Chapitre 2. Applications du 2ème degré — Corrigé

Exercice 1

On note x et y la largeur et la longueur du rectangle.

Le périmètre vaut 252 m : $2x + 2y = 252 \xrightarrow{:2} x + y = 126 \xrightarrow{-x} y = 126 - x$.

L'aire vaut 3888 m² : $xy = 3888 \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
x(126 - x) &= 3888 \\
126x - x^2 &= 3888 \qquad \Big|\; +x^2 - 126x \\
0 &= x^2 - 126x + 3888
\end{aligned}
$$

On a $a = 1$, $b = -126$, $c = 3888$, $b^2 - 4ac = (-126)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3888 = 324 > 0$

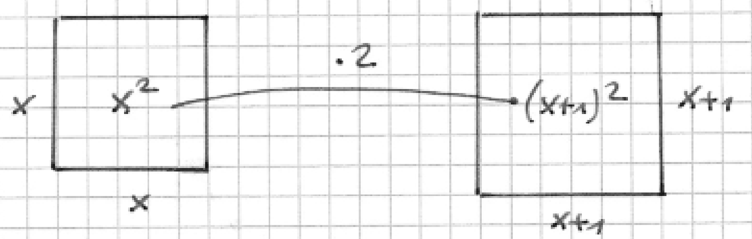
$\Rightarrow x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{126 + \sqrt{324}}{2} = \dfrac{126 + 18}{2} = 72$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{126 - 18}{2} = 54$.

Avec $x_1 = 72$, on a $y_1 = 126 - x_1 = 126 - 72 = 54$ et avec $x_2 = 54$, on a $y_2 = 126 - x_2 = 126 - 54 = 72$.

Les dimensions du rectangle sont donc <u>54 m par 72 m</u>.

Exercice 2

On a :



L'équation est donc

$$
\begin{aligned}
2x^2 &= (x+1)^2 \qquad \Big|\; \text{identité remarquable ou distributivité} \\
2x^2 &= x^2 + 2x + 1 \qquad \Big|\; -x^2 - 2x - 1 \\
x^2 - 2x - 1 &= 0
\end{aligned}
$$

On a $a = 1$, $b = -2$, $c = -1$, $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 4 + 4 = 8 > 0$

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{2 + \sqrt{8}}{2} \simeq 2{,}41$ et $x_2 = \dfrac{2 - \sqrt{8}}{2} \simeq -0{,}414 \rightarrow$ exclu car $x \geq 0$.

La mesure du côté du carré est donc <u>$\approx 2{,}41$ m</u>.

Exercice 3

Un nombre pair est de la forme $2x$, avec x un nb entier relatif.
Le nombre pair suivant est $2x+2$ et celui qui suit encore est $2x+4$.
Trois nombres pairs consécutifs sont donc $2x$, $2x+2$, $2x+4$.
La somme des carrés des 3 nombres pairs consécutifs est 776 :

$(2x)^2+(2x+2)^2+(2x+4)^2=776$	identités remarquables ou distributivité
$4x^2+4x^2+8x+4+4x^2+16x+16=776$	R
$12x^2+24x+20=776$	-776
$12x^2+24x-756=0$	$:12$
$x^2+2x-63=0$	

On a $a=1$, $b=2$, $c=-63$, $b^2-4ac=2^2-4\cdot1\cdot(-63)=4+252=256>0$

$\Rightarrow x_1=\dfrac{-2+\sqrt{256}}{2}=\dfrac{-2+16}{2}=7$ et $x_2=\dfrac{-2-\sqrt{256}}{2}=\dfrac{-2-16}{2}=-9$.

Avec $x=7$, on a $2x=14$, $2x+2=16$ et $2x+4=18$.
Avec $x=-9$, on a $2x=-18$, $2x+2=-16$ et $2x+4=-14$.
On a donc 2 solutions pour les 3 nombres pairs consécutifs : 14, 16 et 18 ou −18, −16 et −14.

Exercice 4

Notons x le nombre de reproductions et y le prix d'une reproduction.
On peut faire le tableau suivant :

nb de reproductions	prix d'une reprod.	total
x	y	$xy=672$
$x+3$	$y-4$	$(x+3)(y-4)=672$

On a $(x+3)(y-4)=672 \Rightarrow xy-4x+3y-12=672$.
Comme $xy=672$, on obtient $672-4x+3y-12=672 \Rightarrow -4x+3y-12=0$.
Avec $xy=672$, on a $y=\dfrac{672}{x}$. D'où $-4x+3\cdot\dfrac{672}{x}-12=0 \Rightarrow -4x+\dfrac{2016}{x}-12=0$

$\Rightarrow -4x^2+2016-12x=0 \Rightarrow -4x^2-12x+2016=0 \Rightarrow x^2+3x-504=0$.

On a $a=1$, $b=3$, $c=-504$, $b^2-4ac=3^2-4\cdot1\cdot(-504)=9+2016=2025>0$

$\Rightarrow x_1=\dfrac{-3+\sqrt{2025}}{2}=\dfrac{-3+45}{2}=21 \Rightarrow y_1=\dfrac{672}{x_1}=\dfrac{672}{21}=32$

et $x_2=\dfrac{-3-\sqrt{2025}}{2}=\dfrac{-3-45}{2}=-24$ exclu car $x\geqslant0$.

Ainsi, il a acheté 21 reproductions à 32.–/pièce.

Exercice 5

Notons x et y les 2 nombres cherchés.

On doit avoir $x^2+y^2=180$ et $x^2-y^2=108$.

Par addition de ces 2 équations, on obtient $2x^2=288 \Rightarrow x^2=144 \Rightarrow x=\pm 12$.

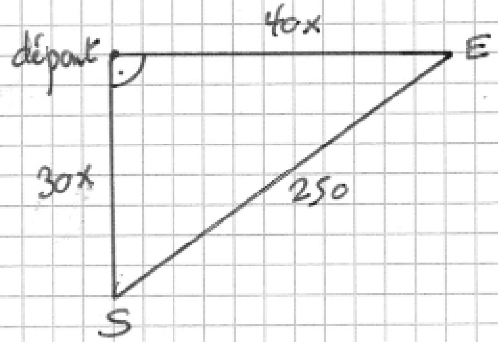
Avec $x^2=144$, on a $y^2=180-x^2=180-144=36 \Rightarrow y=\pm 6$.

On a donc 4 paires de solutions: $\begin{cases} x=12 \\ y=6 \end{cases}$ $\begin{cases} x=12 \\ y=-6 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-12 \\ y=6 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-12 \\ y=-6 \end{cases}$

Exercice 6

Notons x le nombre de jours cherché.

On a la situation suivante:



Par le théorème de Pythagore, on a $(30x)^2+(40x)^2=250^2$

$\Rightarrow 900x^2+1600x^2=62'500 \Rightarrow 2500x^2=62'500 \Rightarrow x^2=25 \Rightarrow x=5 \quad (x\geqslant 0)$.

Cela sera donc après <u>5 jours</u>.

Exercice 7

Notons x le nb d'héritiers au départ et y la part de chacun.

On peut faire le tableau suivant:

nombre	part	total
x	y	$xy=405'000$
$x-3$	$y+22'500$	$(x-3)(y+22'500)=405'000$

On a $(x-3)(y+22'500)=405'000 \Rightarrow xy+22'500x-3y-67'500=405'000$.

Avec $xy=405'000$, on obtient $405'000+22'500x-3y-67'500=405'000$

$\Rightarrow 22'500x-3y-67'500=0$.

De $xy=405'000$, on tire $y=\dfrac{405'000}{x}$.

On obtient alors l'équation $22'500x-3\cdot\dfrac{405'000}{x}-67'500=0$

$\Rightarrow 22'500x^2-1'215'000-67'500x=0 \Rightarrow 22'500x^2-67'500x-1'215'000=0$

$\Rightarrow x^2-3x-54=0$.

On a $a=1$, $b=-3$, $c=-54$, $b^2-4ac=(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-54)=9+216=225>0$

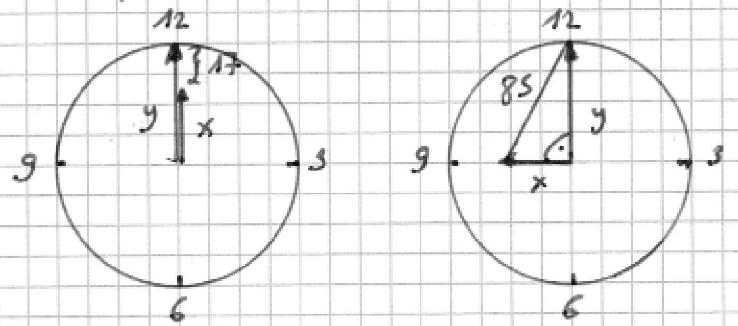
$\Rightarrow x_1 = \frac{3+\sqrt{225}}{2} = \frac{3+15}{2} = 9$ et $x_2 = \frac{3-\sqrt{225}}{2} = \frac{3-15}{2} = -6$ exclu car $x \geq 0$.

Il y avait donc 9 héritiers au départ.

Exercice 8

Notons x la longueur de la petite aiguille et y la longueur de la grande.

On a les situations suivantes:



On a: $y = x+17$ $\quad$ $x^2+y^2 = 85^2 = 7225$.

Par substitution, on obtient $x^2+(x+17)^2 = 7225$	identité remarquable ou distributivité
$x^2+x^2+34x+289 = 7225$	R et -7225
$2x^2+34x-6936 = 0$	$:2$
$x^2+17x-3468 = 0$	

On a $a=1$, $b=17$, $c=-3468$, $b^2-4ac = 17^2-4\cdot1\cdot(-3468) = 289+13872 = 14161 > 0$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-17+\sqrt{14161}}{2} = \frac{-17+119}{2} = 51 \Rightarrow y_1 = x_1+17 = 51+17 = 68$

et $x_2 = \frac{-17-\sqrt{14161}}{2} = \frac{-17-119}{2} = -68 < 0$ ce qui est exclu.

Ainsi, la petite aiguille mesure 51 cm et la grande 68 cm.

Exercice 9

Notons x le nombre de livres au départ et y le prix d'un livre.

On peut faire le tableau suivant:

nombre	prix	total
x	y	$xy = 60$
$x+3$	$y-1$	$(x+3)(y-1) = 60$

On a $(x+3)(y-1) = 60 \Rightarrow xy - x + 3y - 3 = 60$.

Avec $xy = 60$, on obtient $60 - x + 3y - 3 = 60 \Rightarrow -x+3y-3 = 0$.

De $xy = 60$, on tire $y = \frac{60}{x}$. L'équation devient $-x + 3\cdot\frac{60}{x} - 3 = 0$

$\Rightarrow -x^2+180-3x = 0 \Rightarrow x^2+3x-180 = 0$.

On a $a=1$, $b=3$, $c=-180$, $b^2-4ac = 3^2-4\cdot1\cdot(-180) = 9+720 = 729$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-3+\sqrt{729}}{2} = \frac{-3+27}{2} = 12$ et $x_2 = \frac{-3-\sqrt{729}}{2} = \frac{-3-27}{2} = -15 < 0$ exclu

On a donc acheté 12 livres.

Exercice 10

Notons x le nombre de filles.

Le nombre de garçons est alors $7-x$.

Les filles reçoivent au total $144:2=72$ noix. Chaque fille reçoit ainsi $\frac{72}{x}$ noix.

Les garçons reçoivent au total $144:2=72$ noix. Chaque garçon reçoit ainsi $\frac{72}{7-x}$ noix.

Chaque fille reçoit 6 noix de plus que chaque garçon:

$$
\begin{array}{l|l}
\frac{72}{x} = \frac{72}{7-x} + 6 & D.C. \\
\frac{72(7-x)}{x(7-x)} = \frac{72x}{x(7-x)} + \frac{6x(7-x)}{x(7-x)} & \cdot x(7-x) \\
72(7-x) = 72x + 6x(7-x) & D \\
504-72x = 72x + 42x - 6x^2 & R \\
504-72x = 114x - 6x^2 & +6x^2-114x \\
6x^2 - 186x + 504 = 0 & :6 \\
x^2 - 31x + 84 = 0 &
\end{array}
$$

On a $a=1$, $b=-31$, $c=84$, $b^2-4ac=(-31)^2-4\cdot1\cdot84 = 961-336 = 625 > 0$

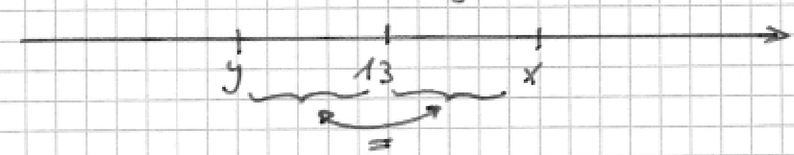
$\Rightarrow x_1 = \frac{31+\sqrt{625}}{2} = \frac{31+25}{2} = \frac{56}{2} = 28$ exclu car $28 > 7$ et $x_2 = \frac{31-\sqrt{625}}{2} = \frac{31-25}{2} = 3$.

Elle a donc 3 filles.

Exercice 11

Notons x et y les 2 nombres. On a $x\cdot y = 153$.

De plus:



$$\Rightarrow x-13 = 13-y \Rightarrow x = 26-y.$$

Par substitution, on obtient $(26-y)y = 153 \Rightarrow 26y - y^2 = 153 \Rightarrow y^2 - 26y + 153 = 0$.

On a $a=1$, $b=-26$, $c=153$, $b^2-4ac = (-26)^2-4\cdot1\cdot153 = 676-612 = 64 > 0$

$\Rightarrow y_1 = \frac{26+\sqrt{64}}{2} = \frac{26+8}{2} = 17 \Rightarrow x_1 = 26-y_1 = 26-17 = 9$

et $y_2 = \frac{26-\sqrt{64}}{2} = \frac{26-8}{2} = 9 \Rightarrow x_2 = 26-y_2 = 26-9 = 17$.

Les deux nombres sont donc 9 et 17.

Exercice 12

Notons x le plus petit des 3 nombres entiers consécutifs. Les 2 autres sont $x+1$ et $x+2$.
Le nombre cherché est donc $x(x+1)(x+2)$.
Si on divise ce nombre par chacun des 3 facteurs et qu'on additionne les quotients, on obtient 767 :

$$\frac{x(x+1)(x+2)}{x} + \frac{x(x+1)(x+2)}{x+1} + \frac{x(x+1)(x+2)}{x+2} = 767 \qquad \text{Simplification}$$

$$(x+1)(x+2) + x(x+2) + x(x+1) = 767 \qquad D$$

$$x^2+2x+x+2+x^2+2x+x^2+x = 767 \qquad R$$

$$3x^2+6x+2 = 767 \qquad -767$$

$$3x^2+6x-765 = 0 \qquad :3$$

$$x^2+2x-255 = 0$$

On a $a=1$, $b=2$, $c=-255$, $b^2-4ac = 2^2-4.1.(-255) = 4+1020 = 1024 > 0$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-2+\sqrt{1024}}{2} = \frac{-2+32}{2} = 15$ et $x_2 = \frac{-2-\sqrt{1024}}{2} = \frac{-2-32}{2} = -17$.

Avec $x_1 = 15$, le nombre cherché est $15.16.17 = \underline{4080}$.
Avec $x_2 = -17$, le nombre cherché est $(-17).(-16).(-15) = \underline{-4080}$.

Exercice 13

Notons x le nombre de convives et y le prix de chacun.
On a le tableau suivant :

nombre	prix	total
x	y	$xy = 476$
$x-3$	$y+6$	$(x-3)(y+6) = 476$

On a $(x-3)(y+6) = 476 \Rightarrow xy+6x-3y-18 = 476$.
Avec $xy = 476$, on obtient $476+6x-3y-18 = 476 \Rightarrow 6x-3y-18 = 0$.
Comme $xy = 476 \Rightarrow y = \frac{476}{x}$, l'équation devient $6x-3.\frac{476}{x}-18 = 0$

$\Rightarrow 6x^2-1428-18x = 0 \Rightarrow 6x^2-18x-1428 = 0 \Rightarrow x^2-3x-238 = 0$.

On a $a=1$, $b=-3$, $c=-238$, $b^2-4ac = (-3)^2-4.1.(-238) = 9+952 = 961 > 0$

$\Rightarrow x_1 = \frac{3+\sqrt{961}}{2} = \frac{3+31}{2} = 17$ et $x_2 = \frac{3-\sqrt{961}}{2} = \frac{3-31}{2} = -14 < 0$ exclu.

Il y avait donc $\underline{17 \text{ convives}}$.