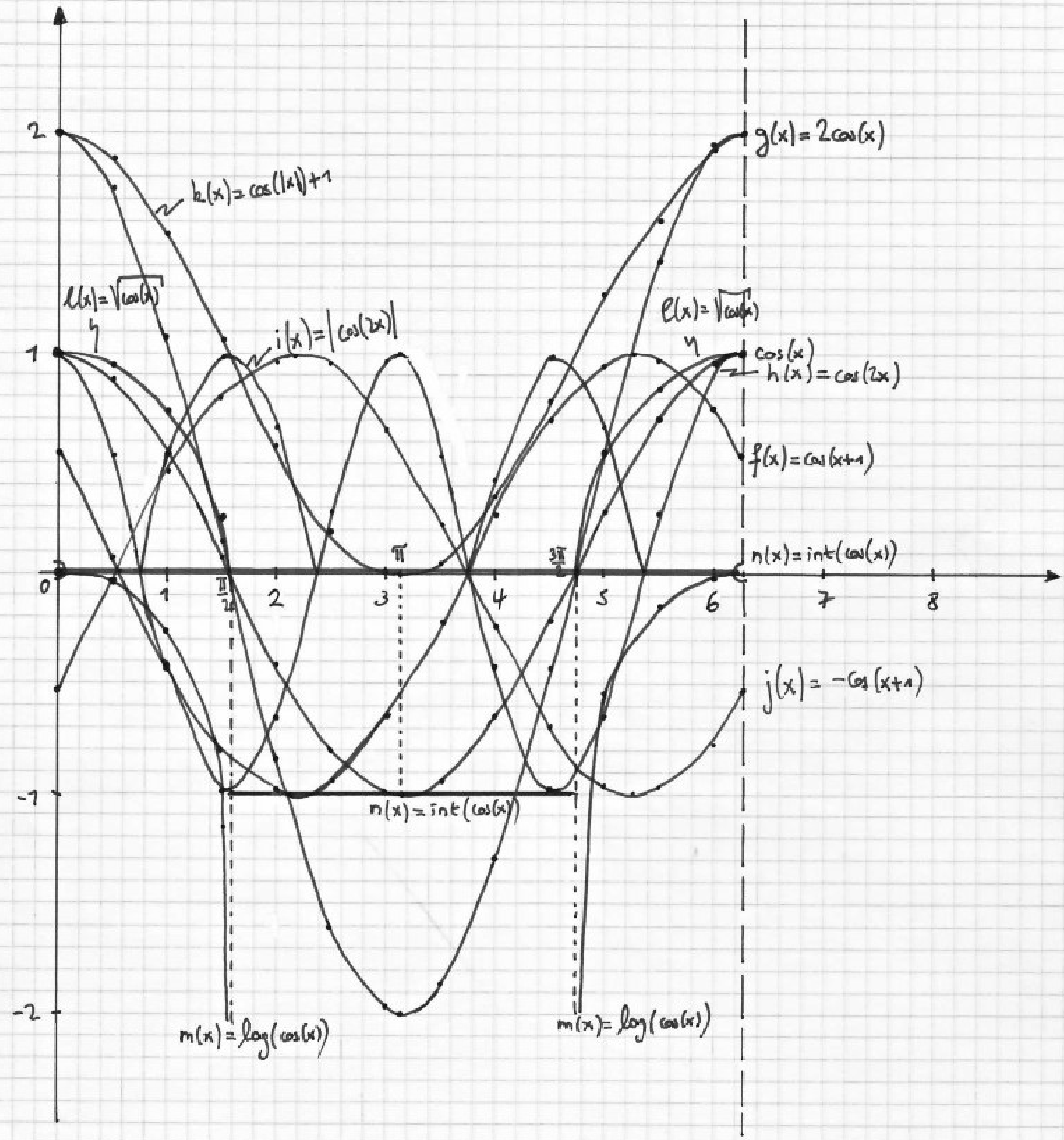
Tableau des signes:

x	...		$-180°$		$-90°$		0		$90°$		$180°$		...
$f(x)$		$+$	0	$-$	imp	$+$	0	$+$	imp	$-$	0	$+$	

Graphe:



Exercice 3.39



$f(x)$: $D = \mathbb{R}$, $f(D) = [-1;1]$, $P = 2\pi$, ni paire ni impaire.

$g(x)$: $D = \mathbb{R}$, $f(D) = [-2;2]$, $P = 2\pi$, paire.

$h(x)$: $D = \mathbb{R}$, $f(D) = [-1;1]$, $P = \pi$, paire.

$i(x)$: $D = \mathbb{R}$, $f(D) = [0;1]$, $P = \frac{\pi}{2}$, paire.

$j(x)$: $D = \mathbb{R}$, $f(D) = [-1;1]$, $P = 2\pi$, ni paire ni impaire.

$k(x)$: $D = \mathbb{R}$, $f(D) = [0;2]$, $P = 2\pi$, paire

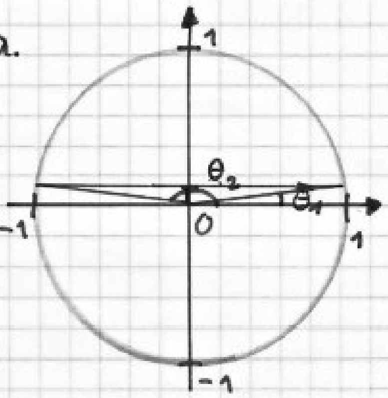
$l(x)$: $D = \ldots \cup \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right] \cup \ldots$, $f(D) = [0,1]$, $P = 2\pi$, paire

$m(x)$: $D = \ldots \cup \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right] \cup \ldots$, $f(D) = \left]-\infty; 0\right]$, $P = 2\pi$, paire

$n(x)$: $D = \mathbb{R}$, $f(D) = \{-1; 0; 1\}$, $P = 2\pi$, paire

Exercice 3.40.

a.



On a $\sin(\theta) = 0{,}1$

$\Rightarrow \theta = \sin^{-1}(0{,}1) \cong 5{,}7°$.

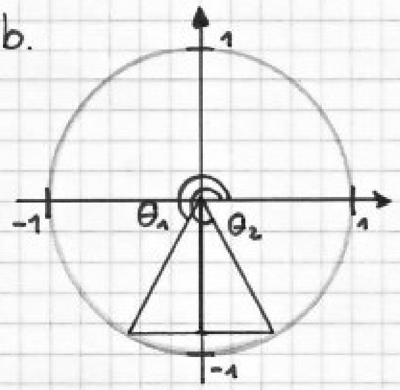
Ainsi $\theta_1 = 5{,}7° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{N}$.

De plus $\theta_2 = 180° - \theta + k \cdot 360° = 174{,}3° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{N}$.

Les solutions sont donc:

$$\underline{\underline{\theta_1 = 5{,}7° + k \cdot 360° \text{ et } \theta_2 = 174{,}3° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{N}.}}$$

b.



On a $\sin(\theta) = -0{,}84$

$\Rightarrow \theta = \sin^{-1}(-0{,}84) = -57{,}14$.

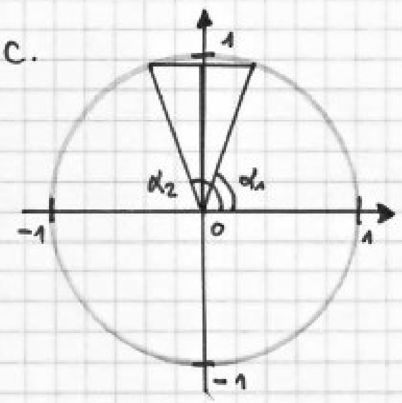
Ainsi $\theta_1 = 180 + 57{,}14 + k \cdot 360° = 237{,}1° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{N}$.

De plus $\theta_2 = 360 - 57{,}14 + k \cdot 360° = 302{,}8° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{N}$.

Les solutions sont donc:

$$\underline{\underline{\theta_1 = 237{,}1° + k \cdot 360° \text{ et } \theta_2 = 302{,}8° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{N}.}}$$

c.



On a $\sin(\theta° + 15°) = 0{,}951$: posons $\alpha = \theta + 15°$;

$\sin(\alpha) = 0{,}951 \Rightarrow \alpha = 72°$.

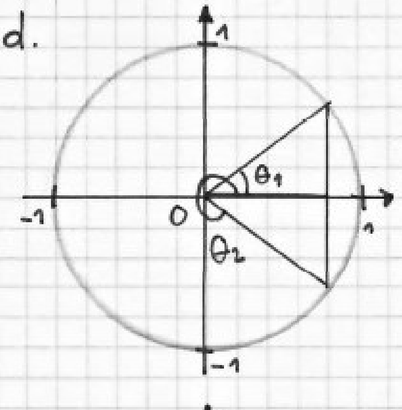
Ainsi $\alpha_1 = 72° + k \cdot 360°$ et $\alpha_2 = 180° - 72° + k \cdot 360° =$

$= 108° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{N}$.

Avec $\alpha = \theta + 15°$, on a $\theta = \alpha - 15°$ et les solutions sont

$$\underline{\underline{\theta_1 = 57° + k \cdot 360° \text{ et } \theta_2 = 93° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{N}.}}$$

d.



On a $\cos(\theta°) = 0{,}8 \Rightarrow \theta = 36{,}87°$.

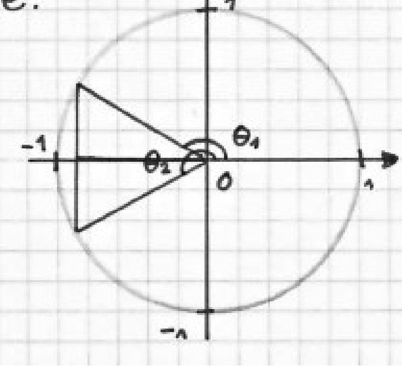
Ainsi $\theta_1 = 36{,}87° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{N}$.

De plus, $\theta_2 = 360° - \theta + k \cdot 360° = 323{,}13° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{N}$.

Les solutions sont donc:

$$\underline{\underline{\theta_1 = 36{,}87° + k \cdot 360° \text{ et } \theta_2 = 323{,}13° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{N}.}}$$

e.



On a $\cos(\theta°) = -0{,}84 \Rightarrow \theta = 147{,}14°$.

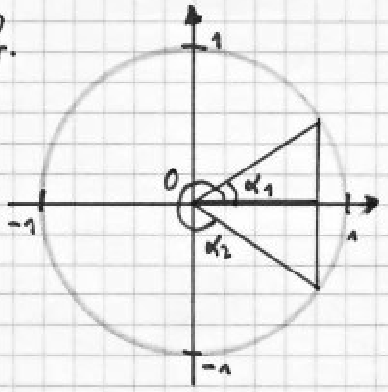
Ainsi $\theta_1 = 147{,}14° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{N}$.

De plus, $\theta_2 = 360° - \theta + k \cdot 360° = 212{,}86° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{N}$.

Les solutions sont donc:

$$\underline{\underline{\theta_1 = 147{,}14° + k \cdot 360° \text{ et } \theta_2 = 212{,}86° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{N}.}}$$

f.



On a $\cos(\theta° - 20°) = \sqrt{\frac{2}{3}}$: posons $\alpha = \theta° - 20°$;

$\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \alpha = 35,26°$

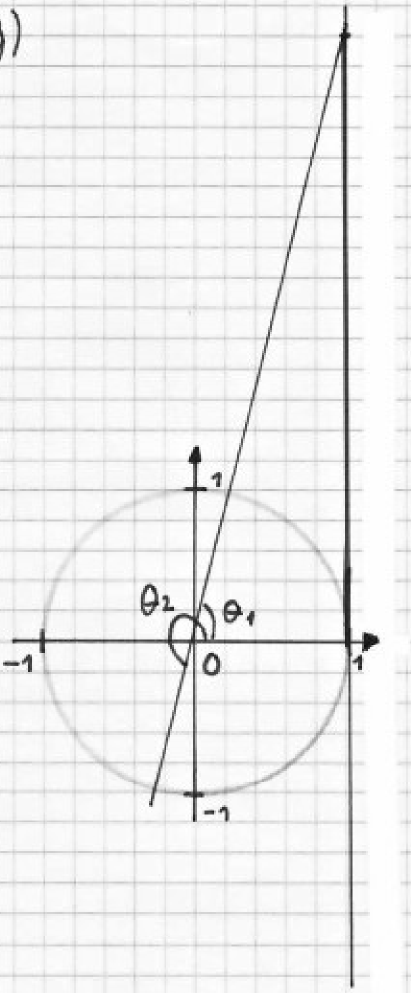
Ainsi $\alpha_1 = 35,26° + k \cdot 360°$ et $\alpha_2 = 360° - 35,26° + k \cdot 360° =$

$= 324,74° + k \cdot 360°, \ k \in \mathbb{N}$.

Avec $\alpha = \theta° - 20°$, on a $\theta° = \alpha + 20°$ et les solutions sont

$\underline{\underline{\theta_1 = 55,26° + k \cdot 360° \text{ et } \theta_2 = 344,74° + k \cdot 360°, \ k \in \mathbb{N}.}}$

g)

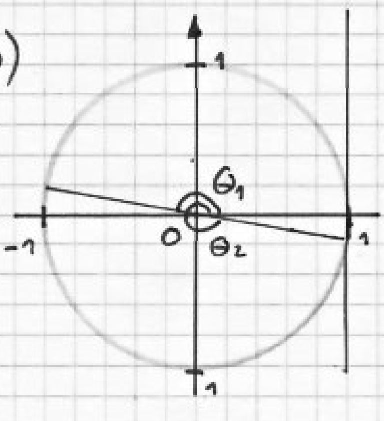


On a $\tan(\theta°) = 4 \Rightarrow \theta = 75,96°$

Les solutions sont donc

$\underline{\underline{\theta = 75,96° + k \cdot 180°, \ k \in \mathbb{N}.}}$

h)



On a $\tan(\theta) = -0,32 \Rightarrow \theta = -17,74°$.

Ainsi $\theta_1 = -17,74° + 180° = 162,26°$ et les solutions sont

$\underline{\underline{\theta = 162,26° + k \cdot 180°, \ k \in \mathbb{N}.}}$

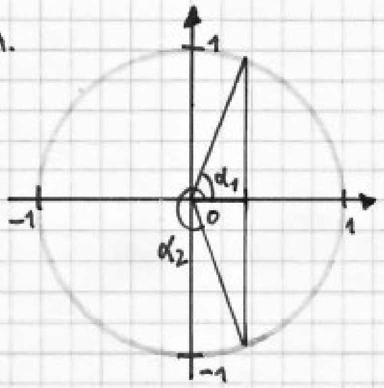
i) On a : $\tan(\theta° + 100°) = 0,11 \Rightarrow \theta° + 100° = 6,28° + k \cdot 180°, \ k \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow \theta = -93,72° + k \cdot 180° = -93,72° + 180° + l \cdot 180° = 86,28° + l \cdot 180°, \ l \in \mathbb{N}$.

Les solutions sont donc: $\underline{\underline{\theta = 86,28° + l \cdot 180°, \ l \in \mathbb{N}.}}$

Exercice 3.41.

a.



On a $\cos(\alpha) = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 70,53°$.

Ainsi $\alpha_1 = 70,53° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{N}$ et

$\alpha_2 = 360° - 70,53° + k \cdot 360° = 289,47° + k \cdot 360°$.

Avec $\alpha = 2\theta$, on obtient

$\theta_1 = 23,51° + k \cdot 120°$, $k \in \mathbb{N}$, et

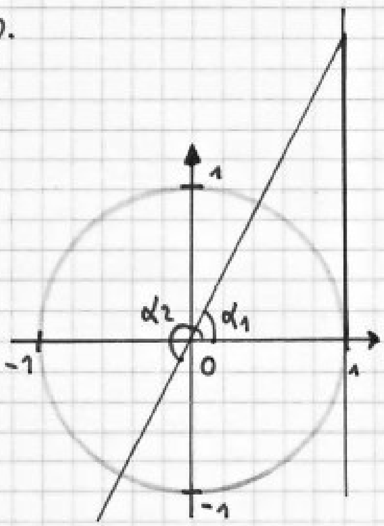
$\theta_2 = 96,49° + k \cdot 120°$, $k \in \mathbb{N}$.

Comme on cherche les solutions dans l'intervalle $]0°; 360°]$, on va prendre $k = 0, 1$ et 2.

Les solutions sont donc :

$$\underline{\underline{\theta = 23,51°\,;\ 143,51°\,;\ 263,51°\,;\ 96,49°\,;\ 216,49°\,;\ 336,49°.}}$$

b.



On a $\tan(\alpha) = 2 \Rightarrow \alpha = 63,43°$.

Ainsi $\alpha = 63,43° + k \cdot 180°$, $k \in \mathbb{N}$ $\quad (\alpha_2 = \alpha_1 + 180°)$.

Avec $\alpha = 3\theta$, on obtient :

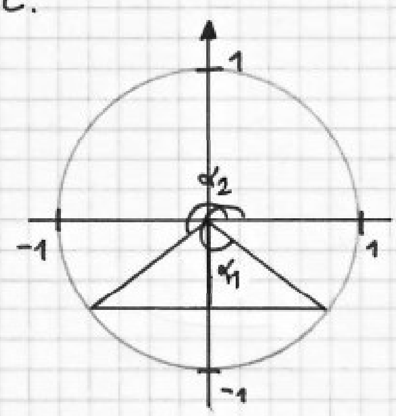
$\theta = 21,14° + k \cdot 60°$.

Comme on cherche les solutions dans l'intervalle $]0°; 360°]$, on va prendre $k = 0, 1, 2, 3, 4$ et 5.

Les solutions sont donc :

$$\underline{\underline{\theta = 21,14°\,;\ 81,14°\,;\ 141,14°\,;\ 201,14°\,;\ 261,14°\,;\ 321,14°}}$$

c.



On a $\sin(\alpha) = -0,6 \Rightarrow \alpha = -36,87°$.

Ainsi $\alpha_1 = -36,87° + k \cdot 360° = -36,87° + 360° + \ell \cdot 360°$,

$= 323,13° + \ell \cdot 360°$, $\ell \in \mathbb{N}$.

De plus, $\alpha_2 = 180° + 36,87° + k \cdot 360° = 216,87° + \ell \cdot 360°$, $\ell \in \mathbb{N}$.

Avec $\alpha = 2\theta$, on obtient :

$\theta_1 = 161,57° + \ell \cdot 180°$, $\ell \in \mathbb{N}$, et

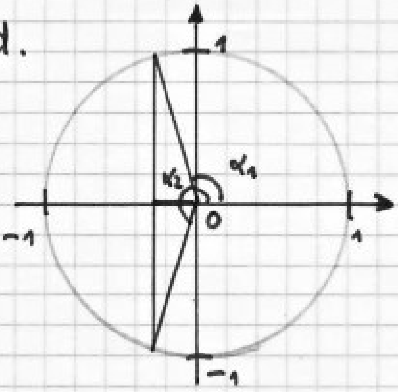
$\theta_2 = 108,43° + \ell \cdot 180°$, $\ell \in \mathbb{N}$.

Comme on cherche les solutions dans l'intervalle $]0°; 360°]$, on va prendre $\ell = 0$ et 1.

Les solutions sont donc

$$\underline{\underline{\theta = 108,43°\,;\ 288,43°\,;\ 161,57°\,;\ 341,57°.}}$$

d.



On a $\cos(\alpha) = -\frac{1}{4} \Rightarrow \alpha = 104,48°$.

Ainsi $\alpha_1 = 104,48° + k\cdot 180°$, $k \in \mathbb{N}$ et

$$\alpha_2 = 360° - 104,48° + k\cdot 180° = 255,52° + k\cdot 180°,\ k \in \mathbb{N}.$$

Avec $\alpha = 4\theta + 30°$, on a $4\theta = \alpha - 30°$ et $\theta = \frac{\alpha}{4} - 7,5°$.

Ainsi $\theta_1 = 18,62° + k\cdot 45°$ et

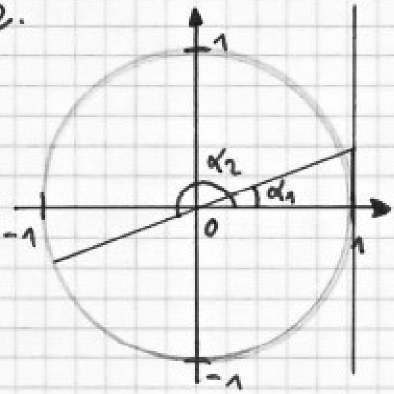
$\theta_2 = 56,38° + k\cdot 45°$, $k \in \mathbb{N}$

Comme on cherche les solutions dans l'intervalle $]0;360°]$, on va prendre $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ et 7 (seulement pour θ_2).

Les solutions sont donc :

$\theta = 18,62°;\ 56,38°;\ 63,62°;\ 101,38°;\ 108,62°;\ 146,38°;\ 153,62°;\ 191,38°;\ 198,62°;\ 236,38°;\ 243,62°;\ 281,38;\ 298,62°;\ 326,38°;\ 333,62°.$

e.



On a $\tan(\alpha) = 0,5 \Rightarrow \alpha \doteq 21,8°$.

Ainsi $\alpha = 21,8° + k\cdot 180°$, $k \in \mathbb{N}$ $(\alpha_2 = \alpha_1 + 180°)$.

Avec $\alpha = 2\theta - 90°$, on a $2\theta = \alpha + 90°$ et $\theta = \frac{\alpha}{2} + 45°$.

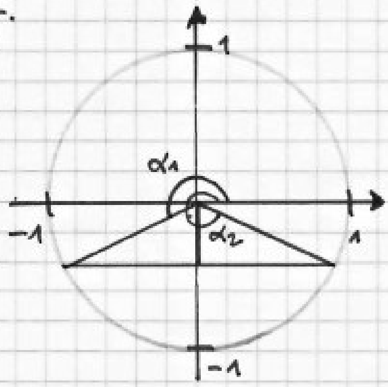
Ainsi $\theta = 10,9° + 45° + k\cdot 90° = 55,9° + k\cdot 90°$, $k \in \mathbb{N}$.

Comme on cherche les solutions dans l'intervalle $]0;360°]$, on va prendre $k = 0, 1, 2$ et 3.

Les solutions sont donc :

$\theta = 55,9°;\ 145,9°;\ 235,9°;\ 245,9°.$

f.



On a $\sin(\alpha) = -0,42 \Rightarrow \alpha = -24,83°$.

Ainsi $\alpha_1 = 180° + 24,83° + k\cdot 360° = 204,83° + k\cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$, et

$$\alpha_2 = 360° - 24,83° + k\cdot 360° = 335,17° + k\cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Avec $\alpha = 3\theta - 45$, on a $3\theta = \alpha + 45$ et $\theta = \frac{\alpha}{3} + 15$.

Ainsi $\theta_1 = 68,73° + 15° + k\cdot 120° = 83,28° + k\cdot 120°$ et

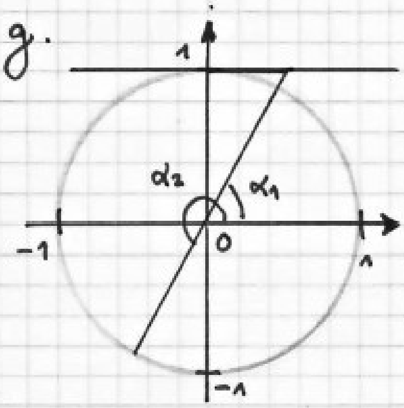
$\theta_2 = 111,72° + 15° + k\cdot 120° = 126,72° + k\cdot 120°$, $k \in \mathbb{Z}$.

Comme on cherche les solutions dans l'intervalle $]0;360°]$, on va prendre $k = -1$ (pour θ_2), $0, 1, 2$ (pour θ_1).

Les solutions sont donc :

$$\underline{\underline{\theta = 6{,}72° \; ; \; 83{,}28° \; ; \; 126{,}72° \; ; \; 203{,}28° \; ; \; 248{,}72° \; ; \; 323{,}28°.}}$$

g.



On a $\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \sqrt{3}$

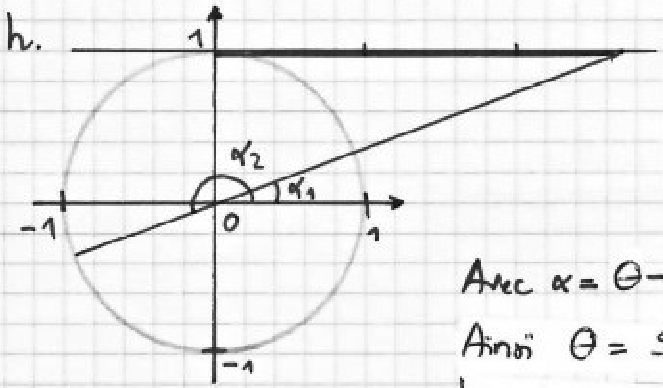
$\Rightarrow \alpha = 60°$

Ainsi $\alpha = 60° + k \cdot 180°$ $\quad (\alpha_2 = \alpha_1 + 180°)$, $k \in \mathbb{N}$.

Les solutions sont donc (on prend $k = 0$ et 1) :

$$\underline{\underline{\theta = 60° \text{ et } 240°.}}$$

h.



On a $\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \alpha = 30°$

Ainsi $\alpha = 30° + k \cdot 180°$, $k \in \mathbb{N}$ $\quad (\alpha_2 = \alpha_1 + 180°)$.

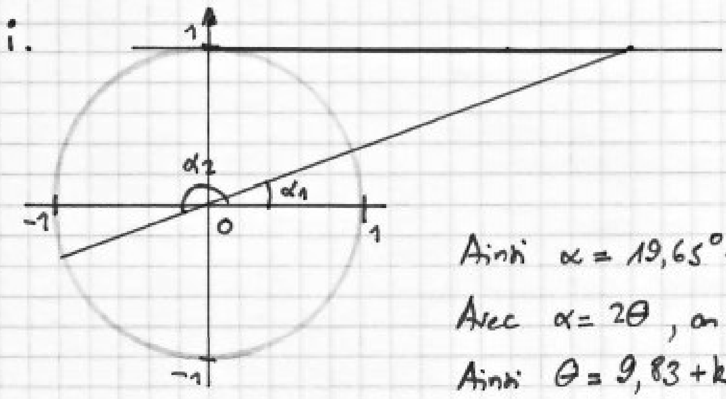
Avec $\alpha = \theta - 20°$, on a $\theta = \alpha + 20°$.

Ainsi $\theta = 50° + k \cdot 180°$, $k \in \mathbb{N}$.

Les solutions sont donc (on prend $k = 0$ et 1) :

$$\underline{\underline{\theta = 50° \text{ et } 230°.}}$$

i.



On a $\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = 2{,}8$

$\Rightarrow \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{1}{2{,}8} \cong 0{,}36$

$\Rightarrow \alpha = 19{,}65°$.

Ainsi $\alpha = 19{,}65° + k \cdot 180$, $k \in \mathbb{N}$ $\quad (\alpha_2 = \alpha_1 + 180°)$.

Avec $\alpha = 2\theta$, on a $\theta = \frac{\alpha}{2}$.

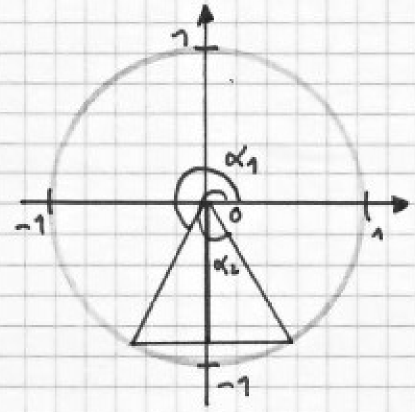
Ainsi $\theta = 9{,}83 + k \cdot 90$, $k \in \mathbb{N}$.

Comme on cherche les solutions dans l'intervalle $]0 ; 360°]$, on va prendre $k = 0, 1, 2$ et 3.

Les solutions sont donc :

$$\underline{\underline{\theta = 9{,}83° \; ; \; 99{,}83° \; ; \; 189{,}83° \; ; \; 279{,}83°.}}$$

Exercice 3.42.



On a $\sin(\alpha) = -0,88 \Rightarrow \alpha = -1,076$ rad.

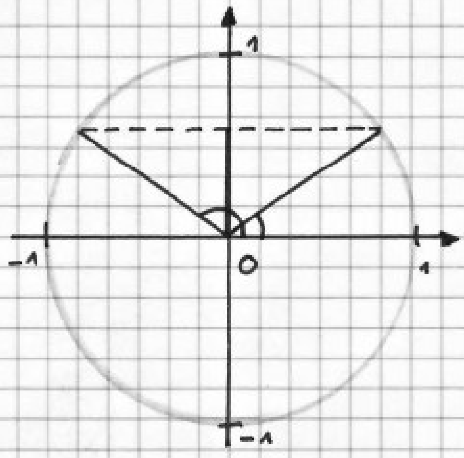
Ainsi $\alpha_1 = \pi + 1,076 + k \cdot 2\pi = 4,217 + k \cdot 2\pi$ rad, $k \in \mathbb{Z}$,

et $\alpha_2 = 2\pi - 1,076 + k \cdot 2\pi = 5,207 + k \cdot 2\pi$ rad, $k \in \mathbb{Z}$

Avec $k = 1$, on a $\alpha_1 = 4,217 + 2\pi = 10,5$ rad.

Le nombre cherché est <u>10,5 rad.</u>

Exercice 3.43



a. $\sin(5x) = \sin(7x)$

On a : $\sin(\alpha) = \sin(\beta) \Rightarrow$

soit $\beta = \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

soit $\beta = \pi - \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

i.e. $\beta = -\alpha + (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi : $\sin(5x) = \sin(7x) \Rightarrow$

soit $7x = 5x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ①,

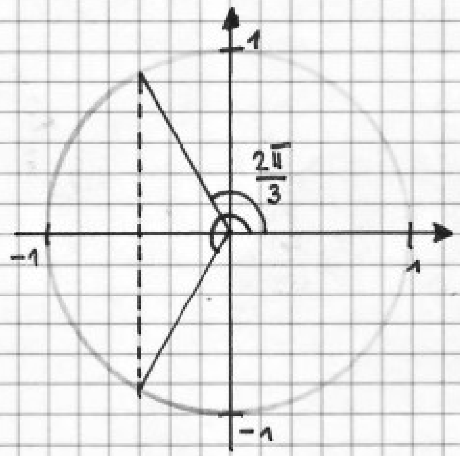
soit $7x = -5x + (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ②.

① $7x = 5x + 2k\pi \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

② $7x = -5x + (2k+1)\pi \Rightarrow 12x = (2k+1)\pi \Rightarrow x = \frac{2k+1}{12}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions de $\sin(5x) = \sin(7x)$ sont donc :

$$\underline{\underline{x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ \text{et}\ x = \frac{2k+1}{12}\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}}$$



b. $\cos(2x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

On a : $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -0{,}5$.

On doit donc résoudre $\cos(2x) = -0{,}5$.

On a alors soit $2x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$,

soit $2x = 2\pi - \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$2x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$2x = 2\pi - \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \Rightarrow 2x = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi$

$\Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions de $\cos(2x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ sont donc :

$$\underline{\underline{x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ \text{et}\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}}$$

c. $\sin(4x) + \sin(x) = 0 \Rightarrow \sin(4x) = -\sin(x)$.

Comme $-\sin(x) = \sin(-x)$, on doit résoudre $\sin(4x) = \sin(-x)$.

En procédant comme en a., on a :

soit $4x = -x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ①,

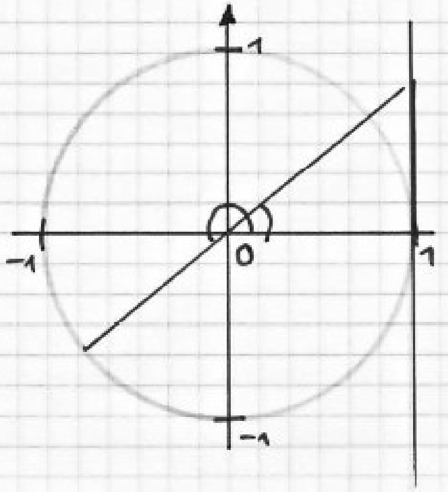
soit $4x = x + (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ②.

① $4x = -x + 2k\pi \Rightarrow 5x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$.

② $4x = x + (2k+1)\pi \Rightarrow 3x = (2k+1)\pi \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions de $\sin(4x) + \sin(x) = 0$ sont donc :

$$x = \frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}, \quad \text{et } x = \frac{(2k+1)\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}.$$



d. $\tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \tan(3x)$

On a : $\tan(\alpha) = \tan(\beta) \Rightarrow \beta = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

Ainsi $\tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \tan(3x) \Rightarrow 3x = x + \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

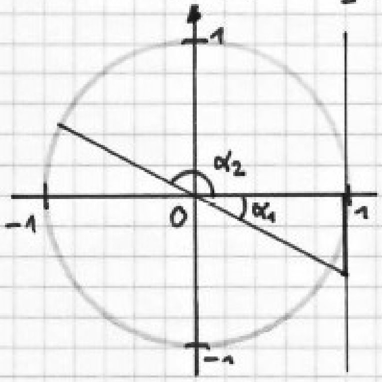
Les solutions de $\tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \tan(3x)$ sont donc

$$x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 3.44

a. $2\sin(x)+\cos(x)=0 \Rightarrow 2\sin(x)=-\cos(x) \Rightarrow 2\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=-1 \Rightarrow 2\tan(x)=-1$

$\Rightarrow \tan(x)=-\frac{1}{2}$.



On a $\tan(\alpha)=-\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=-26,565°$.

Ainsi $\alpha=-26,565°+k\cdot 180°$ $\quad(\alpha_2=\alpha_1+180°)$

$=-26,565°+180°+(k-1)\cdot 180°$

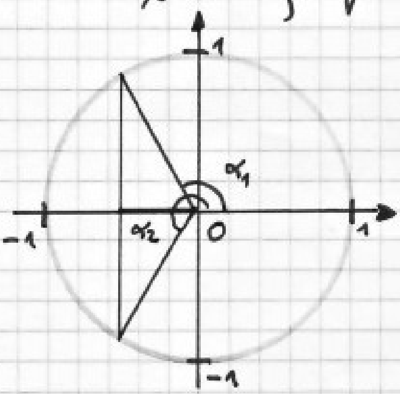
$=153,43°+\ell\cdot 180°$, $\ell\in\mathbb{Z}$.

Les solutions sont donc $\underline{\underline{x=153,43°+\ell\cdot 180°,\ \ell\in\mathbb{Z}}}$.

b. $4\cos^2(x)-4\cos(x)-3=0$: posons $y=\cos(x)$; on obtient l'équation $4y^2-4y-3=0$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $ay^2+by+c=0$ avec $a=4$, $b=-4$ et $c=-3$; on a $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot4\cdot(-3)=16+48=64$; $\sqrt{\Delta}=8$; les solutions sont : $y_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4+8}{2\cdot4}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ et $y_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4-8}{2\cdot4}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}$;

avec $y_1=\frac{3}{2}$ et $y=\cos(x)$, on obtient $\cos(x)=\frac{3}{2}$, ce qui n'a aucune solution puisque $-1\leq\cos(x)\leq 1$ pour toute valeur de x ;

avec $y_2=-\frac{1}{2}$ et $y=\cos(x)$, on obtient $\cos(x)=-\frac{1}{2}$;



$\cos(\alpha)=-\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=120°$;

on a alors $\alpha_1=120°+k\cdot360°$ et

$\alpha_2=360°-120°+k\cdot360°=240°+k\cdot360°$,

$k\in\mathbb{Z}$;

les solutions de $\cos(x)=-\frac{1}{2}$, sont donc $x=120°+k\cdot360°$ et $x=240°+k\cdot360°$, $k\in\mathbb{Z}$.

Par conséquent, les solutions de $4\cos^2(x)-4\cos(x)-3=0$ sont

$\underline{\underline{x=120°+k\cdot360° \text{ et } x=240°+k\cdot360°,\ k\in\mathbb{Z}}}$.

c. $2\sin^2(x)-3\sin(x)+1=0$: posons $y=\sin(x)$; on obtient l'équation $2y^2-3y+1=0$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $ay^2+by+c=0$ avec $a=2$, $b=-3$ et $c=1$; on a $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\cdot2\cdot1=9-8=1$ et $\sqrt{\Delta}=1$; les solutions sont $y_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3+1}{2\cdot2}=\frac{4}{4}=1$ et $y_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3-1}{2\cdot2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$;

avec $y_1=1$ et $y=\sin(x)$, on obtient $\sin(x)=1 \Rightarrow x=90°+k\cdot360°$, $k\in\mathbb{Z}$;

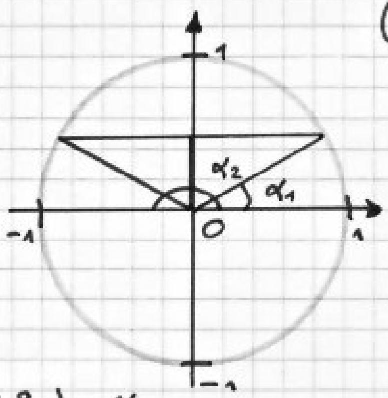
avec $y_2=\frac{1}{2}$ et $y=\sin(x)$, on obtient $\sin(x)=\frac{1}{2}$;

$\sin(\alpha)=\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=30°$;

on a alors $\alpha_1 = 30° + k.360°$ et

$\alpha_2 = 180° - 30° + k.360° =$

$= 150° + k.360°, \ k \in \mathbb{Z}$;



les solutions de $\sin(x) = \frac{1}{2}$ sont donc

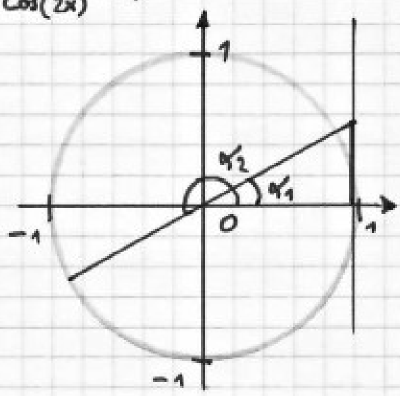
$x = 30° + k.360°$ et $x = 150° + k.360°, \ k \in \mathbb{Z}$.

Par conséquent, les solutions de $2\sin^2(x) - 3\sin(x) + 1 = 0$

sont $\underline{\underline{x = 90° + k.360°, \ x = 30° + k.360° \text{ et } x = 150° + k.360°, \ k \in \mathbb{Z}.}}$

d. $\sqrt{3}\sin(2x) - \cos(2x) = 0 \implies \sqrt{3}\sin(2x) = \cos(2x) \implies \sqrt{3}\,\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = 1$

$\implies \sqrt{3}\tan(2x) = 1 \implies \tan(2x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.



$\tan(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies \alpha = 30°$.

On a ainsi $\alpha = 30° + k.180°$ $\quad (\alpha_2 = \alpha_1 + 180°)$.

Les solutions de $\tan(2x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ sont donc

$2x = 30° + k.180° \implies x = 15° + k.90°, \ k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions de $\sqrt{3}\sin(2x) - \cos(2x) = 0$ sont donc

$\underline{\underline{x = 15° + k.90°, \ k \in \mathbb{Z}.}}$

e. $2\cos^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$: on a $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \implies \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$.

L'équation s'écrit alors $2(1 - \sin^2(x)) + \sin(x) - 1 = 0$

$\implies 2 - 2\sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0 \implies 2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 = 0$.

On pose $y = \sin(x)$. On obtient $2y^2 - y - 1 = 0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $ay^2 + by + c = 0$, avec $a = 2$, $b = -1$ et $c = -1$; on a

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4.2.(-1) = 1 + 8 = 9$ et $\sqrt{\Delta} = 3$; les solutions sont

$y_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+3}{2.2} = \frac{4}{4} = 1$ et $\quad y_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-3}{2.2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$.

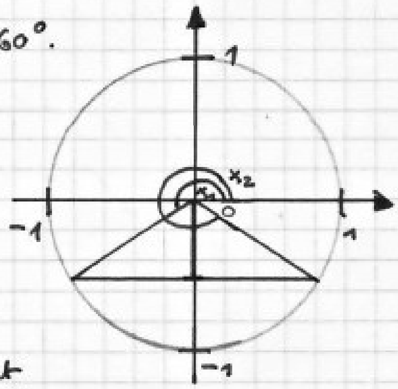
Avec $y_1 = 1$ et $y = \sin(x)$, on a $\sin(x) = 1 \implies x = 90° + k.360°$.

Avec $y_2 = -\frac{1}{2}$ et $y = \sin(x)$, on a $\sin(x) = -\frac{1}{2}$

$\implies x = -30° \implies x_1 = 180° + 30° + k.360° =$

$= 210° + k.360°, \ k \in \mathbb{Z}$, et

$x_2 = 360° - 30° + k.360° = 330° + k.360°, \ k \in \mathbb{Z}$.



Les solutions sont donc $\underline{\underline{x = 90° + k.360°, \ x = 210° + k.360° \text{ et}}}$

$\underline{\underline{x = 330° + k.360°, \ k \in \mathbb{Z}.}}$

f. $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$: on a $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \Rightarrow \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$

$\Rightarrow \cos(x) = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$.

L'équation s'écrit: $\pm\sqrt{3}\sqrt{1-\sin^2 x} - \sin x = 1 \Rightarrow \pm\sqrt{3}\sqrt{1-\sin^2 x} = 1 + \sin x$

$\Rightarrow \left(\pm\sqrt{3}\sqrt{1-\sin^2 x}\right)^2 = (1+\sin x)^2 \Rightarrow 3(1-\sin^2 x) = 1 + 2\sin x + \sin^2 x$

$\Rightarrow 3 - 3\sin^2 x = 1 + 2\sin x + \sin^2 x \Rightarrow 4\sin^2 x + 2\sin x - 2 = 0$

$\Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.

On pose $y = \sin x$. L'équation devient $2y^2 + y - 1 = 0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $ay^2 + by + c = 0$, avec $a = 2$, $b = 1$ et $c = -1$; on a $\Delta = b^2 - 4ac =$ $= 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9$ et $\sqrt{\Delta} = 3$; les solutions sont

$y_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+3}{2\cdot 2} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$ et $y_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-3}{2\cdot 2} = \dfrac{-4}{4} = -1$.

Avec $y_1 = -\frac{1}{2}$ et $y = \sin(x)$, on a $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ et les solutions sont :

$x = 210° + k \cdot 360°$ et $x = 330° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$

On vérifie les solutions :

avec $x = 210°$, on a $\sqrt{3}\cos x - \sin x = -1 \neq 1$;

avec $x = 330°$, on a $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2 \neq 1$.

Avec $y_2 = -1$ et $y = \sin(x)$, on a $\sin(x) = -1$ et les solutions sont :

$x = 270° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions de l'équation sont donc : $\underline{\underline{x = 270° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}}}$.

Exercice 3.45

a. $\tan(\arctan(x)) = \underline{x.}$

b. $\sin(\arccos(x))$: posons $y = \arccos(x)$; on obtient
$\sin(y) = \sqrt{1-\cos^2(y)} = \sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1-x^2}$;
ainsi $\underline{\underline{\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}.}}$

c. $\tan(\arccos(x))$: posons $y = \arccos(x)$; on obtient
$\tan(y) = \dfrac{\sin(y)}{\cos(y)} = \dfrac{\sin(\arccos(x))}{\cos(\arccos(x))} = \dfrac{\sin(\arccos(x))}{x}$;
Comme, d'après b., on a $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$, on obtient
$\underline{\underline{\tan(\arccos(x)) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}.}}$

d. $\sin(2\arcsin(x))$: on sait que $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$;
posons $y = \arcsin(x)$; on obtient
$\sin(2y) = \sin(y+y) = \sin(y)\cos(y) + \cos(y)\sin(y) = 2\sin(y)\cos(y) =$
$= 2\sin(\arcsin(x))\cos(\arcsin(x)) = 2x\cos(\arcsin(x))$;
Comme $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$, on obtient
$\underline{\underline{\sin(2\arcsin(x)) = 2x\sqrt{1-x^2}.}}$

Exercice 3.46

On sait que $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$ et
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$.

a. $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = \underline{\underline{\cos^2(x) - \sin^2(x)}}$.

$\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = \underline{\underline{2\sin(x)\cos(x)}}$.

$$\tan(2x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\cos^2 x \cdot 2\frac{\sin x}{\cos x}}{\cos^2 x\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)} = \underline{\underline{\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}}.$$

b. $\cos(3x) = \cos(2x+x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) =$

$= (\cos^2(x) - \sin^2(x))\cos(x) - 2\sin(x)\cos(x)\sin(x) =$

$= \cos^3(x) - \sin^2(x)\cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x) =$

$= \cos^3(x) - 3\sin^2(x)\cos(x) = \cos^3(x) - 3(1-\cos^2(x))\cos(x) =$

$= \cos^3(x) - 3\cos(x) + 3\cos^3(x) = \underline{\underline{4\cos^3(x) - 3\cos(x)}} =$

$= \cos(x)(4\sin^2(x) - 3) = \cos(x)(4(1-\sin^2(x)) - 3) =$

$= \cos(x)(4 - 4\sin^2(x) - 3) = \underline{\underline{\cos(x)(1 - 4\sin^2(x))}}$.

$\sin(3x) = \sin(2x+x) = \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x) =$

$= 2\sin(x)\cos(x)\cos(x) + (\cos^2(x) - \sin^2(x))\sin(x) =$

$= 2\sin(x)\cos^2(x) + \sin(x)\cos^2(x) - \sin^3(x) =$

$= 3\sin(x)\cos^2(x) - \sin^3(x) = 3\sin(x)(1-\sin^2(x)) - \sin^3(x) =$

$= 3\sin(x) - 3\sin^3(x) - \sin^3(x) = \underline{\underline{3\sin(x) - 4\sin^3(x)}} =$

$= \sin(x)(3 - 4\sin^2(x)) = \sin(x)(3 - 4(1-\cos^2(x)) =$

$= \sin(x)(3 - 4 + 4\cos^2(x)) = \underline{\underline{\sin(x)(4\cos^2(x) - 1)}}$.

Exercice 3.47

On sait que $\cos(45°) = \sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos(60°) = \frac{1}{2}$.

On a
$$\cos(15°) = \cos(60°-45°) = \cos(60°)\cos(45°) + \sin(60°)\sin(45°) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}\sqrt{2}}{4} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}}}.$$

$$\sin(15°) = \sin(60°-45°) = \sin(60°)\cos(45°) - \cos(60°)\sin(45°) =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}-\sqrt{2}}{4} = \underline{\underline{\frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{4}}}.$$

$$\sin(105°) = \sin(60°+45°) = \sin(60°)\cos(45°) + \cos(60°)\sin(45°) =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{2}}{4} = \underline{\underline{\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{4}}}.$$

$$\cos(105°) = \cos(60°+45°) = \cos(60°)\cos(45°) - \sin(60°)\sin(45°) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}\sqrt{2}}{4} = \underline{\underline{\frac{(1-\sqrt{3})\sqrt{2}}{4}}}.$$

$$\cos(255°) = \cos(360°-105°) = \cos(360°)\cos(105°) + \sin(360°)\sin(105°) =$$
$$= 1\cdot\frac{(1-\sqrt{3})\sqrt{2}}{4} + 0\cdot\sin(105°) = \underline{\underline{\frac{(1-\sqrt{3})\sqrt{2}}{4}}}.$$

Exercice 3.48

On a $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$,

$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$,

$\cos(120°) = \cos(180°-60°) = -\cos(60°) = -\frac{1}{2}$,

$\sin(120°) = \sin(180°-60°) = \sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos(240°) = \cos(180°+60°) = -\cos(60°) = -\frac{1}{2}$,

$\sin(240°) = \sin(180°+60°) = -\sin(60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a. $\cos(x) + \cos(x+120°) + \cos(x+240°) =$

$= \cos(x) + \cos(x)\cos(120°) - \sin(x)\sin(120°) + \cos(x)\cos(240°) - \sin(x)\sin(240°) =$

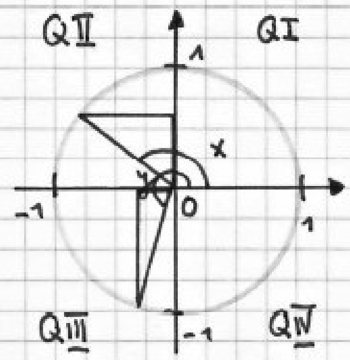
$= \cos(x) - \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) = \underline{0.}$

b. $\sin(x) + \sin(x+120°) + \sin(x+240°) =$

$= \sin(x) + \sin(x)\cos(120°) + \cos(x)\sin(120°) + \sin(x)\cos(240°) + \cos(x)\sin(240°) =$

$= \sin(x) - \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) = \underline{0.}$

Exercice 3.49



On a $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$ et

$$\tan(x-y) = \frac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}.$$

Avec la relation $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$, on a $\cos^2(x) = 1-\sin^2(x) =$
$= 1-\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1-\frac{4}{9} = \frac{5}{9}$. Comme $x \in Q\,II$, on obtient $\cos(x) =$
$= -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

De plus, $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{2/3}{-\sqrt{5}/3} = \frac{2}{3} : \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} =$
$= -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Avec la relation $\cos^2(y)+\sin^2(y)=1$, on a $\sin^2(y) = 1-\cos^2(y) =$
$= 1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 1-\frac{1}{16} = \frac{15}{16}$. Comme $y \in Q\,III$, on obtient $\sin(y) =$
$= -\sqrt{\frac{15}{16}} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

De plus, $\tan(y) = \frac{\sin(y)}{\cos(y)} = \frac{-\sqrt{15}/4}{-1/4} = \frac{\sqrt{15}}{4} : \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{4}{1} = \sqrt{15}$.

En résumé, on a $\cos(x) = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\sin(x) = \frac{2}{3}$, $\tan(x) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos(y) = -\frac{1}{4}$, $\sin(y) = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ et $\tan(y) = \sqrt{15}$.

On a ainsi: $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) = \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) =$

$$= -\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{75}}{12} = -\frac{1}{6} + \frac{5\sqrt{3}}{12} = \underline{\underline{\frac{5\sqrt{3}-2}{12}}}.$$

De plus: $\tan(x-y) = \frac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)} = \frac{-\frac{2\sqrt{5}}{5} - \sqrt{15}}{1+\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\cdot\sqrt{15}} = \frac{\frac{-2\sqrt{5}-5\sqrt{15}}{5}}{1-\frac{2\sqrt{75}}{5}} =$

$$= \frac{\frac{-2\sqrt{5}-5\sqrt{15}}{5}}{1-\frac{2\cdot5\sqrt{3}}{5}} = \frac{\frac{-2\sqrt{5}-5\sqrt{15}}{5}}{1-2\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{5}-5\sqrt{15}}{5} : (1-2\sqrt{3}) =$$

$$= \frac{-2\sqrt{5}-5\sqrt{15}}{5}\cdot\frac{1}{1-2\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{5}-5\sqrt{15}}{5(1-2\sqrt{3})} = \frac{(-2\sqrt{5}-5\sqrt{15})(1+2\sqrt{3})}{5(1-2\sqrt{3})(1+2\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{-2\sqrt{5}-4\sqrt{3}\sqrt{5}-5\sqrt{15}-10\sqrt{3}\sqrt{15}}{5\left(1^2-(2\sqrt{3})^2\right)} = \frac{-2\sqrt{5}-4\sqrt{15}-5\sqrt{15}-10\sqrt{45}}{5(1-4\cdot3)} =$$

$$= \frac{-2\sqrt{5}-9\sqrt{15}-10\cdot3\sqrt{5}}{5\cdot(-11)} = \frac{-2\sqrt{5}-9\sqrt{15}-30\sqrt{5}}{-55} = \frac{-32\sqrt{5}-9\sqrt{15}}{-55} = \underline{\underline{\frac{32\sqrt{5}+9\sqrt{15}}{55}}}.$$

Exercice 3.50

On a $\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$ et $\cos(\beta) = \frac{24}{25}$, avec α et β aigus.

On a donc α et $\beta \in \left]0; 90°\right[$ et $\cos(\alpha) > 0$ et $\sin(\beta) > 0$.

Avec $\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$ et $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$, on a alors $\cos(\alpha) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} =$

$$= \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

On a donc $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}.$

Avec $\cos(\beta) = \frac{24}{25}$ et $\cos^2(\beta) + \sin^2(\beta) = 1$, on obtient $\sin(\beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\beta)} = \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2} =$

$$= \sqrt{1 - \frac{576}{625}} = \sqrt{\frac{49}{625}} = \underline{\underline{\frac{7}{25}}}.$$

On a $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$.

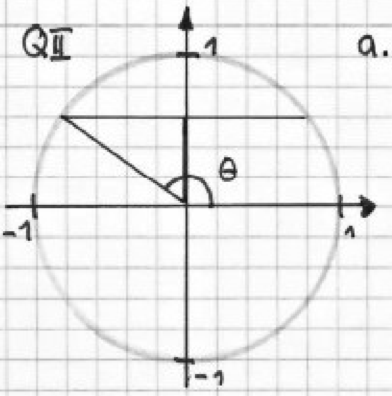
Ainsi $\cos(\alpha - \beta) = \frac{4}{5} \cdot \frac{24}{25} + \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{25} = \frac{96}{125} + \frac{28}{125} = \underline{\underline{\frac{124}{125}}}.$

On a $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$, où $\tan(\alpha) = \frac{3}{4}$ et $\tan(\beta) = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} = \frac{7/25}{24/25} =$

$$= \frac{7}{25} : \frac{24}{25} = \frac{7}{25} \cdot \frac{25}{24} = \frac{7}{24}.$$

Ainsi $\tan(\alpha) + \beta = \frac{\frac{3}{4} + \frac{7}{24}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{24}} = \frac{\frac{25}{24}}{1 - \frac{7}{32}} = \frac{25/24}{25/32} = \frac{25}{24} : \frac{25}{32} = \frac{25}{24} \cdot \frac{32}{25} = \frac{32}{24} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}.$

Exercice 3.51



a. On a $\sin(\theta) = \frac{3}{5}$ et $\theta \in Q\text{II}$. Ainsi $\cos(\theta) < 0$.

Avec $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, on trouve $\cos(\theta) = -\sqrt{1-\sin^2(\theta)} =$

$$= -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}.$$

De plus $\tan(2\theta) = \tan(\theta+\theta) = \dfrac{2\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)}$,

puisque $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$.

On a $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \dfrac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{5} : \frac{4}{5} = -\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{4} = -\frac{3}{4}$.

Ainsi $\tan(2\theta) = \dfrac{2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \dfrac{-3/2}{1-9/16} = \dfrac{-3/2}{7/16} = -\frac{3}{2} : \frac{7}{16} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{16}{7} = \underline{\underline{-\frac{24}{7}}}.$

b. On a $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$ et $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$.

De plus $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan(45°) = 1$.

Ainsi $\tan\left(\frac{\pi}{4}+t\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right) = \dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)+\tan(t)}{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan(t)} - \dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)-\tan(t)}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan(t)} =$

$$= \frac{1+\tan(t)}{1-\tan(t)} - \frac{1-\tan(t)}{1+\tan(t)} = \frac{(1+\tan(t))^2-(1-\tan(t))^2}{(1-\tan(t))(1+\tan(t))} =$$

$$= \frac{1+2\tan(t)+\tan^2(t)-(1-2\tan(t)+\tan^2(t))}{1-\tan^2(t)} =$$

$$= \frac{1+2\tan(t)+\tan^2(t)-1+2\tan(t)-\tan^2(t)}{1-\tan^2(t)} = \underline{\underline{\frac{4\tan(t)}{1-\tan^2(t)}}}.$$

Exercice 3.52

a. On sait que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

Ainsi $2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x) \Rightarrow \cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1+\cos(x)}{2}}}$.

b. Avec $\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1-\cos(x)}{2}$, on a $\sin^2(22{,}5°) = \sin^2\left(\dfrac{45°}{2}\right) = \dfrac{1-\cos(45°)}{2} =$

$$= \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

D'où $\underline{\underline{\sin(22{,}5°) = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}}}}$.

Exercice 3.53

a. $\cos(x) = \tan(x)$: avec $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, on obtient $\cos(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \Rightarrow \cos^2(x) = \sin(x)$;

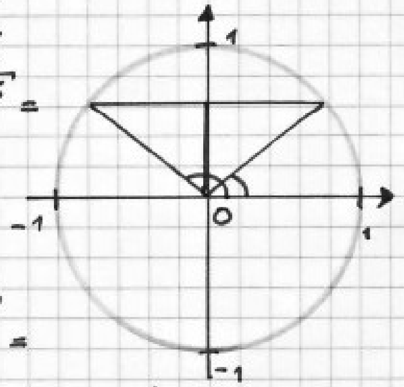
avec $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, i.e. $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$, on obtient

$1 - \sin^2(x) = \sin(x) \Rightarrow \sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$;

on pose $y = \sin(x)$; on trouve $y^2 + y - 1 = 0$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $ay^2 + by + c = 0$, avec $a = 1$, $b = 1$ et $c = -1$; on a

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4.1.(-1) = 1 + 4 = 5$ et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$; ainsi

$y_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $y_2 = \frac{-b-\sqrt{5}}{2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$;



avec $y_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $y = \sin(x)$, on a $\sin(x) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} =$

$\cong 0{,}618 \Rightarrow x \cong 38{,}17° + k.360°$ et

$x \cong 180° - 38{,}17° + k.360° = 141{,}83° + k.360°$,

$k \in \mathbb{Z}$;

avec $y_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $y = \sin(x)$, on a $\sin(x) = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} =$

$\cong -1{,}618 < -1$, ce qui n'a aucune solution $(-1 \leq \sin(x) \leq 1)$;

Les solutions sont donc:

$$\underline{\underline{x \cong 38{,}17° + k.360° \text{ et } x = 141{,}83° + k.360°.}}$$

b. $3\sin^2(x) + \cos^2(x) - 2 = 0$: on a $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 0 \Rightarrow \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$; on obtient

$3\sin^2(x) + 1 - \sin^2(x) - 2 = 0 \Rightarrow 2\sin^2(x) - 1 = 0$

$\Rightarrow 2\sin^2(x) = 1 \Rightarrow \sin^2(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

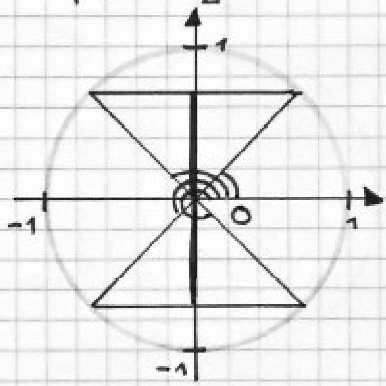
$\Rightarrow x = 45° + k.360°$,

$x = 180° - 45° + k.360° = 135° + k.360°$,

$x = 180° + 45° + k.360° = 225° + k.360°$ et

$x = 360° - 45° + k.360° = 315° + k.360°$,

$k \in \mathbb{Z}$;



on en conclut que les solutions sont:

$$\underline{\underline{x = 45° + k.90°,\ k \in \mathbb{Z}.}}$$

c. $\sin(2x) + 3\cos(2x) = 2$: on a $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \Rightarrow \cos^2(\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha)$

$\Rightarrow \cos(\alpha) = \pm\sqrt{1-\sin^2(\alpha)} \Rightarrow \cos(2x) = \pm\sqrt{1-\sin^2(2x)}$;

on obtient l'équation $\sin(2x) \pm 3\sqrt{1-\sin^2(2x)} = 2$

$\Rightarrow \pm 3\sqrt{1-\sin^2(2x)} = 2 - \sin(2x)$

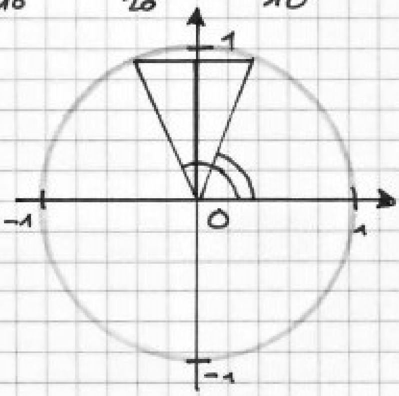
$\Rightarrow \left(\pm 3\sqrt{1-\sin^2(2x)}\right)^2 = (2 - \sin(2x))^2$

$\Rightarrow 9(1 - \sin^2(2x)) = 4 - 4\sin(2x) + \sin^2(2x)$

$\Rightarrow 9 - 9\sin^2(2x) = \sin^2(2x) - 4\sin(2x) + 4$

$\Rightarrow 10\sin^2(2x) - 4\sin(2x) - 5 = 0$;

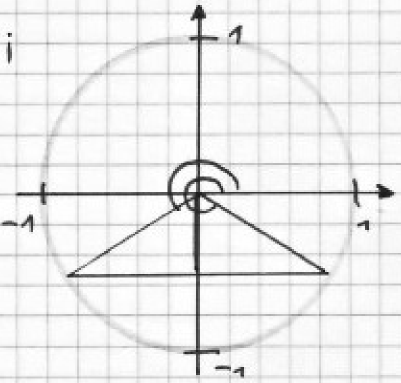
posons $y = \sin(2x)$; on obtient alors $10y^2 - 4y - 5 = 0$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $ay^2 + by + c = 0$, avec $a = 10$, $b = -4$ et $c = -5$; on a $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-5) = 16 + 200 = 216$ et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{216} = 6\sqrt{6}$. les solutions sont $y_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+6\sqrt{6}}{2 \cdot 10} = \frac{4+6\sqrt{6}}{20} = \frac{2+3\sqrt{6}}{10}$ et $y_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-6\sqrt{6}}{2 \cdot 10} = \frac{4-6\sqrt{6}}{20} = \frac{2-3\sqrt{6}}{10}$;



avec $y_1 = \frac{2+3\sqrt{6}}{10}$ et $y = \sin(2x)$, on a $\sin(2x) = $
$= \frac{2+3\sqrt{6}}{10} \cong 0,935$

$\Rightarrow 2x \cong 69,2° + k \cdot 360°$ et
$2x \cong 180° - 69,2° + k \cdot 360° = 110,8° + k \cdot 360°$,
$k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = 34,6° + k \cdot 180°$ et $x = 55,4° + k \cdot 180°$, $k \in \mathbb{Z}$;



avec $y_2 = \frac{2-3\sqrt{6}}{10}$ et $y = \sin(2x)$, on a $\sin(2x) = $
$= \frac{2-3\sqrt{6}}{10} \cong -0,534 \Rightarrow 2x \cong -32,33°$

$\Rightarrow 2x = 180° + 32,33° + k \cdot 360° = 212,33° + k \cdot 360°$ et
$2x = 360° - 32,33° + k \cdot 360° = 327,67° + k \cdot 360°$,
$k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = 106,17° + k \cdot 180°$ et $x = 163,83° + k \cdot 180°$, $k \in \mathbb{Z}$;

on a donc obtenu $x = 34,6° + k \cdot 180°$, $x = 55,4° + k \cdot 180°$, $x = 106,17° + k \cdot 180°$ et
$x = 163,83° + k \cdot 180°$, $k \in \mathbb{Z}$;

vérifions la validité de ces solutions:

$x = 34,6° + k \cdot 180°$: $\sin(2x) + 3\cos(2x) = 2$;

$x = 55,4° + k \cdot 180°$: $\sin(2x) + 3\cos(2x) = -0,13 \neq 2$;

$x = 106,17° + k \cdot 180°$: $\sin(2x) + 3\cos(2x) = -3,07 \neq 2$;

$x = 163,83° + k \cdot 180°$: $\sin(2x) + 3\cos(2x) = 2$;

Les solutions sont donc $\underline{\underline{x = 55,4° + k \cdot 180° \text{ et } x = 163,83° + k \cdot 180°, k \in \mathbb{Z}}}$.

d. $\tan(x + \frac{\pi}{6}) = \cot(3x)$: on a $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$; comme $\tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, on obtient $\tan(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{\tan(x) + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \tan(x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3\tan(x) + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}\tan(x)}$;

on a de plus $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$; comme $\tan(3x) = \frac{\tan(x)(3 - \tan^2(x))}{1 - 3\tan^2(x)}$,

on obtient $\cot(3x) = \frac{1 - 3\tan^2(x)}{\tan(x)(3 - \tan^2(x))}$;

l'équation s'écrit donc :

$$\frac{3\tan(x)+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}\tan(x)} = \frac{1-3\tan^2(x)}{\tan(x)(3-\tan^2(x))}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}\tan(x)+1}{\sqrt{3}-\tan(x)} = \frac{(1+\sqrt{3}\tan(x))(1-\sqrt{3}\tan(x))}{\tan(x)(\sqrt{3}+\tan(x))(\sqrt{3}-\tan(x))}$$

$$\Rightarrow \frac{(\sqrt{3}\tan(x)+1)\tan(x)(\sqrt{3}+\tan(x))}{\tan(x)(\sqrt{3}+\tan(x))(\sqrt{3}-\tan(x))} = \frac{(1+\sqrt{3}\tan(x))(1-\sqrt{3}\tan(x))}{\tan(x)(\sqrt{3}+\tan(x))(\sqrt{3}-\tan(x))}$$

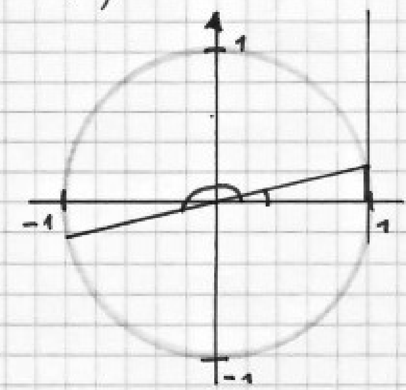
$$\Rightarrow (\sqrt{3}\tan(x)+1)\tan(x)(\sqrt{3}+\tan(x)) = (1+\sqrt{3}\tan(x))(1-\sqrt{3}\tan(x))$$

$$\Rightarrow \tan(x)(\sqrt{3}+\tan(x)) = 1-\sqrt{3}\tan(x)$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}\tan(x)+\tan^2(x) = 1-\sqrt{3}\tan(x)$$

$$\Rightarrow \tan^2(x)+2\sqrt{3}\tan(x)-1=0;$$

posons $y=\tan(x)$, on obtient alors l'équation $y^2+2\sqrt{3}y-1=0$, ce qui est une équation de la forme $ay^2+by+c=0$, avec $a=1$, $b=2\sqrt{3}$ et $c=-1$; on a $\Delta = b^2-4ac =$
$= (2\sqrt{3})^2-4.1.(-1) = 4.3+4 = 12+4 = 16$ et $\sqrt{\Delta}=4$; ainsi on a
$y_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\sqrt{3}+4}{2.1} = 2-\sqrt{3}$ et $y_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\sqrt{3}-4}{2.1} = -2-\sqrt{3}$;



avec $y_1 = 2-\sqrt{3}$ et $y=\tan(x)$, on a $\tan(x)=2-\sqrt{3}$

$$\Rightarrow x = 15° + k.180°,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{12}+k.\pi,\ k\in\mathbb{Z};$$

avec $y_2 = -2-\sqrt{3}$ et $y=\tan(x)$, on a $\tan(x) = -2-\sqrt{3}$

$$\Rightarrow x = -75° + k.180°,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = -75°+180°+\ell.180°,\ \ell\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = 105°+\ell.180°,\ \ell\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{7\pi}{12}+\ell.\pi,\ \ell\in\mathbb{Z}.$$

Les solutions sont donc $x=\frac{\pi}{12}+k.\pi$ et $x=\frac{7\pi}{12}+k.\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

e. $\sin(x)+3\cos(x)=3$: on a $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1 \Rightarrow \cos(x) = \pm\sqrt{1-\sin^2(x)}$; l'équation s'écrit alors $\sin(x)\pm 3\sqrt{1-\sin^2(x)} = 3 \Rightarrow \pm 3\sqrt{1-\sin^2(x)} = 3-\sin(x)$

$$\Rightarrow \left(\pm 3\sqrt{1-\sin^2(x)}\right)^2 = (3-\sin(x))^2$$

$$\Rightarrow 9(1-\sin^2(x)) = 9-6\sin(x)+\sin^2(x)$$

$$\Rightarrow 9-9\sin^2(x) = 9-6\sin(x)+\sin^2(x)$$

$$\Rightarrow 10\sin^2(x)-6\sin(x)=0$$

$$\Rightarrow 5\sin^2(x)-6\sin(x)=0$$

$$\Rightarrow \sin(x)(5\sin(x)-6)=0$$

$\Rightarrow$ soit $\sin(x)=0$, soit $5\sin(x)-6=0$;

$\sin(x)=0 \Rightarrow x = k.180°,\ k\in\mathbb{Z}$;

$5\sin(x)-6=0 \Rightarrow 5\sin(x)=6 \Rightarrow \sin(x)=\frac{6}{5}$, ce qui n'a aucune solution puisque $-1 \leq \sin(x) \leq 1$;

avec $k=0$, on a $x=0°$ et $\sin(x)+3\cos(x)=0+3\cdot1=3$;

avec $k=1$, on a $x=180°$ et $\sin(x)+3\cos(x)=0+3\cdot(-1)=-3$;

avec k pair, on se ramène au cas $k=0$;

avec k impair, on se ramène au cas $k=1$;

ainsi seuls les cas où k est pair sont des solutions valides;

donc les solutions sont $\underline{\underline{x=k\cdot360°,\ k\in\mathbb{Z}}}$.

f. $\tan^4(x)-4\tan^2(x)+3=0$: posons $y=\tan^2(x)$; on obtient alors $y^2-4y+3=0$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $ay^2+by+c=0$, avec $a=1$, $b=-4$ et $c=3$; on a $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot1\cdot3=16-12=4$ et $\sqrt{\Delta}=2$. ainsi $y_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4+2}{2\cdot1}=\frac{6}{2}=3$ et

$y_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4-2}{2\cdot1}=\frac{2}{2}=1$;

avec $y_1=3$ et $y=\tan^2(x)$, on a $\tan^2(x)=3$, d'où

$\tan(x)=\pm\sqrt{3}$;

on obtient alors $x=60°+k\cdot180°$ et $x=-60°+k\cdot180°=$

$=120°+k\cdot180°,\ k\in\mathbb{Z}$;

avec $y_2=1$ et $y=\tan^2(x)$, on a $\tan^2(x)=1$, d'où

$\tan(x)=\pm1$;

on obtient alors $x=45°+k\cdot180°$ et $x=-45°+k\cdot180°=$

$=135°+k\cdot180°,\ k\in\mathbb{Z}$;

les solutions sont donc: $\underline{\underline{x=60°+k\cdot180°,\ x=120°+k\cdot180°,}}$

$\underline{\underline{x=45°+k\cdot180°\text{ et }x=135°+k\cdot180°,\ k\in\mathbb{Z}}}$.

g. $2\tan(x)+2\cot(x)=5$: comme $\cot(x)=\frac{1}{\tan(x)}$, on obtient : $2\tan(x)+\frac{2}{\tan(x)}=5$

$\Rightarrow 2\tan^2(x)+2=5\tan(x) \Rightarrow 2\tan^2(x)-5\tan(x)+2=0$;

on pose $y=\tan(x)$; on obtient $2y^2-5y+2=0$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $ay^2+by+c=0$, avec $a=2$, $b=-5$ et $c=2$; on a $\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot2\cdot2=25-16=9$ et $\sqrt{\Delta}=3$; ainsi $y_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5+3}{2\cdot2}=\frac{8}{2}=4$ et

$y_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5-3}{2\cdot2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$;

avec $y_1=4$ et $y=\tan(x)$, on a $\tan(x)=4 \Rightarrow x=75,96°+k\cdot180°$, $k\in\mathbb{Z}$;

avec $y_2=\frac{1}{2}$ et $y=\tan(x)$, on a $\tan(x)=\frac{1}{2} \Rightarrow x=26,57°+k\cdot180°$, $k\in\mathbb{Z}$;

les solutions sont donc $\underline{\underline{x=75,96°+k\cdot180°\text{ et }x=26,57°+k\cdot180°,\ k\in\mathbb{Z}}}$.

h. $\sin^4(x)+\cos^4(x)=\frac{2}{3}$: on sait que $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1 \Rightarrow \sin^2(x)=1-\cos^2(x)$

$\Rightarrow \sin^4(x)=(1-\cos^2(x))^2=1-2\cos^2(x)+\cos^4(x)$; l'équation s'écrit alors $1-2\cos^2(x)+\cos^4(x)+\cos^4(x)=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow 2\cos^4(x)-2\cos^2(x)+\frac{1}{3}=0$

$\Rightarrow 6\cos^4(x)-6\cos^2(x)+1=0$;

on pose $y=\cos^2(x)$; on obtient l'équation $6y^2-6y+1=0$, équation du 2^e degré de la forme $ay^2+by+c=0$, avec $a=6, b=-6$ et $c=1$;

on a $\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4.6.1=36-24=12$ et $\sqrt{\Delta}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$;

ainsi $y_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{6+2\sqrt{3}}{2.6}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ et $y_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{6-2\sqrt{3}}{2.6}=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$;

avec $y_1=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ et $y=\cos^2(x)$, on a $\cos^2(x)=\frac{3+\sqrt{3}}{6}\cong 0{,}789$

$\Rightarrow \cos(x)\cong \pm 0{,}888$

$\Rightarrow x=27{,}37°+k.360°$,

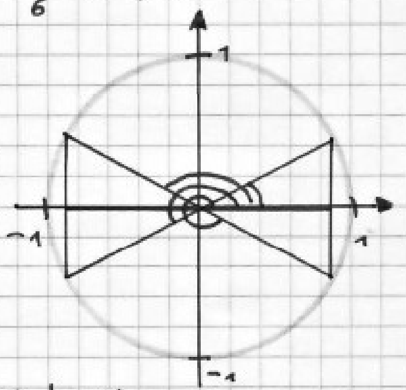
$x=180°-27{,}37°+k.360°=$

$=152{,}63°+k.360°$,

$x=180°+27{,}37°+k.360°=$

$=207{,}37°+k.360°$ et

$x=360-27{,}37°+k.360°=332{,}63°+k.360°,\ k\in\mathbb{Z}$;



avec $y_2=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ et $y=\cos^2(x)$, on a $\cos^2(x)=\frac{3-\sqrt{3}}{6}\cong 0{,}211$

$\Rightarrow \cos(x)\cong \pm 0{,}46$

$\Rightarrow x=62{,}63°+k.360°$, $x=180°-62{,}63°+k.360°=117{,}37°+k.360°$,

$x=180°+62{,}63°+k.360°=242{,}63°+k.360°$ et

$x=360°-62{,}63°+k.360°=297{,}37°+k.360°,\ k\in\mathbb{Z}$;

les solutions sont donc :

$x=27{,}37°+k.360°$, $x=62{,}63°+k.360°$, $x=117{,}37°+k.360°$,

$x=152{,}63°+k.360°$, $x=207{,}37°+k.360°$, $x=242{,}63°+k.360°$,

$x=297{,}37°+k.360°$ et $x=332{,}63°+k.360°,\ k\in\mathbb{Z}$.

Exercice 3.54.

a. On sait que $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$,

$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$,

$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos(\alpha)}{2}$ et $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos(\alpha)}{2}$.

On a alors: $\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) = \cos\left(\frac{p}{2}+\frac{q}{2}\right) = \cos\left(\frac{p}{2}\right)\cos\left(\frac{q}{2}\right) - \sin\left(\frac{p}{2}\right)\sin\left(\frac{q}{2}\right)$ et

$\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) = \cos\left(\frac{p}{2}-\frac{q}{2}\right) = \cos\left(\frac{p}{2}\right)\cos\left(\frac{q}{2}\right) + \sin\left(\frac{p}{2}\right)\sin\left(\frac{q}{2}\right)$;

$$\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) = \left(\cos\left(\frac{p}{2}\right)\cos\left(\frac{q}{2}\right) - \sin\left(\frac{p}{2}\right)\sin\left(\frac{q}{2}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{p}{2}\right)\cos\left(\frac{q}{2}\right) + \sin\left(\frac{p}{2}\right)\sin\left(\frac{q}{2}\right)\right) =$$

$$= \left(\cos\left(\frac{p}{2}\right)\cos\left(\frac{q}{2}\right)\right)^2 - \left(\sin\left(\frac{p}{2}\right)\sin\left(\frac{q}{2}\right)\right)^2 =$$

$$= \cos^2\left(\frac{p}{2}\right)\cos^2\left(\frac{q}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{p}{2}\right)\sin^2\left(\frac{q}{2}\right) =$$

$$= \frac{1+\cos(p)}{2}\cdot\frac{1+\cos(q)}{2} - \frac{1-\cos(p)}{2}\cdot\frac{1-\cos(q)}{2} =$$

$$= \frac{1+\cos(p)+\cos(q)+\cos(p)\cos(q)}{4} - \frac{1-\cos(p)-\cos(q)+\cos(p)\cos(q)}{4} =$$

$$= \frac{1+\cos(p)+\cos(q)+\cos(p)\cos(q)-1+\cos(p)+\cos(q)-\cos(p)\cos(q)}{4} =$$

$$= \frac{2\cos(p)+2\cos(q)}{4} = \frac{\cos(p)+\cos(q)}{2};$$

on a ainsi $\frac{\cos(p)+\cos(q)}{2} = \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$, d'où on a bien

$$\underline{\underline{\cos(p)+\cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).}}$$

b. On sait que $\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ (voir a.) et

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin(\alpha)$.

On a alors : $\sin(p)+\sin(q) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-p\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-q\right) =$

$$= 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}-p+\frac{\pi}{2}-q}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}-p-\frac{\pi}{2}+q}{2}\right) =$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi-p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{-p+q}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(-\frac{p-q}{2}\right) =$$

$$= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$, d'où on a bien

$$\underline{\underline{\sin(p)+\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).}}$$

c. On sait que $\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha) = 1$ et $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

On a alors : $\frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{1}{\cos^2(y)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} - \frac{\cos^2(y)+\sin^2(y)}{\cos^2(y)} =$

$$= \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} - \frac{\cos^2(y)}{\cos^2(y)} - \frac{\sin^2(y)}{\cos^2(y)} = 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 - 1 - \left(\frac{\sin(y)}{\cos(y)}\right)^2 =$$

$= \tan^2(x) - \tan^2(y)$, d'où on a bien

$$\underline{\underline{\frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{1}{\cos^2(y)} = \tan^2(x) - \tan^2(y).}}$$

d. On sait que : $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$.

On a alors : $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) =$

$$= \cos(x)\cos(y)\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(y)}{\cos(y)}\right) =$$

$$= \cos(x)\cos(y)\left(\tan(x) + \tan(y)\right),$$ d'où on conclut bien que

$$\underline{\underline{\tan(x) + \tan(y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x)+\cos(y)}}}.$$

e. On sait que $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ et

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1.$$

On a alors : $\dfrac{\sin(2x)}{1+\cos(2x)} = \dfrac{2\sin(x)\cos(x)}{1+2\cos^2(x)-1} = \dfrac{2\sin(x)\cos(x)}{2\cos^2(x)} = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$ et

$$\frac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)} = \frac{1-(1-2\sin^2(x))}{2\sin(x)\cos(x)} = \frac{1-1+2\sin^2(x)}{2\sin(x)\cos(x)} = \frac{2\sin^2(x)}{2\sin(x)\cos(x)} =$$

$$= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x);$$

on a donc bien $\underline{\underline{\tan(x) = \dfrac{\sin(2x)}{1+\cos(2x)} = \dfrac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)}}}$.

f. On sait que $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ et $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$.

On a alors : $\dfrac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} = \dfrac{1-\left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}\right)^2}{1+\left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}\right)^2} = \dfrac{1-\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}}{1+\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}} = \dfrac{\frac{\cos^2(\frac{x}{2})-\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}}{\frac{\cos^2(\frac{x}{2})+\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}}$;

Comme $\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2}) = 1$, on obtient :

$$\frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} = \frac{\frac{\cos^2(\frac{x}{2})-\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}}{\frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})}} = \frac{\cos^2(\frac{x}{2})-\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})} : \frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})} =$$

$$= \frac{\cos^2(\frac{x}{2})-\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})} \cdot \frac{\cos^2(\frac{x}{2})}{1} = \cos^2(\tfrac{x}{2}) - \sin^2(\tfrac{x}{2}) = \cos(x).$$

On a donc bien $\underline{\underline{\cos(x) = \dfrac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}}}$.

g. On sait que $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$ et que $\tan(45°) = 1$.

On a alors : $\underline{\underline{\tan(45°-x)}} = \dfrac{\tan(45°)-\tan(x)}{1+\tan(45°)\tan(x)} = \underline{\underline{\dfrac{1-\tan(x)}{1+\tan(x)}}}$.

h. On sait que $\cot(x) = \dfrac{1}{\tan(x)}$ et que $\tan(x) = \dfrac{\sin(2x)}{1+\cos(2x)}$ (voir. e.).

On a alors bien $\underline{\underline{\cot(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{\sin(2x)}}}$.

Exercice 3.55.

a. On sait que $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Ainsi $\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)$.

Comme $\cos(-x) = \cos(x)$, on conclut bien que $\underline{\underline{\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)}}$.

b. On sait que $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$.

On a alors $\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \sin(t)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos(t)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Comme $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on obtient $\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{2}} + \frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}$, d'où on conclut bien que $\underline{\underline{\cos(t) + \sin(t) = \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}}$.

On sait que $a\cos(\alpha) + b\sin(\alpha) = A\cos(\alpha - \varphi)$, avec $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ et φ tel que $\cos(\varphi) = \frac{a}{A}$ et $\sin(\varphi) = \frac{b}{A}$.

Ici $a = b = 1$. On a $A = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

De plus $\cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$ $(45°)$.

Ainsi $\cos(t) + \sin(t) = \sqrt{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$.

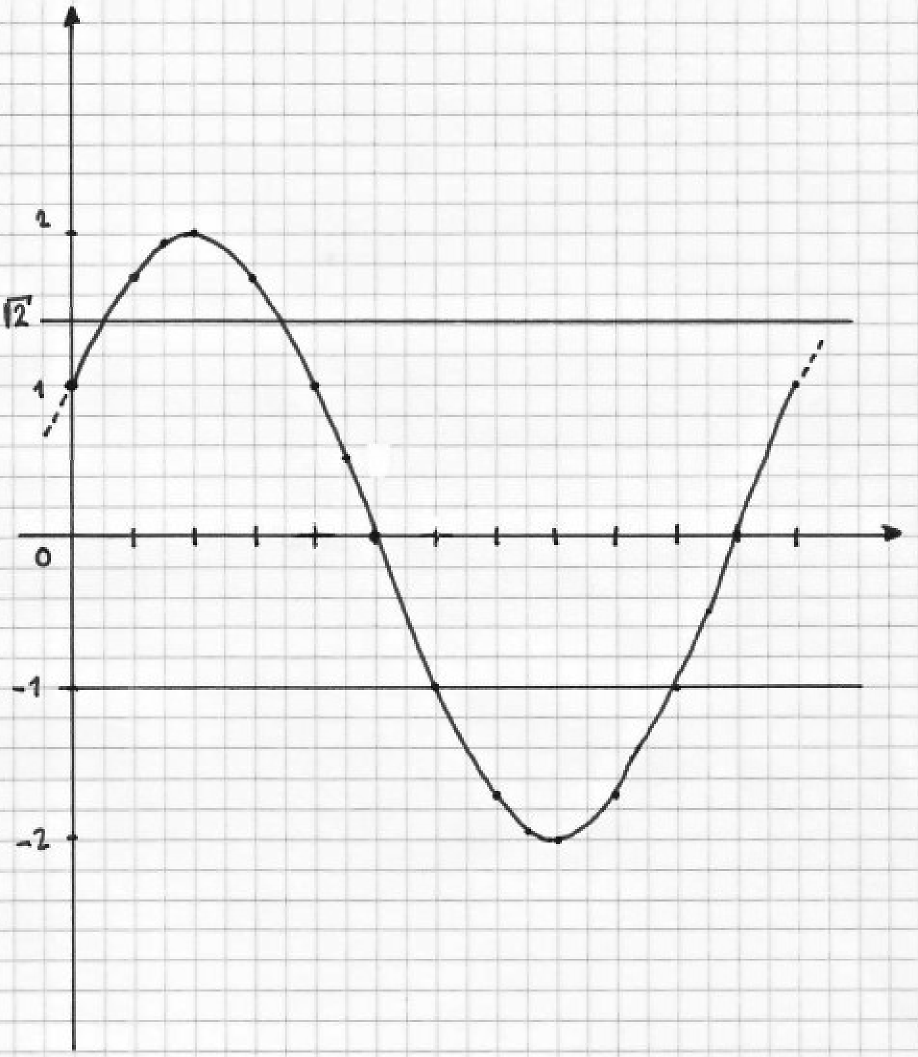
Comme $\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ (voir a.), on conclut donc bien que

$$\underline{\underline{\cos(t) + \sin(t) = \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}}.$$

Exercice 3.56.

La fonction $x \mapsto \cos(x) + \sqrt{3}\sin(x)$ est périodique de période $360°$ (puisque cos et sin le sont).
Il suffit donc de dessiner le graphe de la fonction entre $[0;360°]$, le reste du graphe étant une copie.

x	$\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)$
0	1
30°	1,732 $(=\sqrt{3})$
45°	1,932 $\left(=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2}\right)$
60°	2
90°	1,732 $(=\sqrt{3})$
120°	1
135°	0,518 $\left(=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}\right)$
150°	0
180°	−1
210°	−1,732 $(=-\sqrt{3})$
225°	−1,932 $\left(=-\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2}\right)$
240°	−2
270°	−1,732 $(=-\sqrt{3})$
300°	−1
315°	−0,518 $\left(=\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{2}\right)$
330°	0
360°	1



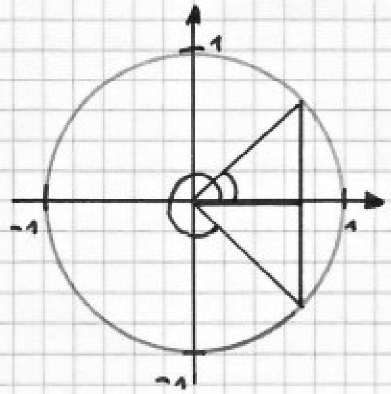
$\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)=\sqrt{2} \Rightarrow \underline{\underline{x = 15° + k\cdot 360° \text{ et } x = 105° + k\cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}.}}$

$\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)=0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 150° + k\cdot 360° \text{ et } x = 330° + k\cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}.}}$

$\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)=-1 \Rightarrow \underline{\underline{x = 180° + k\cdot 360° \text{ et } x = 300° + k\cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}.}}$

Pour résoudre algébriquement ces équations, on utilise la relation :
$a\cos(\alpha) + b\sin(\alpha) = A\cos(\alpha - \varphi)$ avec $A = \sqrt{a^2+b^2}$ et φ tel que $\cos(\varphi) = \frac{a}{A}$ et $\sin(\varphi) = \frac{b}{A}$.
Ici on a $a = 1$ et $b = \sqrt{3}$.
Ainsi $A = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ et on a $\cos(\varphi) = \frac{1}{2}$ et $\sin(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\Rightarrow \varphi = 60°$.
On a donc $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 2\cos(x - 60°)$.

a. $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{2} \Rightarrow 2\cos(x-60°) = \sqrt{2} \Rightarrow \cos(x-60°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$\Rightarrow \quad x - 60° = 45° \quad$ et $\quad x - 60° = 360° - 45°$

$\Rightarrow \quad x = 105° \quad$ et $\quad x = 375°$

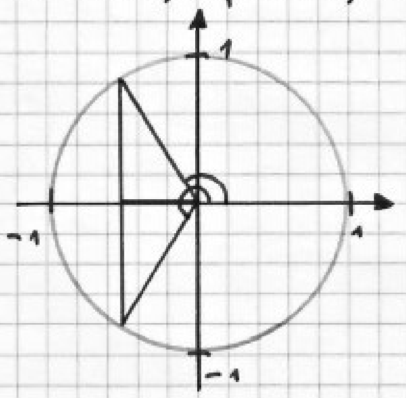
$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x = 105° + k.360° \quad \text{et} \quad x = 15° + k.360°,\ k \in \mathbb{Z}.}}$

b. $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 0 \Rightarrow 2\cos(x - 60°) = 0 \Rightarrow \cos(x - 60°) = 0$

$\Rightarrow \quad x - 60° = 90° + k.180°$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x = 150° + k.180° \quad \text{et} \quad x = 330° + k.360°,\ k \in \mathbb{Z}.}}$

c. $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = -1 \Rightarrow 2\cos(x - 60°) = -1 \Rightarrow \cos(x - 60°) = -\frac{1}{2}$



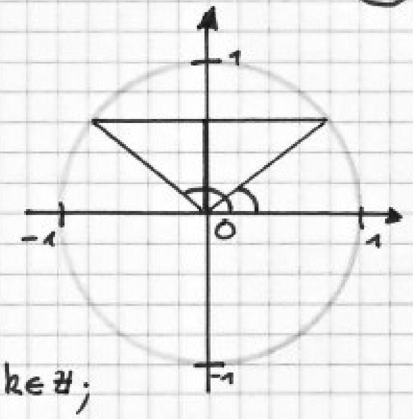
$\Rightarrow \quad x - 60° = 180° - 60° \quad$ et $\quad x - 60° = 180° + 60°$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x = 180° + k.360° \quad \text{et} \quad 330° + k.360°,\ k \in \mathbb{Z}.}}$

Exercice 3.57.

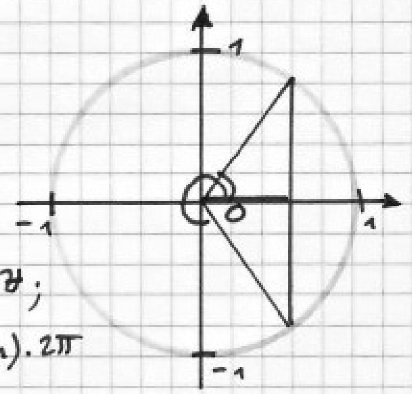
a. $\sin(x)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$: $\sin(\alpha)=\sin(\beta) \Rightarrow$ soit $\alpha=\beta+k.2\pi$,
soit $\alpha=\pi-\beta+k.2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;
ici $\alpha=x$ et $\beta=\frac{\pi}{4}-x$;
on a donc:
- soit $x=\frac{\pi}{4}-x+k.2\pi$
$\Rightarrow 2x=\frac{\pi}{4}+k.2\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{8}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;
- soit $x=\pi-\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+k.2\pi$
$\Rightarrow x=\pi-\frac{\pi}{4}+x+k.2\pi \Rightarrow 0=\frac{3\pi}{4}+k.2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, ce qui est impossible;

les solutions sont donc $x=\frac{\pi}{8}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.



b. $\cos(2x)=\cos(x)$: $\cos(\alpha)=\cos(\beta) \Rightarrow$ soit $\alpha=\beta+k.2\pi$,
soit $\alpha=2\pi-\beta+k.2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;
ici $\alpha=2x$ et $\beta=x$;
on a donc:
- soit $2x=x+k.2\pi \Rightarrow x=k.2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;
- soit $2x=2\pi-x+k.2\pi \Rightarrow 3x=(k+1).2\pi$
$\Rightarrow x=\frac{\ell.2\pi}{3}$, $\ell\in\mathbb{Z}$;

les solutions sont donc $x=k.2\pi$ et $x=k.\frac{2\pi}{3}$, $\ell\in\mathbb{Z}$.



c. $\sin\left(\frac{5x}{3}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}\right)=0 \Rightarrow \sin\left(\frac{5x}{3}\right)=-\cos\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{5x}{3}\right)=\cos\left(\pi-\frac{x}{2}\right)$
$\Rightarrow \sin\left(\frac{5x}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\pi-\frac{x}{2}\right)\right)$ puisque $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos(\alpha)$
$\Rightarrow \sin\left(\frac{5x}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\pi+\frac{x}{2}\right)$
$\Rightarrow \sin\left(\frac{5x}{3}\right)=\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$;
on a $\sin(\alpha)=\sin(\beta) \Rightarrow$ soit $\alpha=\beta+k.2\pi$, soit $\alpha=\pi-\beta+k.2\pi$,
$k\in\mathbb{Z}$; ici $\alpha=\frac{5x}{3}$ et $\beta=\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}$; on a donc:
- soit $\frac{5x}{3}=\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}+k.2\pi \Rightarrow \frac{5x}{3}-\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{2}+k.2\pi$
$\Rightarrow \frac{7x}{6}=-\frac{\pi}{2}+2\pi+\ell.2\pi \Rightarrow \frac{7x}{6}=\frac{3\pi}{2}+\ell.2\pi$
$\Rightarrow 7x=9\pi+\ell.12\pi \Rightarrow x=\frac{9\pi}{7}+\ell.\frac{12\pi}{7}$, $\ell\in\mathbb{Z}$;
- soit $\frac{5x}{3}=\pi-\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+k.2\pi \Rightarrow \frac{5x}{3}=\pi-\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}+k.2\pi$
$\Rightarrow \frac{5x}{3}+\frac{x}{2}=\pi-\frac{\pi}{2}+k.2\pi \Rightarrow \frac{13x}{6}=\frac{\pi}{2}+k.2\pi$
$\Rightarrow 13x=3\pi+k.12\pi \Rightarrow x=\frac{3\pi}{13}+k.\frac{12\pi}{13}$;

les solutions sont donc $x=\frac{9\pi}{7}+k.\frac{12\pi}{7}$ et $x=\frac{3\pi}{13}+k.\frac{12\pi}{13}$.

d. $\sin^2(2x) = \sin^2(x + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow$ soit $\sin(2x) = \sin(x+\frac{\pi}{4})$ ①,
soit $\sin(2x) = -\sin(x+\frac{\pi}{4})$ ②;
on a $\sin(\alpha) = \sin(\beta) \Rightarrow$ soit $\alpha = \beta + k\cdot 2\pi$, soit
$\alpha = \pi - \beta + k\cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
① ici $\alpha = 2x$ et $\beta = x + \frac{\pi}{4}$; on a donc:
– soit $2x = x + \frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
– soit $2x = \pi - (x + \frac{\pi}{4}) + k\cdot 2\pi$
$\Rightarrow 2x = \pi - x - \frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi \Rightarrow 3x = \frac{3\pi}{4} + k\cdot 2\pi$
$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{2\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$;
② comme $-\sin(y) = \sin(\pi + y)$, on a
$\sin(2x) = \sin(\pi + x + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \sin(2x) = \sin(\frac{5\pi}{4} + x)$;
ici $\alpha = 2x$ et $\beta = \frac{5\pi}{4} + x$; on a donc:
– soit $2x = \frac{5\pi}{4} + x + k\cdot 2\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4} + k\cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
– soit $2x = \pi - (\frac{5\pi}{4} + x) + k\cdot 2\pi$
$\Rightarrow 2x = \pi - \frac{5\pi}{4} - x + k\cdot 2\pi \Rightarrow 3x = -\frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi$
$\Rightarrow 3x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi + \ell\cdot 2\pi \Rightarrow 3x = \frac{7\pi}{4} + \ell\cdot 2\pi$
$\Rightarrow x = \frac{7\pi}{12} + \ell\cdot\frac{2\pi}{3}$, $\ell \in \mathbb{Z}$;
les solutions sont donc $x = \frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi$; $x = \frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{2\pi}{3}$;
$x = \frac{5\pi}{4} + k\cdot 2\pi$; $x = \frac{7\pi}{12} + k\cdot\frac{2\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

e. $6\cos^2(x) = 5\sin(x)$: comme $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \Rightarrow \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$;
on obtient $6(1 - \sin^2(x)) = 5\sin(x) \Rightarrow 6 - 6\sin^2(x) = 5\sin(x)$
$\Rightarrow 6\sin^2(x) + 5\sin(x) - 6 = 0$;
posons $y = \sin(x)$; on obtient $6y^2 + 5y - 6 = 0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $ay^2 + by + c = 0$, avec
$a = 6$, $b = 5$ et $c = -6$; on a $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4.6.(-6) =$
$= 25 + 144 = 169$ et $\sqrt{\Delta} = 13$; on a alors
$y_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+13}{2.6} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ et $y_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-13}{2.6} = \frac{-18}{12} = -\frac{3}{2}$;
avec $y_1 = \frac{2}{3}$ et $y = \sin(x)$, on a $\sin(x) = \frac{2}{3}$
$\Rightarrow x = 41{,}81° + k\cdot 360°$ et $x = 180° - 41{,}81° + k\cdot 360° =$
$= 138{,}19° + k\cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$;
avec $y_2 = -\frac{3}{2}$ et $y = \sin(x)$, on a $\sin(x) = -\frac{3}{2}$, ce qui est impossible puisque $-1 \leq \sin(x) \leq 1$;
les solutions sont donc $x = 41{,}81° + k\cdot 360°$ et $x = 138{,}19° + k\cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$.

f. $3\sin(x) + 6\cos^2(x) = 5$: on a $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \Rightarrow \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$;

on obtient ainsi $3\sin(x) + 6(1 - \sin^2(x)) = 5$

$\Rightarrow 3\sin(x) + 6 - 6\sin^2(x) = 5 \Rightarrow 6\sin^2(x) - 3\sin(x) - 1 = 0$;

on pose $y = \sin(x)$; on obtient $6y^2 - 3y - 1 = 0$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $ay^2 + by + c = 0$, avec $a = 6$, $b = -3$ et $c = -1$; on a $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4.6.(-1) = 9 + 24 =$
$= 33$ et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{33}$; on trouve ainsi

$y_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+\sqrt{33}}{2.6} \cong 0{,}729$ et $y_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-\sqrt{33}}{2.6} \cong -0{,}229$;

avec $y_1 \cong 0{,}729$ et $y = \sin(x)$, on a $\sin(x) \cong 0{,}729$

$\Rightarrow x \cong 46{,}78° + k.360°$ et $x \cong 180° - 46{,}78° + k.360° =$
$\cong 133{,}22° + k.360°$;

avec $y_2 \cong -0{,}229$ et $y = \sin(x)$, on a $\sin(x) \cong -0{,}229$

$\Rightarrow x \cong -13{,}22° + k.360° = -13{,}22° + 360° + l.360° =$
$= 346{,}78° + l.360°$ et $x \cong 180° + 13{,}22° + k.360° =$
$= 193{,}22° + k.360°$, $k, l \in \mathbb{Z}$;

les solutions sont donc : $x \cong 46{,}78° + k.360°$, $x \cong 133{,}22° + k.360°$,
$\underline{x \cong 193{,}22° + k.360°,\ x \cong 346{,}78° + k.360°,\ k \in \mathbb{Z}.}$

g. $\cos^2(x) + 2\sin(x) + 1 = 0$: on a $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \Rightarrow \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$;

on obtient ainsi $1 - \sin^2(x) + 2\sin(x) + 1 = 0$

$\Rightarrow \sin^2(x) - 2\sin(x) - 2 = 0$;

on pose $y = \sin(x)$; on obtient $y^2 - 2y - 2 = 0$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $ay^2 + by + c = 0$, avec $a = 1$, $b = -2$ et $c = -2$; on a $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4.1.(-2) =$
$= 4 + 8 = 12$ et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{12}$; on trouve ainsi

$y_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2+\sqrt{12}}{2.1} \cong 2{,}8$ et $y_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2-\sqrt{12}}{2.1} \cong -0{,}8$;

avec $y_1 \cong 2{,}8$ et $y = \sin(x)$, on a $\sin(x) \cong 2{,}8$, ce qui est impossible puisque $-1 \leq \sin(x) \leq 1$;

avec $y_2 \cong -0{,}8$ et $y = \sin(x)$, on a $\sin(x) \cong -0{,}8$

$\Rightarrow x \cong -53{,}4° + k.360° = -53{,}4° + 360° + l.360° =$
$= 306{,}6° + l.360°$ et $x \cong 180° + 53{,}4° + k.360° =$
$= 233{,}4° + k.360°$, $k, l \in \mathbb{Z}$;

les solutions sont donc $\underline{x = 233{,}4° + k.360° \text{ et } x = 306{,}6° + k.360°,\ k \in \mathbb{Z}.}$

h. $\tan^4(x) - 15\tan^2(x) + 26 = 0$: on pose $y = \tan^2(x)$; on obtient $y^2 - 15y + 26 = 0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $ay^2 + by + c = 0$, avec $a = 1$, $b = -15$ et $c = 26$; on a $\Delta = b^2 - 4ac =$
$= (-15)^2 - 4.1.26 = 225 - 104 = 121$ et $\sqrt{\Delta} = 11$; ainsi on a
$y_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{15+11}{2.1} = \frac{26}{2} = 13$ et $y_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{15-11}{2.1} = \frac{4}{2} = 2$;

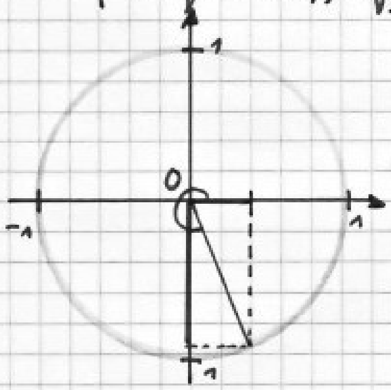
avec $y_1 = 13$ et $y = \tan^2(x)$, on a $\tan^2(x) = 13$
$\Rightarrow$ soit $\tan(x) = \sqrt{13}$, soit $\tan(x) = -\sqrt{13}$;
$\tan(x) = \sqrt{13} \Rightarrow x = 74{,}5° + k.180°$, $k \in \mathbb{Z}$;
$\tan(x) = -\sqrt{13} \Rightarrow x = -74{,}5° + k.180° = -74{,}5° + 180° + l.180° =$
$= 105{,}5° + l.180°$, $l \in \mathbb{Z}$;
avec $y_2 = 2$ et $y = \tan^2(x)$, on a $\tan^2(x) = 2$
$\Rightarrow$ soit $\tan(x) = \sqrt{2}$, soit $\tan(x) = -\sqrt{2}$;
$\tan(x) = \sqrt{2} \Rightarrow x = 54{,}74° + k.180°$, $k \in \mathbb{Z}$;
$\tan(x) = -\sqrt{2} \Rightarrow x = -54{,}74° + k.180° = -54{,}74° + 180° + l.180° =$
$= 125{,}26° + l.180°$, $l \in \mathbb{Z}$;
les solutions sont donc $x = 54{,}74° + k.180°$, $x = 74{,}5° + k.180°$,
$\underline{\underline{x = 105{,}5° + k.180°,\ x = 125{,}26° + k.180°,\ k \in \mathbb{Z}.}}$

i. $2\cos(3x) + 2\sin(3x) = 1 + \sqrt{3}$: on sait que $a\cos(\alpha) + b\sin(\alpha) = A\cos(\alpha - \varphi)$, avec $A = \sqrt{a^2+b^2}$ et φ tel que $\cos(\varphi) = \frac{a}{A}$ et $\sin(\varphi) = \frac{b}{A}$;
ici $a = 2$, $b = 2$ et $\alpha = 3x$; on a alors
$2\cos(3x) + 2\sin(3x) = A\cos(3x - \varphi)$, avec $A = \sqrt{a^2+b^2} =$
$= \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et φ tel que $\cos(\varphi) = \frac{2}{2\sqrt{2}} =$
$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\varphi) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; on en déduit que $\varphi = 45°$;
ainsi on a $2\cos(3x) + 2\sin(3x) = 2\sqrt{2}\cos(3x - 45°)$;
l'équation s'écrit alors $2\sqrt{2}\cos(\alpha - 45°) = 1 + \sqrt{3}$
$\Rightarrow \cos(3x - 45°) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cong 0{,}966$
$\Rightarrow 3x - 45° = 15° + k.360°$ et $3x - 45° = -15° + k.360°$
$\Rightarrow 3x = 60° + k.360°$ et $3x = 30° + k.360°$
$\Rightarrow x = 20° + k.120°$ et $x = 10° + k.120°$, $k \in \mathbb{Z}$;
les solutions sont donc : $\underline{\underline{x = 20° + k.120°,\ x = 10° + k.120°,\ k \in \mathbb{Z}.}}$

j. $3\sin(x) + 4\cos(x) = 5$: on sait que $a\cos(\alpha) + b\sin(\alpha) = A\cos(\alpha - \varphi)$, avec $A = \sqrt{a^2+b^2}$ et φ tel que $\cos(\varphi) = \frac{a}{A}$ et $\sin(\varphi) = \frac{b}{A}$;

ici, on a $a = 3$, $b = 4$ et $\alpha = x$; on a alors
$3\sin(x) + 4\cos(x) = A\cos(x - \varphi)$, avec $A = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ et
φ tel que $\cos(\varphi) = \frac{3}{5}$ et $\sin(\varphi) = \frac{4}{5}$; on en déduit que $\varphi \cong 53,13°$;
on a ainsi $3\sin(x) + 4\cos(x) = 5\cos(x - 53,13°)$;
l'équation s'écrit alors $5\cos(x - 53,13°) = 5 \Rightarrow \cos(x - 53,13°) = 1$
$\Rightarrow x - 53,13° = k \cdot 360° \Rightarrow x = 53,13° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$;
les solutions sont donc $\underline{\underline{x = 53,13° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}}}$.

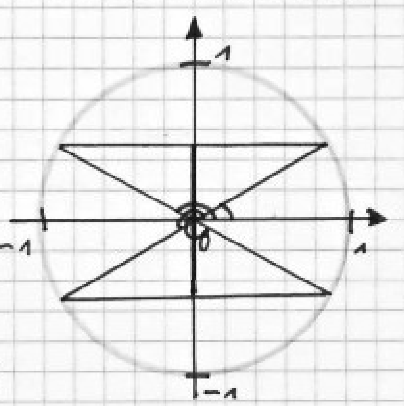
k. $\cos(x) - 2\sin(x) = 2$: on sait que $a\cos(\alpha) + b\sin(\alpha) = A\cos(\alpha - \varphi)$, avec $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ et φ tel que $\cos(\varphi) = \frac{a}{A}$ et $\sin(\varphi) = \frac{b}{A}$;
ici, on a $a = 1$, $b = -2$ et $\alpha = x$; on a alors
$\cos(x) - 2\sin(x) = A\cos(x - \varphi)$, avec $A = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$ et
φ tel que $\cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ et $\sin(\varphi) = -\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{-2\sqrt{5}}{5}$;



$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha \cong 63,43°$ ou $-63,43°$;
pour avoir $\sin(\varphi) = \frac{-2\sqrt{5}}{5}$, on doit prendre
$\varphi \cong -63,43° + k \cdot 360° = -63,43° + 360° + \ell \cdot 360°$
$\Rightarrow \varphi \cong 296,565° + \ell \cdot 360°$, $\ell \in \mathbb{Z}$;
avec $\varphi \cong 296,565°$, on obtient :
$\cos(x) - 2\sin(x) = \sqrt{5}\cos(x - 296,565°)$;

l'équation s'écrit alors $\sqrt{5}\cos(x - 296,565°) = 2$
$\Rightarrow \cos(x - 296,565°) = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cong 0,894$
$\Rightarrow x - 296,565° \cong 26,565° + k \cdot 360°$ et
$x - 296,565° \cong -26,565° + k \cdot 360°$
$\Rightarrow x \cong 323,13° + k\,360°$ et $x = 270° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$;
les solutions sont donc $\underline{\underline{x \cong 323,13° + k \cdot 360° \text{ et } x = 270° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}}}$.

l. $4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \Rightarrow \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\frac{1}{2}$
$\Rightarrow \frac{x}{2} = 30° + k \cdot 360°$, $\frac{x}{2} = 180° - 30° + k \cdot 360° =$
$= 150° + k \cdot 360°$, $\frac{x}{2} = 180° + 30° + k \cdot 360° = 210° + k \cdot 360°$,
$\frac{x}{2} = 360° - 30° + k \cdot 360° = 330° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$;
les solutions sont donc : $x = 60° + k \cdot 720°$, $x = 300° + k \cdot 720°$,
$\underline{\underline{x = 420° + k \cdot 720°,\ x = 660° + k \cdot 720°,\ k \in \mathbb{Z}}}$.



m. $\tan(x) + 3\cot(x) = 4$: on a $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} \Rightarrow \tan(x) + 3\frac{1}{\tan(x)} = 4$

$\Rightarrow \tan^2(x) + 3 = 4\tan(x) \Rightarrow \tan^2(x) - 4\tan(x) + 3 = 0$;

on pose $y = \tan(x)$; on obtient $y^2 - 4y + 3 = 0$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $ay^2 + by + c = 0$, avec $a = 1, b = -4$ et $c = 3$; on a $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4.1.3 =$
$= 16 - 12 = 4$ et $\sqrt{\Delta} = 2$; on obtient ainsi

$y_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+2}{2.1} = \frac{6}{2} = 3$ et $y_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-2}{2.1} = \frac{2}{2} = 1$;

avec $y_1 = 3$ et $y = \tan(x)$, on a $\tan(x) = 3$

$\Rightarrow x = 71{,}565° + k.180°, k \in \mathbb{Z}$;

avec $y_2 = 1$ et $y = \tan(x)$, on a $\tan(x) = 1$

$\Rightarrow x = 45° + k.180°, k \in \mathbb{Z}$;

les solutions sont donc $\underline{\underline{x = 71{,}565° + k.180°, x = 45° + k.180°, k \in \mathbb{Z}}}$.

n. $\arccos(2x) = \arcsin(x)$: on rappelle que arccos est la fonction inverse de cos (elle est parfois notée $\cos^{-1}$) et que arcsin est la fonction inverse de sin (elle est parfois notée $\sin^{-1}$);

posons $y = \arcsin(x)$; l'équation s'écrit $\arccos(2x) = y$

$\Rightarrow \cos(y) = 2x$;

on a $\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1 \Rightarrow \cos^2(y) = 1 - \sin^2(y)$

$\Rightarrow \cos(y) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(y)}$;

comme $\sin(y) = \sin(\arcsin(x)) = 0$, on obtient

$\cos(y) = \pm\sqrt{1 - x^2}$;

puisqu'on a aussi $\cos(y) = 2x$, on obtient l'équation

$2x = \pm\sqrt{1-x^2} \Rightarrow (2x)^2 = 1 - x^2$

$\Rightarrow 4x^2 = 1 - x^2 \Rightarrow 5x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$;

avec $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$, on a $\arccos(2x) = \arcsin(x)$;

avec $x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, on a $\arccos(2x) \neq \arcsin(x)$;

la solution est donc $\underline{\underline{x = \frac{\sqrt{5}}{5}}}$.